수능완성

수학영역 | **수학 Ⅰ · 수학 Ⅱ · 미적분**

이 책의 **구성과 특징**

STRUCTURE

이 책의 구성

❶ 유형편

출제유형에 제시된 유형의 대표기출문제와 유제들로 유형별 학습을 할 수 있도록 하였다.

❷ 실전편

실전 모의고사 5회 구성으로 수능에 대비할 수 있도록 하였다.

2022학년도 대학수학능력시험 수학영역

❶ 출제원칙

수학 교과의 특성을 고려하여 개념과 원리를 바탕으로 한 사고력 중심의 문항을 출제한다.

❷ 출제방향

- 단순 암기에 의해 해결할 수 있는 문항이나 지나치게 복잡한 계산 위주의 문항 출제를 지양하고 계산, 이해, 추론, 문제해결 능력을 평가할 수 있는 문항을 출제한다.
- 2015 개정 수학과 교육과정에 따라 이수한 수학 과목의 개념과 원리 등은 출제범위에 속하는 내용과 통합하여 출제할 수 있다.
- 수학영역은 교육과정에 제시된 수학 교과의 수학 Ⅰ, 수학 Ⅱ, 확률과 통계, 미적분, 기하 과목을 바탕으로 출제한다.

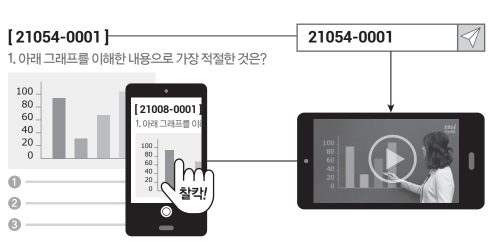
❸ 출제범위

- ‘공통과목 + 선택과목’ 구조에 따라 공통과목(수학 Ⅰ, 수학 Ⅱ)은 공통 응시하고 선택과목(확률과 통계, 미적분, 기하) 중 1개 과목을 선택한다.

구분 영역	문항수	문항유형	배점		시험 시간	출제범위(선택과목)
			문항	전체		
수학	30	5지 선다형, 단답형	2점 3점 4점	100점	100분	• 공통과목: 수학 Ⅰ, 수학 Ⅱ • 선택과목(택1): 확률과 통계, 미적분, 기하 • 공통 75%, 선택 25% 내외 • 단답형 30% 포함

학생 EBS 교재 문제 검색

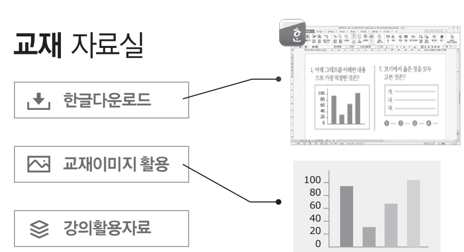
EBS 단추에서 문항코드나 사진으로
문제를 검색하면 푸리봇이 해설 영상을 제공합니다.



※ EBSi 사이트 및 모바일에서 이용이 가능합니다.
※ 사진 검색은 EBSi 고교강의 앱에서만 이용하실 수 있습니다.

교사 교사지원센터 교재 자료실

교재 문항 한글 문서(HWP)와
교재의 이미지 파일을 무료로 제공합니다.



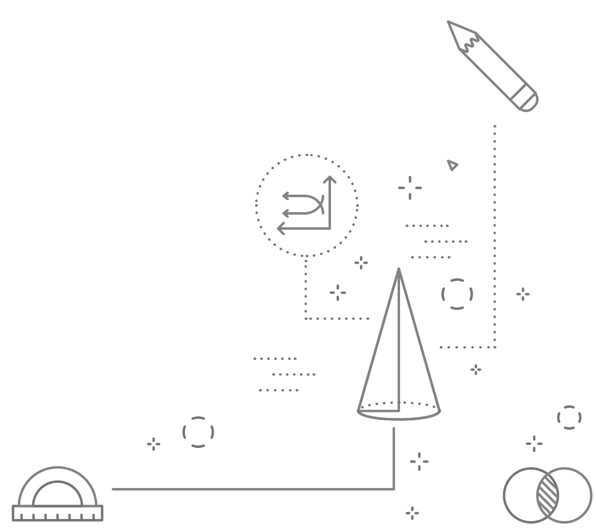
※ 교사지원센터(http://teacher.ebsi.co.kr) 접속 후 ‘교사인증’을 통해 이용 가능

이 책의 **차례**

CONTENTS

유형편

과목	단원	단원명	페이지
수학 Ⅰ	01	지수함수와 로그함수	4
	02	삼각함수	18
	03	수열	30
수학 Ⅱ	04	함수의 극한과 연속	44
	05	다항함수의 미분법	58
	06	다항함수의 적분법	74
미적분	07	수열의 극한	86
	08	미분법	98
	09	적분법	113



01 지수함수와 로그함수

1 거듭제곱근

(1) a의 n제곱근

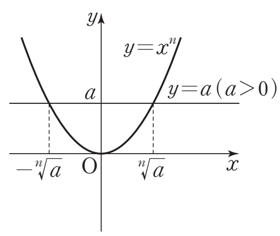
실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 x를 a의 n제곱근이라고 한다. 이때 a의 제곱근, a의 세제곱근, a의 네제곱근, $\cdots$을 통틀어 a의 거듭제곱근이라고 한다.

(2) 실수인 거듭제곱근

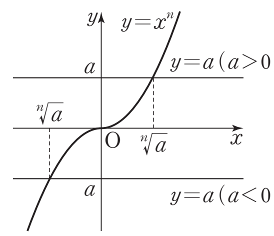
실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

참고 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것을 x라 할 때, x의 개수는 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 서로 다른 실근의 개수이므로 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같다.



[n이 짝수인 경우]



[n이 홀수인 경우]

2 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

(1) $(\sqrt[n]{a})^n=a$

(2) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

(3) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(4) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

(5) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

(6) $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

참고 a가 실수일 때, $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a & (n\text{이 홀수}) \\ |a| & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$

3 지수의 확장(1) – 정수

(1) 0 또는 음의 정수인 지수

$a\neq0$이고 n이 양의 정수일 때

① $a^0=1$

② $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

(2) 지수가 정수일 때의 지수법칙

$a\neq0$, $b\neq0$이고 m, n이 정수일 때

① $a^m a^n=a^{m+n}$

② $a^m \div a^n=a^{m-n}$

③ $(a^m)^n=a^{mn}$

④ $(ab)^n=a^n b^n$

4 지수의 확장(2) – 유리수

(1) 유리수인 지수

$a>0$이고 m이 정수, n이 2 이상의 정수일 때

① $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ ② $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(2) 지수가 유리수일 때의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때

① $a^r a^s=a^{r+s}$ ② $a^r \div a^s=a^{r-s}$ ③ $(a^r)^s=a^{rs}$ ④ $(ab)^r=a^r b^r$

5 지수의 확장(3) – 실수

(1) 무리수인 지수

$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$이므로 무리수 $\sqrt{2}$에 한없이 가까워지는 유리수 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, $\cdots$을 생각할 수 있다. 이 유리수를 지수로 갖는 수들 2^1, $2^{1.4}$, $2^{1.41}$, $2^{1.414}$, $2^{1.4142}$, $2^{1.41421}$, $\cdots$은 어떤 일정한 수에 가까워진다는 것이 알려져 있다. 이때 그 일정한 수를 $2^{\sqrt{2}}$으로 정의한다. 이와 같은 방법으로 $a>0$이고 x가 무리수일 때, a^x을 정의할 수 있다.

(2) 지수가 실수일 때의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^x a^y=a^{x+y}$ ② $a^x \div a^y=a^{x-y}$ ③ $(a^x)^y=a^{xy}$ ④ $(ab)^x=a^x b^x$

6 로그의 뜻

(1) 로그의 정의

$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때, $a^x=N$을 만족시키는 실수 x는 오직 하나만 존재한다.

이 x를 $\log_a N$으로 나타내고, 이것을 a를 밑으로 하는 N의 로그라고 하며, N을 $\log_a N$의 진수라고 한다. 즉,

$$a>0,\ a\neq1,\ N>0\text{일 때, } a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$$

(2) 로그의 밑과 진수의 조건

$\log_a N$이 정의되려면 밑 a는 $a>0$, $a\neq1$이고 진수 N은 $N>0$이어야 한다.

7 로그의 성질

$a>0$, $a\neq1$이고 $M>0$, $N>0$일 때

① $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

③ $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

④ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

8 로그의 밑의 변환

(1) 로그의 밑의 변환

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq1$일 때 $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

(2) 로그의 밑의 변환의 활용

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때

① $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

② $\log_a b\times\log_b c=\log_a c$ (단, $b\neq1$, $c>0$)

③ $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ (단, m, n은 실수이고, $m\neq0$이다.)

④ $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ (단, $b\neq1$, $c>0$)

9 상용로그

(1) 상용로그의 뜻

양수 N에 대하여 $\log_{10} N$과 같이 10을 밑으로 하는 로그를 상용로그라 하고, 보통 밑 10을 생략하여 $\log N$과 같이 나타낸다.

(2) 상용로그표

상용로그표는 1.00부터 9.99까지 0.01의 간격의 수에 대한 상용로그의 값을 소수 다섯째 자리에서 반올림하여 소수 넷째 자리까지 나타낸 것이다.

(3) 상용로그표를 보는 법

상용로그표에서 $\log 2.34$의 값을 찾으려면 2.3의 행과 표의 맨 윗줄에 있는 4의 열이 만나는 수 .3692를 찾으면 된다.

즉, $\log 2.34=0.3692$

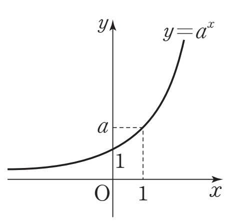
수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0										
⋮										
2.3					.3692					
⋮										
9.9										

10 지수함수의 뜻과 그래프

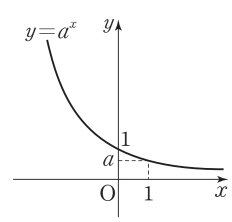
(1) a가 1이 아닌 양수일 때, 임의의 실수 x에 대하여 a^x의 값이 하나씩 정해지므로 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$은 x에 대한 함수이다. 이 함수를 a를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.

(2) 지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

① $a>1$일 때



② $0<a<1$일 때



11 지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$의 성질

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나고, 점근선은 x축 (직선 $y=0$)이다.

참고 (1) 함수 $y=a^x$의 그래프와 함수 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 y축에 대하여 서로 대칭이다.

(2) 함수 $y=a^{x-m}+n$의 그래프는 함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

12 지수함수의 활용

(1) $a>0,\ a\neq1$일 때, $a^{f(x)}=a^{g(x)} \iff f(x)=g(x)$

(2) $a>1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)} \iff f(x)<g(x)$

$0<a<1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)} \iff f(x)>g(x)$

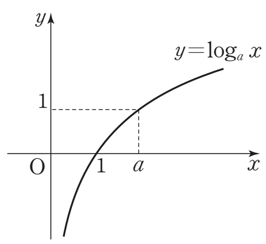
13 로그함수의 뜻과 그래프

(1) a가 1이 아닌 양수일 때, 임의의 양의 실수 x에 대하여 $\log_a x$의 값이 하나씩 정해지므로 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 x에 대한 함수이다. 이 함수를 a를 밑으로 하는 로그함수라고 한다.

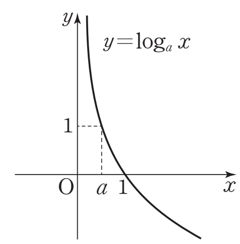
(2) 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. 로그의 정의에 의하여 $y=a^x \Longleftrightarrow x=\log_a y$이고, $x=\log_a y$에서 x와 y를 바꾸면 $y=a^x$의 역함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$을 얻을 수 있다.

(3) 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

① $a>1$일 때

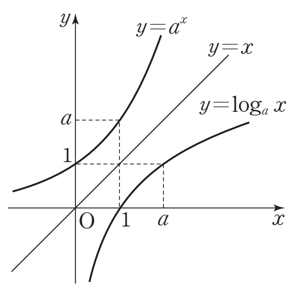


② $0<a<1$일 때

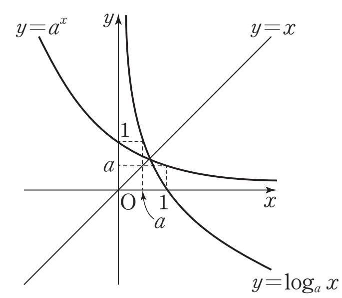


참고 로그함수 $y=\log_a x$는 지수함수 $y=a^x$의 역함수이고, 그 그래프는 함수 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

① $a>1$일 때



② $0<a<1$일 때



14 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 성질

(1) 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지나고, 점근선은 y축(직선 $x=0$)이다.

참고 (1) 함수 $y=\log_a x$의 그래프와 함수 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다.

(2) 함수 $y=\log_a (x-m)+n$의 그래프는 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

15 로그함수의 활용

(1) $a>0,\ a\neq1$일 때, $\log_a f(x)=\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)=g(x),\ f(x)>0,\ g(x)>0$

(2) $a>1$일 때, $\log_a f(x)<\log_a g(x) \Longleftrightarrow 0<f(x)<g(x)$

$0<a<1$일 때, $\log_a f(x)<\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)>g(x)>0$

유형 1 거듭제곱근의 뜻과 성질

출제유형 | 거듭제곱근의 뜻과 성질을 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 거듭제곱근의 뜻과 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 a가 되는 실수, 즉 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 실수 x는 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

(2) $a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

① $(\sqrt[n]{a})^n=a$

② $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

③ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

④ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

⑤ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

⑥ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

자연수 n이 $2\le n\le 11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? [3점]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

출제 의도

거듭제곱근의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$-n^2+9n-18=-(n-3)(n-6)$

이므로 자연수 n이 $2\le n\le 11$일 때 $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하기 위해서는

(i) $-n^2+9n-18<0$일 때

즉, $2\le n<3$ 또는 $6<n\le 11$이고 n이 홀수이어야 하므로 n은 7, 9, 11이다.

(ii) $-n^2+9n-18>0$일 때

즉, $3<n<6$이고 n이 짝수이어야 하므로 n은 4이다.

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$4+7+9+11=31$

답 ①

01 ▸ 21054-0001

$\dfrac{(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^2+\sqrt[6]{4}+\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}}{\sqrt[3]{2}}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

02 ▸ 21054-0002

실수 a의 세제곱근 중 실수인 것과 8의 여섯제곱근 중 음의 실수인 것이 서로 같고, 양의 실수 b의 제곱근 중 양의 실수인 것과 $\sqrt[4]{8}$의 세제곱근 중 실수인 것이 서로 같다. $a+b$의 값은?

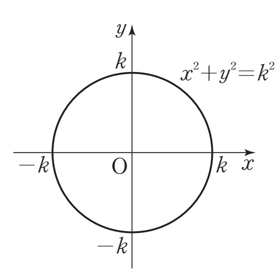
① $-2\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ 0 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

03 ▸ 21054-0003

중심이 원점이고 반지름의 길이가 k $(k>2)$인 원 위의 점 중 y좌표가 1보다 큰 자연수인 점들의 집합을 A라 하고, 집합 A에 대하여 집합 B는 다음과 같다.

$B=\{x\,|\,x$는 a의 n제곱근 중 양의 실수, $(a, n)\in A\}$

집합 B의 원소의 개수가 7일 때, k^2의 최댓값을 구하시오.



유형 2 지수의 확장과 지수법칙

출제유형 | 거듭제곱근을 지수가 유리수인 꼴로 나타내는 문제, 지수법칙을 이용하여 식의 값을 계산하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 지수법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 0 또는 음의 정수인 지수

$a \neq 0$이고 n은 양의 정수일 때

① $a^0=1$ ② $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

(2) 유리수인 지수

$a>0$이고 m이 정수, n이 2 이상의 양의 정수일 때

① $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ ② $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(3) 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^x a^y=a^{x+y}$ ② $a^x \div a^y=a^{x-y}$

③ $(a^x)^y=a^{xy}$ ④ $(ab)^x=a^x b^x$

필수 유형 | 2020학년도 대수능 |

16×2^{-3}의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

출제 의도

지수법칙을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$$16\times 2^{-3}=2^4\times 2^{-3}=2^{4+(-3)}=2^1=2$$

답 ②

04 ▸ 21054-0004

$27^{-1}\div\left(\frac{1}{9}\times\sqrt[3]{81}\right)^{\frac{9}{2}}$의 값은?

① $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ ② $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ ③ 1 ④ $\sqrt[3]{3}$ ⑤ $\sqrt[3]{9}$

05 ▸ 21054-0005

두 실수 a, b에 대하여

$$2^{a+\frac{b}{2}}=\frac{1}{3},\ 2^{a-\frac{b}{2}}=27$$

일 때, $\sqrt{2^{3a}}\times\sqrt[3]{2^b}$의 값은?

① $3^{\frac{1}{6}}$ ② $3^{\frac{1}{5}}$ ③ $3^{\frac{1}{4}}$ ④ $3^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $3^{\frac{1}{2}}$

06 ▸ 21054-0006

실수 x와 0이 아닌 정수 n에 대하여

$$9^x-3^{x+\frac{10}{n}}=-1$$

을 만족시키도록 x, n의 값을 정할 때, $9^x+9^{-x}-2$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오.

유형 3 로그의 뜻과 기본 성질

출제유형 | 로그의 뜻과 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 로그의 뜻과 로그의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) $a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때, $a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$

(2) $\log_a N$이 정의되려면 밑 a는 $a>0$, $a\neq1$이고 진수 N은 $N>0$이어야 한다.

(3) $a>0$, $a\neq1$이고 $M>0$, $N>0$일 때

① $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

③ $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

④ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

필수 유형 | 2020학년도 대수능 |

자연수 n의 양의 약수의 개수를 $f(n)$이라 하고, 36의 모든 양의 약수를 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_9라 하자.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{9}\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\}$의 값은? [4점]

① $\log 2+\log 3$　② $2\log 2+\log 3$
③ $\log 2+2\log 3$　④ $2\log 2+2\log 3$
⑤ $3\log 2+2\log 3$

출제 의도

로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

36의 양의 약수는

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

이고,

$f(1)$, $f(4)$, $f(9)$, $f(36)$은 홀수,

$f(2)$, $f(3)$, $f(6)$, $f(12)$, $f(18)$은 짝수이다.

따라서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{9}\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\}$

$=-\log 1+\log 2+\log 3-\log 4+\log 6-\log 9+\log 12+\log 18-\log 36$

$=\log\dfrac{2\times3\times6\times12\times18}{1\times4\times9\times36}$

$=\log 6$

$=\log 2+\log 3$

답 ①

07

▸ 21054-0007

모든 실수 x에 대하여 $\log_{|a+3|}(x^2+ax-a+3)$의 값이 정의되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은?

① -9　② -7　③ -5
④ -3　⑤ -1

08

▸ 21054-0008

$\log_2 30-\log_2\dfrac{3}{2}-\log_2\dfrac{5}{4}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

09

▸ 21054-0009

두 양수 a, b $(b\neq1)$에 대하여 $a^2b^{-3}=1$일 때, $\log_b(a^m\times\sqrt{b^n})=10$을 만족시키는 두 자연수 m, n의 합 $m+n$의 최솟값은?

① 8　② 9　③ 10
④ 11　⑤ 12

유형 4 로그의 여러 가지 성질

출제유형 | 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 로그의 밑의 변환

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq1$일 때, $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

(2) 로그의 밑의 변환의 활용

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때

① $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

② $\log_a b\times\log_b c=\log_a c$ (단, $b\neq1$, $c>0$)

③ $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ (단, m, n은 실수이고 $m\neq0$이다.)

④ $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ (단, $b\neq1$, $c>0$)

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

두 양수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(2, \log_4 a)$, $(3, \log_2 b)$를 지나는 직선이 원점을 지날 때, $\log_a b$의 값은? (단, $a\neq1$) [3점]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\dfrac{5}{4}$

출제 의도

로그의 밑의 변환을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

두 점 $(2, \log_4 a)$, $(3, \log_2 b)$를 지나는 직선이 원점을 지나므로 원점과 각각 두 점을 잇는 직선의 기울기는 서로 같아야 한다.

즉, $\dfrac{\log_4 a}{2}=\dfrac{\log_2 b}{3}$에서 $\dfrac{1}{4}\log_2 a=\dfrac{1}{3}\log_2 b$이므로

$\log_2 a=\dfrac{4}{3}\log_2 b$

따라서 $\log_a b=\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}=\dfrac{\log_2 b}{\dfrac{4}{3}\log_2 b}=\dfrac{3}{4}$

답 ③

10

▸ 21054-0010

$\left(4^{\log_2 \frac{1}{3}}\right)^{\log_3 \frac{1}{6}}$의 값은?

① 4 ② 9 ③ 16
④ 25 ⑤ 36

11

▸ 21054-0011

등식 $\dfrac{1}{\log_2 a}+\dfrac{1}{\log_3 a}+\dfrac{\log_{25} a}{\log_5 a}=1$을 만족시키는 양수 a의 값을 구하시오. (단, $a\neq1$)

12

▸ 21054-0012

세 양수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sqrt{a}=\sqrt[3]{b}=\sqrt[5]{c}$
(나) $\log_2 \dfrac{bc}{a}=3$

1보다 큰 두 실수 m, n이 $\log_2 a\times\log_m b\times\log_n c=1$을 만족시킬 때, $\log_2 mn$의 최솟값은?

① 3 ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{15}$
④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{21}$

수학 I

유형 5 지수함수와 그 그래프

출제유형 | 지수함수의 성질과 그 그래프의 특징을 이해하고 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 지수함수의 밑의 범위에 따른 지수함수의 증가와 감소, 지수함수의 그래프의 점근선, 평행이동과 대칭이동을 이해하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

함수 $f(x)=-2^{4-3x}+k$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않도록 하는 자연수 k의 최댓값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

출제 의도

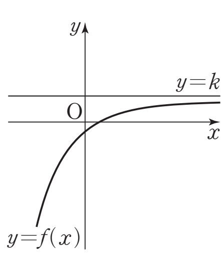
지수함수의 그래프의 대칭이동과 평행이동을 이해하고, 지수함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 자연수 k의 최댓값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$f(x)=-2^{4-3x}+k=-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-\frac{4}{3}}+k$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^{x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제2사분면을 지나지 않아야 하므로 $f(0)\leq 0$이어야 한다.



$f(0)=-2^{4}+k\leq 0$에서 $k\leq 16$

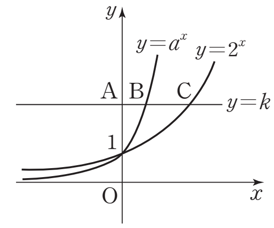
따라서 조건을 만족시키는 자연수 k의 최댓값은 16이다.

답 ④

13

▸ 21054-0013

직선 $y=k$ $(k>1)$이 y축 및 두 곡선 $y=a^{x}$ $(a>2)$, $y=2^{x}$과 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자. $\overline{\text{AB}}:\overline{\text{BC}}=1:2$일 때, 실수 a의 값을 구하시오.



14

▸ 21054-0014

곡선 $y=4^{-x+1}+a$가 곡선 $y=3^{x}+1$과 제2사분면에서 만나고 곡선 $y=2^{x}-4$와 제4사분면에서 만나도록 하는 모든 정수 a의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

15

▸ 21054-0015

함수 $f(x)=2^{x+3}+k$의 그래프가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AO의 길이가 자연수가 되도록 상수 k의 값을 정할 때 삼각형 AOB의 넓이는 $k=s$에서 최솟값 S를 갖는다. $S-s$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

유형 6 지수함수의 활용

출제유형 | 지수에 미지수가 포함된 방정식, 부등식의 해를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 지수에 미지수가 포함된 방정식, 부등식의 해를 구할 때는 다음과 같은 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) $a>0$, $a\neq1$일 때

$a^{f(x)}=a^{g(x)} \iff f(x)=g(x)$

(2) $a>1$일 때

$a^{f(x)}<a^{g(x)} \iff f(x)<g(x)$

$0<a<1$일 때

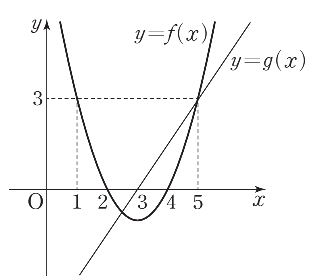
$a^{f(x)}<a^{g(x)} \iff f(x)>g(x)$

필수 유형 | 2019학년도 대수능 |

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)}\geq\left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은? [4점]



① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

출제 의도

지수함수의 성질을 이용하여 지수에 미지수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)}\geq\left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{3g(x)}$

$f(x)g(x)\leq3g(x)$, $g(x)\{f(x)-3\}\leq0$

(i) $g(x)<0$인 경우

$f(x)-3\geq0$에서 $f(x)\geq3$

그림에서 $g(x)<0$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $x<3$이고, $f(x)\geq3$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $x\leq1$ 또는 $x\geq5$이므로 $x\leq1$

(ii) $g(x)=0$인 경우

$g(x)\{f(x)-3\}=0\leq0$이므로 $x=3$

(iii) $g(x)>0$인 경우

$f(x)-3\leq0$에서 $f(x)\leq3$

그림에서 $g(x)>0$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $x>3$이고, $f(x)\leq3$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $1\leq x\leq5$이므로 $3<x\leq5$

(i), (ii), (iii)에서 부등식을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$x\leq1$ 또는 $3\leq x\leq5$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$1+3+4+5=13$

답 ④

16

▸ 21054-0016

방정식

$$9^{x+1}=\left(\frac{1}{9}\right)^{-x}+24$$

의 해를 α라 할 때, $6\alpha+5$의 값을 구하시오.

17

▸ 21054-0017

부등식

$$2^x\times4^{x^2-\frac{5}{2}x}\leq2\times\left(\frac{1}{8}\right)^{x-3}$$

을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

18

▸ 21054-0018

10보다 작은 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=|3^x-a|+b$$

라 하자. x에 대한 방정식 $4^{f(x)}-5\times2^{f(x)+2}+64=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오.

유형 7 로그함수와 그 그래프

출제유형 | 로그함수의 성질과 그 그래프의 특징을 이해하고 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 로그함수의 그래프의 점근선, 평행이동과 대칭이동, 밑의 범위에 따른 함수의 증가와 감소를 이해하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2018학년도 대수능 9월 모의평가 |

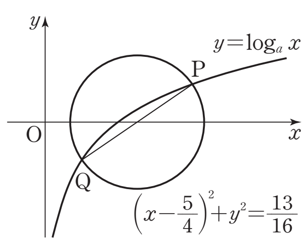
$a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와

원 C : $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$의 두 교점을 P, Q라 하자.

선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a의 값은? [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4

④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5



출제 의도

로그함수의 그래프 위의 점의 좌표에 대하여 로그의 성질과 원의 성질을 이용하여 a의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$P(p, \log_a p)$, $Q(q, \log_a q)$ $(p>q)$로 놓으면

선분 PQ의 중점이 원 C의 중심 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$이므로

$\frac{p+q}{2}=\frac{5}{4}$에서 $p+q=\frac{5}{2}$

$\frac{\log_a p+\log_a q}{2}=0$에서 $\log_a pq=0$, $pq=a^0=1$

p, q를 두 실근으로 갖는 t에 대한 이차방정식

$t^2-\frac{5}{2}t+1=0$에서 $2t^2-5t+2=0$, $(2t-1)(t-2)=0$

$t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$, 즉 $p=2$, $q=\frac{1}{2}$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $P(2, \log_a 2)$, $Q\left(\frac{1}{2}, -\log_a 2\right)$이다.

선분 PQ가 원 C의 지름이므로

$\overline{PQ}^2=\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\{\log_a 2-(-\log_a 2)\}^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$

$(\log_a 4)^2=1$

이때 $a>1$이므로 $\log_a 4=1$에서 $a=4$

답 ③

19

▸ 21054-0019

함수 $y=\log_2(2x+a)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프는 원점을 지나고 점근선의 방정식은 $x=-2$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

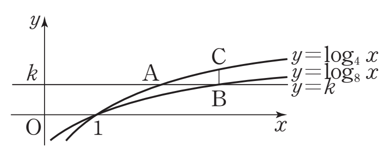
① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

20

▸ 21054-0020

직선 $y=k$ $(k>0)$이 두 곡선 $y=\log_4 x$, $y=\log_8 x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고 점 B를 지나고 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=\log_4 x$와 만나는 점을 C라 하자. 세 점 O, A, C가 한 직선 위에 있도록 하는 실수 k의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $1-\frac{1}{2}\log_2 3$ ② $-2+\frac{3}{2}\log_2 3$

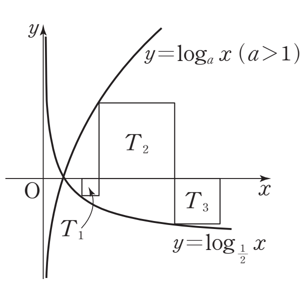
③ $2-\log_2 3$ ④ $-1+\log_2 3$

⑤ $\frac{1}{2}\log_2 3$

21

▸ 21054-0021

그림과 같이 세 개의 정사각형 T_1, T_2, T_3이 한 변은 x축 위에 있고 T_2는 T_1, T_3과 각각 한 꼭짓점만을 공유하며 T_1, T_3의 한 꼭짓점은 각각 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 위에 있고, T_2의 한 꼭짓점은 곡선 $y=\log_a x$ $(a>1)$ 위에 있다. T_1, T_3의 넓이가 각각 1, 9일 때 a^{10}의 값을 구하시오. (단, T_1, T_3은 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$와 각각 한 점에서만 만나고, T_2는 곡선 $y=\log_a x$와 한 점에서만 만난다.)



유형 8 로그함수의 활용

출제유형 | 진수에 미지수가 포함된 방정식, 부등식의 해를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 진수에 미지수가 포함된 방정식, 부등식의 해를 구할 때에는 다음과 같은 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) $a>0$, $a\neq1$일 때

$\log_a f(x)=\log_a g(x) \iff f(x)=g(x),\ f(x)>0,\ g(x)>0$

(2) $a>1$일 때

$\log_a f(x)<\log_a g(x) \iff 0<f(x)<g(x)$

$0<a<1$일 때

$\log_a f(x)<\log_a g(x) \iff f(x)>g(x)>0$

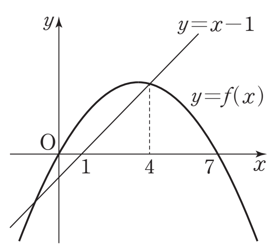
필수 유형 | 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x-1$이 그림과 같을 때, 부등식

$$\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\le0$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오.

(단, $f(0)=f(7)=0$, $f(4)=3$) [3점]



출제 의도

로그의 정의와 로그함수의 성질을 이용하여 로그의 진수에 미지수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\le0$에서

$\log_3 f(x)-\log_3(x-1)\le0$

$\log_3 f(x)\le\log_3(x-1)$이므로

$f(x)>0,\ x-1>0,\ f(x)\le x-1$

(i) $f(x)>0$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$0<x<7$

(ii) $x-1>0$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$x>1$

(iii) $f(x)\le x-1$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$x>1$일 때 $x\ge4$

(i), (ii), (iii)에서 부등식을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$4\le x<7$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x는 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$4+5+6=15$

답 15

22

▸ 21054-0022

방정식 $\log_3(4x+11)=1+2\log_3(x+1)$의 해를 α라 할 때, 12α의 값을 구하시오.

23

▸ 21054-0023

x에 대한 방정식

$$\log_2(x+3)+\log_2(5-x)=a$$

가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 a의 최댓값을 구하시오.

24

▸ 21054-0024

함수

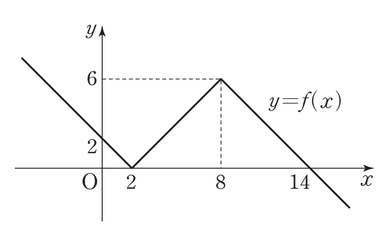
$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & (x\le2)\\ x-2 & (2<x\le8)\\ -x+14 & (x>8)\end{cases}$$

에 대하여 부등식

$$\log_{\frac{1}{2}}[\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}]\ge-5$$

를 만족시키는 모든 정수 x의 개수는?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12



유형 9 지수함수와 로그함수의 관계

출제유형 | 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 활용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프, 지수의 성질과 로그의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 |

함수 $y=2^{x}+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=\log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 m의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

출제 의도

지수함수, 로그함수의 그래프와 두 함수의 관계를 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

함수 $y=2^{x}+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$y=2^{x-m}+2$ ⋯⋯ ㉠

함수 $y=\log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$y=\log_2 8(x-2)$ ⋯⋯ ㉡

함수 ㉠의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수는 함수 ㉠의 역함수이므로

㉠에서 $2^{x-m}=y-2$

$x-m=\log_2(y-2)$

$x=\log_2(y-2)+m$

x, y를 서로 바꾸면

$y=\log_2(x-2)+m$

$\quad=\log_2(x-2)+\log_2 2^m$

$\quad=\log_2 2^m(x-2)$

이 함수가 ㉡과 같아야 하므로

$2^m=8$

따라서 $m=3$

답 ③

25

▸ 21054-0025

두 함수 $f(x)=\log_9(x-3)+2$, $g(x)=3^{ax-4}+b$가 있다. 3보다 큰 모든 실수 x에 대하여 $(g\circ f)(x)=x$가 성립할 때, $2a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

26

▸ 21054-0026

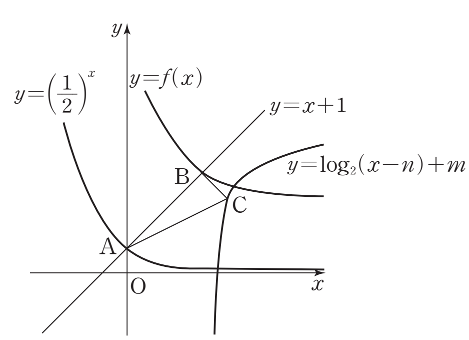
함수 $f(x)=\begin{cases} 4^x & (x<0) \\ \log_3(x+1)+1 & (x\geq 0)\end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\left|g\left(\frac{1}{16}\right)\right|=|g(a)|$를 만족시키는 자연수 a의 값을 구하시오.

27

▸ 21054-0027

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다. 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프가 y축과 만나는 점 A는 이 평행이동에 의하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+1$의 교점 B로 이동된다. 또 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선과 함수 $y=\log_2(x-n)+m$의 그래프의 교점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 6일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

(단, m, n은 양의 실수이다.)



유형 10 지수함수와 로그함수의 최댓값과 최솟값

출제유형 | 주어진 범위에서 지수함수와 로그함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 밑의 범위에 따른 지수함수와 로그함수의 증가와 감소를 이해하여 주어진 구간에서 지수함수 또는 로그함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2018학년도 대수능 |

$1\le x\le 3$에서 함수 $f(x)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$의 최댓값은? [3점]

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$
④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

출제 의도

주어진 범위에서 지수함수의 최댓값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

함수 $f(x)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$은 $1\le x\le 3$에서 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값을 갖는다.
따라서 $1\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(1)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^0=2$

답 ②

28

▸ 21054-0028

닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)=\log_2\left(x^2-x+\frac{3}{4}\right)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $(2^M)^m$의 값은?

① $\frac{4}{27}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{8}{27}$
④ $\frac{10}{27}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

29

▸ 21054-0029

정의역이 $\{x\mid -2\le x\le 1\}$인 함수 $f(x)=2\times\left(\frac{a}{a+1}\right)^x$의 최댓값이 72일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은? (단, a는 양수이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

30

▸ 21054-0030

정의역이 $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{4}\le x\le 16\right\}$인 함수 $f(x)=\log_{(a+1)}x$의 최댓값이 2가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

(단, $a>-1,\ a\ne 0$)

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

02 삼각함수

1 일반각과 호도법

(1) 일반각 : 시초선 OX와 동경 OP가 나타내는 각의 크기 중 하나를 α°라 할 때, $\theta=360^\circ\times n+\alpha^\circ$ (n은 정수)로 나타내어지는 각 θ를 동경 OP가 나타내는 일반각이라고 한다.

(2) 육십분법과 호도법

① 1라디안$=\dfrac{180^\circ}{\pi}$ ② $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$라디안

(3) 부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

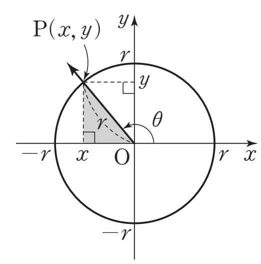
① $l=r\theta$ ② $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rl$

2 삼각함수

(1) 삼각함수의 정의

좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 r인 원 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하고, x축의 양의 방향을 시초선으로 하는 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라고 할 때, θ에 대한 삼각함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq0)$$



(2) 삼각함수 사이의 관계

① $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ② $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

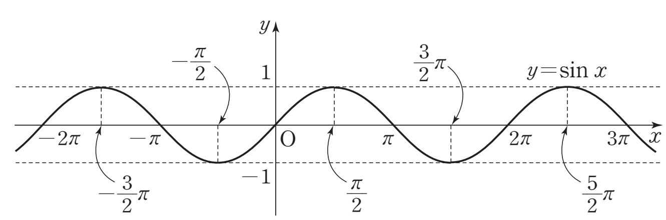
3 삼각함수의 그래프

(1) 사인함수 $y=\sin x$의 그래프와 성질

① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le1\}$이다.

② 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 $\sin(-x)=-\sin x$이다.

③ 주기가 2π인 주기함수이다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 $\sin(x+2n\pi)=\sin x$ (n은 정수)이다.

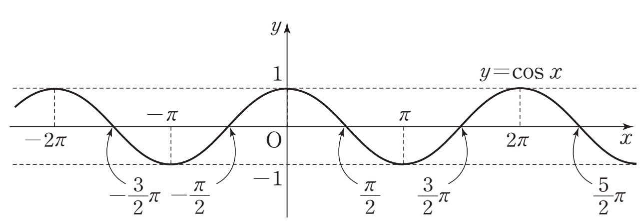


(2) 코사인함수 $y=\cos x$의 그래프와 성질

① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le1\}$이다.

② 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 $\cos(-x)=\cos x$이다.

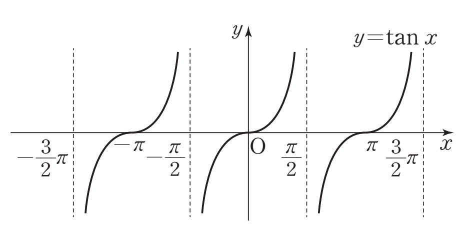
③ 주기가 2π인 주기함수이다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 $\cos(x+2n\pi)=\cos x$ (n은 정수)이다.



(3) 탄젠트함수 $y=\tan x$의 그래프와 성질

① 정의역은 $n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

② 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉, $x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 모든 실수 x에 대하여 $\tan(-x)=-\tan x$이다.



③ 주기가 π인 주기함수이다. 즉, $x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 모든 실수 x에 대하여 $\tan(n\pi+x)=\tan x$ (n은 정수)이다.

④ 그래프의 점근선은 직선 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

4 삼각함수의 성질

(1) $\pi\pm x$의 삼각함수

① $\sin(\pi+x)=-\sin x$, $\sin(\pi-x)=\sin x$ ② $\cos(\pi+x)=-\cos x$, $\cos(\pi-x)=-\cos x$

③ $\tan(\pi+x)=\tan x$, $\tan(\pi-x)=-\tan x$

(2) $\frac{\pi}{2}\pm x$의 삼각함수

① $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ ② $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

③ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$

5 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식

(1) **방정식에의 활용** : 방정식 $2\sin x=1$, $-2\sin x=1$과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 방정식은 삼각함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

① 주어진 방정식을 $\sin x=k$ (k는 실수)의 꼴로 변형한다.

② 주어진 범위에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=k$를 그린다.

③ 두 그래프의 교점의 x좌표를 구한다.

(삼각함수 $\cos x$, $\tan x$에 대한 방정식도 $\sin x$에 대한 방정식과 같은 방법으로 해결한다.)

(2) **부등식에의 활용** : 부등식 $2\sin x>1$, $2\sin x<-1$과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 부등식은 삼각함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

① 주어진 부등식을 $\sin x>k$ ($\sin x<k$, k는 실수)의 꼴로 변형한다.

② 주어진 범위에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=k$를 그린다.

③ 두 그래프의 교점의 x좌표를 구한다.

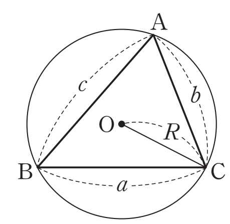
④ $\sin x>k$ ($\sin x<k$)의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=k$보다 위쪽(아래쪽)에 있는 x의 값의 범위를 구한다.

(삼각함수 $\cos x$, $\tan x$에 대한 부등식도 $\sin x$에 대한 부등식과 같은 방법으로 해결한다.)

6 사인법칙

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



참고 사인법칙을 변형하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

(1) $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$

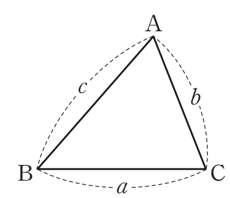
(2) $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

(3) $a : b : c=\sin A : \sin B : \sin C$

7 코사인법칙

삼각형 ABC에서

(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ (2) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ (3) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$



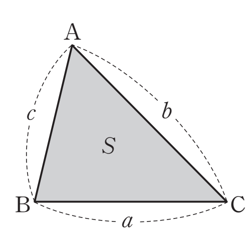
참고 코사인법칙을 변형하면 다음과 같다.

(1) $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (2) $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ (3) $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

8 삼각형의 넓이

삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$$



유형 1 부채꼴의 호의 길이와 넓이

출제유형 | 호도법을 이용하여 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

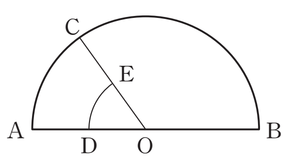
출제유형잡기 | 부채꼴의 반지름의 길이 r와 중심각의 크기 θ를 알 때 부채꼴의 호의 길이 l과 넓이 S는 다음 공식을 이용하여 구한다.

(1) $l=r\theta$

(2) $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$

필수 유형

그림과 같이 중점이 O인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 C에 대하여 호 BC의 길이는 호 AC의 길이의 2배이고 두 선분 OA, OC의 중점을 각각 D, E라 하자. 부채꼴 OCB의 넓이가 12π일 때, 부채꼴 ODE의 호 DE의 길이는?



① $\frac{2}{3}\pi$ ② π ③ $\frac{4}{3}\pi$ ④ $\frac{5}{3}\pi$ ⑤ 2π

출제 의도

부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$\overset{\frown}{AC} : \overset{\frown}{BC}=1:2$이므로 두 부채꼴 OCB, ODE의 중심각의 크기는 각각 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{\pi}{3}$이다.

부채꼴 OCB의 반지름의 길이를 r라 하면

$\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{2}{3}\pi=12\pi$

$r^2=36$에서 $r=6$

따라서 호 DE의 길이는

$\frac{6}{2}\times\frac{\pi}{3}=\pi$

답 ②

01

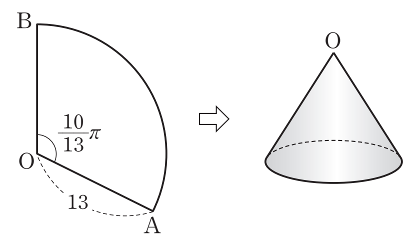
▸ 21054-0031

호의 길이가 2π, 넓이가 10π인 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라 할 때, $\frac{r\pi}{\theta}$의 값을 구하시오.

02

▸ 21054-0032

그림과 같이 반지름의 길이가 13, 중심각의 크기가 $\frac{10}{13}\pi$인 부채꼴 OAB가 있다. 이 부채꼴을 선분 OA와 선분 OB가 맞닿아 만든 원뿔 모양의 용기의 부피는?

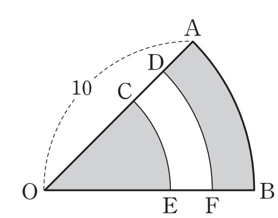


① 80π ② 90π ③ 100π ④ 110π ⑤ 120π

03

▸ 21054-0033

그림과 같이 반지름의 길이가 10인 부채꼴 모양의 텃밭이 있다. 선분 OA, OB 위에 각각 두 점 C, D와 E, F를 잡아 두 부채꼴 OCE, ODF의 호 CE, DF를 양 끝으로 하는 통로를 만들려고 한다. 두 선분 OC, DA의 길이는 각각 자연수이고 색칠한 두 영역의 넓이는 서로 같다. 세 호 CE, DF, AB의 길이의 합이 6π일 때, 통로 CEFD의 넓이는? (단, $\overline{OC}=\overline{OE}$, $\overline{OD}=\overline{OF}$)



① $\frac{5}{2}\pi$ ② $\frac{11}{4}\pi$ ③ 3π ④ $\frac{13}{4}\pi$ ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

유형 2 삼각함수의 정의와 삼각함수 사이의 관계

출제유형 | 삼각함수의 정의와 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 다음과 같은 삼각함수의 정의와 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 각 θ를 나타내는 동경과 반지름의 길이가 r인 원의 교점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq0)$$

(2) 삼각함수 사이의 관계

① $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

② $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

필수 유형

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$일 때, $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$의 값은?

① $-\frac{8}{3}$　② $-\frac{5}{3}$　③ $-\frac{2}{3}$
④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{4}{3}$

출제 의도

삼각함수 사이의 관계를 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

따라서

$$\begin{aligned}\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}\\&=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\\&=-\frac{8}{3}\end{aligned}$$

답 ①

04

▶ 21054-0034

좌표평면에서 시초선을 원점에서 x축의 양의 방향으로 잡을 때, 각 θ를 나타내는 동경과 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 6인 원이 만나는 점의 좌표가 (a, b)이다.

$\sin\theta\times\tan\theta=\frac{5}{6}$일 때, $a+b^2$의 값을 구하시오.

05

▶ 21054-0035

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이고 $\frac{\tan\theta}{1-\cos\theta}-\frac{\tan\theta}{1+\cos\theta}=-8$일 때, $(2\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta+2\cos\theta)^2$의 값은?

① $5-\sqrt{15}$　② $5-\frac{\sqrt{15}}{2}$　③ 5
④ $5+\frac{\sqrt{15}}{2}$　⑤ $5+\sqrt{15}$

06

▶ 21054-0036

양수 θ가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sin\theta\tan\theta<0,\ \cos\theta\tan\theta>0$
(나) 좌표평면에서 각 θ를 나타내는 동경과 3θ를 나타내는 동경이 서로 y축에 대하여 대칭이다.

θ의 최솟값을 α라 할 때, $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\tan\alpha}$의 값은? (단, 좌표평면에서 시초선은 원점에서 x축의 양의 방향으로 정한다.)

① $-2\sqrt{2}$　② $-\sqrt{2}$　③ 0
④ $\sqrt{2}$　⑤ $2\sqrt{2}$

유형 3 삼각함수의 그래프와 삼각함수의 성질

출제유형 | 삼각함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$의 그래프의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구하는 문제나 삼각함수의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각함수의 그래프에서 주기, 최댓값과 최솟값, 그래프가 지나는 점을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구하거나 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

(1) $\pi \pm x$의 삼각함수

① $\sin(\pi+x)=-\sin x$, $\sin(\pi-x)=\sin x$

② $\cos(\pi+x)=-\cos x$, $\cos(\pi-x)=-\cos x$

③ $\tan(\pi+x)=\tan x$, $\tan(\pi-x)=-\tan x$

(2) $\frac{\pi}{2}\pm x$의 삼각함수

① $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

② $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

③ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$

필수 유형 | 2018학년도 대수능 6월 모의평가 |

$\sin\frac{7}{3}\pi$의 값은? [2점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

출제 의도

사인함수의 주기를 이해하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$\sin\frac{7}{3}\pi=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 ⑤

07

▸ 21054-0037

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$인 θ에 대하여 $\cos\theta=\frac{4}{5}$일 때,

$\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos(\pi+\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin(\pi-\theta)}$의 값은?

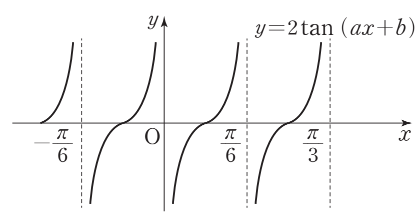
① -7 ② -5 ③ -3

④ 5 ⑤ 7

08

▸ 21054-0038

다음 그림은 함수 $y=2\tan(ax+b)$의 그래프의 일부분이다. ab의 값은? (단, a, b는 상수이고 $a>0$, $0<b<\pi$이다.)



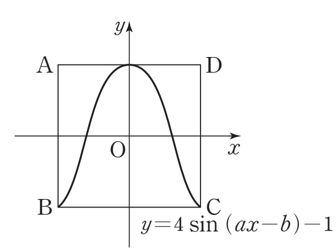
① π ② 2π ③ 3π

④ 4π ⑤ 5π

09

▸ 21054-0039

그림과 같이 좌표평면에 한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD가 모든 변이 x축 또는 y축과 평행하고 두 대각선의 교점이 원점 O가 되도록 놓여 있다. 함수 $y=4\sin(ax-b)-1$의 그래프가 선분 AD의 중점에서만 선분 AD에 접하고 두 꼭짓점 B, C를 지나도록 하는 두 양수 a, b에 대하여 $\frac{a+b}{\pi}$의 최솟값은?



① $\frac{11}{9}$ ② $\frac{25}{18}$ ③ $\frac{14}{9}$

④ $\frac{31}{18}$ ⑤ $\frac{17}{9}$

유형 4 삼각함수의 최댓값과 최솟값

출제유형 | 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각함수 사이의 관계, 삼각함수의 성질 그리고 삼각함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$의 그래프의 성질을 이용하여 삼각함수 또는 삼각함수를 포함한 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 m이다. $k+m$의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

출제 의도

사인함수의 치역을 이용하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$에서

$x-\frac{3}{4}\pi=\theta$라 하면 $x=\theta+\frac{3}{4}\pi$, $x-\frac{\pi}{4}=\theta+\frac{\pi}{2}$이므로

$$\begin{aligned}f\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)&=\cos^2\theta-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+k\\&=\cos^2\theta+\sin\theta+k\\&=1-\sin^2\theta+\sin\theta+k\\&=-\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{5}{4}\end{aligned}$$

모든 실수 θ에 대하여 $-1\le\sin\theta\le1$이므로

함수 $f\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$는 $\sin\theta=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $k+\frac{5}{4}$를 갖는다.

이때 최댓값이 3이므로 $k+\frac{5}{4}=3$에서 $k=\frac{7}{4}$

또 함수 $f\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$는 $\sin\theta=-1$일 때 최솟값 $k-1$을 가지므로

$m=\frac{3}{4}$

따라서 $k+m=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$

답 ③

10

▶ 21054-0040

함수 $f(x)=a\cos\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)+b$에 대하여 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3$이다. 함수 $f(x)$의 최솟값이 -1일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값을 구하시오. (단, a, b는 상수이고 $a>0$이다.)

11

▶ 21054-0041

실수 k에 대하여 함수 $f(x)=\left|3\sin\frac{x}{2}+k\right|-2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m=5$가 되도록 하는 모든 실수 k의 제곱의 합을 구하시오.

12

▶ 21054-0042

$0\le x<2\pi$에서 함수

$f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-5\cos^2x+4\sin x$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

수학 I

유형 5 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식

출제유형 | 삼각함수의 그래프와 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식을 푸는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$의 그래프와 직선의 교점이나 위치 관계를 이용하여 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식의 해를 구하는 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 |

$0\le\theta<2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식

$$6x^2+(4\cos\theta)x+\sin\theta=0$$

이 실근을 갖지 않도록 하는 모든 θ의 값의 범위는 $\alpha<\theta<\beta$이다. $3\alpha+\beta$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{6}\pi$ ② π ③ $\frac{7}{6}\pi$
④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

출제 의도

이차방정식의 판별식을 이용하여 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 부등식의 해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

이차방정식 $6x^2+(4\cos\theta)x+\sin\theta=0$이 실근을 갖지 않아야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4\cos^2\theta-6\sin\theta<0$

$2(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta<0$

$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2>0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)>0$

$0\le\theta<2\pi$에서 $-1\le\sin\theta\le1$이므로

$\sin\theta+2>0$

즉, $2\sin\theta-1>0$에서 $\sin\theta>\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$이므로 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$

따라서 $3\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{6}\pi=\frac{4}{3}\pi$

답 ④

13 ▸ 21054-0043

$0\le x<2\pi$에서 방정식

$$1-2\sin^2 x=\cos x$$

의 서로 다른 실근의 개수를 n, 가장 큰 실근을 α라 할 때, $n\alpha$의 값은?

① 3π ② $\frac{7}{2}\pi$ ③ 4π
④ $\frac{9}{2}\pi$ ⑤ 5π

14 ▸ 21054-0044

$0\le x<2\pi$에서 방정식

$$\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\tan 2x=0$$

의 모든 실근의 합은?

① 2π ② 3π ③ 4π
④ 5π ⑤ 6π

15 ▸ 21054-0045

$0\le x<2\pi$에서 부등식

$2\sin^2\left(\frac{x-\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{2x+\pi}{6}\right)<0$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $4\alpha+\beta$의 값은?

① 2π ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ 3π
④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ 4π

유형 6 사인법칙

출제유형 | 삼각함수의 성질과 사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이나 각의 크기, 외접원의 반지름의 길이 등을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

가 성립함을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

반지름의 길이가 15인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $\sin B=\frac{7}{10}$일 때, 선분 AC의 길이는? [3점]

① 15 ② 18 ③ 21
④ 24 ⑤ 27

출제 의도

사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 15이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2\times 15$$

따라서

$$\overline{AC}=2\times 15\times \sin B$$
$$=2\times 15\times \frac{7}{10}$$
$$=21$$

답 ③

16

▸ 21054-0046

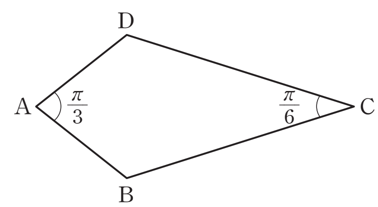
반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $4\sin(A+C)\sin B=3$일 때, 선분 AC의 길이는?

① $2\sqrt{5}$ ② 5 ③ $\sqrt{30}$
④ $\sqrt{35}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

17

▸ 21054-0047

그림과 같이 $A=\frac{\pi}{3}$, $C=\frac{\pi}{6}$인 사각형 ABCD에서 세 점 A, B, D를 지나는 원의 반지름의 길이를 R_1, 세 점 B, C, D를 지나는 원의 반지름의 길이를 R_2라 할 때, $\frac{R_2}{R_1}$의 값은?

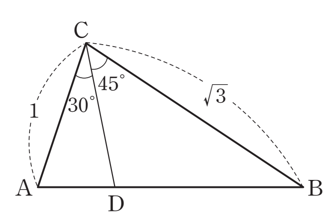


① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

18

▸ 21054-0048

그림과 같이 삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=1$, $\overline{BC}=\sqrt{3}$이다. 선분 AB 위의 점 D에 대하여 $\angle ACD=30°$, $\angle BCD=45°$일 때, $\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$의 값은?



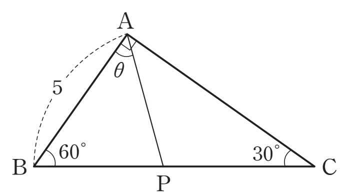
① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$
④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

19

▸ 21054-0049

그림과 같이 $A=90°$, $B=60°$, $C=30°$이고 $\overline{AB}=5$인 직각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 변 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle PAB=\theta$라 할 때, $\dfrac{\overline{BP}}{\sin\theta}$의 최솟값을 구하시오.

(단, $0°<\theta<90°$)

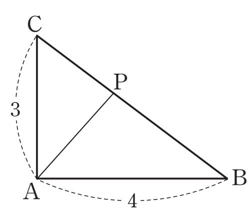


20

▸ 21054-0050

그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=3$인 삼각형 ABC가 있다. 변 BC 위의 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 외접원의 넓이를 S_1, 삼각형 APC의 외접원의 넓이를 S_2라 할 때, $S_1 : S_2$는?

(단, $\overline{PB}>0$, $\overline{PC}>0$)



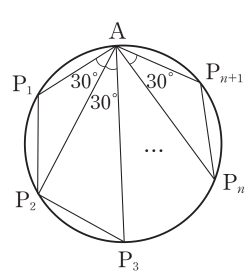
① 3 : 2　② 4 : 3　③ 9 : 4
④ 16 : 9　⑤ 36 : 25

21

▸ 21054-0051

그림과 같이 반지름의 길이가 R인 원이 있다. 원 위의 한 점 A를 꼭짓점으로 하고, 점 A에서의 내각이 30°인 삼각형을 원에 내접하여 한 변 또는 두 변이 서로 겹치도록 최대한 붙였을 때, 삼각형들의 꼭짓점들을 점 A로부터 시계바늘이 도는 반대 방향으로 차례대로 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_n, P_{n+1}이라 하자.

$\sum_{k=1}^{n}\overline{P_1P_{k+1}}=6(2+\sqrt{3})$일 때, 원의 반지름의 길이 R의 값은?



① 1　② $\dfrac{3}{2}$　③ 2
④ $\dfrac{5}{2}$　⑤ 3

유형 7 코사인법칙

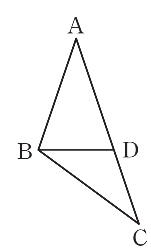
출제유형 | 삼각함수의 성질과 코사인법칙을 이용하여 삼각함수의 값이나 삼각형의 변의 길이, 각의 크기 등을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 다음과 같은 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결한다.
삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$일 때
(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
(2) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$
(3) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

필수 유형 | 2021학년도 대수능 9월 모의평가 |

$\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{AB}=\overline{AD}$가 되도록 잡는다. $\overline{BD}=\sqrt{15}$일 때, 선분 BC의 길이는? [3점]

① $\sqrt{37}$　② $\sqrt{38}$　③ $\sqrt{39}$
④ $2\sqrt{10}$　⑤ $\sqrt{41}$



출제 의도

코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{6^2+6^2-(\sqrt{15})^2}{2\times6\times6}=\dfrac{57}{72}=\dfrac{19}{24}$

이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\cos A$

$=6^2+10^2-2\times6\times10\times\dfrac{19}{24}$

$=36+100-95$

$=41$

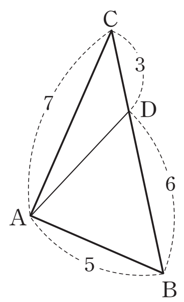
따라서 $\overline{BC}=\sqrt{41}$

답 ⑤

22

▸ 21054-0052

그림과 같이 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=7$이다. 선분 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{\mathrm{BD}}=6$, $\overline{\mathrm{CD}}=3$일 때, 선분 AD의 길이는?

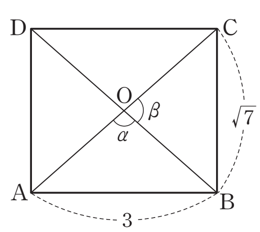


① $\sqrt{19}$　② $\sqrt{21}$　③ $\sqrt{23}$
④ 5　⑤ $3\sqrt{3}$

23

▸ 21054-0053

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{7}$인 직사각형 ABCD에 대하여 두 대각선 AC와 BD의 교점을 O라 하자. $\angle\mathrm{AOB}=\alpha$, $\angle\mathrm{BOC}=\beta$라 할 때, $\cos\alpha+\sin\beta$의 값은?

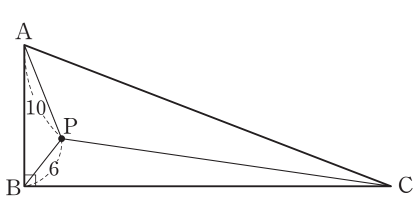


① $\dfrac{\sqrt{7}-1}{8}$　② $\dfrac{2\sqrt{7}-1}{8}$　③ $\dfrac{3\sqrt{7}-1}{8}$
④ $\dfrac{4\sqrt{5}-1}{8}$　⑤ $\dfrac{5\sqrt{5}-1}{8}$

24

▸ 21054-0054

그림과 같이 $B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{BPC}=\angle\mathrm{CPA}=120^\circ$이고 $\overline{\mathrm{PA}}=10$, $\overline{\mathrm{PB}}=6$일 때, 선분 PC의 길이를 구하시오.

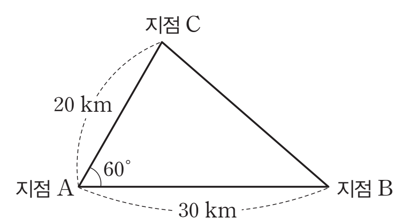


25

▸ 21054-0055

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=30\text{ km}$, $\overline{\mathrm{AC}}=20\text{ km}$인 세 지점 A, B, C에 대하여 $\angle\mathrm{CAB}=60^\circ$이다. 여객선 P는 지점 A에서 출발하여 지점 B를 향하여 일정한 속력으로 일직선으로 움직이고 여객선 Q는 지점 C에서 출발하여 지점 A를 향하여 여객선 P의 속력의 두 배의 속력으로 일직선으로 움직인다. 두 여객선 P, Q가 동시에 출발했을 때 두 여객선 P와 Q를 잇는 선분이 두 지점 B와 C를 잇는 선분과 평행이 되는 순간 두 여객선 사이의 거리는 $\dfrac{q}{p}\sqrt{7}\text{ km}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

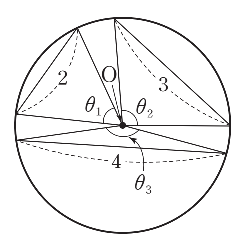


26

▸ 21054-0056

그림과 같이 원에 길이가 각각 2, 3, 4인 세 개의 현이 있다. 이 세 개의 현 각각에 대응하는 중심각의 크기를 각각 θ_1, θ_2, θ_3이라 할 때, $\theta_3=\theta_1+\theta_2$가 성립한다. $\cos\theta_1$의 값은?

(단, $\theta_3<180^\circ$이고 점 O는 원의 중심이다.)



① $\dfrac{15}{32}$　② $\dfrac{17}{32}$　③ $\dfrac{19}{32}$
④ $\dfrac{21}{32}$　⑤ $\dfrac{23}{32}$

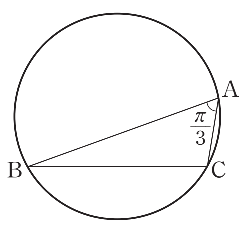
유형 8 사인법칙과 코사인법칙의 활용

출제유형 | 사인법칙과 코사인법칙을 모두 이용하여 해결하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각형에서 사인법칙과 코사인법칙을 모두 이용하여 삼각형의 변의 길이나 각의 크기 등을 구하는 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2021학년도 대수능 |

$\angle A=\frac{\pi}{3}$이고 $\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 선분 AC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오. [4점]



출제 의도

사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\times7$, $\overline{BC}=\sin\frac{\pi}{3}\times2\times7=7\sqrt{3}$ …… ㉠

한편, $\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$이므로

$\overline{AC}=k\ (k>0)$에서 $\overline{AB}=3k$이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=9k^2+k^2-2\times3k\times k\times\frac{1}{2}$

$=7k^2$

따라서 $\overline{BC}=\sqrt{7}k$ …… ㉡

㉠과 ㉡에서

$7\sqrt{3}=\sqrt{7}k$

$k=\sqrt{21}$

이므로 $k^2=21$

답 21

27 ▸ 21054-0057

원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=3$이고

$\frac{\sin A}{7}=\frac{\sin B}{3}=\frac{\sin C}{5}$일 때, 이 원의 넓이는?

① 2π ② 3π ③ 4π
④ 5π ⑤ 6π

28 ▸ 21054-0058

삼각형 ABC의 각 A, B, C가

$$\sin(B+C)\cos A=\cos\left(\frac{3}{2}\pi+B\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+B\right)$$

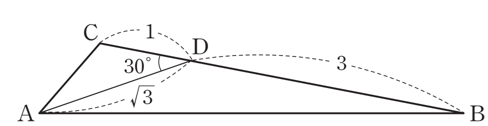
를 만족시킬 때, 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

(단, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$이고 $a\neq b$이다.)

① $A=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형
② $B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형
③ $C=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형
④ $a=c$인 이등변삼각형
⑤ $b=c$인 이등변삼각형

29 ▸ 21054-0059

그림과 같이 삼각형 ABC에서 변 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{CD}=1$, $\overline{BD}=3$, $\overline{AD}=\sqrt{3}$, $\angle ADC=30^\circ$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는?



① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$
④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

유형 9 삼각형의 넓이

출제유형 | 삼각함수의 성질, 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

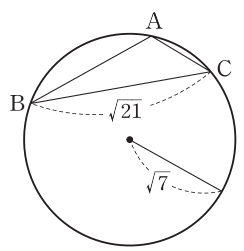
출제유형잡기 | 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$일 때 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$$

임을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형

그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$인 원에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. $\overline{BC}=\sqrt{21}$, $\overline{AB}=2\overline{AC}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, $A>90°$)



① $\sqrt{3}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
④ $\frac{7\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

출제 의도

사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\sqrt{21}}{\sin A}=2\times\sqrt{7}$, $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ······ ㉠

$A>90°$이므로 $A=120°$

$\overline{AB}=2x$, $\overline{AC}=x\ (x>0)$으로 놓으면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{21})^2=(2x)^2+x^2-2\times2x\times x\times\cos 120°$

$21=7x^2$, $x^2=3$ ······ ㉡

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2x\times x\times\sin A=x^2\sin A$

㉠, ㉡에서

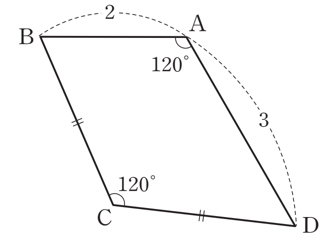
$x^2\sin A=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

답 ③

30

▸ 21054-0060

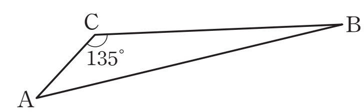
그림과 같이 사각형 ABCD에서 $A=C=120°$, $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=3$이고 $\overline{BC}=\overline{CD}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



31

▸ 21054-0061

그림과 같이 삼각형 ABC에서 $C=135°$, $\overline{AB}=2\sqrt{26}$이고 $\overline{BC}+\overline{AC}=8+2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

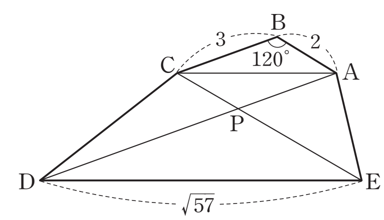


① $\frac{15}{2}$ ② 8 ③ $\frac{17}{2}$
④ 9 ⑤ $\frac{19}{2}$

32

▸ 21054-0062

그림과 같이 오각형 ABCDE에서 $\overline{AB}/\!/\overline{EC}$, $\overline{BC}/\!/\overline{AD}$, $\overline{AC}/\!/\overline{ED}$, $\angle ABC=120°$이고 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3$, $\overline{DE}=\sqrt{57}$이다. 두 대각선 AD와 CE가 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 PDE의 넓이는?



① $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $\frac{9\sqrt{3}}{2}$
④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{3}}{2}$

03 수열

1 등차수열

(1) 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=a+(n-1)d$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

(2) 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등차중항이라고 한다.

이때 $b-a=c-b$이므로 $b=\frac{a+c}{2}$

참고 일반항 a_n이 n에 대한 일차식 $a_n=An+B$ (A, B는 상수, $n=1, 2, 3, \cdots$)인 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $A+B$, 공차가 A인 등차수열이다.

2 등차수열의 합

등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 다음과 같다.

(1) 첫째항이 a, 제n항이 l일 때, $S_n=\frac{n(a+l)}{2}$

(2) 첫째항이 a, 공차가 d일 때, $S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

참고 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 n에 대한 이차식 $S_n=An^2+Bn$ (A, B는 상수, $n=1, 2, 3, \cdots$)인 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $A+B$, 공차가 $2A$인 등차수열이다.

3 등비수열

(1) 첫째항이 a, 공비가 r ($r\neq0$)인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=ar^{n-1}$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

(2) 0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등비중항이라고 한다.

이때 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$이므로 $b^2=ac$

4 등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r ($r\neq0$)인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 다음과 같다.

(1) $r=1$일 때, $S_n=na$

(2) $r\neq1$일 때, $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

5 수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

6 합의 기호 $\sum$의 뜻

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$을 기호 $\sum$를 사용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

제n항까지

일반항

첫째항부터

7 합의 기호 $\sum$의 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

(3) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

(4) $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

8 자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2$

9 여러 가지 수열의 합

(1) 일반항이 분수 꼴이고 분모가 서로 다른 두 일차식의 곱으로 나타내어져 있을 때, 두 개의 분수로 분해하는 방법, 즉

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ $(A\neq B)$를 이용하여 계산한다.

① $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+a)}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+a}\right)$ (단, $a\neq 0$)

② $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+a)(k+b)}=\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k+b}\right)$ (단, $a\neq b$)

(2) 일반항의 분모가 근호가 있는 두 식의 합으로 나타내어져 있을 때, 분모를 유리화하는 방법을 이용하여 계산한다.

① $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+a}+\sqrt{k}}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+a}-\sqrt{k})$ (단, $a\neq 0$)

② $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+a}+\sqrt{k+b}}=\frac{1}{a-b}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+a}-\sqrt{k+b})$ (단, $a\neq b$)

10 수열의 귀납적 정의

처음 몇 개의 항의 값과 이웃하는 항들 사이의 관계식으로 수열 $\{a_n\}$을 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라고 한다.
예를 들면 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서

$a_2=2a_1=2\times1=2$, $a_3=2a_2=2\times2=4$, $a_4=2a_3=2\times4=8$, $\cdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 1, 2, 4, 8, $\cdots$이다.

11 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.
(i) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.
이와 같은 방법으로 모든 자연수 n에 대하여 명제 $p(n)$이 참임을 증명하는 것을 수학적 귀납법이라고 한다.

정답과 풀이 16쪽

유형 1 등차수열의 뜻과 일반항

출제유형 | 등차수열의 일반항을 이용하여 공차 또는 특정한 항을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건을 만족시키는 등차수열의 첫째항과 공차를 구한 후 등차수열의 일반항을 이용하여 문제를 해결한다.
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 할 때, 다음을 이용한다.
(1) 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은
$a_n=a+(n-1)d$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)
(2) 두 자연수 m, n에 대하여
$a_m-a_n=(m-n)d$

필수 유형 | 2019학년도 대수능 |

첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{10}-a_7=6$$

일 때, a_4의 값은? [3점]

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

출제 의도

등차수열의 일반항을 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$a_{10}-a_7=(a_1+9d)-(a_1+6d)$$
$$=3d$$

이므로 $3d=6$, $d=2$

$$a_4=a_1+3d$$
$$=4+3\times2$$
$$=4+6$$
$$=10$$

답 ①

01

▸ 21054-0063

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1a_9=-60,\ a_4a_6=0$$

일 때, a_3a_7의 값은?

① -18 ② -16 ③ -14
④ -12 ⑤ -10

02

▸ 21054-0064

2 이상의 자연수 n에 대하여 집합

$$\{x\,|\,x\text{는 } n \text{ 이하의 자연수}\}$$

의 서로 다른 두 원소를 더하여 나올 수 있는 모든 값만을 원소로 하는 집합을 A_n이라 하고 집합 A_n의 원소의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $A_3=\{3,\ 4,\ 5\}$이므로 $a_3=3$이다. $a_n=99$를 만족시키는 n의 값은?

① 50 ② 51 ③ 52
④ 53 ⑤ 54

03

▸ 21054-0065

자연수 d에 대하여 모든 항이 정수이고, 공차가 $2d$인 등차수열 $\{a_n\}$이 $|a_4|>|a_5|$를 만족시킬 때, a_4a_5가 최솟값을 갖도록 하는 a_1의 값을 $f(d)$라 하자. $f(2)+f(3)$의 값은?

① -31 ② -33 ③ -35
④ -37 ⑤ -39

유형 2 등차수열의 합

출제유형 | 주어진 조건을 이용하여 등차수열의 합을 구하는 문제, 등차수열의 합을 이용하여 첫째항, 공차, 특정한 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건에서 첫째항과 공차를 구하고 등차수열의 합의 공식을 이용하여 문제를 해결한다.
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음을 이용한다.
(1) 첫째항이 a, 제n항이 l일 때

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}$$

(2) 첫째항이 a, 공차가 d일 때

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

필수 유형 | 2018학년도 대수능 |

등차수열 $\{a_n\}$이

$$a_5+a_{13}=3a_9,\ \sum_{k=1}^{18} a_k=\frac{9}{2}$$

를 만족시킬 때, a_{13}의 값은? [4점]

① 2 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

출제 의도

등차수열의 일반항과 합을 이용하여 등차수열의 특정한 항을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_5+a_{13}=3a_9$에서
$(a+4d)+(a+12d)=3(a+8d)$
$a+8d=0$ …… ㉠
또 $\sum_{k=1}^{18} a_k=\frac{18}{2}\times(a_1+a_{18})=9(2a+17d)$이므로
$9(2a+17d)=\frac{9}{2}$에서
$2a+17d=\frac{1}{2}$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-4,\ d=\frac{1}{2}$이므로
$a_{13}=a+12d=-4+12\times\frac{1}{2}=2$

답 ①

04

▸ 21054-0066

두 수 $\log_3\frac{1}{2}$과 $\log_3 18$ 사이에 10개의 수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10}$을 넣어 만든 수열이 등차수열일 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

05

▸ 21054-0067

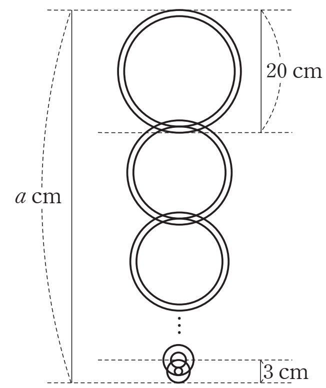
자연수 n에 대하여 3^n 이하의 자연수 중에서 3과 서로소인 모든 자연수의 합을 a_n이라 하자. 예를 들어, $n=2$일 때, $a_2=27$이다. $\log_3 a_{50}$의 값은?

① 95 ② 97 ③ 99
④ 101 ⑤ 103

06

▸ 21054-0068

그림과 같이 폭이 1 cm인 원형의 고리들이 연결되어 하나의 못에 걸려 있다. 가장 위에 위치한 고리의 바깥 지름의 길이는 20 cm이고 각각의 고리는 바로 위의 고리보다 바깥 지름의 길이가 1 cm씩 작으며 가장 아래에 위치한 고리의 바깥 지름의 길이는 3 cm이다. 이때 가장 위에 있는 고리의 위 끝에서 가장 아래에 있는 고리의 아래 끝까지의 길이는 a cm이다. 상수 a의 값은?



① 171 ② 173 ③ 175
④ 177 ⑤ 179

유형 3 등비수열의 뜻과 일반항

출제유형 | 등비수열의 일반항을 이용하여 공비나 특정한 항을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건을 만족시키는 등비수열의 첫째항과 공비를 구한 후 등비수열의 일반항을 이용하여 문제를 해결한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 할 때, 다음을 이용한다.

(1) 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=ar^{n-1}$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

(2) 두 자연수 m, n에 대하여

$\frac{a_m}{a_n}=r^{m-n}$ (단, $a_n\neq0$, $r\neq0$)

필수 유형 | 2018학년도 대수능 6월 모의평가 |

첫째항이 3인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_3}{a_2}-\frac{a_6}{a_4}=\frac{1}{4}$$

일 때, $a_5=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

출제 의도

등비수열의 일반항을 이용하여 특정한 항을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\frac{a_3}{a_2}=r$, $\frac{a_6}{a_4}=r^2$이므로

$r-r^2=\frac{1}{4}$, $4r-4r^2=1$, $4r^2-4r+1=0$, $(2r-1)^2=0$

즉, $r=\frac{1}{2}$

따라서 $a_5=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{16}$이므로

$p+q=16+3=19$

답 19

07

▸ 21054-0069

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1+a_3=-\frac{5}{2},\ a_2a_4=4$$

일 때, a_7의 값은?

① -8 ② -16 ③ -32
④ -64 ⑤ -128

08

▸ 21054-0070

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=\log_2 a_n$으로 정의하자. 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, b_{15}의 값은?

(가) $b_3+b_5+b_7=15$
(나) $b_4+b_6+b_8=21$

① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

09

▸ 21054-0071

첫째항이 $\frac{1}{64}$이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1\times a_2\times\cdots\times a_n>128$$

을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

유형 4 등비수열의 합

출제유형 | 주어진 조건을 이용하여 등비수열의 합을 구하는 문제, 등비수열의 합을 이용하여 첫째항, 공비, 특정한 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건에서 첫째항과 공비를 구하고 등비수열의 합의 공식을 이용하여 문제를 해결한다.
첫째항이 a이고, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음을 이용한다.
(1) $r=1$일 때, $S_n=na$
(2) $r\neq1$일 때, $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_1=1,\ \frac{S_6}{S_3}=2a_4-7$$

일 때, a_7의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

등비수열의 합을 이용하여 등비수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

(i) $r=1$이면 $a_n=1$이므로

$S_3=3\times1=3$, $S_6=6\times1=6$에서

$\dfrac{S_6}{S_3}=2$

$2a_4-7=2\times1-7=-5$

따라서 $\dfrac{S_6}{S_3}\neq2a_4-7$

(ii) $r\neq1$이면 $a_n=1\times r^{n-1}=r^{n-1}$

이때

$$\frac{S_6}{S_3}=\frac{\dfrac{r^6-1}{r-1}}{\dfrac{r^3-1}{r-1}}=\frac{r^6-1}{r^3-1}=\frac{(r^3+1)(r^3-1)}{r^3-1}$$

$=r^3+1$ …… ㉠

또

$2a_4-7=2r^3-7$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$r^3+1=2r^3-7$

$r^3=8$

r가 실수이므로 $r=2$

(i), (ii)에서 $a_n=2^{n-1}$이므로

$a_7=2^6=64$

답 64

10 ▸ 21054-0072

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=3,\ \frac{3a_3}{a_2}+\frac{a_6}{a_4}=10$$

일 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7$의 값은?

① 376 ② 381 ③ 386 ④ 391 ⑤ 396

11 ▸ 21054-0073

함수 $f(x)=x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x+\sqrt{2}$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=(f\circ f)(x)$라 할 때, $g(0)$의 값은?

① $58+30\sqrt{2}$ ② $60+31\sqrt{2}$ ③ $62+32\sqrt{2}$ ④ $64+33\sqrt{2}$ ⑤ $66+34\sqrt{2}$

12 ▸ 21054-0074

첫째항이 1이고 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$과 자연수 k는 다음 조건을 만족시킨다. 이때 $r+k$의 값은?

(가) $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}=85$
(나) $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}=170$

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

수학 I

유형 5 등차중항과 등비중항

출제유형 | 3개 이상의 수가 등차수열 또는 등비수열을 이루는 조건이 주어진 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 3개 이상의 수가 등차수열 또는 등비수열을 이루는 조건이 주어진 문제에서는 등차중항 또는 등비중항의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면
$2b=a+c$
가 성립한다.

(2) 0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루면
$b^2=ac$
가 성립한다.

필수 유형 | 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식
$x^2-nx+4(n-4)=0$
이 서로 다른 두 실근 α, β $(\alpha<\beta)$를 갖고, 세 수 1, α, β가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, n의 값은? [3점]

① 5 ② 8 ③ 11
④ 14 ⑤ 17

출제 의도

등차중항의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$x^2-nx+4(n-4)=0$에서 $(x-4)(x-n+4)=0$
$x=4$ 또는 $x=n-4$
한편, 세 수 1, α, β가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2\alpha=\beta+1$ ······ ㉠
(i) $\alpha=4$, $\beta=n-4$인 경우
$\alpha<\beta$이므로 $4<n-4$에서 $n>8$
㉠에서 $8=(n-4)+1$
즉, $n=11$
(ii) $\alpha=n-4$, $\beta=4$인 경우
$\alpha<\beta$이므로 $n-4<4$에서 $n<8$
㉠에서 $2(n-4)=4+1$
즉, $n=\frac{13}{2}$
(i), (ii)에서 구하는 자연수 n의 값은 11이다.

답 ③

13

▸ 21054-0075

두 양수 a, b에 대하여 세 수 16, 16^a, 32^b이 이 순서대로 등비수열을 이루고, 세 수 $\log 5$, $\log 2a$, $\log b$는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. $a+b$의 값은?

① $\frac{7}{5}$ ② $\frac{9}{5}$ ③ $\frac{11}{5}$
④ $\frac{13}{5}$ ⑤ 3

14

▸ 21054-0076

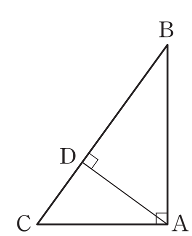
두 자연수 a, b $(a>b)$에 대하여 세 수 a, b, $a-b$는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 a^2, 12, $(a-b)^2$은 이 순서대로 등비수열을 이룬다. $a+b$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

15

▸ 21054-0077

그림과 같이 ∠A가 직각인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 세 직각삼각형 ABC, ABD, ADC의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\sin C$의 값은?



① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

유형 6 수열의 합과 일반항 사이의 관계

출제유형 | 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 특정한 항의 값을 구하거나 일반항을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열의 합과 일반항 사이의 관계

$a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

를 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 |

첫째항이 7인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\frac{S_9-S_5}{S_6-S_2}=3$$

일 때, a_7의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$\begin{aligned}S_6-S_2&=a_3+a_4+a_5+a_6\\&=7r^2+7r^3+7r^4+7r^5\\&=7r^2(1+r+r^2+r^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_9-S_5&=a_6+a_7+a_8+a_9\\&=7r^5+7r^6+7r^7+7r^8\\&=7r^5(1+r+r^2+r^3)\end{aligned}$$

이때

$$\frac{S_9-S_5}{S_6-S_2}=\frac{7r^5(1+r+r^2+r^3)}{7r^2(1+r+r^2+r^3)}=r^3$$

이므로

$r^3=3$

따라서 $a_7=7r^6=7\times(r^3)^2=7\times3^2=63$

답 63

16 ▸ 21054-0078

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\log_2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)=n+2$$

를 만족시킬 때, a_6의 값은?

① 125 ② 128 ③ 131 ④ 134 ⑤ 137

17 ▸ 21054-0079

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1+a_4=14$이고 모든 자연수 n에 대하여 $S_n=2n^2+k$를 만족시키는 상수 k가 존재한다. k의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

18 ▸ 21054-0080

수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=na_n$이라 하자. 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$일 때, a_1+a_{2021}의 값은?

① 2021 ② 2022 ③ 2023 ④ 2024 ⑤ 2025

유형 7 합의 기호 $\sum$의 뜻과 성질

출제유형 | 합의 기호 $\sum$의 뜻과 성질을 이용하여 수열의 합을 구하거나 특정한 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수열 $\{a_n\}$에서 합의 기호 $\sum$가 포함된 문제는 다음을 이용하여 해결한다.

(1) $\sum$의 뜻

① $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

② $\sum_{k=m}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{m-1}a_k$ (단, $2\le m\le n$)

(2) $\sum$의 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

② $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

③ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

④ $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

필수 유형 | 2018학년도 대수능 |

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=28,\ \sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+1)=16$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

합의 기호 $\sum$의 뜻과 성질을 알고 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=28$에서

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2+2a_k+1\}=\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k+10$

이므로

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k+10=28$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k=18$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 $\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+1)=16$에서

$\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+1)=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2+a_k\}=\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+\sum_{k=1}^{10}a_k$

이므로

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+\sum_{k=1}^{10}a_k=16$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡$\times 2-$㉠을 하면

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=14$

답 14

19 ▸ 21054-0081

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 수열 $\{c_n\}$을 $c_n=3a_n+b_n+8$이라 하자. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합이 40이고 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합이 60일 때, 수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합을 구하시오.

20 ▸ 21054-0082

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{16}=\frac{1}{3},\ \sum_{k=1}^{15}k(a_k-a_{k+1})=100$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15}a_k$의 값은?

① 101 ② 103 ③ 105
④ 107 ⑤ 109

21 ▸ 21054-0083

다음 조건을 만족시키는 두 정수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은?

> 임의의 두 자연수 m, n $(m<n)$에 대하여 m과 n 사이에 있는 유리수 중 분모가 8인 모든 기약분수의 합은 am^2+bn^2이다.

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

유형 8 자연수의 거듭제곱의 합

출제유형 | 자연수의 거듭제곱의 합을 나타내는 $\sum$의 공식을 이용하여 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 자연수의 거듭제곱의 합을 나타내는 $\sum$의 공식을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

필수 유형

수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} 2k(n+1-k)$$

일 때, a_8의 값은?

① 240 ② 250 ③ 260
④ 270 ⑤ 280

출제 의도

자연수의 거듭제곱의 합을 나타내는 $\sum$의 공식을 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$$a_8=\sum_{k=1}^{8} 2k(8+1-k)$$
$$=\sum_{k=1}^{8}(18k-2k^2)$$
$$=18\times\frac{8\times9}{2}-2\times\frac{8\times9\times17}{6}$$
$$=648-408=240$$

답 ①

[다른 풀이]

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} 2k(n+1-k)$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}\{(n+1)k-k^2\}$$
$$=2(n+1)\sum_{k=1}^{n} k-2\sum_{k=1}^{n} k^2$$
$$=2(n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}-2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)}{3}\{3(n+1)-(2n+1)\}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

따라서

$$a_8=\frac{8\times9\times10}{3}=240$$

22

▸ 21054-0084

$\sum_{k=1}^{22}|10-k|+\sum_{k=1}^{22}(k-10)$의 값은?

① 144 ② 148 ③ 152
④ 156 ⑤ 160

23

▸ 21054-0085

수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=(-1)^{n+1}n^2$이다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{6} S_{2k}$의 값은?

① -201 ② -203 ③ -205
④ -207 ⑤ -209

24

▸ 21054-0086

삼차방정식 $x^3+x^2-6x+4=0$의 세 근 중 무리수인 것을 α, β라 할 때,

$$(\alpha-1)(\beta-1)+(\alpha-2)(\beta-2)+(\alpha-3)(\beta-3)+\cdots+(\alpha-10)(\beta-10)$$

의 값은?

① 435 ② 445 ③ 455
④ 465 ⑤ 475

유형 9 여러 가지 수열의 합

출제유형 | 수열의 일반항을 소거되는 꼴로 변형하여 수열의 합을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수열의 일반항을 소거되는 꼴로 변형할 때에는 다음을 이용하여 해결한다.

(1) 일반항이 분수 꼴이고 분모가 서로 다른 두 일차식의 곱이면 다음과 같이 변형하여 문제를 해결한다.

① $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+a)}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+a}\right)$ (단, $a\neq0$)

② $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+a)(k+b)}=\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k+b}\right)$ (단, $a\neq b$)

(2) 일반항의 분모가 근호가 있는 두 식의 합이면 다음과 같이 변형하여 문제를 해결한다.

① $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+a}+\sqrt{k}}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+a}-\sqrt{k})$ (단, $a\neq0$)

② $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+a}+\sqrt{k+b}}=\frac{1}{a-b}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+a}-\sqrt{k+b})$ (단, $a\neq b$)

필수 유형 | 2020학년도 대수능 9월 모의평가 |

n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$$

의 두 근을 α_n, β_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\beta_n}}$의 값을 구하시오.

[4점]

출제 의도

합의 기호 $\sum$를 포함하고 있는 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

이차방정식 $x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$에서

$(x-n)(x-n+1)=0$

$x=n$ 또는 $x=n-1$

즉, $\alpha_n=n$, $\beta_n=n-1$ 또는 $\alpha_n=n-1$, $\beta_n=n$

$$\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\beta_n}}=\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{81}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$
$$=(\sqrt{1}-0)+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{80})$$
$$=\sqrt{81}-0=9$$

답 9

25

▸ 21054-0087

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1=5$이고 $\sum_{k=1}^{10}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}=\frac{1}{6}$일 때, S_{11}의 값은?

(단, 모든 자연수 n에 대하여 $S_n\neq0$이다.)

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

26

▸ 21054-0088

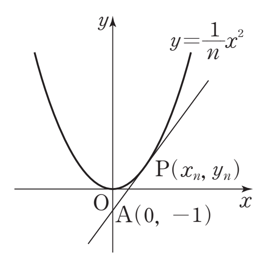
공차가 2이고 모든 항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{a_{2k-1}a_{2k+1}}=\frac{1}{18}$일 때, a_{20}의 값은?

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

27

▸ 21054-0089

그림과 같이 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{A}(0,\ -1)$에서 함수 $y=\frac{1}{n}x^2$의 그래프에 그은 기울기가 양수인 접선의 접점을 $\mathrm{P}(x_n,\ y_n)$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{15}\frac{y_n}{x_n+x_{n+1}}$의 값은?



① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

유형 10 수열의 귀납적 정의

출제유형 | 주어진 항의 값과 이웃하는 몇 개의 항들 사이에 성립하는 관계식으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 특정한 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 첫째항 a_1의 값과 이웃하는 몇 개의 항들 사이에 성립하는 관계식에서 n 대신에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하여 문제를 해결한다.

수열 $\{a_n\}$에서 $n=1, 2, 3, \cdots$일 때

(1) 등차수열

① $a_{n+1}-a_n=d$ (일정) ⇨ 공차가 d인 등차수열

② $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ 또는 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

(2) 등비수열

① $a_{n+1}\div a_n=r$ (일정) ⇨ 공비가 r인 등비수열 (단, $a_n\neq0$)

② $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 또는 $(a_{n+1})^2=a_n\times a_{n+2}$ (단, $a_na_{n+1}\neq0$)

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{3n-1}=2a_n+1 \\ a_{3n}=-a_n+2 \\ a_{3n+1}=a_n+1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{11}+a_{12}+a_{13}$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

출제 의도

귀납적으로 정의된 수열에서 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$a_1=1$이므로

$a_4=a_1+1=2$

$a_4=2$이므로

$a_{11}=2a_4+1=2\times2+1=5$

$a_{12}=-a_4+2=-2+2=0$

$a_{13}=a_4+1=2+1=3$

따라서

$a_{11}+a_{12}+a_{13}=5+0+3=8$

답 ③

28 ▸ 21054-0090

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=6$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-3 & (a_n\geq0) \\ a_n+9 & (a_n<0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{50}a_k$의 값은?

① 79 ② 81 ③ 83 ④ 85 ⑤ 87

29 ▸ 21054-0091

$a_1=b_1=2$인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=2a_n,\ b_{n+1}=b_n+2$$

를 만족시킨다. 부등식 $\dfrac{a_n}{2^{b_n}}>\dfrac{1}{1024}$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

30 ▸ 21054-0092

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2\neq5$, $a_7=a_8=8$이고 다음 조건을 만족시키는 자연수 p가 존재한다.

모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n+2}-a_{2n}=\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}=p$이다.

$\sum_{k=1}^{6}a_k$의 값은?

① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

유형 11 다양한 수열의 규칙 찾기

출제유형 | 주어진 조건을 만족시키는 몇 개의 항을 나열하여 수열의 규칙을 찾는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건을 만족시키는 몇 개의 항을 구하여 규칙을 찾아 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=9$, $a_2=3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$$

을 만족시킨다. $|a_k|=3$을 만족시키는 100 이하의 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

출제 의도

주어진 조건에 따라 나열되는 수의 규칙을 찾아낼 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$a_1=9$, $a_2=3$이고

$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$에서 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$n=1$일 때, $a_3=a_2-a_1=-6$

$n=2$일 때, $a_4=a_3-a_2=-9$

$n=3$일 때, $a_5=a_4-a_3=-3$

$n=4$일 때, $a_6=a_5-a_4=6$

$n=5$일 때, $a_7=a_6-a_5=9$

$n=6$일 때, $a_8=a_7-a_6=3$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$의 각 항은 9, 3, -6, -9, -3, 6이 반복되므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+6}$이 성립한다.

이때 9, 3, -6, -9, -3, 6 중에서 $|a_k|=3$을 만족시키는 항의 개수는 2이고 $100=6\times16+4$이므로

구하는 100 이하의 자연수 k의 개수는

$16\times2+1=33$

답 33

31

▸ 21054-0093

자연수 n에 대하여 함수 $f(n)$을

$$f(n)=\begin{cases} n^2 & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ -n^2 & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

라 하고 $a_n=f(n)+f(n+1)$이라 하자. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{50} a_k$의 값은?

① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

32

▸ 21054-0094

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $S_{40}=25$이고 $S_{65}=19$이다. a_1+a_2의 값은?

① -5 ② -7 ③ -9 ④ -11 ⑤ -13

33

▸ 21054-0095

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_1의 좌표는 $(12, 6)$이다.

(나) 점 A_n이 직선 $y=\frac{x}{2}$ 위의 점일 때, 점 A_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 만나는 점을 B_n이라 한다.

(다) 점 B_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y=\frac{x}{2}$와 만나는 점을 A_{n+1}이라 한다.

점 A_n의 x좌표와 y좌표의 합을 a_n이라 하자. $a_7+a_8=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

유형 12 수학적 귀납법

출제유형 | 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명하는 과정에서 빈칸에 알맞은 식이나 수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 명제를 수학적 귀납법으로 증명하는 과정의 앞뒤 관계를 파악하여 빈칸에 알맞은 식이나 수를 구한다.

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=(2^{2n}-1)\times 2^{n(n-1)}+(n-1)\times 2^{-n}$$

이다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times 2^{-n} \quad \cdots\cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=3$, (우변)$=3$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$$
$$+(2^{2m+2}-1)\times \boxed{\text{(가)}}+m\times 2^{-m-1}$$
$$=\boxed{\text{(가)}}\times\boxed{\text{(나)}}-\frac{m+2}{2}\times 2^{-m}$$
$$=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times 2^{-(m+1)}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times 2^{-n}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\dfrac{g(7)}{f(3)}$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

출제 의도

수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명하는 과정에서 빈칸에 들어갈 알맞은 식을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k=\sum_{k=1}^{m} a_k+a_{m+1}$$
$$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$$
$$+\{2^{2(m+1)}-1\}\times 2^{(m+1)m}+m\times 2^{-(m+1)}$$
$$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$$
$$+(2^{2m+2}-1)\times\boxed{2^{m(m+1)}}+m\times 2^{-m-1}$$
$$=\boxed{2^{m(m+1)}}\times\boxed{2^{2m+2}}-\frac{m+2}{2}\times 2^{-m}$$
$$=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times 2^{-(m+1)}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times 2^{-n}$이다.

따라서 $f(m)=2^{m(m+1)}$, $g(m)=2^{2m+2}$이므로

$$\frac{g(7)}{f(3)}=\frac{2^{16}}{2^{12}}=2^4=16$$

답 ④

34

▶ 21054-0096

다음은 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2+(n-1)^2+\cdots+3^2+2^2+1^2$$
$$=\frac{n(2n^2+1)}{3} \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=2$일 때, (좌변)$=6$, (우변)$=6$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m\ (m\ge 2)$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(m-1)^2+m^2$$
$$+(m-1)^2+\cdots+3^2+2^2+1^2$$
$$=\frac{m(2m^2+1)}{3}$$

이다.

위 등식의 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$를 더하여 정리하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(m-1)^2+m^2$$
$$+\boxed{\text{(가)}}+(m-1)^2+\cdots+3^2+2^2+1^2$$
$$=\frac{m(2m^2+1)}{3}+\boxed{\text{(가)}}$$
$$=\frac{m(2m+1)(m+1)}{3}+\boxed{\text{(나)}}$$
$$=\frac{(m+1)\{2(m+1)^2+1\}}{3}$$

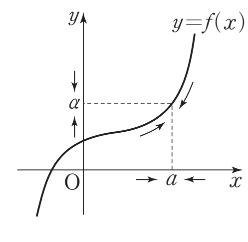
이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(3)+g(4)$의 값을 구하시오.

04 함수의 극한과 연속

1 함수의 수렴과 발산



(1) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다고 한다. 이때 α를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라 하며 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ 또는 $x \to a$일 때 $f(x) \to \alpha$

(2) ① 함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다고 하며 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha$ 또는 $x \to \infty$일 때 $f(x) \to \alpha$

② 함수 $f(x)$에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다고 하며 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\alpha$ 또는 $x \to -\infty$일 때 $f(x) \to \alpha$

(3) ① 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하며 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ 또는 $x \to a$일 때 $f(x) \to \infty$

② 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ 또는 $x \to a$일 때 $f(x) \to -\infty$

③ 함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커지거나 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하면 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2 함수의 좌극한과 우극한

(1) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 작은 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 α를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 좌극한이라 하고 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x\to a-} f(x)=\alpha$ 또는 $x \to a-$일 때 $f(x) \to \alpha$

또, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 큰 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 β에 한없이 가까워지면 β를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 우극한이라 하고 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x\to a+} f(x)=\beta$ 또는 $x \to a+$일 때 $f(x) \to \beta$

(2) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서의 좌극한 $\lim_{x\to a-} f(x)$와 우극한 $\lim_{x\to a+} f(x)$가 모두 존재하고, 그 값이 서로 같으면 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다. 또한 그 역도 성립한다. 즉 $\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x)=p \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=p$ (단, p는 실수)

3 함수의 극한에 대한 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때

(1) $\lim_{x\to a}\{kf(x)\}=k\lim_{x\to a} f(x)=k\alpha$ (단, k는 상수)

(2) $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=\alpha+\beta$

(3) $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=\alpha-\beta$

(4) $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)=\alpha\beta$

(5) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta\neq 0$)

4 미정계수의 결정

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

(1) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}=p$ (p는 실수)이고 $\lim_{x \to a} g(x)=0$이면 $\lim_{x \to a} f(x)=0$이다.

(2) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}=p$ ($p\neq0$인 실수)이고 $\lim_{x \to a} f(x)=0$이면 $\lim_{x \to a} g(x)=0$이다.

5 함수의 극한의 대소 관계

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x \to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때, a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

(1) $f(x)\leq g(x)$이면 $\alpha\leq\beta$

(2) 함수 $h(x)$에 대하여 $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x \to a} h(x)=\alpha$

6 함수의 연속과 불연속

(1) 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$

한편, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이라 한다. 즉, 위의 세 가지 조건 중 어느 하나라도 만족시키지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이라 한다.

(2) 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)의 모든 실수에 대하여 연속일 때, 함수 $f(x)$는 열린구간 (a, b)에서 연속 또는 연속함수라고 한다.

한편, 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이라고 한다.

(i) 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x \to a+} f(x)=f(a)$, $\lim_{x \to b-} f(x)=f(b)$

7 연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

(1) $cf(x)$ (단, c는 상수)

(2) $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$

(3) $f(x)g(x)$

(4) $\frac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq0$)

8 최대 · 최소 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

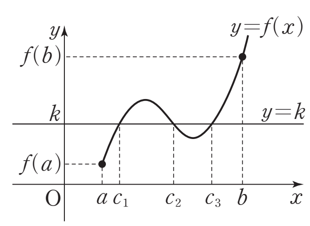
참고 함수 $f(x)$가 연속이 아니면 닫힌구간에서도 최댓값과 최솟값을 갖지 않을 수 있다.

9 사잇값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k에 대하여

$$f(c)=k$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

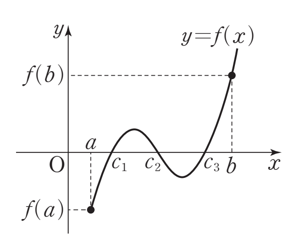


특히, 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면

$$f(c)=0$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.



04 함수의 극한과 연속

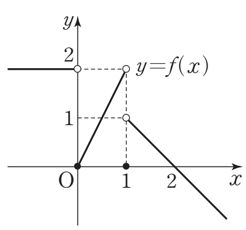
유형 1 함수의 극한값

출제유형 | 함수의 식과 그래프에서 좌극한과 우극한, 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 정의역의 범위에 따라 다르게 정의된 함수 또는 그래프에서 좌극한과 우극한, 극한값을 구하는 과정을 이해하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2020학년도 대수능 |

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0+} f(x)-\lim_{x\to 1-} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

출제 의도

그래프를 이용하여 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

주어진 그래프에서

$\lim_{x\to 0+} f(x)=0,\ \lim_{x\to 1-} f(x)=2$

이므로

$\lim_{x\to 0+} f(x)-\lim_{x\to 1-} f(x)=0-2=-2$

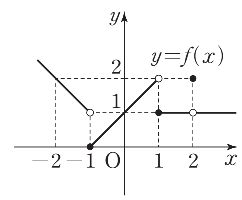
답 ①

01 ▸ 21054-0097

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,

$$\lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 2} f(x)+kf(2)$$

이다. 실수 k의 값은?



① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

02 ▸ 21054-0098

$x>-7$에서 정의된 함수 $f(x)=\begin{cases} \frac{a}{x+7} & (-7<x<1) \\ x+2 & (x\geq 1) \end{cases}$에 대하여 극한값 $\lim_{x\to 1} f(x)$가 존재하고 $\lim_{x\to b+} f(x)=\infty$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 13 ② 15 ③ 17
④ 19 ⑤ 21

03 ▸ 21054-0099

함수 $f(x)=\frac{|x-3||x-2|(x+a)}{(x-3)(x-2)}$에 대하여

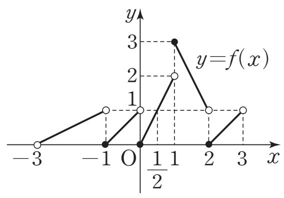
$\lim_{x\to 3+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)=10$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

04

▸ 21054-0100

집합 $X=\{x|-3<x<3$인 실수$\}$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



세 집합

$$A=\{a|\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)-1,\ a\in X\},$$
$$B=\{a|\lim_{x\to a+}f(x)>\lim_{x\to a-}f(x),\ a\in X\},$$
$$C=\{a|\lim_{x\to a+}f(x)<\lim_{x\to a-}\{f(x)\}^2,\ a\in X\}$$

에 대하여 집합 $C-(A\cup B)$는?

① $\left\{x\middle|\frac{1}{2}<x<1\right\}$
② $\{x|0<x<1\}\cup\left\{x\middle|1<x<\frac{3}{2}\right\}$
③ $\left\{x\middle|\frac{1}{2}<x<1\right\}\cup\{x|1<x<2\}$
④ $\left\{x\middle|\frac{1}{2}<x<1\right\}\cup\left\{x\middle|1<x<\frac{5}{2}\right\}$
⑤ $\left\{x\middle|\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}\right\}$

05

▸ 21054-0101

실수 전체의 집합에서 정의되어 있는 함수 $f(x)$가 임의의 정수 a에 대하여 $a-1\le x<a$일 때,

$f(x)=ax$

이다. $\lim_{x\to(p+2)-}f(x)-\lim_{x\to p+}f(x)=157$일 때, 정수 p의 값은?

① 51　② 52　③ 53
④ 54　⑤ 55

유형 2 함수의 극한에 대한 성질

출제유형 | 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 함수의 합, 차, 곱, 몫의 극한값을 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2018학년도 대수능 |

함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to1}(x+1)f(x)=1$을 만족시킬 때, $\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)=a$이다. $20a$의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 함수의 극한을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\lim_{x\to1}(x+1)f(x)=1$이므로

$g(x)=(x+1)f(x)$로 놓으면

$\lim_{x\to1}g(x)=1$

$x\ne-1$일 때, $f(x)=\frac{g(x)}{x+1}$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)&=\lim_{x\to1}\left\{(2x^2+1)\times\frac{g(x)}{x+1}\right\}\\&=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+1}{x+1}\times\lim_{x\to1}g(x)\\&=\frac{3}{2}\times1=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

따라서 $20a=20\times\frac{3}{2}=30$

답 30

수학 Ⅱ

06

▸ 21054-0102

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to1} f(x)=4,\ \lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x}=k$$

일 때, $\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^2-(x+2)g(x)}{f(x)g(x)+2g(x)}=\frac{1}{3}$이다. 상수 k의 값은?

① $\frac{16}{5}$ ② $\frac{17}{5}$ ③ $\frac{18}{5}$
④ $\frac{19}{5}$ ⑤ 4

07

▸ 21054-0103

최고차항의 계수가 1인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 x축 위의 한 점 $(a,\ 0)$ ($a\neq2$인 상수)에서만 만난다.

$$\lim_{x\to2} f(x)=0,\ \lim_{x\to1}\{f(x)+2g(x)\}=0,\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{3}$$

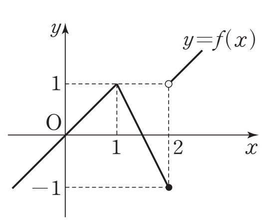
일 때, $\lim_{x\to0} f(x)g(x)$의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

08

▸ 21054-0104

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to1} f(x+1)g(x)$, $\lim_{x\to2} f(x)g(x+1)$의 값이 모두 존재할 때, $g(5)$의 값을 구하시오.



유형 3 $\frac{0}{0}$ 꼴과 $0\times\infty$ 꼴의 극한값의 계산

출제유형 | $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=0$일 때, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값을 구하는 문제와 $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$일 때, $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값은 분수 꼴의 식은 분모, 분자를 각각 인수분해하여 약분하고 무리식은 분모 또는 분자를 유리화하여 약분하여 해결한다.
(2) $0\times\infty$ 꼴의 극한값은 분수 꼴의 식은 통분하여 인수분해하고 무리식은 유리화하여 해결한다.

필수 유형 | 2016학년도 대수능 |

$\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2+5)}{x+2}$의 값은? [2점]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

출제 의도

$\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$$\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2+5)}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x^2+5)$$
$$=(-2)^2+5=9$$

답 ③

09

▸ 21054-0105

$\lim_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+4)+x^4-16}{x-2}$의 값은?

① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

10

▸ 21054-0106

$\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^3+x} - \dfrac{1}{x^2+x} + \dfrac{2}{x^3+x^2+x+1} \right)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

11

▸ 21054-0107

두 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x+a}$, $g(x)=\sqrt{x+b}-1$에 대하여

$$\lim_{x \to 2+} f(x)=\infty,\ \lim_{x \to 5} f(x)g(x)=\frac{1}{3}$$

이다. $\lim_{x \to 2} f(x)g(x)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{1}{4}$ ③ 0
④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

유형 4 $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 계산

출제유형 | $\lim_{x \to a} f(x)=\infty$, $\lim_{x \to a} g(x)=\infty$일 때, $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$의 값을 구하는 문제와 $\lim_{x \to a} \{f(x)-g(x)\}$의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나누어 해결하고 $\infty-\infty$ 꼴의 무리식의 극한값은 분모 또는 분자의 무리식을 유리화하여 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형하여 해결한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 |

상수항과 계수가 모두 정수인 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값은? [4점]

(가) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)g(x)}{x^3}=2$

(나) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)g(x)}{x^2}=-4$

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

출제 의도

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

조건 (가)에서 다항함수 $f(x)g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이고 조건 (나)에서 다항함수 $f(x)g(x)$는 x^2을 인수로 가져야 하므로

$f(x)g(x)=x^2(2x+a)$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 $a=-4$이므로

$f(x)g(x)=2x^2(x-2)$

이때 $f(2)$가 최대가 되는 $f(x)$는

$f(x)=2x^2$

이므로 구하는 최댓값은

$f(2)=2\times2^2=8$

답 ③

수학 Ⅱ

12

▶ 21054-0108

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^6+2x^4+4x^3}-x^3-x)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

13

▶ 21054-0109

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 부등식

$$\frac{5}{x^2+10}\le x^2f(x)\le\frac{5}{x^2+1}$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}(2x^4+5)f(x)$의 값을 구하시오.

14

▶ 21054-0110

함수 $f(x)=\sum_{k=1}^{200}x^k$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{3n^2}(x^{4n}+x^{3n})}{f(x)}$이 수렴하도록 하는 모든 자연수 n의 개수를 구하시오.

유형 5 미정계수의 결정

출제유형 | 함수의 극한에 대한 조건이 주어질 때, 미정계수를 구하거나 함숫값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=p$ (p는 실수)일 때

① $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$

② $p\ne0$이고 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$

필수 유형 | 2020학년도 대수능 9월 모의평가 |

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1,\ \lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=2$$

를 만족시킨다. $f(1)\le12$일 때, $f(2)$의 최댓값은? [4점]

① 27 ② 30 ③ 33
④ 36 ⑤ 39

출제 의도

극한의 성질을 이용하여 함수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$이므로 다항함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다. …… ㉠

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=2$에서 $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

이때 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=2$에서

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2+ax+b)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x^2+ax+b)$$
$$=1-a+b=2$$

이므로 $b=a+1$

이때 $f(1)=2(1+a+b)=2(2a+2)=4(a+1)\le12$, $a\le2$

따라서

$f(2)=3(4+2a+b)=3(3a+5)\le3(3\times2+5)=33$

(단, 등호는 $a=2$일 때 성립한다.)

이므로 $f(2)$의 최댓값은 33이다.

답 ③

15

▸ 21054-0111

$\lim_{x\to 3}\frac{x^3+ax^2-3x}{(x-3)(x+b)}=12$일 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① -8 ② -7 ③ -6
④ -5 ⑤ -4

16

▸ 21054-0112

$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+2ax+a+b}=-\frac{1}{2}$일 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

17

▸ 21054-0113

$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}{\sqrt{x+b}-2}=16$일 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

18

▸ 21054-0114

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여

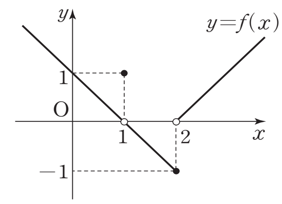
$\lim_{x\to -2}\frac{(x+1)f(x)}{x+2}=0$일 때, $f(3)$의 값은?

① 22 ② 23 ③ 24
④ 25 ⑤ 26

19

▸ 21054-0115

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)}{f(x+1)}$와 $\lim_{x\to 2+}\frac{g(x+1)}{f(x)}$의 값이 모두 존재할 때, $g(6)$의 값을 구하시오.

20

▸ 21054-0116

최고차항의 계수가 소수인 자연수 a인 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=8$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 근이 음이 아닌 서로 다른 세 정수일 때, $a+f(5)$의 값은?

① 36 ② 38 ③ 40
④ 42 ⑤ 44

수학 Ⅱ

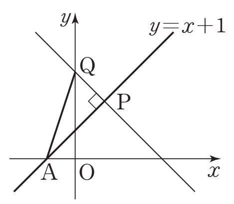
유형 6 함수의 극한의 활용

출제유형 | 좌표평면에서의 여러 도형의 선분의 길이, 도형의 넓이에 대한 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 도형에서 구하는 극한값에 관련된 선분의 길이, 도형의 넓이를 한 문자에 대한 식으로 나타내어 극한값을 구한다.

필수 유형 | 2012학년도 대수능 |

그림과 같이 직선 $y=x+1$ 위에 두 점 $\mathrm{A}(-1, 0)$과 $\mathrm{P}(t, t+1)$이 있다. 점 P를 지나고 직선 $y=x+1$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}$의 값은? [3점]



① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

출제 의도

그래프에서 함수의 극한을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

직선 $y=x+1$과 수직인 직선의 기울기는 -1이므로

점 $\mathrm{P}(t, t+1)$을 지나는 직선 PQ의 방정식은

$y-(t+1)=-(x-t)$, 즉 $y=-x+2t+1$

이때 직선 PQ가 y축과 만나는 점이 Q이므로 점 Q의 좌표는

$(0, 2t+1)$

따라서

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(t+1)^2+(t+1)^2=2t^2+4t+2$,

$\overline{\mathrm{AQ}}^2=1^2+(2t+1)^2=4t^2+4t+2$

이므로

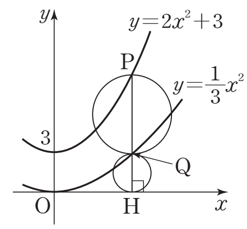
$$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t+2}{2t^2+4t+2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}{2+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}=2$$

답 ③

21

▸ 21054-0117

그림과 같이 곡선 $y=2x^2+3$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, 2t^2+3)$에서 x축에 내린 수선이 곡선 $y=\frac{1}{3}x^2$과 만나는 점을 Q, x축과 만나는 점을 H라 하자. 선분 PQ를 지름으로 하는 원의 둘레의 길이를 $A(t)$, 선분 QH를 지름으로 하는 원의 둘레의 길이를 $B(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{A(t)}{B(t)}$의 값은? (단, $t>0$)



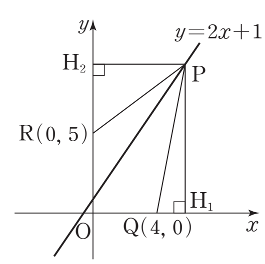
① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$

22

▸ 21054-0118

좌표평면에 직선 $y=2x+1$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, 2t+1)$과 두 점 $\mathrm{Q}(4, 0)$, $\mathrm{R}(0, 5)$가 있다. 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 할 때, 삼각형 PQH_1과 삼각형 $\mathrm{PH}_2\mathrm{R}$의 넓이를 각각 $A(t)$, $B(t)$라 하자.

$\lim_{t\to 4+}\frac{tA(t)}{(t-4)B(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{A(t)}{B(t)}$의 값은? (단, $t>4$)

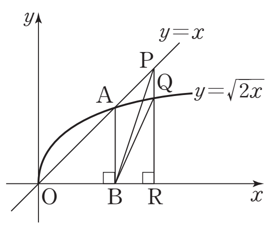


① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{11}{4}$ ④ 3 ⑤ $\frac{13}{4}$

23

▸ 21054-0119

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{2x}$와 직선 $y=x$가 만나는 원점이 아닌 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하고, 직선 $y=x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t)\ (t>2)$에 대하여 점 P를 지나고, x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\sqrt{2x}$, x축과 만나는 점을 각각 Q, R라 할 때, $\lim\limits_{t\to2+}\dfrac{\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{QB}}}{\overline{\mathrm{BR}}\times\overline{\mathrm{OR}}}$의 값은? (단, O는 원점이다.)



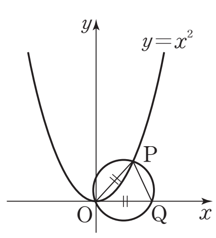
① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{3}{4}$

④ 1　⑤ $\dfrac{5}{4}$

24

▸ 21054-0120

그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)\ (t>0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}$가 되도록 점 Q를 x축의 양의 방향에 잡는다. 삼각형 POQ의 외접원의 지름의 길이를 $A(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\{A(t)\}^2}{t^4}$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$

④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

유형 7 함수의 연속

출제유형 | 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이기 위한 조건을 이용하여 함수의 미정계수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있고

(ii) 극한값 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$가 존재하며

(iii) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

필수 유형

| 2018학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+a}{x-3} & (x\neq3)\\ b & (x=3)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은?

(단, a와 b는 상수이다.) [4점]

① 1　② 3　③ 5

④ 7　⑤ 9

출제 의도

함수가 연속이 될 조건을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to3}f(x)=f(3)$을 만족시키면 된다.

즉, $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+a}{x-3}=b$가 성립해야 하고 $x\to3$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to3}(x^2-5x+a)=9-15+a=0$에서 $a=6$

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}\\&=\lim_{x\to3}\frac{(x-2)(x-3)}{x-3}\\&=\lim_{x\to3}(x-2)=1\end{aligned}$$

따라서 $a+b=6+1=7$

답 ④

정답과 풀이 30쪽

25

▸ 21054-0121

함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+a}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}} & (x\neq 0) \\ b & (x=0) \end{cases}$$

이 $x=0$에서 연속일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

26

▸ 21054-0122

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x-1)f(x)=x^2+4x-5+2g(x)$$

를 만족시킨다. $f(1)=-6$일 때, $f(10)$의 값은?

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

27

▸ 21054-0123

함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^{n+15}(1+x^{2n+1})}{x^{2n+1}} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 자연수 n의 최댓값을 구하시오.

28

▸ 21054-0124

함수

$$f(x)=\begin{cases} \left|-\dfrac{2}{x}-2\right| & (x<-1) \\ -x^2+k_1 & (-1\le x<1) \\ \left|\dfrac{2}{x}+k_2\right| & (x\ge 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 연속이다.
(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(a)$라 할 때, 함수 $g(a)$는 $a=t$에서 불연속이다.

모든 실수 t의 값의 합은? (단, k_1, k_2, a는 실수이다.)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

29

▸ 21054-0125

자연수 n에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x<0) \\ \dfrac{3}{8}\left(b-\dfrac{3}{4}n\right)x & \left(0\le x<\dfrac{8}{3}\right) \\ 3x-8 & \left(x\ge\dfrac{8}{3}\right) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 실수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 p, 모든 실수 b의 값의 합을 q라 할 때, $q-p$의 값은?

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 두 실수 a, b에 대하여 $0<a+b<10$이다.

① $\frac{221}{4}$ ② $\frac{111}{2}$ ③ $\frac{223}{4}$ ④ 56 ⑤ $\frac{225}{4}$

유형 8 연속함수의 성질

출제유형 | 연속함수의 합, 차, 곱, 몫의 성질을 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

① $cf(x)$ (단, c는 상수) ② $f(x)\pm g(x)$

③ $f(x)g(x)$ ④ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq 0$)

필수 유형 | 2017학년도 대수능 |

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6 & (x<2) \\ 1 & (x\geq 2) \end{cases},$$

$$g(x)=ax+1$$

에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $-\dfrac{5}{4}$ ② -1 ③ $-\dfrac{3}{4}$

④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ $-\dfrac{1}{4}$

출제 의도

함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$x<2$일 때, $f(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2>0$

$x\geq 2$일 때, $f(x)=1>0$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이다.

함수 $f(x)$는 $x=2$에서만 연속이 아니므로 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=2$에서 연속이면 된다. 즉,

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2-}\frac{ax+1}{x^2-4x+6}=\frac{2a+1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2+}\frac{ax+1}{1}=2a+1$$

$$\frac{g(2)}{f(2)}=2a+1$$

에서 $\dfrac{2a+1}{2}=2a+1$이므로

$2a+1=4a+2$, $2a=-1$

따라서 $a=-\dfrac{1}{2}$

답 ④

30

▸ 21054-0126

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=2$에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)>0$, $g(2)=1$

(나) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\{f(x)\}^2-g(x)}{x^2+2f(x)+g(x)}=3$

$f(2)+\displaystyle\lim_{x\to 2}g(x)$의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9

④ 10 ⑤ 11

31

▸ 21054-0127

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax-1 & (x\leq -1,\ x\geq 1) \\ x+b & (-1<x<1) \end{cases},$$

$$g(x)=2x+1$$

에 대하여 함수 $f(x)+g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $3a+2b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

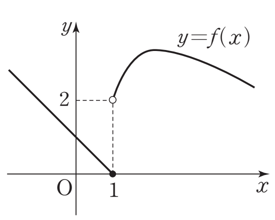
① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

32

▸ 21054-0128

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 함수 $g(x)=(x^2+a)f(x)$가 $x=1$에서 연속이기 위한 상수 a의 값은?



① -2 ② -1 ③ 0

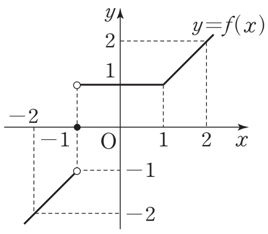
④ 1 ⑤ 2

수학 Ⅱ

33

▸ 21054-0129

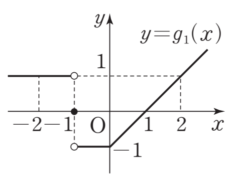
함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



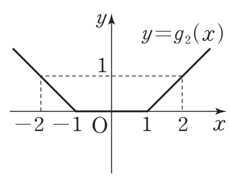
보기에 주어진 세 함수 $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ 중 함수 $y=f(x)g_k(x)$ $(k=1,\ 2,\ 3)$이 구간 $(-2,\ 2)$에서 연속인 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

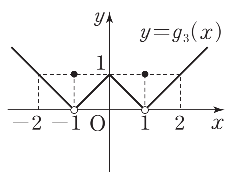
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

34

▸ 21054-0130

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x+3 & (x<1) \\ x^2+ax+4 & (x\ge 1) \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} x+2a & (x<1) \\ -x-1 & (x\ge 1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① $-\dfrac{9}{2}$　② -3　③ -2
④ -1　⑤ $-\dfrac{1}{2}$

35

▸ 21054-0131

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$를 만족시키는 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+k & (-1\le x<0) \\ x^2+3 & (0\le x<1) \end{cases}$$

과 $g(x)=f(x)+(k+1)f(x+1)$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$의 값은? (단, k는 상수이다.)

(가) $f(-1)>0$
(나) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① $\dfrac{4}{3}$　② $\dfrac{5}{3}$　③ 2
④ $\dfrac{7}{3}$　⑤ $\dfrac{8}{3}$

36

▸ 21054-0132

실수 a에 대하여 이차함수 $y=3x^2-2ax+a$의 그래프와 x축의 교점의 개수를 $f(a)$라 할 때, a에 대한 함수 $g(a)$에 대하여 다음 명제가 성립한다.

함수 $\dfrac{1}{2}g(a)-8$이 $a=3$에서 연속이면
함수 $f(a)\left\{\dfrac{1}{2}g(a)-8\right\}$이 $a=3$에서 연속이다.

함수 $\dfrac{1}{2}g(a)-8$이 $a=3$에서 연속일 때, $g(3)$의 값을 구하시오.

유형 9 최대, 최소 정리와 사잇값의 정리

출제유형 | 최대, 최소 정리 또는 사잇값의 정리를 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,
(1) 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.
(2) $f(a)f(b)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

필수 유형

사차함수 $f(x)=x^4-10x^2+a$가 다음 조건을 만족시킬 때, 자연수 a의 최댓값을 구하시오.

> 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, 2)$에서 양의 근 1개와 음의 근 1개를 갖는다.

출제 의도

사잇값의 정리를 이용하여 함수의 미정계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$f'(x)=4x^3-20x=4x(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$
열린구간 $(-\sqrt{5}, 0)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
함수 $f(x)=x^4-10x^2+a$에서 $f(0)>0$이므로 $f(-2)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, 0)$에서 음의 근 1개를 갖는다.
$f(-2)f(0)=a(a-24)<0$에서
$0<a<24$ …… ㉠
또한 열린구간 $(0, \sqrt{5})$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다. $f(0)>0$이고 $f(2)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 2)$에서 양의 근 1개를 갖는다.
$f(2)f(0)=a(a-24)<0$에서
$0<a<24$ …… ㉡
㉠과 ㉡에서 $0<a<24$
따라서 구하는 자연수 a의 최댓값은 23이다.

답 23

37

▸ 21054-0133

삼차방정식 $x^3+ax+1=0$이 세 열린구간 $(-2, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 실근을 가지도록 하는 정수 a의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

38

▸ 21054-0134

$-12\le x\le 12$에서 정의되고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $-2\le x\le 2$에서 $f(x)=3$과 $f(x)=-3$을 만족시키는 x의 값은 각각 오직 한 개씩 있다.
> (나) $-12\le x\le 8$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+4)$이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

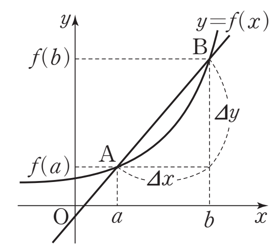
보기
ㄱ. $f(-2)=f(2)$
ㄴ. 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은 0이다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 적어도 12이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

수학 Ⅱ

05 다항함수의 미분법

1 평균변화율

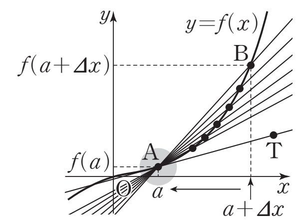


(1) 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\ (\text{단, } \Delta x=b-a)$$

(2) 평균변화율 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기를 나타낸다.

2 미분계수



(1) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

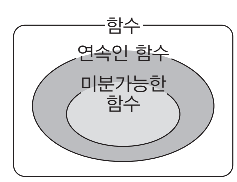
(2) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기를 나타낸다.

참고 (1) $f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$에서 Δx 대신에 h를 이용하여 간단히 나타낼 수 있다. 즉,

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(2) $\Delta x\to 0$일 때 점 B의 x좌표가 a에 한없이 가까워지므로 점 B는 곡선 $y=f(x)$를 따라 점 A에 한없이 가까워진다. 이때 직선 AB는 점 A를 지나는 일정한 직선 AT에 한없이 가까워지는데 이 직선 AT를 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이라 하고, 점 A는 접점이라고 한다.

3 미분가능성과 연속성



(1) 함수 $f(x)$에 대하여 $x=a$에서 미분계수 $f'(a)$가 존재할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

(2) 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다. 또한 함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$를 미분가능한 함수라고 한다.

(3) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.
그러나 위 명제의 역인 '함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.'는 반드시 성립하는 것은 아니다.

참고 미분계수 $f'(a)$가 존재한다는 뜻은 $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$이므로 극한값 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 존재한다는 것이고, 극한값 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 존재한다는 것은 좌극한값 $\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$와 우극한값 $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 모두 존재하고 서로 같아야 한다는 뜻이다.

4 도함수

(1) 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여 각각의 미분계수 $f'(x)$를 대응시키는 함수를 함수 $y=f(x)$의 도함수라 하고, 이것을 기호로 $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$와 같이 나타낸다.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(2) 함수 $y=f(x)$에서 그 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 함수 $y=f(x)$를 x에 대하여 미분한다고 하고, 그 계산법을 미분법이라고 한다.

5 미분법의 공식

(1) 함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)와 상수함수의 도함수

① $y=x^n$ ($n\geq 2$인 정수)이면 $y'=nx^{n-1}$　② $y=x$이면 $y'=1$　③ $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$

(2) 함수의 실수배, 합, 차의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

① $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (단, c는 상수)　② $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$　③ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

(3) 함수의 곱의 미분법

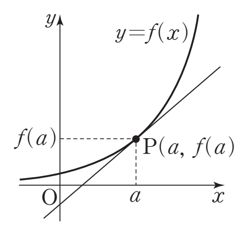
두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

6 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$



7 평균값 정리

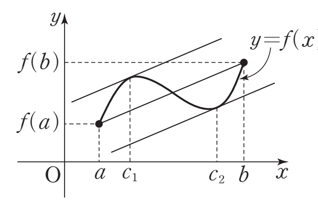
(1) 롤의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면 $f'(c)=0$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

(2) 평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.



8 함수의 증가와 감소

(1) 함수의 증가와 감소: 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

① $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)<f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다고 한다.

② $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)>f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다고 한다.

(2) 함수의 증가와 감소의 판정: 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

① $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

참고 위의 명제의 역이 반드시 성립하는 것은 아니다. 함수 $f(x)=x^3$은 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하지만 $f'(0)=0$이다.

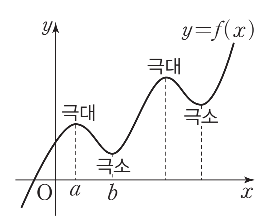
9 함수의 극대와 극소

(1) 함수의 극대와 극소: 함수 $f(x)$에서

① $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)\leq f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하고, $f(a)$를 극댓값이라고 한다.

② $x=b$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)\geq f(b)$이면 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극소라 하고, $f(b)$를 극솟값이라고 한다.

이때 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.



(2) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

(3) 미분가능한 함수 $f(x)$의 극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

① 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

② 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

10 함수의 그래프

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그릴 때에는 다음과 같은 단계를 따르면 편리하다.

① 도함수 $f'(x)$를 구하고 $f'(x)=0$인 x의 값을 구한다.

② $f'(x)$의 부호 변화를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 극값을 구한다.

③ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 좌표축과의 교점의 좌표 등을 조사하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그린다.

11 함수의 최대와 최소

(1) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 이 구간에서 함수 $f(x)$는 반드시 최댓값과 최솟값을 가지므로 다음과 같은 방법으로 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 찾는다.

① 닫힌구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 모두 구한다.

② 닫힌구간 $[a, b]$에서의 양 끝의 함숫값 $f(a)$와 $f(b)$를 구한다.

③ ①, ②에서 구한 값 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

(2) 함수의 최대와 최소의 활용

도형의 길이, 넓이, 부피 등의 최댓값과 최솟값은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

① 주어진 조건에 따라 적당한 변수를 정하여 미지수 x로 놓고 x의 값의 범위를 구한다.

② 도형의 길이, 넓이, 부피 등을 x에 대한 함수 $f(x)$로 나타낸다.

③ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 ①에서 구한 x의 값의 범위에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

12 방정식에의 활용

(1) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표이다.

(2) 방정식 $f(x)=k$ (k는 상수)의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 x좌표이다.

(3) 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표이다.

참고 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 즉 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때 삼차방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 다음과 같다.

① (극댓값)$\times$(극솟값)>0이면 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

② (극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이면 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

③ (극댓값)$\times$(극솟값)<0이면 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

13 부등식에의 활용

(1) 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\ge 0$이 성립하는 것을 증명할 때에는 주어진 구간에서 함수 $y=f(x)$의 최솟값을 구하여 (최솟값)≥ 0임을 보이면 된다.

(2) 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\ge g(x)$가 성립하는 것을 증명할 때에는 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하고, 주어진 구간에서 함수 $h(x)$의 최솟값을 구하여 (최솟값)≥ 0임을 보이면 된다.

14 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도 v와 가속도 a는

(1) $v=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=f'(t)$

(2) $a=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$

05 다항함수의 미분법

유형 1 미분계수의 정의

출제유형 | 주어진 극한값의 식을 변형하여 미분계수를 구하거나 미분계수의 기하적 의미가 접선의 기울기임을 이해하여 미분계수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 미분계수의 정의를 여러 가지 방식으로 변형할 수 있어야 하고 미분계수가 곡선에 접하는 접선의 기울기임을 이해하고 활용할 줄 알아야 한다.

(1) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+kh)-f(a)}{kh}$$ (단, k는 0이 아닌 상수)

(2) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기가 p이면

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=p$$

필수 유형

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)=x^3f(x)-7$

(나) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=2$

$f(2)+g(2)+f'(2)-g'(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

출제 의도

미분계수의 정의와 변형을 이해하고 활용할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

조건 (나)에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

또한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다항함수이므로 $x=2$에서 연속이다.

그러므로 $\lim_{x\to 2}\{f(x)-g(x)\}=0$에서

$f(2)=g(2)$ …… ㉠

조건 (가)의 식에 $x=2$를 대입하면

$g(2)=8f(2)-7$이고 ㉠에 의하여

$g(2)=8g(2)-7$에서 $g(2)=1$

$f(2)=g(2)=1$

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to 2}\frac{\{f(x)-f(2)\}-\{g(x)-g(2)\}}{x-2}=f'(2)-g'(2)=2$$

따라서 $f(2)+g(2)+f'(2)-g'(2)=1+1+2=4$

답 ④

01 ▸ 21054-0135

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(1)=3$일 때,

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

02 ▸ 21054-0136

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(4+3h)-5}{h}=2$일 때,

$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-5}{x^2-16}$의 값은?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

03 ▸ 21054-0137

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 2}f(x)=4$

(나) $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)g(2+3h)-f(2+h)g'(2)}{h}=6$

$g'(2)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

수학 Ⅱ

유형 2 미분가능과 연속

출제유형 | 함수가 특정한 x의 값에서 미분가능한지, 즉 미분계수가 존재하는지에 대하여 묻는 문제, 구간에 따라 주어진 함수가 다르고 미정계수를 포함한 함수가 미분가능함을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$에 대하여
$\lim_{x \to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$이면 미분계수 $f'(a)$가 존재하고, 미분가능하면 연속임을 이용한다.

필수 유형 | 2018학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & (x \le -2) \\ 2x & (x>-2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은?
(단, a와 b는 상수이다.) [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

출제 의도

미분가능하면 연속임을 이해하고 활용할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

주어진 함수는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-2$에서 미분가능하다.
또한 $x=-2$에서 미분가능하면 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x \to -2-} f(x) = \lim_{x \to -2+} f(x) = f(-2)$

$\lim_{x \to -2-} (x^2+ax+b) = 4-2a+b$, $\lim_{x \to -2+} 2x = -4$

$f(-2)=4-2a+b$

에서 $4-2a+b=-4$, $b=2a-8$ …… ㉠

이때

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0-} \frac{\{(-2+h)^2+a(-2+h)+(2a-8)\}+4}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0-} \frac{h^2+(a-4)h}{h} = \lim_{h \to 0-} (h+a-4) = a-4$$
$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{2(-2+h)+4}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0+} \frac{2h}{h} = 2$$

이므로 $a-4=2$에서 $a=6$
㉠에서 $b=4$이므로
$a+b=10$

답 ⑤

04

▸ 21054-0138

함수

$$f(x)=\begin{cases} (x+2)^2(x-2) & (x<2) \\ x^2+ax+b & (x \ge 2) \end{cases}$$

가 $x=2$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)

① -12 ② -14 ③ -16
④ -18 ⑤ -20

05

▸ 21054-0139

함수

$$f(x)=\begin{cases} a(1-x)+b & (x<2) \\ x^3+ax & (x \ge 2) \end{cases}$$

가 $x=2$에서 미분가능할 때, $a-b$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

06

▸ 21054-0140

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$와 $k>1$인 상수 k에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} 4 & (x \le 1) \\ f(x) & (1<x \le k) \\ c & (x>k) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a-b+c-k$의 값은?
(단, a, b, c는 상수이다.)

① -14 ② -16 ③ -18
④ -20 ⑤ -22

유형 3 도함수와 미분법

출제유형 | 미분법을 이용하여 미분계수를 구하거나 조건을 만족시키는 함수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 도함수를 구하고 이 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있어야 하며 여러 변형된 식에서도 활용할 수 있어야 한다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

(1) $y=x^n$ ($n\ge 2$인 정수)이면 $y'=nx^{n-1}$

(2) $y=x$이면 $y'=1$

(3) $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$

(4) $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (단, c는 상수)

(5) $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

(6) $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

(7) $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수 $f(x)=x^3-3x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율이 $f'(2)$의 값과 같게 되도록 하는 양수 a의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

평균변화율과 미분계수를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{a^3-3a^2+5a}{a}$$
$$=a^2-3a+5$$

또 $f'(x)=3x^2-6x+5$이므로

$f'(2)=12-12+5=5$

따라서 $a^2-3a+5=5$에서

$a(a-3)=0$

$a=0$ 또는 $a=3$

$a>0$이므로 $a=3$

답 3

07

▸ 21054-0141

함수 $f(x)=(x^3+2x)(x^2-x+1)$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

08

▸ 21054-0142

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+a^2x+b$가 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{2}$을 만족시킬 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

09

▸ 21054-0143

삼차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=g(1)$, $f'(1)=g'(1)$
(나) $f'(-1)=8$, $g'(1)=-g'(3)=4$

$f(2)-g(2)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

수학 Ⅱ

유형 4 접선의 방정식

출제유형 | 곡선 위의 점에서의 접선의 기울기와 미분계수가 같음을 이용하여 접점의 좌표, 접선의 기울기, 접선의 방정식을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기가 $f'(t)$임을 이해하고 이를 이용하여 여러 형태로 제시된 문제를 해결할 수 있어야 한다. 특히 접선의 방정식은 직선의 방정식임을 이해하고 여러 가지 도형의 성질을 함께 활용할 수 있어야 한다.

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

곡선 $y=x^3-6x^2+6$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선이 점 $(0,\ a)$를 지날 때, a의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

미분계수를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$y=x^3-6x^2+6$에서

$y'=3x^2-12x$이므로 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$3\times1^2-12\times1=-9$

따라서 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=-9(x-1)$

$y=-9x+10$

이 접선이 점 $(0,\ a)$를 지나므로

$a=-9\times0+10=10$

답 10

10 ▸ 21054-0144

곡선 $y=x^3+3x-1$ 위의 점 $(1,\ 3)$을 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선이 점 $(a,\ 1)$을 지날 때, a의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

11 ▸ 21054-0145

함수 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 접선이 점 $(3,\ f(3))$을 지날 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

12 ▸ 21054-0146

두 함수 $f(x)=x^3+3x-2$, $g(x)=x^2+ax+b$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$에서 만나고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 A에서의 접선과 일치할 때, $g(-1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -5 ② -6 ③ -7
④ -8 ⑤ -9

13

▸ 21054-0147

직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위의 점 $\left(a,\ \frac{1}{2}a\right)$에서 곡선 $y=x^2+2x+2$에 그은 서로 다른 두 접선의 접점을 각각 A, B라 할 때, 직선 AB는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(p,\ q)$를 지난다. $p+q$의 값은?

① $\frac{3}{4}$　② $\frac{5}{4}$　③ $\frac{7}{4}$　④ $\frac{9}{4}$　⑤ $\frac{11}{4}$

14

▸ 21054-0148

함수 $f(x)=x^3+3x$에 대하여 두 점 $A(0,\ f(0))$, $B(3,\ f(3))$을 지나는 직선의 기울기와 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $C(c,\ f(c))$ $(0<c<3)$에서의 접선의 기울기가 서로 같을 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선을 l이라 하자. 직선 l이 곡선 $y=-x^2+6x+k$와 서로 다른 두 점 D, E에서 만나고 $\overline{AB}=\overline{DE}$일 때, $k=p+q\sqrt{3}$이다. $p-q$의 값은?

(단, k는 상수이고, p, q는 유리수이다.)

① $-\frac{1}{4}$　② $-\frac{1}{2}$　③ $-\frac{3}{4}$　④ -1　⑤ $-\frac{5}{4}$

유형 5 함수의 증가와 감소

출제유형 | 주어진 조건이나 그래프 등을 이용하여 함수의 증가와 감소를 판단하는 다양한 형태의 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건이나 그래프 등을 이용하여 함수가 증가하거나 감소할 조건을 구할 수 있어야 한다.

함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

(1) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

(2) $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

필수 유형　| 2016학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+3$이 열린구간 $(-a,\ a)$에서 감소할 때, 양수 a의 최댓값을 구하시오. [4점]

출제 의도

함수의 증가와 감소를 이해할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+3$에서

$f'(x)=x^2-9=(x+3)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=3$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	21	$\searrow$	-15	$\nearrow$

$-3<x<3$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로 열린구간 $(-a,\ a)$에서 함수 $f(x)$가 감소하기 위한 양수 a의 최댓값은 3이다.

답 3

15 ▸ 21054-0149

함수 $f(x)=x^3-12x^2+ax+1$이 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값은?

① 42 ② 44 ③ 46
④ 48 ⑤ 50

16 ▸ 21054-0150

함수 $f(x)=x^3+kx^2+3$이 열린구간 $(1,\ 4)$에서 감소할 때, 실수 k의 최댓값은?

① -6 ② -7 ③ -8
④ -9 ⑤ -10

17 ▸ 21054-0151

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 최댓값은?

(가) $f(0)=f'(1)$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq f'(1)$
(다) 열린구간 $(-1,\ 2)$에 속하는 임의의 서로 다른 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $(x_1-x_2)\{f(x_1)-f(x_2)\}\leq 0$이다.

① -31 ② -33 ③ -35
④ -37 ⑤ -39

유형 6 함수의 극대와 극소

출제유형 | 주어진 조건이나 그래프 등을 이용하여 함수의 극대, 극소를 판단하거나 함수의 극댓값, 극솟값을 구하는 다양한 형태의 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건이나 그래프 등을 이용하여 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있어야 한다.

(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.
(2) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가
① 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.
② 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+mx+1$이 $x=3$에서 극대일 때, 상수 m의 값은? [3점]

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

출제 의도

미분을 이용하여 함수가 극대일 조건을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+mx+1$에서
$f'(x)=-x^2+4x+m$
이때 함수 $f(x)$가 미분가능한 함수이고 $x=3$에서 극대이므로
$f'(3)=0$이다.
$f'(3)=-9+12+m=0$
따라서 $m=-3$

답 ①

18

▸ 21054-0152

함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x+a$의 극솟값이 -2일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a는 상수이다.)

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

19

▸ 21054-0153

함수 $f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+a$의 모든 극값의 합이 $\frac{2}{3}$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$
④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

20

▸ 21054-0154

함수 $f(x)=x^3-ax^2+(a^2-3a)x+1$이 극값을 갖도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

21

▸ 21054-0155

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=-f'(-x)$이다.
(나) $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $y=f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가질 때 세 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$, $(2,\ f(2))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는? (단, $\alpha\neq2$, $\beta\neq2$)

① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

22

▸ 21054-0156

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(가) $f(1)=f'(1)=0$
(나) 0이 아닌 실수 k에 대하여 함수 $|g(x)-3|$은 $x=k$, $x=-k$에서만 미분가능하지 않다.
(다) 열린구간 $(0,\ 1)$에 속하는 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1)f'(x_2)>0$이다.

보기

ㄱ. $f(0)>0$이면 함수 $|g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
ㄴ. 함수 $g(x)$는 항상 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $f(2)$의 최댓값은 19이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

수학Ⅱ

유형 7 함수의 그래프와 최대, 최소

출제유형 | 다양하게 주어진 조건을 이용하여 그래프를 추론하고 닫힌구간에서 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제와 도형의 길이, 넓이, 부피의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제 등이 출제된다.

출제유형잡기 | 그래프를 추론하고 닫힌구간에서 극댓값, 극솟값을 구하고 닫힌구간의 양 끝 값에서의 함숫값과 비교하여 최댓값과 최솟값을 구한다. 도형의 길이, 넓이, 부피 등의 최댓값과 최솟값은 주어진 조건에 따라 미지수 x를 정하고 구하고자 하는 값을 x에 대한 함수 $f(x)$로 나타내어 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

필수 유형 | 2017학년도 대수능 6월 모의평가 |

양수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$가 닫힌구간 $[-a, a]$에서 최댓값 M, 최솟값 $\frac{14}{27}$를 갖는다. $a+M$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

함수의 그래프에서 극대와 극소를 활용하여 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(x+a)(3x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-a$ 또는 $x=\frac{a}{3}$

닫힌구간 $[-a, a]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-a$	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	a
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	

함수 $f(x)$는 $x=\frac{a}{3}$에서 극소이면서 최소이다.

$$f\left(\frac{a}{3}\right)=\left(\frac{a}{3}\right)^3+a\times\left(\frac{a}{3}\right)^2-a^2\times\frac{a}{3}+2$$
$$=-\frac{5}{27}a^3+2$$

$-\frac{5}{27}a^3+2=\frac{14}{27}$에서 $a^3=8$, $a=2$

$f(x)=x^3+2x^2-4x+2$에서

$f(2)=2^3+2\times2^2-4\times2+2=10$

$f(-2)=(-2)^3+2\times(-2)^2-4\times(-2)+2=10$

이므로 $M=10$

따라서 $a+M=2+10=12$

답 12

23

▸ 21054-0157

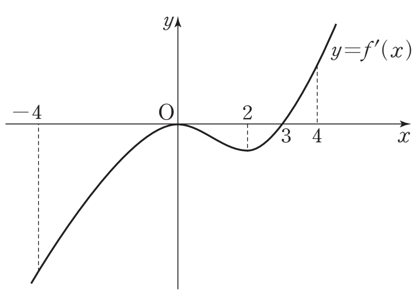
닫힌구간 $[-2, 3]$에서 함수 $f(x)=x^3-3x^2+a$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m=12$일 때, 상수 a의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

24

▸ 21054-0158

사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 닫힌구간 $[-4, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은?
(단, 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 $x=0$에서 x축에 접하고, $x=2$에서 극솟값을 가지며 $f'(3)=0$이다.)



① $f(-4)$ ② $f(0)$ ③ $f(2)$
④ $f(3)$ ⑤ $f(4)$

25

▸ 21054-0159

양수 a에 대하여 함수 $f(x)=ax^3-3ax^2-1$이 닫힌구간 $[1, 4]$에서 최댓값 M, 최솟값 -5를 가질 때, M의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

26

▸ 21054-0160

닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $y=8^x-3\times2^x+5$의 최댓값과 최솟값의 합은?

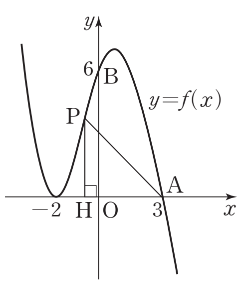
① 52 ② 54 ③ 56
④ 58 ⑤ 60

27

▸ 21054-0161

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같이 $x=-2$에서 x축에 접하고, 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 6)$을 지난다.
점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ $(-2<t<3)$에서 x축에 내린 수선의 발 H에 대하여 삼각형 APH의 넓이를 $S(t)$라 하자. $-2<t<3$에서 함수 $S(t)$의 최댓값이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



28

▸ 21054-0162

닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(x)=2x^3-ax$의 최솟값이 $-\frac{32}{27}$가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

29

▸ 21054-0163

실수 a에 대하여 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수

$$f(x)=2x^3+3(a-2)x^2-12ax+16a^2$$

의 최댓값을 $g(a)$라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $g(1)=23$
ㄴ. 함수 $g(a)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
ㄷ. 함수 $g(a)$는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 8 방정식에의 활용

출제유형 | 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 파악하여 방정식의 실근의 개수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$의 증가, 감소, 극대, 극소를 조사하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리고, x축, 직선 $y=k$와 만나는 점 등을 이용하여 방정식의 실근의 개수 등을 구한다.

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

방정식 $2x^3+6x^2+a=0$이 $-2\le x\le 2$에서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 a의 개수는? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

출제 의도

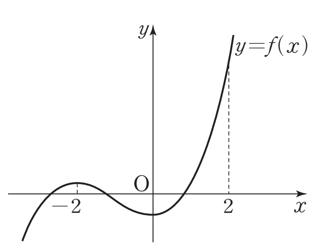
다항함수의 미분법을 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$f(x)=2x^3+6x^2+a$라 하면 $f'(x)=6x^2+12x=6x(x+2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(-2)=-16+24+a=a+8$
$f(0)=a$
$f(2)=16+24+a=a+40$
이므로 $f(-2)<f(2)$
그러므로 방정식 $f(x)=0$이 $-2\le x\le 2$에서 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.
즉, $f(-2)\ge 0$이고 $f(0)<0$이어야 한다.



$f(-2)\ge 0$에서 $a+8\ge 0$, $a\ge -8$ …… ㉠
$f(0)<0$에서 $a<0$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $-8\le a<0$
따라서 구하는 정수 a의 개수는 $0-(-8)=8$

답 ③

30 ▸ 21054-0164

삼차방정식 $\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+a=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 개수는?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

31 ▸ 21054-0165

삼차방정식 $2x^3-3x^2-12x-k=0$의 세 실근 α, β, γ에 대하여 $\alpha<1<\beta<\gamma$일 때, 모든 정수 k의 개수는?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

32

▸ 21054-0166

점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=x^3-6x^2+9x-3$에 그을 수 있는 모든 접선의 개수를 $f(k)$라 할 때, 함수 $f(k)$는 $k=p$, $k=q$에서 불연속이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p\neq q$이다.)

33

▸ 21054-0167

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은 $y=2x+1$이다.
(나) 방정식 $f(x)-2x=3$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$\{f(0)\}^3$의 값은?

① $\frac{21}{2}$　② $\frac{23}{2}$　③ $\frac{25}{2}$
④ $\frac{27}{2}$　⑤ $\frac{29}{2}$

34

▸ 21054-0168

최고차항의 계수가 양수이고, 극댓값 M을 갖는 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 상수이다.)

(가) 방정식 $f(x)+k=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.
(나) 방정식 $|f(x)|=k$는 서로 다른 7개의 실근을 갖는다.
(다) 방정식 $|f(x)|=M$은 서로 다른 4개의 실근을 갖는다.

보기

ㄱ. 방정식 $f(x)-k=0$은 서로 다른 4개의 실근을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)+M=0$은 서로 다른 2개의 실근을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $|f(x)|=2M$은 서로 다른 2개의 실근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

35

▸ 21054-0169

삼차함수 $f(x)=x^3-3x^2+ax$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)-f(1)$이라 하자. 실수 k에 대하여 방정식 $|g(x)|=g(k)$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(k)$라 할 때, $h(7)=4$이다. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, a는 상수이다.)

보기

ㄱ. 함수 $g(x)$의 극댓값을 M, 극솟값을 m이라 할 때 $M+m=0$이다.
ㄴ. 집합 $\{h(k)\,|\,k$는 실수$\}$의 원소의 개수는 5이다.
ㄷ. $g'(0)=-24$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

수학 Ⅱ

유형 9 부등식에의 활용

출제유형 | 부등식 $f(x)>0$, $f(x)\geq 0$, $f(x)<0$, $f(x)\leq 0$의 해를 구하는 문제와 부등식이 항상 성립하기 위한 조건을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 이용하여 부등식이 성립할 조건을 구한다.

필수 유형 | 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

두 함수

$$f(x)=x^3+3x^2-k,\ g(x)=2x^2+3x-10$$

에 대하여 부등식

$$f(x)\geq 3g(x)$$

가 닫힌구간 $[-1, 4]$에서 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하시오. [4점]

출제 의도

도함수를 이용하여 부등식이 항상 성립할 조건을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$h(x)=f(x)-3g(x)$라 하면

$h(x)=x^3-3x^2-9x+30-k$이고, 닫힌구간 $[-1, 4]$에서

$f(x)\geq 3g(x)$가 항상 성립하려면 $h(x)\geq 0$이어야 한다.

이때 $h'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

닫힌구간 $[-1, 4]$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	극소	↗	

$h(3)=27-27-27+30-k=3-k$

즉, 닫힌구간 $[-1, 4]$에서 함수 $h(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소이다. 닫힌구간 $[-1, 4]$에서 $h(x)\geq 0$이려면 $h(3)=3-k\geq 0$이어야 한다.

따라서 $k\leq 3$이므로 실수 k의 최댓값은 3이다.

답 3

36

▸ 21054-0170

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $2x^3+3x^2-12x+a>0$이 성립할 때, 정수 a의 최솟값은?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

37

▸ 21054-0171

두 실수 a, b와 두 함수

$$f(x)=x^4-3x^3+a,\ g(x)=x^3-8x^2+16x+b$$

가 있다. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립할 때, $a-b$의 최솟값은?

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

38

▸ 21054-0172

사차함수 $f(x)=(x-1)^3(x-3)$과 이차함수 $g(x)=(x-k)^2+m$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $(f\circ g)(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(f\circ g)(x)\geq(f\circ g)(2)$가 성립한다.

모든 실수 k의 값의 곱은? (단, m은 상수이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

유형 10 속도와 가속도

출제유형 | 수직선 위를 움직이는 점에 대한 함수식이나 그래프에서 점의 위치, 속도, 가속도를 구할 수 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도 v와 가속도 a는

$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=f'(t)$

$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$

필수 유형 | 2020학년도 대수능 |

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 위치 x_1, x_2가

$x_1=t^3-2t^2+3t$, $x_2=t^2+12t$

이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하시오. [4점]

출제 의도

수직선 위를 움직이는 점의 속도를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_1, v_2라 하면

$v_1=3t^2-4t+3$, $v_2=2t+12$

이므로

$3t^2-4t+3=2t+12$에서

$3t^2-6t-9=0$

$3(t+1)(t-3)=0$

$t\geq 0$이므로 $t=3$

이때 점 P의 위치는

$27-18+9=18$

점 Q의 위치는

$9+36=45$

이므로 구하는 두 점 P, Q 사이의 거리는

$45-18=27$

답 27

39

▶ 21054-0173

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 위치 x가 $x=t^3-at^2+3$이다. 시각 $t=1$에서의 점 P의 속도가 2일 때 시각 $t=2$에서의 점 P의 속도는? (단, a는 상수이다.)

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

40

▶ 21054-0174

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 위치 x가 $x=t^3-4t^2-3t+1$일 때, 점 P가 출발 후 운동 방향을 바꾸는 순간의 가속도는?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

41

▶ 21054-0175

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 위치 x_1, x_2가

$x_1=3t^3-3t^2+7t$, $x_2=2t^3+4t^2-3t$

이다. 두 점 P, Q가 동시에 원점을 출발한 후 처음으로 만나는 순간 두 점 P, Q의 속도의 차를 구하시오.

06 다항함수의 적분법

1 부정적분

(1) 연속함수 $f(x)$에 대하여 $F'(x)=f(x)$를 만족시키는 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분이라 하고 $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 적분한다고 한다.

(2) 함수 $f(x)$의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$라 하면

$$\int f(x)dx=F(x)+C \text{ (단, } C\text{는 상수)}$$

로 나타내며, C를 적분상수라고 한다.

참고 $F(x)$, $G(x)$를 함수 $f(x)$의 부정적분이라 하면 $F'(x)=G'(x)=f(x)$이므로
$\{G(x)-F(x)\}'=f(x)-f(x)=0$에서 $G(x)-F(x)=C$ (단, C는 상수), $G(x)=F(x)+C$
즉, 함수 $f(x)$의 임의의 부정적분은 $F(x)+C$의 꼴로 나타낼 수 있다.

2 다항함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 부정적분과 함수 $y=1$의 부정적분

(1) n이 양의 정수일 때,

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

(2) $\int 1dx=x+C$ (단, C는 적분상수)

3 부정적분의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분이 각각 존재할 때,

(1) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 0이 아닌 상수)

(2) $\int \{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

(3) $\int \{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

4 정적분의 정의

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, $F(x)$가 $f(x)$의 한 부정적분일 때,

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

이때 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값을 구하는 것을 함수 $f(x)$를 a에서 b까지 적분한다고 한다.

참고 ① $\int_a^a f(x)dx=0$ ② $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

5 정적분과 미분의 관계

함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \text{ (단, } a<x<b\text{)}$$

6 정적분의 성질 (1)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때

(1) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

(2) $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

(3) $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

(4) 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 닫힌구간에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

7 정적분의 성질 (2)

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

① $f(-x)=f(x)$이면 $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

② $f(-x)=-f(x)$이면 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$

8 정적분으로 나타내어진 함수의 극한

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a) \text{ (단, } a\text{는 상수)}$$

9 곡선과 좌표축 사이의 넓이

함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

10 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

11 수직선 위를 움직이는 점의 위치와 거리

점 P가 수직선 위를 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직일 때, 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 시각 $t=a$에서의 점 P의 위치를 $f(a)$라 하면

(1) 점 P의 시각 $t=a$에서 $t=b$까지의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)\,dt$

(2) 점 P의 시각 $t=b$에서의 위치 $f(b)$는 $f(b)=f(a)+\int_a^b v(t)\,dt$

(3) 점 P의 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리는 $\int_a^b |v(t)|\,dt$

유형 1 부정적분의 정의와 성질

출제유형 | $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 부정적분과 부정적분의 성질을 이용하여 부정적분을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) n이 양의 정수일 때

$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수)

(2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분이 각각 존재할 때

① $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 0이 아닌 상수)

② $\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

③ $\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수 $f(x)$가

$f'(x)=x^3+x$, $f(0)=3$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int (x^3+x)\,dx$

$=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+3$이므로

$f(2)=4+2+3=9$

답 9

01

▸ 21054-0176

함수 $f(x)$가 $f(x)=\int (x^3+2x^2+1)\,dx-\int (x^3-x^2)\,dx$이고 $f(0)=1$일 때, $f(1)$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

02

▸ 21054-0177

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2+2x$이고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선이 점 $(0, -2)$를 지날 때, $f(2)$의 값은?

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

03

▸ 21054-0178

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int \{2xf(x)+(x^2-4)f'(x)\}dx=x^4-2x^3+8x-10$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

유형 2 정적분의 성질과 계산

출제유형 | 정적분의 성질을 이용한 계산 문제와 활용 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때

① $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

② $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

③ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

(2) 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 닫힌구간에서 연속일 때

$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

필수 유형 | 2019학년도 대수능 |

$\int_1^4 (x+|x-3|)dx$의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

정적분의 성질을 이해하고 정적분의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\int_1^4 (x+|x-3|)dx$

$=\int_1^3 (x+|x-3|)dx+\int_3^4 (x+|x-3|)dx$

$=\int_1^3 \{x-(x-3)\}dx+\int_3^4 \{x+(x-3)\}dx$

$=\int_1^3 3dx+\int_3^4 (2x-3)dx$

$=\Big[3x\Big]_1^3+\Big[x^2-3x\Big]_3^4$

$=(9-3)+\{(16-12)-(9-9)\}$

$=6+4$

$=10$

답 10

04 ▸ 21054-0179

함수 $f(x)=3x^2+12x-4$에 대하여

$\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$의 값은?

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

05 ▸ 21054-0180

함수 $f(x)=|x+1|+2|x|$에 대하여 $\int_{-1}^3 xf(x)dx=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

06 ▸ 21054-0181

함수 $f(x)=(x+1)(x-2)$에 대하여 $-1\le a\le 0$에서 정의된 함수 $g(a)$가 다음과 같다.

$$g(a)=\int_a^{a+3}|f(x)|dx$$

함수 $g(a)$의 최댓값과 최솟값의 합이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

수학 Ⅱ

유형 3 함수의 성질을 이용한 정적분

출제유형 | 함수의 그래프가 y축 또는 원점에 대하여 대칭임을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭, 즉 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이면

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

(2) 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭, 즉 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이면

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$$

필수 유형 | 2016학년도 대수능 |

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=-f(x),\ g(-x)=g(x)$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx=10$$

일 때, $h(3)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

출제 의도

조건으로부터 함수의 그래프의 대칭성을 발견하고 이를 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$

이므로 다항함수 $y=h(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, $h(0)=0$이다.

$h(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots+a_1x$

(n은 0 또는 자연수, a_{2n+1}, a_{2n-1}, $\cdots$, a_1은 상수)

로 놓으면

$h'(x)=(2n+1)a_{2n+1}x^{2n}+(2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2}+\cdots+a_1$

이므로 $h'(-x)=h'(x)$를 만족시킨다.

또한 $(-x)h'(-x)=-\{xh'(x)\}$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)\,dx&=\int_{-3}^{3}\{xh'(x)+5h'(x)\}dx\\&=0+2\int_{0}^{3}5h'(x)dx\\&=10\Big[h(x)\Big]_{0}^{3}\\&=10\{h(3)-h(0)\}\end{aligned}$$

$10\{h(3)-h(0)\}=10$에서

$h(3)-h(0)=1$

따라서 $h(3)=h(0)+1=0+1=1$

답 ①

07 ▸ 21054-0182

$\int_{-3}^{3}(4x^3+6x^2+7x)\,dx$의 값을 구하시오.

08 ▸ 21054-0183

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) $f(1)=6$
(다) $\int_{-2}^{2} f'(x)\,dx=12$

$f(3)$의 값은?

① -2 ② -4 ③ -6
④ -8 ⑤ -10

09 ▸ 21054-0184

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
(나) $\int_{-1}^{1} x^2f'(x)dx=0$이다.

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값을 가질 때, α의 값은?

① $-\frac{1}{5}$ ② $-\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{3}{5}$
④ $-\frac{4}{5}$ ⑤ -1

유형 4 정적분으로 나타내어진 함수

출제유형 | 정적분으로 나타내어진 함수의 함숫값을 구하는 문제, 정적분으로 나타내어진 함수의 미분을 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 a, b가 상수일 때 $\int_a^b f(t)dt$는 상수임을 이용한다.

(2) 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ (단, $a<x<b$)

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=4x^3+x\int_0^1 f(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

출제 의도

정적분으로 나타내어진 함수를 이용하여 함숫값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\int_0^1 f(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x)=4x^3+kx$

이때

$$k=\int_0^1 (4t^3+kt)\,dt$$
$$=\left[t^4+\frac{k}{2}t^2\right]_0^1$$
$$=1+\frac{k}{2}$$

이므로 $k=2$

따라서 $f(x)=4x^3+2x$이므로

$f(1)=4+2=6$

답 ①

10
▸ 21054-0185

함수 $f(x)=\int_0^x (3t^2+5t-2)\,dt$의 극댓값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

11
▸ 21054-0186

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x (t^3-2t)\,dt=2x^3+x-f(x)$$

를 만족시킬 때, $f(1)+f'(1)$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

12
▸ 21054-0187

두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^x f(t)dt=g(x)(x-1)+a(x^2-1)+b$

(나) $g(x)=x^2-x\int_0^1 f(t)dt$

함수 $f(x)$의 최솟값이 1일 때, $f(1)+g(-1)$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$
④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

수학Ⅱ

유형 5 정적분으로 나타내어진 함수의 극한

출제유형 | 정적분으로 나타내어진 함수의 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$$

필수 유형

함수 $f(x)=2x^3-6x+12$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)dt$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

출제 의도

정적분으로 나타내어진 함수의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)dt&=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4}\\&=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}\\&=\frac{1}{4}F'(2)\\&=\frac{1}{4}f(2)\\&=\frac{1}{4}(16-12+12)\\&=4\end{aligned}$$

답 ④

13

▸ 21054-0188

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (3t^2+at-4a)dt=12$일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② $-\frac{5}{2}$ ③ -3
④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ -4

14

▸ 21054-0189

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=4x^3+2x+\int_{-1}^2 f(t)dt$$

를 만족시킨다.

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=-15$$

일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

15

▸ 21054-0190

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$xf(x)=2x^3-3x^2\int_0^1 f'(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt$를 만족시킬 때,

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{-1}^{-1+7h} f(t)\,dt$의 값은?

① 41 ② 42 ③ 43
④ 44 ⑤ 45

유형 6 곡선과 좌표축 사이의 넓이

출제유형 | 곡선이 주어지고 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 문제가 주로 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 곡선이 x축과 만나는 점을 구하고 정적분을 이용하여 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

필수 유형 | 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

곡선 $y=x^3-2x^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

출제 의도

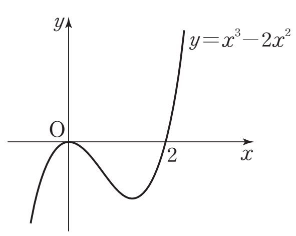
주어진 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분을 이해하고 그 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$y=x^3-2x^2$

$=x^2(x-2)$

곡선 $y=x^3-2x^2$은 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^2 |x^3-2x^2|\,dx$$

$$=\int_0^2 (-x^3+2x^2)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2$$

$$=-4+\frac{16}{3}$$

$$=\frac{4}{3}$$

답 ②

16 ▸ 21054-0191

곡선 $y=(x+1)(x-2)^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$

④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7

17 ▸ 21054-0192

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 $x=-3$, $x=1$에서 극값을 가질 때, 곡선 $y=f'(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 24이다. 삼차함수 $f(x)$에서 x의 계수는?

① -6 ② $-\frac{25}{4}$ ③ $-\frac{13}{2}$

④ $-\frac{27}{4}$ ⑤ -7

18 ▸ 21054-0193

곡선 $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+k$가 x축과 서로 다른 두 점에서 접할 때, 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, k는 상수이다.)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{7}{30}$

④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

수학 Ⅱ

유형 7 두 곡선 사이의 넓이

출제유형 | 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 곡선이 만나는 점을 구할 필요가 있을 때는 방정식을 이용하여 만나는 점을 구하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.
닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

필수 유형 | 2020학년도 대수능 |

두 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x(4-x),\ g(x)=|x-1|-1$$

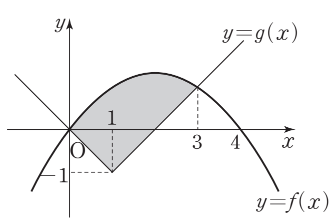
의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

두 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x(4-x)$, $g(x)=|x-1|-1$의 그래프는 다음과 같다.



$x<1$일 때, $g(x)=-x$이므로 $\frac{1}{3}x(4-x)=-x$에서 $x=0$

$x\geq1$일 때, $g(x)=x-2$이므로 $\frac{1}{3}x(4-x)=x-2$에서

$4x-x^2=3x-6$, $x^2-x-6=0$, $(x-3)(x+2)=0$이므로

$x=3$

$$S=\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}dx+\int_1^3 \{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_0^1\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{3}x\right)dx+\int_1^3\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{7}{6}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2+2x\right]_1^3$$

$$=\left(-\frac{1}{9}+\frac{7}{6}\right)+\left\{\left(-3+\frac{3}{2}+6\right)-\left(-\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+2\right)\right\}=\frac{7}{2}$$

이므로 $4S=14$

답 14

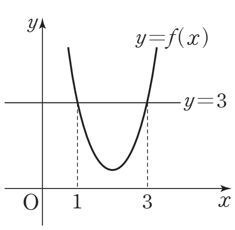
19 ▸ 21054-0194

두 곡선 $y=x^3$, $y=-x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{14}$
④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

20 ▸ 21054-0195

그림과 같이 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3$은 x좌표가 1, 3인 서로 다른 두 점에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는?



① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$
④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

21 ▸ 21054-0196

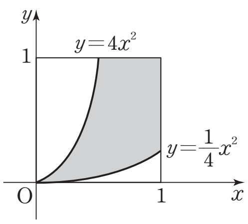
두 곡선 $y=x(x+1)(x-3)$, $y=-x(x-3)$으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{245}{12}$ ② $\frac{247}{12}$ ③ $\frac{83}{4}$
④ $\frac{251}{12}$ ⑤ $\frac{253}{12}$

22

▸ 21054-0197

그림과 같이 두 곡선 $y=4x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$과 두 직선 $x=1$, $y=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는?



① $\frac{1}{2}$　② $\frac{13}{24}$　③ $\frac{7}{12}$
④ $\frac{5}{8}$　⑤ $\frac{2}{3}$

23

▸ 21054-0198

함수 $f(x)=x^3-4x^2+5x$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 곡선을 A라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 곡선 A로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 곡선 A 및 직선 $y=-x+9$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 할 때, S_1+S_2의 값은?

① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

유형 8 여러 형태의 조건이 주어진 넓이

출제유형 | 함수의 성질, 정적분의 정의와 성질, 미분의 활용 등을 이용하여 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수의 도함수, 여러 형태의 그래프, 함수의 성질과 특징, 정적분의 정의와 넓이의 관계, 미분의 활용 등을 이용하여 넓이를 구한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 |

실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-3)+4$이다.
(나) $\int_0^6 f(x)\,dx=0$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=6$, $x=9$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① 9　② 12　③ 15
④ 18　⑤ 21

출제 의도

조건을 해석하고 정적분의 성질을 이용하여 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프가 일치해야 한다.

또 조건 (나)에서 $\int_0^6 f(x)\,dx=0$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^6 f(x)\,dx&=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^6 f(x)\,dx\\&=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^6 \{f(x-3)+4\}\,dx\\&=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_0^3 \{f(x)+4\}\,dx\\&=2\int_0^3 f(x)\,dx+12\end{aligned}$$

에서

$2\int_0^3 f(x)\,dx+12=0$, $\int_0^3 f(x)\,dx=-6$

따라서 $\int_3^6 f(x)\,dx=6$이므로

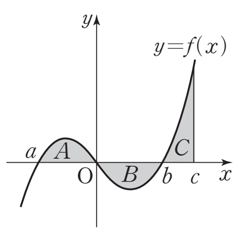
$$\begin{aligned}\int_6^9 f(x)\,dx&=\int_6^9 \{f(x-3)+4\}\,dx=12+\int_3^6 f(x)\,dx\\&=12+6=18\end{aligned}$$

답 ④

24
▸ 21054-0199

그림과 같이 x축과 서로 다른 세 점 $(a, 0)$, $(0, 0)$, $(b, 0)$에서 만나는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=c$에 의해 만들어지는 세 부분의 넓이를 각각 A, B, C라 할 때, 삼차함수 $f(x)$와 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) A, B, C가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
(나) $3\int_a^c |f(x)|\,dx-4\int_a^c f(x)\,dx=10$



$\int_a^c |f(x)|\,dx$의 값을 구하시오. (단, $a<0<b<c$)

25
▸ 21054-0200

$-1\le x\le a$ $(a>1)$에서

$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$

인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+a+1)$이다.
(나) $\int_{-1}^a f(x)\,dx=\frac{9}{4}$

$-1\le x\le 2a+1$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $6S$의 값을 구하시오.

26
▸ 21054-0201

함수 $f(x)=x^3+(1-a)x^2-ax$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f'(x)=0$의 두 근의 부호가 서로 다르다.
(나) 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분 중에서 x축보다 위쪽에 있는 부분의 넓이가 $\frac{11}{12}$이다.

상수 a의 값을 구하시오.

27
▸ 21054-0202

삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2+32$의 그래프 위의 점 $(1, 27)$에서의 접선과 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ 7
④ $\frac{29}{4}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

28
▸ 21054-0203

두 곡선 $y=x^2-2x$, $y=2x^2-8x+3$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 할 때, 곡선 $y=4x^3+3x^2$과 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $m\sqrt{6}$이다. 자연수 m의 값을 구하시오.

유형 9 수직선 위의 속도와 거리

출제유형 | 수직선 위를 움직이는 점의 시각 t에서의 속도에 대한 식이나 그래프가 주어질 때, 점 또는 물체의 위치, 위치의 변화량, 움직인 거리를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수직선 위를 움직이는 점 P의 위치와 위치의 변화량, 움직인 거리의 차이점을 이해하고 이를 이용하여 구한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$v_1(t)=3t^2+t,\ v_2(t)=2t^2+3t$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 a라 할 때, $9a$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

수직선 위를 움직이는 점의 속도에 대한 식에서 위치를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간은 $v_1(t)=v_2(t)$일 때이므로

$3t^2+t=2t^2+3t$

$t^2-2t=0$

$t(t-2)=0$

$t>0$이므로 $t=2$

$t=2$일 때 점 P의 위치는

$$0+\int_0^2 v_1(t)dt=\int_0^2(3t^2+t)dt=\left[t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^2=10$$

$t=2$일 때 점 Q의 위치는

$$0+\int_0^2 v_2(t)dt=\int_0^2(2t^2+3t)dt=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^2=\frac{16}{3}+6=\frac{34}{3}$$

따라서 두 점 사이의 거리 a는

$$a=\left|\frac{34}{3}-10\right|=\frac{4}{3}$$

이므로

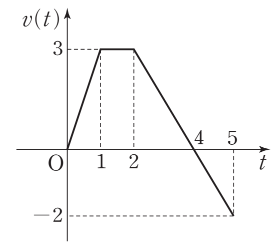
$$9a=9\times\frac{4}{3}=12$$

답 12

29

▸ 21054-0204

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (0\leq t\leq 5)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



$t=1$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는?

① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$

④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$

30

▸ 21054-0205

원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도가 각각 $v_1(t)=t^2-2t+9$, $v_2(t)=2t+\frac{19}{3}$이다. 두 점 P, Q가 출발 후 첫 번째 만날 때부터 두 번째 만날 때까지 점 Q가 움직인 거리는?

① 24 ② $\frac{73}{3}$ ③ $\frac{74}{3}$

④ 25 ⑤ $\frac{76}{3}$

31

▸ 21054-0206

원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 A, B의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라 할 때,

$v_1(t)=t(2-t)(4-t),\ v_2(t)=a-2t\ (a\geq 0)$

이다. 두 점 A, B가 출발 후 세 번 만나기 위한 모든 실수 a의 값의 범위는 $\frac{q}{p}<a<4$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

수학 Ⅱ

07 수열의 극한

1 수열의 수렴과 발산

(1) 수열 $\{a_n\}$이 수렴하는 경우 : $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (단, α는 상수)

(2) 수열 $\{a_n\}$이 발산하는 경우 : $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ (양의 무한대로 발산)} \\ \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ (음의 무한대로 발산)} \\ \text{진동} \end{cases}$

2 수열의 극한에 대한 기본 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (α, β는 실수)일 때

(1) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n = k\alpha$ (단, k는 상수)

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha + \beta$

(3) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha - \beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\beta$

(5) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$)

3 수열의 극한값의 계산

(1) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

분모, 분자가 다항식인 경우 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나누어서 극한값을 구한다.

① (분모의 차수)=(분자의 차수) : 극한값은 분자와 분모의 최고차항의 계수의 비와 같다.

② (분모의 차수)>(분자의 차수) : 극한값은 0이다.

③ (분모의 차수)<(분자의 차수) : ∞ 또는 $-\infty$로 발산한다.

(2) 무리식이 포함된 $\infty - \infty$ 꼴의 극한

$\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} = \frac{a_n - b_n}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}}$임을 이용하여 주어진 식을 변형한 후 극한값을 구한다.

(3) $0 \times \infty$ 꼴의 극한

통분, 유리화 등의 방법으로 주어진 식을 변형한 후 극한값을 구한다.

4 수열의 극한의 대소 관계

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (α, β는 실수)일 때

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$이다.

(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha = \beta$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이다.

5 등비수열의 극한

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산은 r의 범위에 따라 다음과 같다.

(1) $r > 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ (발산)

(2) $r = 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$ (수렴)

(3) $|r| < 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ (수렴)

(4) $r \le -1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다. (발산)

참고 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 $-1 < r \le 1$이다.

6 급수

(1) 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$를 사용하여 연결한 식

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

을 급수라고 한다.

(2) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 합

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

를 이 급수의 제n항까지의 부분합이라고 한다.

7 급수의 수렴, 발산

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 제n항까지의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 S에 수렴한다고 하고, S를 급수의 합이라고 한다. 즉,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$$

(2) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 제n항까지의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 발산할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다고 한다.

8 급수와 수열의 극한 사이의 관계

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

참고 일반적으로 (1)의 역은 성립하지 않는다. 즉, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$일 때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산하는 경우가 있다.

9 급수의 성질

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하고 그 합이 각각 S, T일 때

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n = kS$ (단, k는 상수)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S + T$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S - T$

10 등비급수

(1) 첫째항이 a $(a \neq 0)$, 공비가 r인 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$의 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$를 사용하여 연결한 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

을 등비급수라고 한다.

(2) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ $(a \neq 0)$은

① $|r| < 1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

② $|r| \geq 1$일 때, 발산한다.

미적분

유형 1 수열의 극한에 대한 기본 성질

출제유형 | 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고
$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)일 때

(1) $\lim_{n\to\infty} ka_n=k\lim_{n\to\infty} a_n=k\alpha$ (단, k는 상수)

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha+\beta$

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha-\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\times\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$

(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq0$, $\beta\neq0$)

필수 유형 | 2008학년도 대수능 6월 모의평가 |

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-3}{a_n+1}=\frac{3}{4}$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

출제 의도

수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\frac{2a_n-3}{a_n+1}=b_n$으로 놓으면 $\lim_{n\to\infty} b_n=\frac{3}{4}$이고

$2a_n-3=b_n(a_n+1)$

$(b_n-2)a_n=-b_n-3$

$a_n=\frac{-b_n-3}{b_n-2}$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-b_n-3}{b_n-2}=\frac{\lim_{n\to\infty}(-b_n-3)}{\lim_{n\to\infty}(b_n-2)}$$

$$=\frac{-\lim_{n\to\infty} b_n-\lim_{n\to\infty} 3}{\lim_{n\to\infty} b_n-\lim_{n\to\infty} 2}=\frac{-\frac{3}{4}-3}{\frac{3}{4}-2}=3$$

답 ③

01

▶ 21055-0207

모든 항이 양수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-4b_n}{a_n+2b_n}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{4}$
④ 1　⑤ $\frac{5}{4}$

02

▶ 21055-0208

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=5,\ \lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=1$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)$의 값은?

① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

03

▶ 21055-0209

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{1}{b_n}\right)=\frac{1}{2},\ \lim_{n\to\infty}\left(a_n^{\,2}+\frac{1}{b_n^{\,2}}\right)=\frac{2}{3}$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=k$이다. $30k$의 값을 구하시오.

(단, $a_n\neq0$, $b_n\neq0$)

유형 2 수열의 극한

출제유형 | 일반항이 다양한 형태로 주어진 수열의 극한을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 일반항의 분자와 분모가 n에 대한 다항식인 분수 꼴의 식으로 주어진 수열은 분모의 최고차항으로 분모와 분자를 각각 나누어서 극한값을 구한다.

(2) 일반항이 n에 대한 무리식 꼴로 주어진 수열은 무리식을 유리화한 후 극한값을 구한다.

필수 유형 | 2012학년도 대수능 9월 모의평가 |

수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=2,\ \lim_{n\to\infty}(n^2+1)b_n=7$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(10n+1)b_n}{a_n}$의 값을 구하시오.

(단, $a_n\neq0$) [3점]

출제 의도

수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)b_n}{a_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n^2+1)b_n}{(n+1)a_n}\times\frac{(10n+1)(n+1)}{n^2+1}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)b_n}{(n+1)a_n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)(n+1)}{n^2+1}$$
$$=\frac{\lim_{n\to\infty}(n^2+1)b_n}{\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{\left(10+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{1}{n^2}}$$
$$=\frac{7}{2}\times\frac{10\times1}{1}=35$$

답 35

04

▶ 21055-0210

자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}k^2=S_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+n}{S_n+1}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

05

▶ 21055-0211

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+an}-n}=\dfrac{4}{3}$일 때, 상수 a의 값은? (단, $a\neq0$)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

06

▶ 21055-0212

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=0$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n(\sqrt{pn^2+6a_n}-4n)}{a_n}=q$를 만족시키는 두 실수 p, q에 대하여 pq의 값을 구하시오.

유형 3 수열의 극한의 대소 관계

출제유형 | 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 수열의 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 수열의 일반항 a_n이 포함된 모든 자연수 n에 대하여 성립하는 부등식이 주어지거나 그 부등식을 구할 수 있을 때는 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 극한값을 구한다.
(2) 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ (α는 실수)이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이다.

필수 유형 | 2014학년도 대수능 6월 모의평가 |

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$3n^2+2n < a_n < 3n^2+3n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{5a_n}{n^2+2n}$의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$3n^2+2n < a_n < 3n^2+3n$의 각 변을 n^2으로 나누면

$$3+\frac{2}{n} < \frac{a_n}{n^2} < 3+\frac{3}{n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)=3$, $\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{3}{n}\right)=3$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=3$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\times\frac{a_n}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{5\times 3}{1+0}=15$

답 15

07

▸ 21055-0213

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{2}{2n+1} < a_n < \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1-na_n}{a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

08

▸ 21055-0214

첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$S_{n+1} < b_n < S_{n+2} - a_n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-n^2}{3n+1}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

09

▸ 21055-0215

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $2n^2+n < n^2a_n + nb_n < 2n^2+n+1$
(나) $2n^2-3n < n^2a_n - nb_n < 2n^2-3n+1$

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

유형 4 등비수열의 극한

출제유형 | 등비수열의 일반항을 포함하는 수열의 극한값을 구하거나 x^n을 포함하는 수열의 극한으로 정의되는 함수에 대한 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산은 다음과 같다.

(1) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)

(2) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)

(3) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)

(4) $r\le -1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다. (발산)

필수 유형 | 2014학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x\le 1) \\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{2x^{n+1}+3x^n}{x^n+1} & (x>1)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

출제 의도

등비수열의 수렴과 발산을 이해하고 함수의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^n=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{n+1}+3x^n}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2x+3}{1+\frac{1}{x^n}}=2x+3$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+}(2x+3)=2+3=5$

이고 $\lim_{x\to1-} f(x)=f(1)=1+a$이므로

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1-} f(x)=f(1)$

에서

$5=1+a$

따라서 $a=4$

답 ②

10

▶ 21055-0216

첫째항이 4이고 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^{2n-1}+{a_{n+1}}^2}{a_{2n}+1}$의 값은?

① $\dfrac{47}{4}$　② 12　③ $\dfrac{49}{4}$　④ $\dfrac{25}{2}$　⑤ $\dfrac{51}{4}$

11

▶ 21055-0217

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 등식

$3^{2n}a_n=(-x^2+5x+5)^n$

을 만족시킬 때, 실수 α에 대하여 등식 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$가 성립하도록 하는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오.

12

▶ 21055-0218

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{3}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(x)\}^{2n+1}+3f(x)+1}{\{f(x)\}^{2n}+1}$$

이라 하자. 방정식 $g(x)=\dfrac{5}{2}$의 모든 실근의 합을 구하시오.

(단, n은 자연수이다.)

미적분

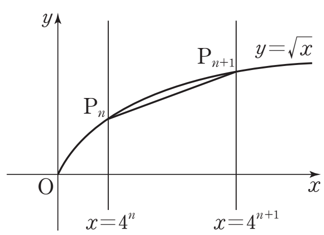
유형 5 수열의 극한의 활용

출제유형 | 주어진 방정식이나 함수의 그래프 및 도형에서 일반항을 찾아 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 함수의 그래프의 성질, 도형의 성질을 이용하여 수열의 일반항을 찾아 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2017학년도 대수능 |

자연수 n에 대하여 직선 $x=4^n$이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 P_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 길이를 L_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2$의 값을 구하시오. [4점]



출제 의도

함수의 그래프에서 선분의 길이에 대한 수열의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$\mathrm{P}_n(4^n,\ 2^n)$, $\mathrm{P}_{n+1}(4^{n+1},\ 2^{n+1})$이므로

$$L_n=\sqrt{(4^{n+1}-4^n)^2+(2^{n+1}-2^n)^2}=\sqrt{(3\times4^n)^2+(2^n)^2}=\sqrt{9\times16^n+4^n}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{9\times16^{n+1}+4^{n+1}}}{\sqrt{9\times16^n+4^n}}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times16^{n+1}+4^{n+1}}{9\times16^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times16+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{9+\left(\frac{1}{4}\right)^n}=\frac{9\times16+4\times0}{9+0}=16$$

답 16

13

▸ 21055-0219

자연수 n에 대하여 직선 $y=4^nx+1$이 곡선 $y=k\sqrt{x}$와 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값을 a_n이라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2^{n-1}+1}$의 값은? (단, $k\neq0$)

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

14

▸ 21055-0220

n이 자연수일 때, x와 y에 대한 연립방정식

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ xy=\dfrac{1}{\sqrt{4n+5}} \end{cases}$$

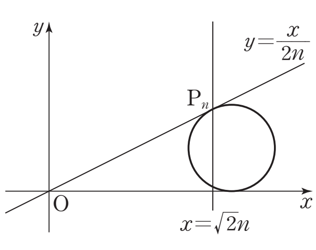
의 해를 $x=a_n$, $y=b_n$이라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{n\times\left(\dfrac{a_n-b_n}{a_n+b_n}\right)^2\right\}=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0<a_n<b_n$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

15

▸ 21055-0221

그림과 같이 자연수 n에 대하여 두 직선 $y=\dfrac{x}{2n}$, $x=\sqrt{2n}$의 교점을 P_n이라 하자. 직선 $y=\dfrac{x}{2n}$와 x축에 동시에 접하고 점 P_n을 지나며 중심이 제1사분면에 있는 원의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$의 값은?



① $\dfrac{\pi}{16}$ ② $\dfrac{\pi}{8}$ ③ $\dfrac{\pi}{4}$ ④ $\dfrac{\pi}{2}$ ⑤ π

유형 6 급수의 계산

출제유형 | 급수의 성질을 이해하고 여러 가지 급수의 합을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 부분합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{S_n\}$의 극한값으로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 합을 구한다.

(2) 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하고 그 합이 각각 S, T일 때

① $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n = kS$ (단, k는 상수)

② $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S+T$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S-T$

필수 유형 | 2016학년도 대수능 9월 모의평가 |

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=4$, $a_4-a_2=4$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{na_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

출제 의도

등차수열의 일반항을 구한 후 부분합의 극한값을 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1=4$이므로

$a_n=4+(n-1)\times d$

$a_4-a_2=4+3d-(4+d)$

$=2d=4$

에서 $d=2$

즉, $a_n=2n+2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{na_n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(2k+2)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

답 ①

16 ▸ 21055-0222

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-b_n)=\frac{2}{5},\ \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n-3b_n)=\frac{3}{2}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

17 ▸ 21055-0223

n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$(n^2+2n)x^2-2(n+1)x+1=0$의 두 실근을 α_n, β_n $(\alpha_n>\beta_n)$이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n-\beta_n)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

18 ▸ 21055-0224

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_{20}=2a_{10}$, $S_{20}=2S_{10}+300$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

미적분

유형 7 급수와 수열의 극한 사이의 관계

출제유형 | 급수와 수열의 극한 사이의 관계를 이용하여 급수가 수렴할 때 수열의 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하지 않는 경우가 있으므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$을 계산하여 수렴, 발산을 조사하여야 한다.

필수 유형 | 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3)=2$를 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty} a_n=r$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+2}-1}{r^n+1}$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{4}$ ② 2 ③ $\frac{9}{4}$
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

출제 의도

급수와 수열의 극한 사이의 관계를 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3)$이 수렴하므로
$\lim_{n\to\infty}(2a_n-3)=0$이다.
$2a_n-3=b_n$이라 하면
$\lim_{n\to\infty} b_n=0$이고, $a_n=\frac{1}{2}(b_n+3)$이므로
$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(b_n+3)=\frac{1}{2}\times(0+3)=\frac{3}{2}$
즉, $r=\frac{3}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+2}-1}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+2}-1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{9}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{\frac{9}{4}-0}{1+0}=\frac{9}{4}$$

답 ③

19

▸ 21055-0225

수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2)$가 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2+a_n^2}{1+a_n}$의 값은? (단, $a_n\neq-1$)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

20

▸ 21055-0226

수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n(a_n-2)=4$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+2}+4^{n+1}a_n}{(4^n-1)a_n}$의 값은? (단, $a_n\neq0$)

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

21

▸ 21055-0227

수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-\sqrt{n^2+3n+5})=2$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n-n)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

유형 8 등비급수의 수렴 조건과 합

출제유형 | 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}\ (a\neq 0)$이 수렴할 조건을 찾는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}\ (a\neq 0)$이 수렴할 조건은 $|r|<1$이다.

(2) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}\ (a\neq 0)$은

① $|r|<1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

② $|r|\geq 1$일 때, 발산한다.

필수 유형

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|x|+1}{5}\right)^n$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수는?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

출제 의도

등비급수가 수렴하기 위한 조건을 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|x|+1}{5}\right)^n$에서 $a_n=\left(\frac{|x|+1}{5}\right)^n$으로 놓으면

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{|x|+1}{5}$, 공비가 $\frac{|x|+1}{5}$인 등비수열이다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|x|+1}{5}\right)^n$이 수렴하려면

$-1<\frac{|x|+1}{5}<1$, $0\leq |x|<4$

즉, $-4<x<4$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|x|+1}{5}\right)^n$이 수렴하도록 하는 정수 x는

-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3

이므로 구하는 정수 x의 개수는 7이다.

답 ④

22 ▸ 21055-0228

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하도록 하는 모든 실수 r에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2r^2-r+a}{3}\right)^n$이 수렴하도록 하는 모든 정수 a의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

23 ▸ 21055-0229

자연수 n에 대하여 $3n$을 6으로 나눈 나머지를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$의 값은?

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{7}{8}$ ③ 1
④ $\frac{9}{8}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

24 ▸ 21055-0230

첫째항이 1인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$이 각각 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 5 : 3$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_n^2)$의 값은?

① $\frac{8}{5}$ ② $\frac{16}{5}$ ③ $\frac{24}{5}$
④ $\frac{32}{5}$ ⑤ 8

25 ▸ 21055-0231

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에서 $a_1=1$, $b_1=2$이다.
두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $3\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(나) $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n=3$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\times\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값을 구하시오.

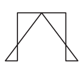
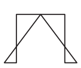
미적분

유형 9 등비급수의 활용

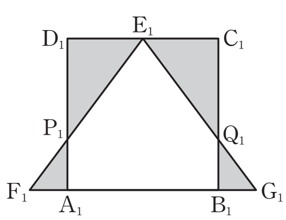
출제유형 | 일정한 규칙과 비율에 의하여 무한히 그려지는 도형에서 길이 또는 넓이의 합을 등비급수를 이용하여 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 도형의 길이 또는 넓이를 등비수열 $\{a_n\}$으로 생각하여 a_1의 값을 구하고 a_n과 a_{n+1} 사이에 성립하는 관계식으로부터 공비를 구하여 등비급수의 합을 구한다.

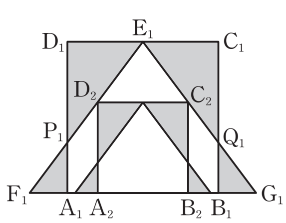
필수 유형 | 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 C_1D_1의 중점을 E_1이라 하고, 직선 A_1B_1 위에 두 점 F_1, G_1을 $\overline{E_1F_1}=\overline{E_1G_1}$, $\overline{E_1F_1}:\overline{F_1G_1}=5:6$이 되도록 잡고 이등변삼각형 $E_1F_1G_1$을 그린다. 선분 D_1A_1과 선분 E_1F_1의 교점을 P_1, 선분 B_1C_1과 선분 G_1E_1의 교점을 Q_1이라 할 때, 네 삼각형 $E_1D_1P_1$, $P_1F_1A_1$, $Q_1B_1G_1$, $E_1Q_1C_1$로 만들어진  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 F_1G_1 위의 두 점 A_2, B_2와 선분 G_1E_1 위의 점 C_2, 선분 E_1F_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



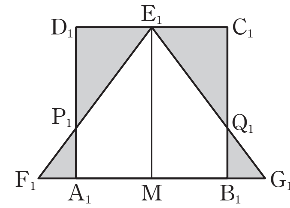
⋮ ⋮

① $\frac{61}{6}$ ② $\frac{125}{12}$ ③ $\frac{32}{3}$
④ $\frac{131}{12}$ ⑤ $\frac{67}{6}$

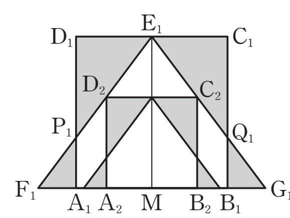
출제 의도

일정한 비율로 작아지는 도형이 반복되어 나타나는 그림에서 넓이를 등비급수를 이용하여 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이



선분 A_1B_1의 중점을 M이라 하고, $\overline{E_1F_1}=5k$ (k는 실수)라 하면
삼각형 $E_1F_1G_1$은 이등변삼각형이고 $\overline{F_1G_1}=6k$이므로 $\overline{F_1M}=3k$
이때 직각삼각형 E_1F_1M에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{E_1M}=\sqrt{(5k)^2-(3k)^2}=4k=4$
$k=1$이므로 $\overline{F_1M}=3$
$\overline{A_1M}=\overline{D_1E_1}=2$, $\overline{F_1A_1}=1$
삼각형 $P_1E_1D_1$과 삼각형 $P_1F_1A_1$은 서로 닮은 도형이고
닮음비는 $2:1$이므로 $\overline{D_1P_1}:\overline{A_1P_1}=2:1$
$\overline{D_1P_1}=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$, $\overline{A_1P_1}=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$
$\triangle P_1E_1D_1+\triangle P_1F_1A_1=\frac{1}{2}\times2\times\frac{8}{3}+\frac{1}{2}\times1\times\frac{4}{3}=\frac{10}{3}$
따라서 $S_1=2\times\frac{10}{3}=\frac{20}{3}$



정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 l로 놓으면
$\overline{A_2M}=\frac{l}{2}$이므로 $\overline{F_1A_2}=3-\frac{l}{2}$
$\overline{A_2D_2}=l$이고
삼각형 F_1ME_1과 삼각형 $F_1A_2D_2$는 서로 닮은 도형이므로
$\overline{F_1A_2}:\overline{A_2D_2}=3:4$
$\left(3-\frac{l}{2}\right):l=3:4$, $3l=12-2l$
$l=\frac{12}{5}$
정사각형 $A_2B_2C_2D_2$와 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 닮음비는
$\frac{12}{5}:4=\frac{3}{5}:1$이므로 그림 R_2에서 추가로 색칠된 도형의 넓이는
그림 R_1에서 색칠된 도형의 넓이의 $\left(\frac{3}{5}\right)^2$배이다.
이와 같은 관계가 계속되므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{20}{3}$이고 공비가 $\frac{9}{25}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합과 같다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{20}{3}\times\left(\frac{9}{25}\right)^{k-1}\right\}=\frac{\frac{20}{3}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{125}{12}$

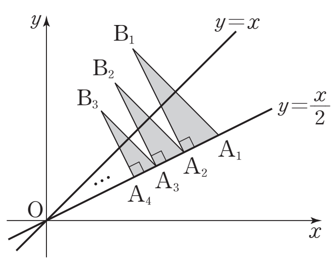
답 ②

26

▸ 21055-0232

그림과 같이 좌표평면에서 직선 $y=\frac{x}{2}$ 위의 점 $A_1(10,\ 5)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B_1, 점 B_1에서 직선 $y=\frac{x}{2}$에 내린 수선의 발을 A_2라 하자. 또 점 A_2를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B_2, 점 B_2에서 직선 $y=\frac{x}{2}$에 내린 수선의 발을 A_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 점 A_n, B_n, A_{n+1}을 정할 때, 삼각형 $A_nB_nA_{n+1}$의 둘레의 길이를 L_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} L_n = p\sqrt{2}+q\sqrt{5}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

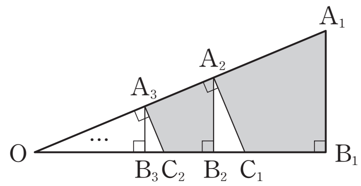
(단, p, q는 자연수이다.)



27

▸ 21055-0233

그림과 같이 $\overline{OA_1}=13$, $\overline{OB_1}=12$, $\angle OB_1A_1=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 A_1OB_1이 있다. 선분 OB_1 위의 점 C_1에 대하여 점 C_1에서 선분 OA_1에 내린 수선의 발을 A_2라 할 때, $\overline{C_1B_1}=\overline{C_1A_2}$를 만족시키도록 두 점 C_1, A_2를 잡고, 점 A_2에서 선분 OB_1에 내린 수선의 발을 B_2라 하자. 또 선분 OB_2 위의 점 C_2에 대하여 점 C_2에서 선분 OA_2에 내린 수선의 발을 A_3이라 할 때, $\overline{C_2B_2}=\overline{C_2A_3}$을 만족시키도록 두 점 C_2, A_3을 잡고, 점 A_3에서 선분 OB_2에 내린 수선의 발을 B_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 선분 OB_n 위의 점 C_n에 대하여 점 C_n에서 선분 OA_n에 내린 수선의 발을 A_{n+1}이라 할 때, $\overline{C_nB_n}=\overline{C_nA_{n+1}}$을 만족시키도록 두 점 C_n, A_{n+1}을 잡고, 점 A_{n+1}에서 선분 OB_n에 내린 수선의 발을 B_{n+1}이라 하자. 사각형 $A_nA_{n+1}C_nB_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{845}{33}$　② 26　③ $\frac{845}{32}$　④ $\frac{1690}{63}$　⑤ $\frac{845}{31}$

미적분

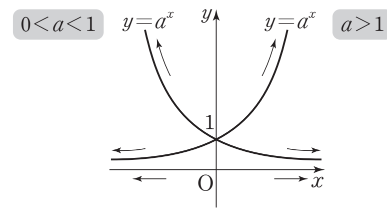
08 미분법

1 지수함수와 로그함수의 극한

(1) 지수함수의 극한

① $a>1$일 때, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} a^x=\infty$

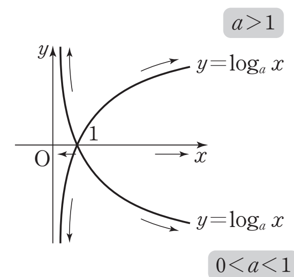
② $0<a<1$일 때, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} a^x=0$



(2) 로그함수의 극한

① $a>1$일 때, $\lim\limits_{x\to0+} \log_a x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x=\infty$

② $0<a<1$일 때, $\lim\limits_{x\to0+} \log_a x=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x=-\infty$



2 무리수 e의 정의와 자연로그

(1) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ (단, $e=2.718\cdots$)

(2) 무리수 e를 밑으로 하는 로그, 즉 $\log_e x$를 x의 자연로그라고 하며, 이것을 간단히 $\ln x$와 같이 나타낸다.

3 무리수 e의 정의를 이용한 극한

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

4 지수함수와 로그함수의 도함수

(1) $y=e^x$이면 $y'=e^x$

(2) $y=a^x$이면 $y'=a^x\ln a$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

(3) $y=\ln x$이면 $y'=\dfrac{1}{x}$

(4) $y=\log_a x$이면 $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

5 삼각함수 사이의 관계

(1) 삼각함수의 정의 : x축의 양의 방향을 시초선으로 할 때, 반지름의 길이가 r이고 중심이 원점 O인 원 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x, y)$에 대하여 동경 OP가 나타내는 일반각의 크기를 θ라고 하면 θ에 대하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 역수의 값을 대응시킨 관계

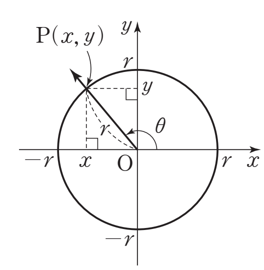
$$\theta\to\frac{r}{y}\ (y\neq0),\ \theta\to\frac{r}{x}\ (x\neq0),\ \theta\to\frac{x}{y}\ (y\neq0)$$

는 각각 θ에 대한 함수이다. 이 함수를 각각 코시컨트함수, 시컨트함수, 코탄젠트함수라 하고 기호로

$$\csc\theta=\frac{r}{y}\ (y\neq0),\ \sec\theta=\frac{r}{x}\ (x\neq0),\ \cot\theta=\frac{x}{y}\ (y\neq0)$$

와 같이 나타낸다.

사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수, 코시컨트함수, 시컨트함수, 코탄젠트함수를 통틀어 θ에 대한 삼각함수라고 한다.



(2) 삼각함수 사이의 관계

① $\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$

② $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$, $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

6 삼각함수의 덧셈정리

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(3) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ (단, $\tan\alpha\tan\beta\neq1$), $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ (단, $\tan\alpha\tan\beta\neq-1$)

7 삼각함수의 극한

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin bx}{ax}=\dfrac{b}{a}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan bx}{ax}=\dfrac{b}{a}$ (단, $a\neq0$)

8 사인함수와 코사인함수의 도함수

(1) $y=\sin x$이면 $y'=\cos x$

(2) $y=\cos x$이면 $y'=-\sin x$

9 여러 가지 미분법

(1) 함수의 몫의 미분법 : 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ $(g(x)\neq0)$이 미분가능할 때

① $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$이면 $y'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

② $y=\dfrac{1}{g(x)}$이면 $y'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

(2) 합성함수의 미분법 : 미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$ 또는 $y'=f'(g(x))g'(x)$

(3) 매개변수로 나타낸 함수의 미분법 : 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$에서 두 함수 $f(t)$, $g(t)$가 각각 미분가능하고, $f'(t)\neq0$일 때,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

(4) 음함수의 미분법 : x에 대한 함수 y가 음함수 $f(x, y)=0$의 꼴로 주어졌을 때에는 y를 x에 대한 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

(5) 역함수의 미분법 : 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능할 때, 함수 $y=f^{-1}(x)$의 도함수는

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$ 또는 $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\dfrac{1}{f'(y)}$ $\left(\text{단, } \dfrac{dx}{dy}\neq0,\ f'(y)\neq0\right)$

(6) 이계도함수 : 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능할 때, 함수 $f'(x)$의 도함수 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$를 함수 $y=f(x)$의 이계도함수라고 하며, 이것을 기호로

$f''(x)$, y'', $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$

와 같이 나타낸다.

미적분

10 도함수의 활용 (1)

(1) 접선의 방정식 : 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

(2) 함수의 증가와 감소의 판정 : 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

① $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

(3) 도함수를 이용한 함수의 극대와 극소의 판정 : 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서

① $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

② $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

(4) 이계도함수를 이용한 함수의 극대와 극소의 판정 : 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때

① $f''(a)<0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

② $f''(a)>0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

(5) 곡선의 오목과 볼록 : 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 어떤 구간의 모든 x에 대하여

① $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

② $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

(6) 변곡점의 판정 : 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

(7) 함수의 그래프 : 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음을 고려하여 그린다.

① 함수의 정의역과 치역

② 대칭성과 주기

③ 좌표축과의 교점

④ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

⑤ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

⑥ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, 곡선의 점근선

(8) 함수의 최대와 최소 : 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 최대 · 최소 정리에 의하여 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이때 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값, $f(a)$, $f(b)$의 값 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고 가장 작은 값이 최솟값이다.

11 도함수의 활용 (2)

(1) 방정식에의 활용

① 방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표와 같다. 따라서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수를 조사하여 구할 수 있다.

② 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다. 따라서 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수를 조사하여 구할 수 있다.

(2) 부등식에의 활용

① 어떤 구간에서 부등식 $f(x)>0$이 성립함을 보이려면 일반적으로 이 구간에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있음을 보이면 된다.

② 어떤 구간에서 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립함을 보이려면 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 이 구간에서 부등식 $h(x)>0$이 성립함을 보이면 된다. 즉, 이 구간에서 함수 $y=h(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있음을 보이면 된다.

(3) 속도와 가속도 : 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때

① 시각 t에서의 점 P의 속도는 $\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ 또는 $(f'(t),\ g'(t))$

② 시각 t에서의 점 P의 속력은 $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$

③ 시각 t에서의 점 P의 가속도는 $\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ 또는 $(f''(t),\ g''(t))$

④ 시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기는 $\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$

유형 1 지수함수와 로그함수의 극한

출제유형 | 무리수 e의 정의를 이용하여 함수의 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 무리수 e의 정의를 이용하여 극한값을 구한다.

(1) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$ (단, $a>0$, $a\neq 1$)

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ (단, $a>0$, $a\neq 1$)

필수 유형 | 2018학년도 대수능 |

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{e^{2x}-1}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

출제 의도

무리수 e의 정의를 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{e^{2x}-1}=\frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+5x)}{5x}\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\right\}$$
$$=\frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{5x}\times\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^{2x}-1}$$
$$=\frac{5}{2}\times 1\times 1=\frac{5}{2}$$

답 ④

01 ▸ 21055-0234

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x+2x^2)}{x}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

02 ▸ 21055-0235

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수

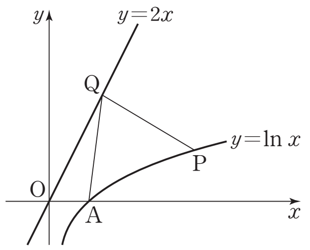
$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{e^{x-1}-1} & (x\neq 1)\\ 4 & (x=1)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(5)$의 값은?

① 9 ② 16 ③ 25
④ 36 ⑤ 49

03 ▸ 21055-0236

그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=\ln x$ 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(1, 0)$, $\mathrm{P}(t, \ln t)$ $(t\neq 1)$과 직선 $y=2x$ 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}$인 점 Q의 x좌표를 $f(t)$라 하자. $\lim_{t\to 1}f(t)$의 값은?



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

미적분

유형 2 지수함수와 로그함수의 미분

출제유형 | 지수함수와 로그함수의 도함수를 이용하여 주어진 함수의 미분계수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 지수함수와 로그함수의 도함수를 이용하여 주어진 함수의 미분계수를 구한다.

(1) $y=e^x$이면 $y'=e^x$

(2) $y=a^x$이면 $y'=a^x \ln a$ (단, $a>0$, $a\neq 1$)

(3) $y=\ln x$이면 $y'=\dfrac{1}{x}$

(4) $y=\log_a x$이면 $y'=\dfrac{1}{x \ln a}$ (단, $a>0$, $a\neq 1$)

필수 유형 | 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수 $f(x)=7+3\ln x$에 대하여 $f'(3)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

출제 의도

로그함수의 도함수를 이용하여 주어진 함수의 미분계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$f'(x)=\dfrac{3}{x}$이므로

$f'(3)=1$

답 ①

04

▸ 21055-0237

함수 $f(x)=\log_2 x$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(3,\ f(3))$, $\mathrm{Q}(6,\ f(6))$과 양수 a에 대하여 직선 PQ의 기울기가 $f'(a)$의 값과 같을 때, 2^a의 값은?

① $2e$ ② $e+3$ ③ e^2 ④ $3e$ ⑤ e^3

05

▸ 21055-0238

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 미분가능한 함수 $f(x)$가 부등식

$$1+\ln x \le f(x) \le e^{x-1}$$

을 만족시킨다. $g(x)=(2x+\ln x)f(x)$에 대하여 $g'(1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

06

▸ 21055-0239

정의역이 $\{x\,|\,x>-1\}$인 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & (x>0) \\ 2 & (-1<x\le 0) \end{cases}$$

에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 함수 $y=f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. 함수 $y=xf(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $y=x^k f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 자연수 k의 최솟값은 2이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 3 삼각함수 사이의 관계와 삼각함수의 덧셈정리

출제유형 | 삼각함수의 정의와 삼각함수 사이의 관계, 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 삼각함수 사이의 관계

① $\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$

② $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$, $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

(2) 삼각함수의 덧셈정리

① $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

② $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

③ $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ (단, $\tan\alpha\tan\beta\neq1$)

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ (단, $\tan\alpha\tan\beta\neq-1$)

필수 유형 | 2019학년도 대수능 |

$\tan\theta=5$일 때, $\sec^2\theta$의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

삼각함수 사이의 관계를 이용하여 $\sec^2\theta$의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로

$\sec^2\theta=1+5^2=26$

답 26

07

▸ 21055-0240

이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 서로 다른 두 근이 -1과 $\csc\theta$일 때, $a^2\cot^2\theta$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

08

▸ 21055-0241

두 직선 $y=mx$, $y=(2m+2)x$가 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$가 되도록 하는 모든 실수 m의 값의 합은?

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{2}{3}$
④ $-\frac{5}{6}$ ⑤ -1

09

▸ 21055-0242

$\sin(\alpha+\beta)-2\cos\beta=\frac{4}{5}$, $\cos(\alpha+\beta)+2\sin\beta=\frac{7}{5}$일 때, $\sin\alpha$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

유형 4 삼각함수의 극한의 활용

출제유형 | 삼각함수의 극한을 구하거나 도형에 대한 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 도형에서 선분의 길이나 도형의 넓이를 삼각함수를 이용하여 나타내고, $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$임을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(e^{2x}-1)^2f(x)=a-4\cos\frac{\pi}{2}x$$

를 만족시킬 때, $a\times f(0)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① $\frac{\pi^2}{6}$ ② $\frac{\pi^2}{5}$ ③ $\frac{\pi^2}{4}$
④ $\frac{\pi^2}{3}$ ⑤ $\frac{\pi^2}{2}$

출제 의도

지수함수와 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$(e^{2x}-1)^2f(x)=a-4\cos\frac{\pi}{2}x$에서 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=a-4$에서 $a=4$

$x\neq0$이면 $e^{2x}-1\neq0$이므로

$$f(x)=\frac{4-4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2}\ (x\neq0)$$

이때 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4-4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4\left(1-\cos\frac{\pi}{2}x\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)}{(e^{2x}-1)^2\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4\sin^2\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi}{2}x}\right)^2}{\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)^2}\times\lim_{x\to0}\frac{\frac{\pi^2}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}$$
$$=\frac{1^2}{1^2}\times\frac{\frac{\pi^2}{4}}{1+1}=\frac{\pi^2}{8}$$

따라서 $a\times f(0)=4\times\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{2}$

답 ⑤

10

▸ 21055-0243

$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-x^2\cos\frac{1}{2x}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

11

▸ 21055-0244

두 상수 $a\ (0<a<1)$, b에 대하여 $\lim_{x\to0}\frac{\cos a\pi(x+1)}{\pi x}=b$일 때, $a+b$의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

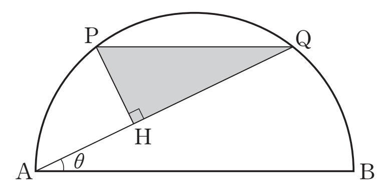
12

▸ 21055-0245

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원에서 선분 AB에 평행한 직선이 반원의 호 AB와 만나는 두 점 중 점 A에 가까운 점을 P, 점 B에 가까운 점을 Q라 하고, 점 P에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\angle QAB=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$일 때, 삼각형 PHQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{S(\theta)}{(\pi-4\theta)^2}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



유형 5 삼각함수의 미분

출제유형 | 삼각함수의 도함수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 다음과 같은 사인함수와 코사인함수의 도함수를 이용하여 문제를 해결한다.

(1) $y=\sin x$이면 $y'=\cos x$

(2) $y=\cos x$이면 $y'=-\sin x$

필수 유형

함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+3 & (x\le 0) \\ a\sin x+b & (x>0) \end{cases}$$

은 $x=0$에서 미분가능하다. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값을 구하시오.

(단, a와 b는 상수이다.)

출제 의도

미분가능성을 이해하여 상수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)=f(0)$

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(2x+3)=3$,

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(a\sin x+b)=b$,

$f(0)=3$

이므로 $b=3$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{2x+3-3}{x}=2$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{a\sin x+3-3}{x}=a$$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 $a=2$

$$f(x)=\begin{cases} 2x+3 & (x\le 0) \\ 2\sin x+3 & (x>0) \end{cases}$$

따라서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}+3=5$

답 5

13

▸ 21055-0246

$0<x<2\pi$에서 정의된 함수 $f(x)=\sin x\cos x$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합은?

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

14

▸ 21055-0247

함수 $f(x)=x-\sin x$의 도함수 $f'(x)$에 대하여

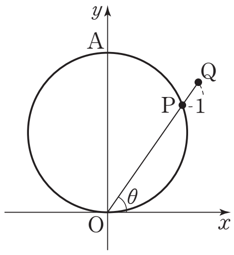
$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^2}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

15

▸ 21055-0248

그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 O(0, 0), A(0, 6)을 지름의 양 끝 점으로 하는 원 위의 점 중 제1사분면의 점을 P라 하자. 반직선 OP 위의 점 Q가 $\overline{PQ}=1$을 만족시킨다. 반직선 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, 점 Q의 x좌표를 $f(\theta)$라 하자. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값은? (단, $\overline{OP}<\overline{OQ}$)



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

미적분

유형 6 함수의 몫의 미분법과 합성함수의 미분법

출제유형 | 함수의 몫의 미분법과 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 다음과 같은 함수의 몫의 미분법과 합성함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 함수의 몫의 미분법
두 함수 $f(x)$, $g(x)$ $(g(x)\neq0)$이 미분가능할 때
① $y=\frac{f(x)}{g(x)}$이면 $y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$
② $y=\frac{1}{g(x)}$이면 $y'=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

(2) 합성함수의 미분법
미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는
$y'=f'(g(x))g'(x)$

필수 유형 | 2017학년도 대수능 9월 모의평가 |

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여
$f(2x+1)=(x^2+1)^2$
을 만족시킬 때, $f'(3)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

출제 의도

합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$f(2x+1)=(x^2+1)^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(2x+1)\times(2x+1)'=2(x^2+1)\times(x^2+1)'$
$2f'(2x+1)=4x(x^2+1)$
즉, $f'(2x+1)=2x(x^2+1)$
$x=1$을 대입하면
$f'(3)=2\times1\times(1^2+1)=4$

답 ④

16

▸ 21055-0249

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{x}{\tan x}$에 대하여

$\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}$의 값은?

① $1-\frac{\pi}{4}$ ② $1-\frac{\pi}{2}$ ③ $1-\frac{3}{4}\pi$
④ $1-\pi$ ⑤ $1-\frac{5}{4}\pi$

17

▸ 21055-0250

실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$, $\lim_{x\to2}\frac{f(g(x))-2}{x-2}=6$
을 만족시킨다. 함수 $f(x)$가 일대일대응일 때,
$\lim_{x\to2}\frac{g(x)+a}{x-2}=b$가 성립하도록 하는 두 상수 a, b에 대하여
$a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

18

▸ 21055-0251

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여
$f(\log_2(x+1))=g(2^x-1)$
을 만족시킬 때, 함수 $h(x)$를 $h(x)=(f\circ g)(x)$라 하자.
$f(1)=1$, $g'(1)=2$일 때, $\frac{h'(1)}{h(1)}$의 값은?

① $8\ln2$ ② $16\ln2$ ③ $4(\ln2)^2$
④ $8(\ln2)^2$ ⑤ $16(\ln2)^2$

유형 7 매개변수로 나타낸 함수, 음함수의 미분법

출제유형 | 매개변수로 나타낸 함수, 음함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

매개변수 t로 나타낸 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$에서 두 함수 $f(t)$, $g(t)$가 각각 미분가능하고, $f'(t)\neq0$일 때,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

(2) 음함수의 미분법

x에 대한 함수 y가 음함수 $f(x, y)=0$의 꼴로 주어졌을 때에는 y를 x에 대한 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

곡선 $x^3-y^3=e^{xy}$ 위의 점 $(a,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 b일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

점 $(a,\ 0)$은 곡선 $x^3-y^3=e^{xy}$ 위의 점이므로 $a^3=1$에서

$a=1$

$x^3-y^3=e^{xy}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3x^2-3y^2\frac{dy}{dx}=e^{xy}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)$$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-ye^{xy}}{xe^{xy}+3y^2}\ (\text{단, } xe^{xy}+3y^2\neq0)$$

곡선 $x^3-y^3=e^{xy}$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$$b=\frac{3-0}{1+0}=3$$

따라서

$a+b=1+3=4$

답 4

19 ▸ 21055-0252

좌표평면에서 매개변수 θ로 나타내어진 곡선

$x=\cos^4\theta$, $y=\sin^4\theta$

가 있다. $\tan\theta=2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ -1

④ -2 ⑤ -4

20 ▸ 21055-0253

좌표평면에서 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$x=\frac{t}{t^2+1}$, $y=\frac{t+1}{t^2+1}$

이 직선 $y=3x$와 만나는 점을 P라 할 때, 점 P에서의 접선의 기울기는?

① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$

④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{5}{6}$

21 ▸ 21055-0254

곡선 $x^2+xy+2y^2=4$ 위의 서로 다른 두 점 P, Q에서의 접선의 기울기가 모두 $\frac{3}{2}$일 때, 선분 PQ의 길이는?

① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4

④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

유형 8 역함수의 미분법과 이계도함수

출제유형 | 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구하는 문제와 이계도함수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 역함수의 미분법

미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능할 때, 함수 $y=f^{-1}(x)$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}} \text{ 또는 } (f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{f'(y)}$$

$$\left(\frac{dx}{dy}\neq 0,\ f'(y)\neq 0\right)$$

임을 이용하여 문제를 해결한다.

(2) 이계도함수

함수 $f'(x)$의 도함수 $\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$를 함수 $y=f(x)$의 이계도함수라고 하며, 이것을 기호로 $f''(x)$, y'', $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$와 같이 나타낸다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 |

함수 $f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(f(-1))$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{(1+e)^2}$ ② $\frac{1}{1+e}$ ③ $\left(\frac{1+e}{e}\right)^2$
④ $\frac{e^2}{1+e}$ ⑤ $\frac{(1+e)^2}{e}$

출제 의도

역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g(f(x))=x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=1$

$x=-1$을 대입하면

$g'(f(-1))f'(-1)=1$ …… ㉠

$f'(x)=\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$$g'(f(-1))=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{\frac{e}{(1+e)^2}}=\frac{(1+e)^2}{e}$$

답 ⑤

22

▸ 21055-0255

함수 $f(x)=a\pi x+\sin \pi x$에 대하여 $f(1)=2\pi$이다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(2\pi)$의 값은?

(단, a는 1 이상의 상수이다.)

① $\frac{1}{4\pi}$ ② $\frac{1}{2\pi}$ ③ $\frac{3}{4\pi}$
④ $\frac{1}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{4\pi}$

23

▸ 21055-0256

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$f(e^x-e^{-x})=x^3+2x$

를 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(0)+g'(0)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

24

▸ 21055-0257

두 함수 $f(x)=x^3-4x^2+6x-2$, $g(x)$와 임의의 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$는 한 점 $(g(t), t)$에서 만난다. 함수 $h(t)=(g\circ g)(t)$에 대하여 $h'(2)$의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

유형 9 접선의 방정식

출제유형 | 미분을 이용하여 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

(2) 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=f(t),\ y=g(t)$가 $t=t_1$에서 각각 미분가능하고 $f'(t_1)\neq0$일 때, 곡선 위의 점 $(f(t_1),\ g(t_1))$에서의 접선의 방정식은

$$y-g(t_1)=\frac{g'(t_1)}{f'(t_1)}\{x-f(t_1)\}$$

필수 유형 | 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

곡선 $e^y\ln x=2y+1$ 위의 점 $(e,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 $y=ax+b$라 할 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $-2e$ ② $-e$ ③ -1

④ $-\frac{2}{e}$ ⑤ $-\frac{1}{e}$

출제 의도

음함수의 미분법을 이용하여 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$e^y\ln x=2y+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^y\ln x\times\frac{dy}{dx}+e^y\times\frac{1}{x}=2\frac{dy}{dx}$

이 식에 $x=e,\ y=0$을 대입하면

$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{e}=2\frac{dy}{dx},\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{e}$

따라서 곡선 $e^y\ln x=2y+1$ 위의 점 $(e,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{e}(x-e)=\frac{1}{e}x-1$

따라서 $a=\frac{1}{e},\ b=-1$이므로

$ab=\frac{1}{e}\times(-1)=-\frac{1}{e}$

답 ⑤

25 ▸ 21055-0258

곡선 $y=a^x\ (a>1)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ a^t)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 QH의 길이가 2일 때, 상수 a의 값은?

① $\sqrt{e}$ ② e ③ $e\sqrt{e}$

④ $2e$ ⑤ e^2

26 ▸ 21055-0259

매개변수 $t\ (t>0)$으로 나타내어진 곡선

$x=t^2+2t,\ y=t+\ln t$

위의 한 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식이 $y=\frac{1}{2e}x+k$일 때, 상수 k의 값은?

① $-e$ ② $-\frac{e}{2}$ ③ 0

④ $\frac{e}{2}$ ⑤ e

27 ▸ 21055-0260

곡선 $y=\sin^2x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin^2t)$에서의 접선과 수직이고, 점 P를 지나는 직선의 y절편을 $g(t)$라 할 때, $\lim_{t\to0+}g(t)$의 값은? $\left(\text{단, } 0<t<\frac{\pi}{2}\right)$

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

유형 10 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

출제유형 | 미분을 이용하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 판정하는 문제 또는 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하고 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수의 증가와 감소를 판정한다.
(2) $f'(x)=0$이 되도록 하는 x의 값을 구한 후에 이 x의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호의 변화를 조사하여 극댓값과 극솟값을 구한다.

필수 유형 | 2018학년도 대수능 6월 모의평가 |

양수 a와 실수 b에 대하여 함수 $f(x)=ae^{3x}+be^{x}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [4점]

(가) $x_1<\ln\frac{2}{3}<x_2$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이다.
(나) 구간 $[k, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, $f(2m)=-\frac{80}{9}$이다.

① -15 ② -12 ③ -9
④ -6 ⑤ -3

출제 의도

도함수를 이용하여 함수 $f(x)$가 항상 증가하거나 감소하도록 하는 조건을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$f'(x)=3ae^{3x}+be^{x}$, $f''(x)=9ae^{3x}+be^{x}$
조건 (가)에서

$$f''\left(\ln\frac{2}{3}\right)=9ae^{3\ln\frac{2}{3}}+be^{\ln\frac{2}{3}}=9ae^{\ln\frac{8}{27}}+be^{\ln\frac{2}{3}}$$
$$=9a\times\frac{8}{27}+b\times\frac{2}{3}=\frac{8a}{3}+\frac{2b}{3}=0$$

$b=-4a$
즉, $f'(x)=3ae^{3x}-4ae^{x}=ae^{x}(3e^{2x}-4)$
이때 조건 (나)에서 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 구간 $[k, \infty)$에서 $f'(x)$의 값이 항상 0 이상이거나 항상 0 이하이어야 한다.
이때 k의 최솟값이 m이므로

$$f'(m)=ae^{m}(3e^{2m}-4)=0,\ m=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$$

이때 구간 $[m, \infty)$의 왼쪽 끝 점인 $x=m$인 점에서만 $f'(m)=0$이고 나머지 점에서는 $f'(x)$가 항상 양이거나 항상 음이다.
따라서 $f(x)$는 구간 $[m, \infty)$에서 항상 증가하거나 항상 감소하므로 역함수가 존재한다.

$$f(2m)=f\left(\ln\frac{4}{3}\right)=ae^{3\ln\frac{4}{3}}-4ae^{\ln\frac{4}{3}}$$
$$=ae^{\ln\frac{64}{27}}-4a\times\frac{4}{3}=a\times\frac{64}{27}-\frac{16a}{3}$$
$$=-\frac{80}{27}a=-\frac{80}{9}$$

따라서 $a=3$, $b=-12$이므로
$f(0)=a+b=-9$

답 ③

28

▸ 21055-0261

함수 $f(x)=\frac{x+1}{x^2+a}$은 $x=-3$에서 극값을 갖는다. $f(x)$의 극댓값을 M, 극솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?
(단, a는 양수이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{7}{24}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

29

▸ 21055-0262

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\sin x-x\cos x+ax^2$$

이 구간 $(0, \infty)$에서 증가하기 위한 실수 a의 최솟값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

30

▸ 21055-0263

상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}(16x+7)e^{-2x} & (x<0)\\(x^2+ax+b)e^{x} & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 집합

$$\{\alpha\,|\,x=\alpha\text{에서 함수 } f(x)\text{는 극값을 갖는다.}\}$$

의 모든 원소의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

유형 11 함수의 그래프와 최대, 최소

출제유형 | 함수의 증가와 감소, 함수의 극대와 극소, 곡선의 오목과 볼록, 곡선의 변곡점 등을 이용하여 함수의 그래프를 파악하거나 최댓값과 최솟값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 도함수를 이용하여 함수의 증가와 감소, 함수의 극대와 극소를 파악하고, 이계도함수를 이용하여 곡선의 오목과 볼록, 곡선의 변곡점 등을 구하고 이를 이용하여 그래프의 개형을 그려 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2020학년도 대수능 |

곡선 $y=ax^2-2\sin 2x$가 변곡점을 갖도록 하는 정수 a의 개수는? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

출제 의도

미분법을 이용하여 곡선이 변곡점을 갖도록 하는 조건을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$y'=2ax-4\cos 2x$

$y''=2a+8\sin 2x$

$y''=0$에서

$\sin 2x=-\frac{a}{4}$

곡선 $y=ax^2-2\sin 2x$가 변곡점을 가져야 하므로

$-1<-\frac{a}{4}<1$에서 $-4<a<4$

따라서 정수 a의 값은

$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

이고 그 개수는 7이다.

답 ④

31

▸ 21055-0264

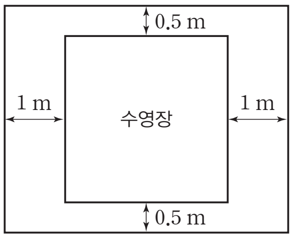
양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=(\ln x)^2$의 그래프의 변곡점에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 세 점 O, A, B를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{e}{8}$ ② $\frac{e}{4}$ ③ $\frac{3e}{8}$
④ $\frac{e}{2}$ ⑤ $\frac{5e}{8}$

32

▸ 21055-0265

직사각형 모양의 땅에 직사각형 모양의 수영장을 만들려고 한다. 그림과 같이 수영장을 제외한 땅에서 오른쪽과 왼쪽 간격을 각각 1 m, 위쪽과 아래쪽 간격을 각각 0.5 m로 정하면 수영장의 넓이는 8 m^2이다. 이 직사각형 모양의 땅의 넓이는 가로의 길이가 a m일 때 최솟값 b m^2를 갖는다. $a+b$의 값을 구하시오.
(단, 땅의 둘레의 각 변과 수영장 둘레의 각 변은 서로 평행하거나 수직이다.)



33

▸ 21055-0266

함수 $f(x)=x\cos x$의 그래프에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

ㄴ. $0<a<\frac{\pi}{2}$일 때 $f'(a)=0$이면 $\tan a=\frac{1}{a}$이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 열린구간 $\left(\frac{3}{4},\ 1\right)$에서 극댓값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 12 방정식과 부등식에의 활용 및 속도와 가속도

출제유형 | 함수의 그래프를 이용하여 방정식의 실근의 개수나 부등식이 성립하는 조건을 구하는 문제가 출제된다. 또한 좌표평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 방정식과 부등식에의 활용

① 방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표와 같다.

② 어떤 구간에서 부등식 $f(x)>0$이 성립함을 보이려면 이 구간에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있음을 보이면 된다.

(2) 속도와 가속도

좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때

① 점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$$

② 점 P의 시각 t에서의 가속도의 크기는

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$$

필수 유형 | 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=2\sqrt{t+1},\ y=t-\ln(t+1)$$

이다. 점 P의 속력의 최솟값은? [4점]

① $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ ② $\dfrac{\sqrt{6}}{8}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

④ $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

출제 의도

좌표평면 위를 움직이는 점의 속력의 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{t+1}},\ \frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t+1}$$

이므로 시각 t에서의 점 P의 속력 $|v(t)|$는

$$|v(t)|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{t+1}}\right)^2+\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{t+1}+1}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

따라서 점 P의 속력의 최솟값은 $t=1$일 때

$$\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 ⑤

34 ▸ 21055-0267

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=\cos t+\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin t,\ y=\sin t-\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos t$$

일 때, 점 P의 가속도의 크기는 $t=a\pi$에서 최솟값 m을 갖는다. $a+m$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\dfrac{5}{4}$ ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{3}{2}$

④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ $\dfrac{7}{4}$

35 ▸ 21055-0268

양의 실수 x에 대하여 부등식 $x\ln x\le x+kx^2$이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은?

① $\dfrac{1}{e}$ ② $\dfrac{2}{e}$ ③ $\dfrac{1}{e^2}$

④ $\dfrac{2}{e^2}$ ⑤ $\dfrac{3}{e^2}$

36 ▸ 21055-0269

n이 자연수일 때, 두 함수 $f(x)=(x+2)^2+e^x$, $g(x)=ne^x$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값은?

$\left(\text{단, } \lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2}{e^x}=0\text{이다.}\right)$

① 15 ② 17 ③ 19

④ 21 ⑤ 23

09 적분법

1 여러 가지 함수의 부정적분 (단, C는 적분상수)

(1) $\int x^{\alpha}\,dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$ (단, α는 -1이 아닌 실수)

$\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$

(2) $\int e^{x}\,dx=e^{x}+C$, $\int a^{x}\,dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C$ (단, $a>0$, $a\neq 1$)

(3) $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$, $\int \cos x\,dx=\sin x+C$, $\int \sec^{2}x\,dx=\tan x+C$, $\int \csc^{2}x\,dx=-\cot x+C$

2 치환적분법과 부분적분법

(1) 미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여 $g(x)=t$로 놓으면 $g'(x)=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(t)dt$$

참고 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$ (단, $f(x)\neq 0$이고, C는 적분상수)

(2) 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

3 부정적분과 미분의 관계

(1) $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$

(2) $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$ (단, C는 적분상수)

4 정적분의 정의와 성질

(1) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 할 때,

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_{a}^{b}=F(b)-F(a)$$

(2) 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 연속일 때

① $\int_{a}^{b}kf(x)dx=k\int_{a}^{b}f(x)dx$ (단, k는 상수)

② $\int_{a}^{b}\{f(x)+g(x)\}dx=\int_{a}^{b}f(x)dx+\int_{a}^{b}g(x)dx$

③ $\int_{a}^{b}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{a}^{b}f(x)dx-\int_{a}^{b}g(x)dx$

④ $\int_{a}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{b}f(x)dx$

5 정적분의 치환적분법과 부분적분법

(1) 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(t)$에 대하여 미분가능한 함수 $t=g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속일 때, $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$이면

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(g(x))g'(x)dx=\int_{a}^{b}f(t)dt$$

(2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\int_{a}^{b}f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_{a}^{b}-\int_{a}^{b}f'(x)g(x)dx$$

6 정적분으로 나타낸 함수의 미분

연속함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt=f(x)$

(2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x xf(t)dt=\int_a^x f(t)dt+xf(x)$

7 정적분으로 나타낸 함수의 극한

연속함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)dt=f(a)$

8 정적분과 급수

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

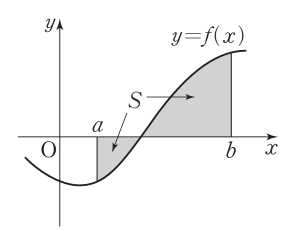
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx=\int_0^{b-a} f(a+x)dx=(b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)dx$$

참고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\frac{p}{n}=\int_a^{a+p} f(x)dx=\int_0^p f(a+x)dx=p\int_0^1 f(a+px)dx$ (단, a, p는 상수이다.)

9 곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 영역의 넓이 S는

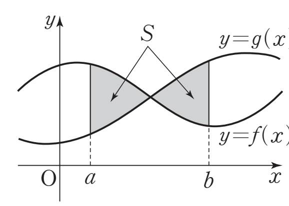
$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$



10 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 영역의 넓이 S는

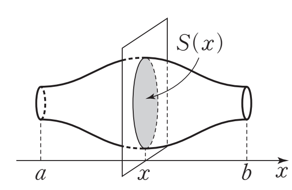
$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$



11 입체도형의 부피

닫힌구간 $[a, b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이가 $S(x)$이고 함수 $S(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 이 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_a^b S(x)dx$$



12 좌표평면 위를 움직이는 점의 속도와 거리

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(a\le t\le b)$에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$이고, 도함수 $f'(t)$, $g'(t)$가 각각 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 점 P가 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

13 곡선의 길이

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$의 길이 l은

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

유형 1 여러 가지 함수의 부정적분

출제유형 | 여러 가지 함수의 부정적분을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $y=x^{\alpha}$ (α는 실수), 지수함수, 로그함수, 삼각함수의 부정적분을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2,\ f(1)=3$$

을 만족시킬 때, $f(4)$의 값은?

① $\frac{5}{4}+\ln 2$ ② $\frac{7}{4}+\ln 2$ ③ $\frac{5}{4}+2\ln 2$
④ $\frac{7}{4}+2\ln 2$ ⑤ $\frac{9}{4}+2\ln 2$

출제 의도

함수 $y=x^{\alpha}$ (α는 실수)의 부정적분을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$f'(x)=\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx\\&=\int\frac{1}{x}\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx\\&=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)dx\\&=\int\left(\frac{1}{x}-2x^{-\frac{3}{2}}+x^{-2}\right)dx\\&=\ln x+4x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1}+C\ (\text{단, }C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

$f(1)=3$이므로

$4-1+C=3$에서 $C=0$

따라서

$f(x)=\ln x+4x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1}$

이므로

$$\begin{aligned}f(4)&=\ln 4+4\times4^{-\frac{1}{2}}-4^{-1}\\&=2\ln 2+4\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\\&=\frac{7}{4}+2\ln 2\end{aligned}$$

답 ④

01 ▸ 21055-0270

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=2^x(1+2^x)\ln 2,\ f(0)=0$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

02 ▸ 21055-0271

열린구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=\sec^2 x\csc^2 x,\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$$

을 만족시킬 때, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값은?

① $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

03 ▸ 21055-0272

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=e$이고 모든 실수 x에 대하여

$$e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=2x-1$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① $\frac{3}{e}$ ② $\frac{3}{e}+1$ ③ $\frac{4}{e}+1$
④ $\frac{3}{e}+2$ ⑤ $\frac{4}{e}+2$

유형 2 치환적분법과 부분적분법

출제유형 | 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 부정적분을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) $g(x)=t$로 놓으면 $g'(x)=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(t)dt$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C \text{ (단, } f(x)\neq 0\text{이고 } C\text{는 적분상수)}$$

(2) 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

필수 유형

열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=\tan x\sqrt{\sec x},\ f(0)=0$$

을 만족시킬 때, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값은?

① $\sqrt{2}-2$ ② $\sqrt{2}-1$ ③ $2\sqrt{2}-2$
④ $2\sqrt{2}-1$ ⑤ $2\sqrt{2}$

출제 의도

치환적분법을 이용하여 부정적분을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$f'(x)=\tan x\sqrt{\sec x}$이므로

$f(x)=\int \tan x\sqrt{\sec x}\,dx$

$\sec x=t$로 놓으면 $\tan x\sec x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\begin{aligned} f(x)&=\int \tan x\sqrt{\sec x}\,dx\\ &=\int\left(\frac{\tan x}{\sqrt{\sec x}}\times\sec x\right)dx\\ &=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt\\ &=\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt\\ &=2t^{\frac{1}{2}}+C\\ &=2\sqrt{\sec x}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}\end{aligned}$$

$f(0)=0$이므로

$2+C=0$에서 $C=-2$

따라서 $f(x)=2\sqrt{\sec x}-2$이므로

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{2}-2$

답 ③

04

▸ 21055-0273

열린구간 $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}},\ f(1)=\frac{7}{3}$$

을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

05

▸ 21055-0274

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=e^{-x}\cos x,\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$$

을 만족시킬 때, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)\times f\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{16}$

06

▸ 21055-0275

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=\frac{(x+1)\ln x}{x^2},\ f(1)=0$$

을 만족시킬 때, $f(e)$의 값은?

① $\frac{1}{2}-\frac{2}{e}$ ② $\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$ ③ $\frac{3}{2}-\frac{2}{e}$
④ $\frac{3}{2}-\frac{1}{e}$ ⑤ $\frac{5}{2}-\frac{2}{e}$

유형 3 부정적분과 미분의 관계

출제유형 | 부정적분과 미분의 관계를 이해하고 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 다음을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$

(2) $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$ (단, C는 적분상수)

필수 유형

$x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{2-x^2}{x^3}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx$$

라 하자. $g\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)$일 때, $g(1)$의 값은?

① -15 ② -14 ③ -13
④ -12 ⑤ -11

출제 의도

부정적분과 미분의 관계를 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$g(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx$
$=f(x)+C$
$=\frac{2-x^2}{x^3}+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=1$이므로

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2-\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}}+C=14+C=1$에서

$C=-13$

따라서

$g(x)=\frac{2-x^2}{x^3}-13$

이므로

$g(1)=\frac{2-1}{1}-13=-12$

답 ④

07

▸ 21055-0276

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\{x(x-3)e^{x^2-1}\},\ f(1)=0$$

을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

08

▸ 21055-0277

열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $0<x<2\pi$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\int(\sin x+2)\cos x\,dx$$

를 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 0일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오.

09

▸ 21055-0278

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여

$$\frac{f(x)}{x}=2\int\frac{f'(x)}{x}dx-(\ln x)^2$$

을 만족시킨다. $f(1)=-\frac{1}{2}$일 때, $f(e)$의 값은?

① $\frac{e}{2}$ ② e ③ $\frac{3}{2}e$
④ $2e$ ⑤ $\frac{5}{2}e$

미적분

유형 4 정적분의 계산

출제유형 | 정적분의 정의와 성질을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 정적분의 정의와 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때,

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

(2) 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 연속일 때

① $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

② $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

③ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

④ $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

필수 유형 | 2016학년도 대수능 6월 모의평가 |

$\int_0^1 e^{x+4}dx$의 값은? [3점]

① e^5-e^4　② e^5　③ e^5+e^4
④ e^5+2e^4　⑤ e^5+3e^4

출제 의도

정적분의 정의를 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$$\int_0^1 e^{x+4}dx=e^4\int_0^1 e^x dx$$
$$=e^4\Big[e^x\Big]_0^1$$
$$=e^4(e-1)$$
$$=e^5-e^4$$

답 ①

10 ▸ 21055-0279

$\int_1^e \frac{x(x+1)}{x^3}dx-\int_1^e \frac{1}{x^2}dx$의 값은?

① $\frac{1}{e^2}$　② $\frac{1}{e}$　③ 1
④ e　⑤ e^2

11 ▸ 21055-0280

$2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 (2\cos x+1)\cos x\,dx$의 값은?

① $\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}$　② $\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}$　③ $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$
④ $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

12 ▸ 21055-0281

함수 $f(x)=\sqrt[3]{x}$에 대하여

$$\int_1^8 \frac{x+1}{\{f(x)\}^2+f(x)+1}dx-\int_1^8 \frac{2\{f(x)\}^{-1}}{f(x)+\{f(x)\}^{-1}+1}dx=\frac{q}{p}$$

이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

유형 5 치환적분법을 이용한 정적분

출제유형 | 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | $g(x)=t$로 치환한 후 $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$일 때,

$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx=\int_{a}^{b} f(t)dt$

임을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 6월 모의평가 |

$\int_{1}^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{15}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{11}{15}$

출제 의도

치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$\int_{1}^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$에서

$x^2-1=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=\sqrt{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\begin{aligned}\int_{1}^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2-1}\,dx&=\int_{1}^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}x^2\sqrt{x^2-1}\times 2x\right)dx\\&=\int_{0}^{1}\frac{1}{2}(t+1)\sqrt{t}\,dt\\&=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left(t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)dt\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{15}\end{aligned}$$

답 ②

[다른 풀이]

$\sqrt{x^2-1}=t$로 놓으면 $x^2=t^2+1$, $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=\sqrt{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\begin{aligned}\int_{1}^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2-1}\,dx&=\int_{1}^{\sqrt{2}}\left\{x^2(x^2-1)\times\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right\}dx\\&=\int_{0}^{1}(t^2+1)t^2\,dt\\&=\int_{0}^{1}(t^4+t^2)dt\\&=\left[\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{8}{15}\end{aligned}$$

13 ▸ 21055-0282

$\int_{0}^{4}\frac{x}{x^2-x+3}dx+\int_{4}^{0}\frac{1-x}{x^2-x+3}dx$의 값은?

① 0 ② ln 2 ③ ln 3
④ 2 ln 2 ⑤ ln 5

14 ▸ 21055-0283

$\int_{0}^{\frac{k}{3}\pi}\sin^3\frac{x}{k}\,dx=\frac{5}{3}$를 만족시키는 양수 k의 값을 구하시오.

15 ▸ 21055-0284

구간 $[0, \infty)$에서 연속인 함수 $f(x)$가 $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\sqrt{x}e^{x-1}+\int_{1}^{0}f(x^2)dx$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① $\frac{1}{4}+\frac{1}{4e}$ ② $\frac{1}{4}+\frac{1}{2e}$ ③ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4e}$
④ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2e}$ ⑤ $\frac{3}{4}+\frac{1}{4e}$

미적분

정답과 풀이 72쪽

유형 6 부분적분법을 이용한 정적분

출제유형 | 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

임을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2017학년도 대수능 6월 모의평가 |

$\int_1^e x(1-\ln x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}(e^2-7)$ ② $\frac{1}{4}(e^2-6)$ ③ $\frac{1}{4}(e^2-5)$

④ $\frac{1}{4}(e^2-4)$ ⑤ $\frac{1}{4}(e^2-3)$

출제 의도

부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\int_1^e x(1-\ln x)\,dx$에서

$u(x)=1-\ln x$, $v'(x)=x$로 놓으면

$u'(x)=-\frac{1}{x}$, $v(x)=\frac{1}{2}x^2$이므로

$$\int_1^e x(1-\ln x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2(1-\ln x)\right]_1^e-\int_1^e\left\{\frac{1}{2}x^2\times\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}dx$$
$$=\left(0-\frac{1}{2}\right)+\int_1^e\frac{1}{2}x\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e$$
$$=-\frac{1}{2}+\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}(e^2-3)$$

답 ⑤

16

▸ 21055-0285

$\int_0^1 2x\ln(x+1)dx+\int_0^1\ln(x+1)dx$의 값은?

① $\ln 2-\frac{1}{2}$ ② $2\ln 2-\frac{1}{2}$ ③ $\ln 2+\frac{1}{2}$

④ $2\ln 2+\frac{1}{2}$ ⑤ $4\ln 2-\frac{1}{2}$

17

▸ 21055-0286

함수 $f(x)=x^3e^x$에 대하여 $\int_1^2 f\left(\frac{1}{x}\right)dx$의 값은?

① $\frac{\sqrt{e}}{4}$ ② $\frac{e}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{e}}{2}$

④ $\frac{e}{2}$ ⑤ e

18

▸ 21055-0287

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2x\cos x+\sin x)\sin x\,dx$의 값은?

① $\frac{\pi}{12}$ ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{4}$

④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}\pi$

유형 7 정적분으로 나타낸 함수의 미분

출제유형 | 연속함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여 정적분으로 나타낸 함수 $\int_a^x f(t)dt$, $\int_a^x xf(t)dt$를 미분하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 연속함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여 $\int_a^x f(t)dt$, $\int_a^x xf(t)dt$를 포함하는 함수가 주어질 때, 다음을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$, $\int_a^a f(t)dt=0$

(2) $\frac{d}{dx}\int_a^x xf(t)dt=\int_a^x f(t)dt+xf(x)$

필수 유형 | 2018학년도 대수능 6월 모의평가 |

양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\int_1^x f(t)dt=x^2-a\sqrt{x}\ (x>0)$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

출제 의도

정적분으로 나타낸 함수의 미분을 이용하여 함수 $f(x)$를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\int_1^x f(t)dt=x^2-a\sqrt{x}$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1-a$에서 $a=1$

즉, $\int_1^x f(t)dt=x^2-\sqrt{x}\ (x>0)$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

따라서 $f(1)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

답 ②

19 ▸ 21055-0288

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_2^x xf(t)dt=x\sin\frac{\pi}{6}x+a\cos\frac{\pi}{6}x$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$

20 ▸ 21055-0289

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이고

$$\int_1^x (x-t)f'(t)dt=x\ln x+ax^2+b\ (x>0)$$

을 만족시킬 때, $f\left(\frac{1}{b}\right)-f(1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\ln 2-1$ ② $2\ln 2-1$ ③ $\ln 2+1$
④ $2\ln 2+1$ ⑤ $4\ln 2+1$

21 ▸ 21055-0290

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_2^x f(t)dt=(3x^2+4)e^x+f(x)$$

를 만족시킨다. 함수 $g(x)=e^{-x}f(x)$에 대하여 $g(1)$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

미적분

유형 8 정적분으로 나타낸 함수의 극한

출제유형 | 정적분의 정의와 미분계수의 정의를 이용하여 함수의 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 연속함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여

$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$, $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)dt$의 값을 구할 때, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

(1) $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=f(a)$

(2) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)dt=\lim_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=F'(a)=f(a)$

임을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수 $f(x)=a\cos(\pi x^2)$에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2+1}{x}\int_1^{x+1} f(t)\,dt\right\}=3$$

일 때, $f(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

출제 의도

정적분의 정의와 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2+1}{x}\int_1^{x+1} f(t)\,dt\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+1}{x}\{F(x+1)-F(1)\}\right]$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{(x^2+1)\times\frac{F(x+1)-F(1)}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}(x^2+1)\times\lim_{x\to 0}\frac{F(x+1)-F(1)}{x}$$
$$=(0+1)\times F'(1)$$
$$=1\times f(1)$$
$$=f(1)$$
$$=3$$

$f(x)=a\cos(\pi x^2)$에서

$f(1)=a\cos\pi=-a=3$

즉, $a=-3$이므로 $f(x)=-3\cos(\pi x^2)$

따라서 $f(a)=f(-3)=-3\cos(9\pi)=-3\times(-1)=3$

답 ⑤

22

▸ 21055-0291

함수 $f(x)=a(x+2)\ln x$에 대하여

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{2x-1}\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)dt=-1$$

일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

23

▸ 21055-0292

함수 $f(x)=\frac{x^2+ax+a}{x^2+a+1}\ (a>-1)$에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2-x}\int_{k-x}^{k+x} f(t)dt=-4$$

를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 곱이 8일 때, $f(-1)$의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

24

▸ 21055-0293

함수 $f(x)=\frac{ax+8}{\sqrt{x}}$에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_4^{x+4}(t-x)f'(t)dt=1$$

일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

유형 9 정적분과 급수

출제유형 | 정적분을 이용하여 급수의 합을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 급수의 합은 경우에 따라 여러 가지의 정적분으로 나타낼 수 있음을 알고 이를 이용하여 문제를 해결한다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\frac{p}{n}=\int_a^{a+p} f(x)dx$$
$$=\int_0^p f(a+x)dx$$
$$=p\int_0^1 f(a+px)dx \text{ (단, } a, p\text{는 상수이다.)}$$

필수 유형 | 2015학년도 대수능 |

함수 $f(x)=\frac{1}{x}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$의 값은? [3점]

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $2\ln 2$
④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

출제 의도

정적분을 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 \frac{1}{x}dx$$
$$=\Big[\ln|x|\Big]_1^3=\ln 3-\ln 1$$
$$=\ln 3$$

답 ②

[다른 풀이 1]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}=\int_0^2 f(1+x)dx$$
$$=\int_0^2 \frac{1}{1+x}dx$$
$$=\Big[\ln|1+x|\Big]_0^2=\ln 3$$

[다른 풀이 2]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}=2\int_0^1 f(1+2x)dx$$
$$=2\int_0^1 \frac{1}{1+2x}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{2}{1+2x}dx$$
$$=\Big[\ln|1+2x|\Big]_0^1=\ln 3$$

25 ▸ 21055-0294

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n+k}}$의 값은?

① $\frac{1}{4}(\ln 2)^2$ ② $\frac{1}{2}(\ln 2)^2$ ③ $\frac{3}{4}(\ln 2)^2$
④ $(\ln 2)^2$ ⑤ $\frac{5}{4}(\ln 2)^2$

26 ▸ 21055-0295

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2\pi}{n}\sin\left(1+\frac{k}{2n}\right)\pi\cos\left(1-\frac{k}{2n}\right)\pi\right\}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

27 ▸ 21055-0296

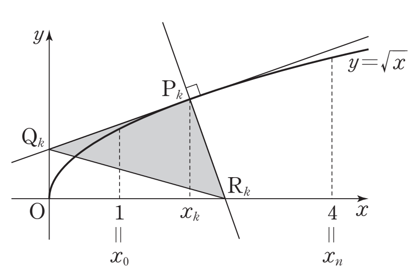
그림과 같이 닫힌구간 $[1, 4]$를 n등분한 점을 각각

$x_0(=1),\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n(=4)$

라 하자. 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점

$P_k(x_k, \sqrt{x_k})\ (k=1, 2, 3, \cdots, n)$

에서의 접선이 y축과 만나는 점을 Q_k, 점 P_k를 지나고 점 P_k에서의 접선과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 R_k라 하자. 삼각형 $P_kQ_kR_k$의 넓이를 S_k라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



미적분

유형 10 곡선과 좌표축 사이의 넓이

출제유형 | 곡선과 좌표축 사이의 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ $(a<b)$로 둘러싸인 영역의 넓이 S는

$S=\int_a^b |f(x)|dx$

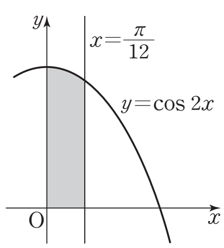
임을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2017학년도 대수능 9월 모의평가 |

함수 $y=\cos 2x$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{12}$로 둘러싸인 영역의 넓이가 직선 $y=a$에 의하여 이등분될 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2\pi}$　② $\frac{1}{\pi}$　③ $\frac{3}{2\pi}$

④ $\frac{2}{\pi}$　⑤ $\frac{5}{2\pi}$

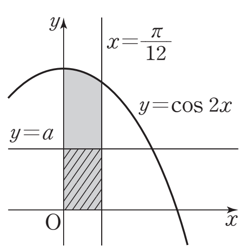


출제 의도

정적분을 이용하여 곡선과 좌표축 사이의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

함수 $y=\cos 2x$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{12}$로 둘러싸인 영역의 넓이는



$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x\, dx$

$=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{12}}=\frac{1}{4}$ …… ㉠

㉠의 넓이가 직선 $y=a$에 의하여 이등분되므로

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{12}\times a$

따라서 $a=\frac{3}{2\pi}$

답 ③

28

▸ 21055-0297

곡선 $y=(x-1)e^{1-x}$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $1-\frac{2}{e}$　② $1-\frac{1}{e}$　③ $2-\frac{2}{e}$

④ $2-\frac{1}{e}$　⑤ $3-\frac{2}{e}$

29

▸ 21055-0298

양수 a에 대하여 곡선 $y=|x+(2a-1)\sqrt{x}-2a|+a$와 x축, y축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이가 15일 때, a의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$

④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

30

▸ 21055-0299

열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan x+a$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 곡선 $y=g(x)$가 점 $(\sqrt{3}, 0)$을 지날 때, 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

(단, a는 상수이다.)

① $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\ln 2$　② $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi-\ln 2$　③ $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

④ $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\ln 2$

유형 11 두 곡선 사이의 넓이

출제유형 | 두 곡선 사이의 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

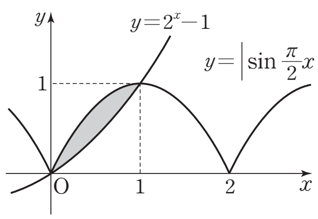
출제유형잡기 | 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ $(a<b)$로 둘러싸인 영역의 넓이 S는

$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

임을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

그림과 같이 두 곡선 $y=2^x-1$, $y=\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$가 원점 O와 점 $(1,\ 1)$에서 만난다. 두 곡선 $y=2^x-1$, $y=\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]



① $-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\ln 2}-1$ ② $\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\ln 2}+1$ ③ $\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\ln 2}-1$
④ $\frac{1}{\pi}-\frac{1}{\ln 2}+1$ ⑤ $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\ln 2}-1$

출제 의도

정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$0<x<1$에서 $\sin\frac{\pi}{2}x>0$이고 $\sin\frac{\pi}{2}x>2^x-1$이므로 두 곡선 $y=2^x-1$, $y=\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^1 \left|\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|-(2^x-1)\right|dx$

$=\int_0^1 \left\{\sin\frac{\pi}{2}x-(2^x-1)\right\}dx$

$=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{2^x}{\ln 2}+x\right]_0^1$

$=\left(0-\frac{2}{\ln 2}+1\right)-\left(-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\ln 2}+0\right)$

$=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\ln 2}+1$

답 ②

31

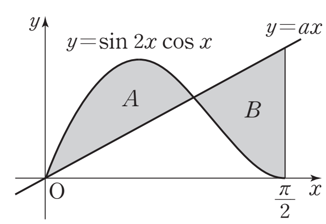
▸ 21055-0300

두 곡선 $y=x^2+\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

32

▸ 21055-0301

그림과 같이 곡선 $y=\sin 2x\cos x\ \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$와 직선 $y=ax$ $(0<a<2)$로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=\sin 2x\cos x$와 두 직선 $y=ax$, $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 영역을 B라 하자. A의 넓이와 B의 넓이가 서로 같을 때, 상수 a의 값은?



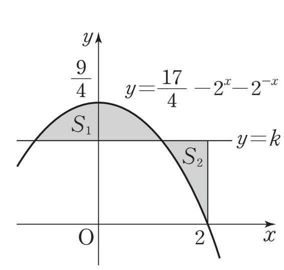
① $\frac{16}{3\pi^2}$ ② $\frac{17}{3\pi^2}$ ③ $\frac{6}{\pi^2}$
④ $\frac{19}{3\pi^2}$ ⑤ $\frac{20}{3\pi^2}$

33

▸ 21055-0302

곡선 $y=\frac{17}{4}-2^x-2^{-x}$과 직선 $y=k\ \left(0<k<\frac{9}{4}\right)$로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1, 곡선 $y=\frac{17}{4}-2^x-2^{-x}$과 직선 $y=k$ 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2라 하자. $S_1=2S_2$일 때, $k=p+\frac{q}{\ln 2}$이다. $8\times(p+q)$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 유리수이고 $\ln 2$는 무리수이다.)



미적분

유형 12 입체도형의 부피

출제유형 | 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구하는 문제가 출제된다.

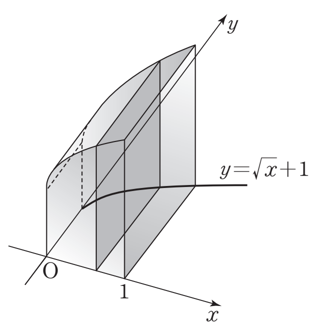
출제유형잡기 | 닫힌구간 $[a, b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이가 $S(x)$일 때, 이 입체도형의 부피 V는

$V=\int_a^b S(x)dx$

임을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2017학년도 대수능 |

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}+1$과 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{7}{3}$　② $\frac{5}{2}$　③ $\frac{8}{3}$　④ $\frac{17}{6}$　⑤ 3

출제 의도

정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

x축 위의 점 $(t, 0)$ $(0\le t\le 1)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{t}+1$인 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=(\sqrt{t}+1)^2=t+2\sqrt{t}+1$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$V=\int_0^1 S(t)dt=\int_0^1 (t+2\sqrt{t}+1)dt$

$=\int_0^1 (t+2t^{\frac{1}{2}}+1)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+\frac{4}{3}t\sqrt{t}+t\right]_0^1$

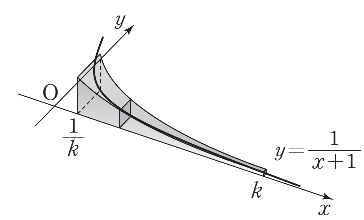
$=\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+1=\frac{17}{6}$

답 ④

34

▸ 21055-0303

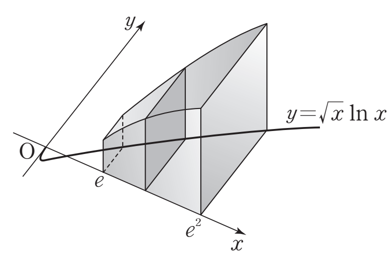
그림과 같이 곡선 $y=\frac{1}{x+1}$과 x축 및 두 직선 $x=\frac{1}{k}$, $x=k$ $(k>1)$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $\frac{1}{2}$일 때, k의 값을 구하시오.



35

▸ 21055-0304

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}\ln x$와 x축 및 두 직선 $x=e$, $x=e^2$으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?

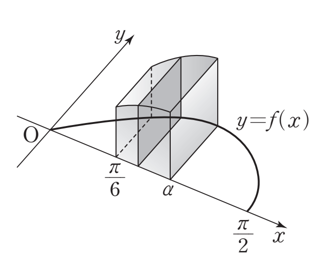


① $e^4-\frac{e^2}{2}$　② $e^4-\frac{e^2}{4}$　③ $\frac{5}{4}e^4-\frac{e^2}{2}$　④ $\frac{5}{4}e^4-\frac{e^2}{4}$　⑤ $\frac{3}{2}e^4-\frac{e^2}{2}$

36

▸ 21055-0305

그림과 같이 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=\sin x\sqrt{\cos x}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\alpha$ $\left(\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형이 있다. $f'(\alpha)=0$일 때, 이 입체도형의 부피는 $p\sqrt{6}+q$이다. $\frac{2}{p}-\frac{1}{q}$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.)



유형 13 좌표평면 위를 움직이는 점의 속도와 거리

출제유형 | 좌표평면 위를 움직이는 점의 위치가 주어질 때, 점이 움직인 거리를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(a\le t\le b)$에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 점 P가 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

임을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}},\ y=\ln t$$

이다. 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

출제 의도

좌표평면 위를 움직이는 점의 위치가 주어질 때, 점이 움직인 거리를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$x=\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}=t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}$이므로 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t}$

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2&=\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{t}\right)^2\\&=\left(\frac{1}{4t}-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{4t^3}\right)+\frac{1}{t^2}\\&=\frac{1}{4t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{4t^3}\\&=\frac{t^2+2t+1}{4t^3}=\frac{(t+1)^2}{4t^3}\end{aligned}$$

따라서 $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_1^4 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt&=\int_1^4 \sqrt{\frac{(t+1)^2}{4t^3}}\,dt\\&=\int_1^4 \left|\frac{t+1}{2t^{\frac{3}{2}}}\right|dt\\&=\int_1^4 \left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\right)dt\\&=\left[t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\right]_1^4\\&=\left(2-\frac{1}{2}\right)-(1-1)=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

답 ③

37 ▸ 21055-0306

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\ge 0)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=8t^{\frac{5}{4}}+1,\ y=\frac{10}{3}t^{\frac{3}{2}}-5t$$

이다. 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는?

① $\frac{110}{3}$　② $\frac{115}{3}$　③ 40　④ $\frac{125}{3}$　⑤ $\frac{130}{3}$

38 ▸ 21055-0307

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\ge 0)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=4\sin t-4\cos t,\ y=2\sin^2 t$$

이다. 시각 $t=\frac{\pi}{4}$에서 $t=\frac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리는?

① $\pi+1$　② $\pi+2$　③ 2π　④ $2\pi+1$　⑤ $2\pi+2$

39 ▸ 21055-0308

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(0\le t<\pi)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=\tan\frac{t}{2}-t+1,\ y=\ln\left(\cos^2\frac{t}{2}\right)$$

이다. 시각 $t=\frac{\pi}{3}$에서 $t=\frac{2}{3}\pi$까지 점 P가 움직인 거리는?

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{\sqrt{3}}{2}$　③ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　④ $\frac{5\sqrt{3}}{6}$　⑤ $\sqrt{3}$

유형 14 곡선의 길이

출제유형 | 곡선 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$의 길이를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 곡선 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$의 길이 l은

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

임을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 6월 모의평가 |

$x=0$에서 $x=\ln 2$까지의 곡선 $y=\frac{1}{8}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}$의 길이는?

[3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{11}{16}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

출제 의도

곡선의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$f(x)=\frac{1}{8}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}$이라 하면

$f'(x)=\frac{1}{8}e^{2x}\times 2+\frac{1}{2}e^{-2x}\times(-2)=\frac{1}{4}e^{2x}-e^{-2x}$

이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}e^{2x}-e^{-2x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\frac{1}{16}e^{4x}+\frac{1}{2}+e^{-4x}}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 2}\left|\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right|\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\ln 2}$$
$$=\left(\frac{1}{8}e^{2\ln 2}-\frac{1}{2}e^{-2\ln 2}\right)-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{8}e^{\ln 4}-\frac{1}{2}e^{\ln\frac{1}{4}}\right)-\left(-\frac{3}{8}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{8}\times 4-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$$

답 ⑤

40

▸ 21055-0309

$x=1$에서 $x=e$까지의 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{x}$의 길이는?

① $\frac{e-1}{2}$ ② $\frac{2e-1}{4}$ ③ $\frac{e^2-1}{2}$ ④ $\frac{2e^2-1}{4}$ ⑤ $\frac{e^3-1}{2}$

41

▸ 21055-0310

$x=1$에서 $x=4$까지의 곡선 $y=\frac{1}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

42

▸ 21055-0311

$x=\frac{1}{3}$에서 $x=a\left(a>\frac{1}{3}\right)$까지의 곡선 $y=2x\sqrt{x}$의 길이가 $\frac{38}{27}$일 때, a의 값은?

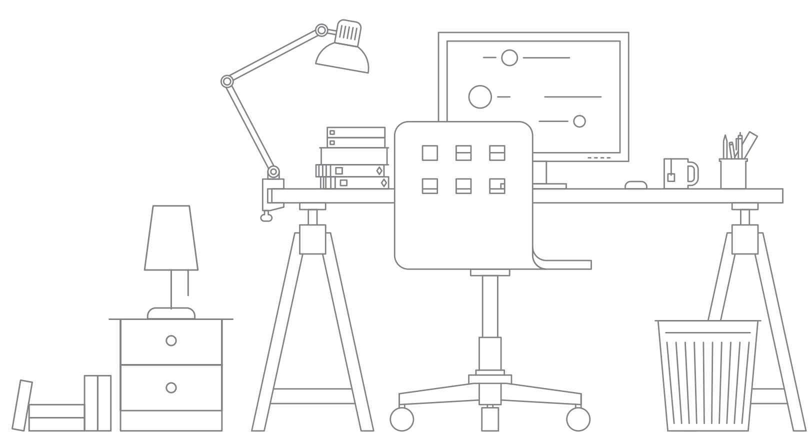
① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{7}{9}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ 1

이 책의 **차례**

CONTENTS

실전편

회차	페이지
실전 모의고사 1회	130
실전 모의고사 2회	138
실전 모의고사 3회	146
실전 모의고사 4회	154
실전 모의고사 5회	162



실전 모의고사 1회

5지선다형

01 ▸ 21054-1001

$(\sqrt[3]{4})^{\log_2 27}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

02 ▸ 21054-1002

함수 $f(x)=2x^3+4x^2-1$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

03 ▸ 21054-1003

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+x & (x \le 1) \\ 4x+a & (x>1) \end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

04 ▸ 21054-1004

좌표평면에서 시초선을 원점에서 x축의 양의 방향으로 잡을 때, 각 θ를 나타내는 동경과 원점을 중심으로 하는 원이 만나는 점의 좌표가 $(2, a)$이다. $\tan\theta=-2$일 때, $\frac{a}{\cos\theta}$의 값은? [3점]

① $-4\sqrt{5}$ ② $-2\sqrt{5}$ ③ $-\sqrt{5}$
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

05

▸ 21054-1005

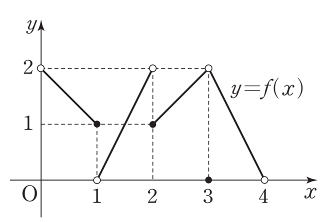
세 수 4, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루고, 세 수 $\log_2 3$, $\log_2 a$, $\log_2 (b+1)$이 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 두 양수 a, b에 대하여 ab의 값은? [3점]

① $2\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{3}$
④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

06

▸ 21054-1006

열린구간 $(0,\ 4)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 1-} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x) + f(3)$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

07

▸ 21054-1007

양의 실수 k에 대하여 k의 제곱근 중 양의 실수인 것을 a라 할 때, a보다 큰 정수 중에서 가장 작은 값을 $f(k)$라 하자. 또한 양의 실수 k에 대하여 k의 세제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, b보다 큰 정수 중에서 가장 작은 값을 $g(k)$라 하자. 예를 들어 $k=4$일 때, $a=2$이므로 $f(4)=3$이고 $b=\sqrt[3]{4}$이므로 $g(4)=2$이다. $(f \circ g)(k)=2$를 만족시키는 모든 k의 값의 범위는 $\alpha < k < \beta$이다. $\alpha+\beta$의 값은? [3점]

① 25 ② 26 ③ 27
④ 28 ⑤ 29

08

▸ 21054-1008

다항함수 $f(x)$가 상수 $a\ (a>0)$과 모든 실수 x에 대하여

$$\int_a^x f(t)\,dt = x^3+2x^2-x-2$$

를 만족시킨다. $a+f(1)$의 값은? [3점]

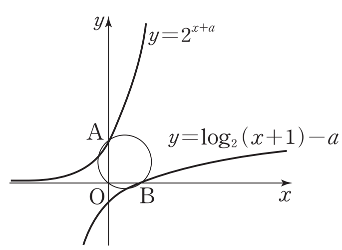
① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

09

▸ 21054-1009

그림과 같이 양수 a에 대하여 곡선 $y=2^{x+a}$이 y축과 만나는 점을 A, 곡선 $y=\log_2(x+1)-a$가 x축과 만나는 점을 B라 하자. 세 점 A, B, O를 지나는 원의 넓이가 $\frac{13}{4}\pi$일 때, a의 값은?

(단, O는 원점이다.) [4점]



① 1　② $\log_2 3$　③ 2　④ $\log_2 5$　⑤ $\log_2 6$

10

▸ 21054-1010

양수 k에 대하여 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(k)$의 값은? [4점]

(가) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=k$

(나) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)f(x-1)}{(x-1)^2}=4$

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

11

▸ 21054-1011

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$(n+2)a_{n+1}-S_n=n+3$　　…… (∗)

임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=3a_2-S_1$

$=3a_2-a_1$

$=3\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\right)=4$

(우변)$=4$

이므로 (∗)이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, (∗)이 성립한다고 가정하면

$(k+2)a_{k+1}-S_k=k+3$

$(\boxed{(가)})a_{k+1}-S_{k+1}=k+3$　　…… ㉠

$a_{k+1}=a_{k+2}-\boxed{(나)}$이므로

㉠에 이 식을 대입하면

$(k+3)a_{k+2}-S_{k+1}=\boxed{(다)}$

따라서 $n=k+1$일 때도 (∗)이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$(n+2)a_{n+1}-S_n=n+3$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$, $h(k)$라 할 때, $\frac{f(12)\times g(2)}{h(2)}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

12

▸ 21054-1012

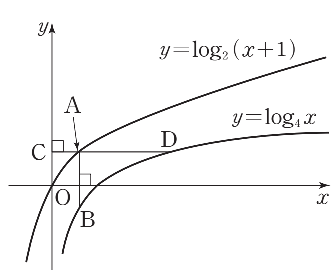
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=6$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기는 점 $(1,\ f(1))$에서 최솟값 -1을 갖는다. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선 중 기울기가 -1인 직선이 점 $(-10,\ a)$를 지날 때, a의 값은? [4점]

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

13

▸ 21054-1013

그림과 같이 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점 A의 x좌표는 1보다 작은 양수이다. 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_4 x$와 만나는 점을 B라 하고, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 y축, 곡선 $y=\log_4 x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 선분 AB의 길이가 자연수 k일 때 세 점 A, C, D를 각각 A_k, C_k, D_k라 하자. k의 최솟값을 l이라 할 때, $\displaystyle\sum_{k=l}^{l+9}\frac{\overline{\mathrm{C}_k\mathrm{D}_k}}{\overline{\mathrm{C}_k\mathrm{A}_k}}$의 값은? [4점]



① $\dfrac{2^{20}-4}{3}$ ② $\dfrac{2^{22}-16}{3}$ ③ $\dfrac{2^{22}-4}{3}$ ④ $\dfrac{2^{24}-16}{3}$ ⑤ $\dfrac{2^{24}-4}{3}$

14

▸ 21054-1014

자연수 n에 대하여 $0\le x<\pi$일 때, 방정식

$$\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)-\sin 2nx=0$$

의 서로 다른 모든 실근의 합을 a_n이라 하자. $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}a_k$의 값은? [4점]

① 31π ② 33π ③ 35π ④ 37π ⑤ 39π

15

▸ 21054-1015

실수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3ax+a^2+a$라 하자. 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값을 각각 $g(a)$, $h(a)$라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $g(2)=11$

ㄴ. 함수 $g(a)$의 최솟값은 $\dfrac{9}{16}$이다.

ㄷ. $h\left(-\dfrac{1}{2}\right)+h(1)=\dfrac{25}{4}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

16 ▸ 21054-1016

$\int_0^1 (4x^3+6x^2+5)\,dx$의 값을 구하시오. [3점]

17 ▸ 21054-1017

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$$a_1=1,\ S_{n+2}-S_n=3a_{n+1}-a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이 성립한다. $S_{10}=150$일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

18 ▸ 21054-1018

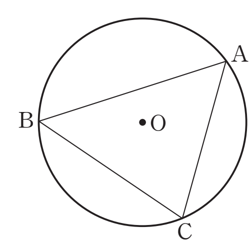
수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 위치 x가

$$x=2t^3-2t^2$$

이다. 점 P가 원점을 출발 후 운동 방향을 바꾸는 시각 t에서 점 P의 가속도를 구하시오. [3점]

19 ▸ 21054-1019

그림과 같이 중심이 O인 원 위에 삼각형 ABC의 세 꼭짓점이 놓여 있고, 점 O와 변 AB 사이의 거리와 점 O와 변 AC 사이의 거리의 비는 $1:2$이다. $\overline{AB}=8\sqrt{2}$, $\sin C=\frac{2\sqrt{2}}{3}$일 때, $\sin^2 B=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 O는 삼각형 ABC의 내부에 있고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]



20

▸ 21054-1020

두 정수 p, q에 대하여 삼차방정식
$x^3-px^2+(2p^2-3p)x+q+1=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 때, $10p+q$의 값을 구하시오. [4점]

21

▸ 21054-1021

다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 존재하도록 하는 자연수 p의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $a_1=1$, $a_{18}=32$
(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (a_n \le p) \\ \log_2 a_n & (a_n > p) \end{cases}$$

이다.

22

▸ 21054-1022

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 0을 갖는다.
(나) $g'(x)=f(x)+(x-2)f'(x)$
(다) 함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{3}{4}$을 갖는다.

$f(1)+g(1)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

5지선다형

미적분

23

▸ 21055-1023

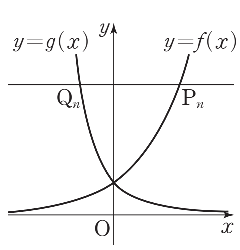
$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+6n}-2n)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

24

▸ 21055-1024

1보다 큰 실수 a에 대하여 두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=a^{-2x}$이 있다. 그림과 같이 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}_n(n, a^n)$을 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 Q_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l_n l_{n+1}}$의 값은? [3점]



① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$
④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

25

▸ 21055-1025

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$의 값은? [3점]

① $1-\ln 2$ ② $2-2\ln 2$ ③ $2-\ln 2$
④ $4-2\ln 2$ ⑤ $4-\ln 2$

26

▸ 21055-1026

함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$에 대하여 정의역이 $\{x\,|\,0\le x\le 1\}$인 함수 $y=f(f(x))$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{2\sqrt{6}}{3\pi^2}$ ② $\frac{4\sqrt{6}}{3\pi^2}$ ③ $\frac{2\sqrt{6}}{\pi^2}$
④ $\frac{8\sqrt{6}}{3\pi^2}$ ⑤ $\frac{10\sqrt{6}}{3\pi^2}$

27

▸ 21055-1027

두 곡선 $y=e^{\frac{x}{3}}$, $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$이 오직 한 점에서 만날 때, 두 곡선 $y=e^{\frac{x}{3}}$, $y=\sqrt{ax}$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

(단, a는 상수이다.) [3점]

① $2\sqrt{e}-3$ ② $\frac{7}{3}\sqrt{e}-3$ ③ $\frac{8}{3}\sqrt{e}-3$

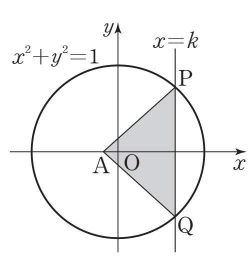
④ $3\sqrt{e}-3$ ⑤ $\frac{10}{3}\sqrt{e}-3$

28

▸ 21055-1028

그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $x=k$ $(0<k<1)$이 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{1}{6},\ 0\right)$에 대하여 삼각형 PAQ의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P의 y좌표는 양수이다.)

[4점]



① $\frac{\sqrt{5}}{6}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{9}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{18}$

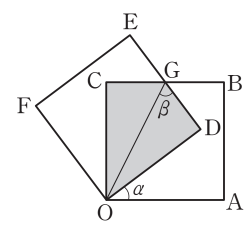
④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{5}}{18}$

단답형

29

▸ 21055-1029

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 두 정사각형 OABC, ODEF가 있고 선분 BC와 선분 DE의 교점은 G이다. 정사각형 OABC의 내부와 정사각형 ODEF의 내부의 공통부분의 넓이가 $\frac{1}{2}$이고 $\angle\mathrm{DOA}=\alpha$, $\angle\mathrm{OGD}=\beta$일 때, $\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$의 값을 구하시오. (단, 점 D는 사각형 OABC의 내부에 있다.) [4점]



30

▸ 21055-1030

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 등식

$$\int_{1}^{x}(x-t+1)f(t)\,dt=(2ax+b)e^{-2x+2}+bx+a$$

를 만족시킨다. 함수 $g(x)=e^{x}f(x)$에 대하여 $g(2)=9e-c$일 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

(단, a, b, c는 유리수이다.) [4점]

실전 모의고사 2회

제한시간 100분 | 배점 100점

5지선다형

01

▸ 21054-1031

$\sqrt[3]{16}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① 1　② $\sqrt[3]{2}$　③ $\sqrt[3]{4}$
④ 2　⑤ 4

02

▸ 21054-1032

$\displaystyle\int_{-2}^{2}(3x^2-2x+1)\,dx$의 값은? [2점]

① 8　② 12　③ 16
④ 20　⑤ 24

03

▸ 21054-1033

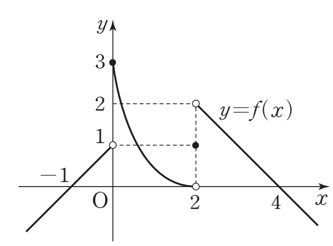
$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=5,\ \sum_{k=1}^{10}b_k=8$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(3a_k-b_k)$의 값은? [3점]

① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

04

▸ 21054-1034

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\displaystyle\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to2+}f(x)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

05

▸ 21054-1035

$0 \le x < 2\pi$에서 방정식

$$3\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\tan x=2$$

를 만족시키는 서로 다른 모든 실근의 합은? [3점]

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π
④ 2π ⑤ 4π

06

▸ 21054-1036

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \ge 0)$에서의 위치가 각각

$$f(t)=\frac{1}{3}t^3+t^2+t-1,\ g(t)=3t^2-3t$$

이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q의 가속도의 합은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

07

▸ 21054-1037

방정식 $(\log_2 x)^2+2\log_{\frac{1}{2}} x-8=0$의 서로 다른 모든 실근의 곱은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

08

▸ 21054-1038

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h \to 0}\frac{f(2+2h)+2}{h}=1$일 때, $\lim_{x \to 2}\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2}$의 값은? [3점]

① -4 ② -3 ③ -2
④ -1 ⑤ 0

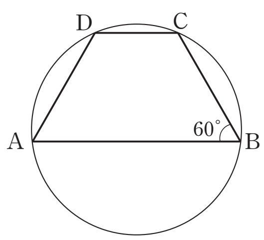
09

▸ 21054-1039

그림과 같이 반지름의 길이가 R인 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=2$, $\angle ABC=60^\circ$

일 때, $\overline{AD}+R^2$의 값은? [4점]



① 9 ② $\frac{28}{3}$ ③ $\frac{29}{3}$

④ 10 ⑤ $\frac{31}{3}$

10

▸ 21054-1040

함수

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x<1 \text{ 또는 } x>2) \\ 3x-4 & (1\le x\le 2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}$

라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 n이고 실수 a의 최댓값은 m이다. $n+m$의 값은? [4점]

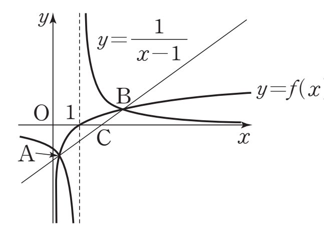
① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

11

▸ 21054-1041

그림과 같이 좌표평면에서 함수 $f(x)=\log_p x$ $(p>1)$의 그래프와 곡선 $y=\frac{1}{x-1}$이 만나는 두 점을 각각 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ $(a<b)$라 하고, 직선 AB가 x축과 만나는 점을 C라 하자. $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=2$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]



① $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $-1+\sqrt{3}$

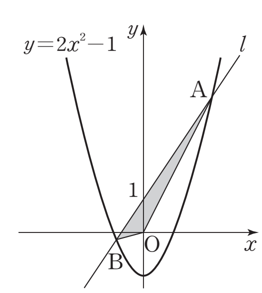
④ $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $1+\sqrt{3}$

12

▸ 21054-1042

그림과 같이 점 $(0, 1)$을 지나고 기울기가 a인 직선 l이 곡선 $y=2x^2-1$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 ABO의 넓이를 $S(a)$라 할 때, $\lim_{a\to\infty}\frac{S(a)}{a+1}$의 값은?

(단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ 2 ⑤ 4

13

▸ 21054-1043

모든 자연수 n에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} k^5,\ b_n=\sum_{k=1}^{n} k^7$$

을 각각 만족시킨다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n+b_n=\frac{1}{8}n^4(n+1)^4 \qquad \cdots\cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때

(좌변)$=1^5+1^7=2$, (우변)$=\frac{1}{8}\times 2^4=2$

이므로 ($*$)이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때 ($*$)이 성립한다고 가정하면

$$a_m+b_m=\frac{1}{8}m^4(m+1)^4$$

이다. $n=m+1$일 때

$a_{m+1}+b_{m+1}$

$=\frac{1}{8}m^4(m+1)^4+\boxed{\text{(가)}}$

$=\frac{1}{8}(m+1)^4[m^4+(\boxed{\text{(나)}})\times\{(m+2)^2+m^2\}]$

$=\frac{1}{8}\{\boxed{\text{(다)}}\}^4$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 ($*$)이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n+b_n=\frac{1}{8}n^4(n+1)^4$$

이다.

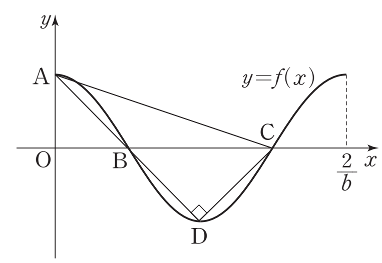
위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$, $h(m)$이라 할 때, $f(1)+g(3)+h(5)$의 값은? [4점]

① 210　② 212　③ 214　④ 216　⑤ 218

14

▸ 21054-1044

그림과 같이 두 상수 a, b $(a>0,\ b>0)$에 대하여 함수 $f(x)=a\cos b\pi x\left(0\le x\le \frac{2}{b}\right)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A, x축과 만나는 점 중 x좌표가 작은 점부터 차례로 B, C, 직선 AB와 만나는 점 중 두 점 A, B가 아닌 점을 D라 하자. $\angle\mathrm{ADC}=90°$이고, 삼각형 ADC의 넓이가 18일 때, $a+b$의 값은? [4점]



① $\frac{8}{3}$　② $\frac{17}{6}$　③ 3　④ $\frac{19}{6}$　⑤ $\frac{10}{3}$

15

▸ 21054-1045

실수 t에 대하여 함수 $f(x)=x^2(x-t)^2$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{2}$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $t\ne0$이면 함수 $f(x)$는 $x=\frac{t}{2}$에서 극댓값을 가진다.

ㄴ. $\lim_{t\to a-} g(t)<\lim_{t\to a+} g(t)$를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은 2이다.

ㄷ. 방정식 $t+1-g(t)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

16 ▸ 21054-1046

함수 $f(x)=x^2+4x+3$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int f'(x)\,dx+\int f(x)dx$$

라 하자. $g(0)=3$일 때, $g(3)$의 값을 구하시오. [3점]

17 ▸ 21054-1047

$-2\le x\le 2$에서 함수

$$f(x)=4^x-2^{x+2}+3$$

의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, M^2+m^2의 값을 구하시오. [3점]

18 ▸ 21054-1048

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 10이고 모든 자연수 n에 대하여

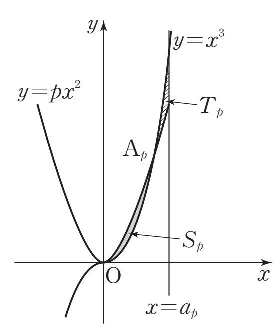
$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (\log_2 a_n\text{이 자연수가 아닌 경우}) \\ \log_2 a_n & (\log_2 a_n\text{이 자연수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오. [3점]

19 ▸ 21054-1049

그림과 같이 양의 실수 p에 대하여 두 곡선 $y=x^3$, $y=px^2$은 제1사분면 위의 점 A_p에서 만난다. 두 곡선 $y=x^3$, $y=px^2$으로 둘러싸인 색칠한 부분의 넓이 S_p와 두 곡선 $y=x^3$, $y=px^2$과 직선 $x=a_p$로 둘러싸인 빗금친 부분의 넓이 T_p가 서로 같을 때, $\lim_{p\to\infty}\frac{6a_p}{p+1}$의 값을 구하시오.

(단, a_p의 값은 점 A_p의 x좌표보다 크다.) [3점]

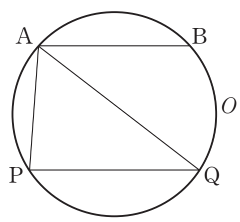


20

▸ 21054-1050

그림과 같이 반지름의 길이가 3인 원 O에서 현 AB의 길이는 $2\sqrt{5}$이다. 직선 AB와 평행한 직선이 원 O와 두 점에서 만날 때 만나는 두 점을 P, Q라 하면 삼각형 APQ의 넓이는 $\overline{\mathrm{PQ}}=a$에서 최댓값을 가진다. $a^2=m+2\sqrt{n}$일 때, 두 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오.

(단, 직선 PQ는 직선 AB가 아니다.) [4점]



21

▸ 21054-1051

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 수열 $\{a_n+a_{n+1}\}$은 공차가 3인 등차수열이다.
(나) $a_{20}=32$

$\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오. [4점]

22

▸ 21054-1052

$f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$을 다음과 같이 정의한다.

$$g_n(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ f(1) & (1\le x<2) \\ f(x-1) & (2\le x<3) \\ f(2) & (3\le x<4) \\ f(x-2) & (4\le x<5) \\ \vdots & \vdots \\ f(n) & (2n-1\le x<2n) \\ f(x-n) & (x\ge 2n) \end{cases}$$

함수 $g_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$과 함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립할 때, $f(10)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g_n(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수를 a_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$이라 하자. 수열 $\{b_n\}$에 대하여 $b_n=a_{n+p}$일 때, 수열 $\{b_n\}$이 등차수열을 이루게 하는 자연수 p의 최솟값은 5이다.
(나) $\int_0^{q+1} g_6(x)\,dx=\int_0^{q} g_5(x)\,dx$를 만족시키는 자연수 q의 최솟값은 11이다.
(다) $\int_0^{20} g_6(x)\,dx-\int_0^{14} f(x)\,dx=21$

5지선다형

미적분

23

▸ 21055-1053

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{3n+1}+4^{\frac{3}{2}n+1}}{2^{3n}+1}$의 값은? [2점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

24

▸ 21055-1054

첫째항이 1이고 공비가 r $(r^2\neq1)$인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{10}{a_k}^2=\frac{3}{4}\times\sum_{k=1}^{20}a_k$$

를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{4}$　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{5}{3}$　⑤ $\frac{7}{4}$

25

▸ 21055-1055

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=x\sin x+\cos x$$

의 모든 극댓값을 크기가 작은 것부터 차례로 M_1, M_2, M_3, $\cdots$이라 하자. $\sum_{k=1}^{10}M_k$의 값은? [3점]

① 80π　② 85π　③ 90π　④ 95π　⑤ 100π

26

▸ 21055-1056

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=\begin{cases}(2-3x)e^{x-1} & (x<1)\\ \frac{2}{x^2}-3 & (x\geq1)\end{cases}$$

이다. $f(2)=-1$일 때, $f(0)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{e}-1$　② $\frac{5}{e}-1$　③ $\frac{5}{e}$　④ $\frac{3}{e}+1$　⑤ $\frac{5}{e}+1$

27

▸ 21055-1057

열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x)=\sin x+\tan x$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $\sin\{g(\alpha)\}=\frac{3}{5}$일 때, $g'(\alpha)$의 값은?

(단, α는 양수이다.) [3점]

① $\frac{16}{37}$ ② $\frac{80}{187}$ ③ $\frac{80}{189}$
④ $\frac{80}{191}$ ⑤ $\frac{80}{193}$

28

▸ 21055-1058

좌표평면 위의 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=t(1-\ln t)^2+t+\frac{1}{t},\ y=(\ln t)^2$$

일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

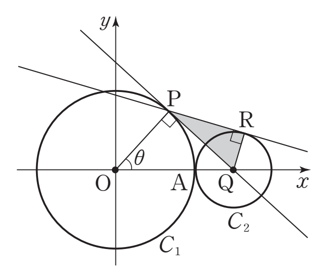
① $e+\frac{1}{e}+1$ ② $e+\frac{1}{e}-1$ ③ $e-\frac{1}{e}+1$
④ $e-\frac{1}{e}$ ⑤ $e-\frac{1}{e}-1$

단답형

29

▸ 21055-1059

그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C_1 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q를 중심으로 하고 점 A$(1, 0)$을 지나는 원을 C_2라 하고 점 P에서 원 C_2에 그은 접선의 접점 중 제1사분면에 있는 점을 R라 하자. $\angle \mathrm{POA}=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $60\times\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. [4점]



30

▸ 21055-1060

그림과 같이 닫힌구간 $[1, 4]$를 n등분한 각 분점(양 끝 점도 포함)을 차례로

$$x_0(=1),\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n(=4)$$

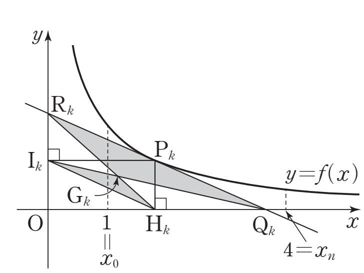
라 하자. 함수 $f(x)=\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점

$$\mathrm{P}_k\ (x_k,\ f(x_k))\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 Q_k, R_k, 점 P_k에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 H_k, I_k라 하고, 두 선분 $\mathrm{R}_k\mathrm{H}_k$, $\mathrm{I}_k\mathrm{Q}_k$가 만나는 점을 G_k라 하자. 삼각형 $\mathrm{R}_k\mathrm{G}_k\mathrm{Q}_k$의 넓이를 S_k, 삼각형 $\mathrm{I}_k\mathrm{H}_k\mathrm{G}_k$의 넓이를 T_k라 할 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(S_k-T_k)=\frac{p}{e}+\frac{q}{e^2}$이다. $p-q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 유리수이다.) [4점]



실전 모의고사 3회

제한시간 100분 | 배점 100점

5지선다형

01

▸ 21054-1061

$\sqrt[5]{16}\times\sqrt[10]{8}$의 값은? [2점]

① 2　② $2^{\frac{11}{10}}$　③ $2^{\frac{6}{5}}$　④ $2^{\frac{13}{10}}$　⑤ $2^{\frac{7}{5}}$

02

▸ 21054-1062

$\int_0^1 x^3(a-x^2)\,dx=\frac{5}{12}$일 때, 상수 a의 값은? [2점]

① 1　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{5}{3}$　④ 2　⑤ $\frac{7}{3}$

03

▸ 21054-1063

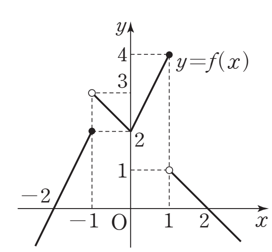
함수 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프가 점 $(1,\ a)$를 지날 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 4　② 8　③ 12　④ 16　⑤ 20

04

▸ 21054-1064

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)$의 값은? [3점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

05

▸ 21054-1065

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\sin\theta=\frac{3}{5}$일 때,

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$의 값은? [3점]

① $-\frac{8}{5}$　② $-\frac{7}{5}$　③ $-\frac{6}{5}$　④ -1　⑤ $-\frac{4}{5}$

06

▸ 21054-1066

다항함수 $f(x)$와 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)=(x+1)f(x)-4x^3-6x^2$$

을 만족시킬 때, $f'(-1)$의 값은? [3점]

① -12　② -10　③ -8　④ -6　⑤ -4

07

▸ 21054-1067

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=3x-1$이고 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=2x+1$이다. 곡선 $y=f(x)g(x)+1$ 위의 점 중에서 x좌표가 1인 점에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

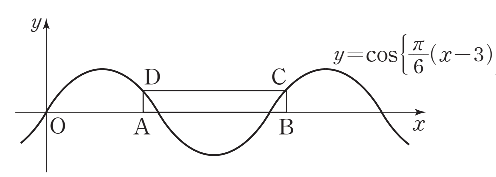
① 18　② 19　③ 20　④ 21　⑤ 22

08

▸ 21054-1068

그림과 같이 두 점 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$이 x축 위에 있고 두 점 C, D가 함수 $y=\cos\left\{\frac{\pi}{6}(x-3)\right\}$의 그래프 위에 있는 직사각형 ABCD가 있다. $\overline{AB}=8$일 때, 직사각형 ABCD의 넓이는?

(단, $3<x_1<6$, $12<x_2<15$) [3점]



① $2\sqrt{2}$　② $2\sqrt{3}$　③ 4　④ $4\sqrt{2}$　⑤ $4\sqrt{3}$

09

▸ 21054-1069

함수

$$f(x)=\begin{cases}(x-2)^2+a & (x<b)\\ 2x & (x\geq b)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 a의 최댓값은?

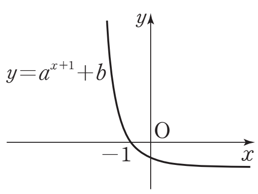
(단, a, b는 실수이다.) [4점]

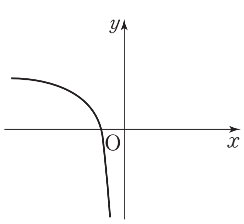
① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

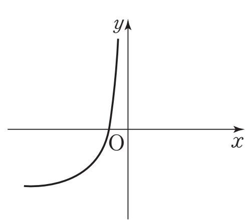
10

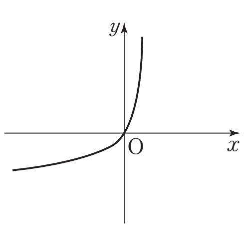
▸ 21054-1070

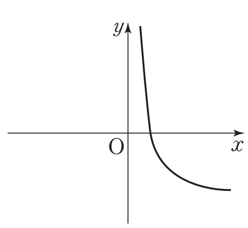
좌표평면 위에서 점 $(-1,\ 0)$을 지나는 함수 $y=a^{x+1}+b$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 중 함수 $y=\log_a (bx)$의 그래프의 개형으로 옳은 것은? (단, $a>0$, $a\neq1$, b는 상수이다.) [4점]

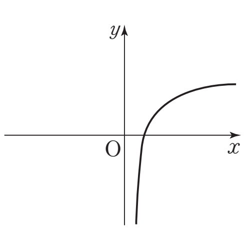


①


②


③


④


⑤


11

▸ 21054-1071

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2$의 그래프를 y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동하였더니 함수 $y=g(x)$의 그래프가 되었다. 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 개수는? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

12

▸ 21054-1072

다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_0^1 f(x)\,dx=-\frac{5}{3},\ \int_0^1 xf(x)\,dx=0$$

일 때, $\int_0^1 \{f(x)-2ax+a^2\}^2dx$의 값이 최소가 되도록 하는 실수 a의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

13

▸ 21054-1073

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 할 때,

$$a_n=\frac{3S_n^2}{3S_n+1}\ (n\geq 2)$$

가 성립한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

(단, $3S_n+1\neq 0$, $S_n\neq 0$)

2 이상의 자연수 n에 대하여

$a_n=S_n-S_{n-1}$ …… ㉠

이므로 $S_n-S_{n-1}=\frac{3S_n^2}{3S_n+1}$, 즉

$(S_n-S_{n-1})(3S_n+1)=3S_n^2$

$(1-3S_{n-1})S_n=S_{n-1}$

이므로 $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{S_{n-1}}+\boxed{(가)}$, $\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=1$이다.

이때 수열 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$은 첫째항이 1, 공차가 $\boxed{(가)}$인 등차수열이다.

그러므로 $S_n=\boxed{(나)}$

㉠에서 $a_n=\boxed{(다)}\ (n\geq 2)$

따라서 $a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ \boxed{(다)} & (n\geq 2)\end{cases}$

위의 (가)에 알맞은 수를 k, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $kf(3)g(3)$의 값은? [4점]

① $\frac{4}{25}$ ② $\frac{17}{100}$ ③ $\frac{9}{50}$
④ $\frac{19}{100}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

14

▸ 21054-1074

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 원점 O를 동시에 출발하여 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=4t^2-6at-a^2,\ v_2(t)=t^2+6at-10a^2$$

이고, t초 후 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 실수이다.) [4점]

보기

ㄱ. $f(t)=t(t-3a)^2$이다.

ㄴ. $a=2$일 때, $0\leq t\leq 3$에서 $f(t)$의 최댓값은 32이다.

ㄷ. $0\leq t\leq 3$에서 $f(t)$의 최댓값을 $g(a)$라 할 때, $y=g(a)$의 최솟값은 $\frac{27}{16}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15

▸ 21054-1075

자연수 n과 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\begin{cases}n^2-2n+2 & (n\leq 20)\\ 3n & (n\geq 21)\end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{6}a_{3k-2}+\sum_{k=7}^{15}ka_{3k}$의 값은? [4점]

① -1727 ② -1729 ③ -1731
④ -1733 ⑤ -1735

단답형

16
▸ 21054-1076

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3=5,\ a_7+a_8=37$$

일 때, $a_n<30$을 만족시키는 모든 자연수 n의 개수를 구하시오. [3점]

17
▸ 21054-1077

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

두 극한값 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}$, $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-3}{2x-4}$이 모두 존재하고

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-3}{2x-4}$$

이다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 $\frac{h'(2)}{f'(2)}=a$를 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

18
▸ 21054-1078

2 이상의 자연수 n에 대하여 부등식

$$4^{2x}>\sqrt[n]{8}\times 4^x$$

의 해가 $x>\frac{1}{6}$이 되도록 하는 자연수 n의 값을 구하시오. [3점]

19
▸ 21054-1079

삼차함수 $f(x)$에 대하여 도함수 $f'(x)$는 $f'(x)=(x+2)(x-5)$이다. 함수 $f(x)+ax$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖도록 하는 자연수 a의 최댓값을 구하시오. [3점]

20

▸ 21054-1080

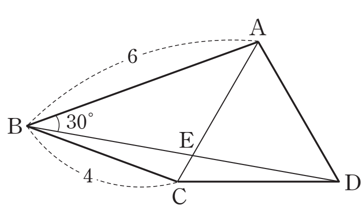
첫째항이 a, 공비가 $r\ (r>1)$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 두 수열 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$을 각각 $b_n=a_{2n-1}+a_{2n+1}$, $c_n=a_{4n-3}+a_{4n-1}$이라 하자. 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제3항까지의 합이 21이고 수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제2항까지의 합이 17일 때, $a_3+a_7=k$이다. $5k$의 값을 구하시오. [4점]

21

▸ 21054-1081

그림과 같이 사각형 ABCD의 두 대각선이 만나는 점을 E라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$, $\angle\mathrm{ABE}=30^\circ$이고 삼각형 ACD가 정삼각형일 때, 삼각형 AED의 외접원의 지름의 길이는 $\dfrac{q(\sqrt{21}-3)}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



22

▸ 21054-1082

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 점에서 만난다.
(나) 방정식 $f(x)=-k\ (5<k<6)$은 중근을 가진다.

자연수 n에 대하여 집합 S_n을

$$S_n=\{\alpha\,|\,\alpha\text{는 함수 } |f(x)+n|\text{의 극댓값}\}$$

이라 하자. 집합 $S_1\cup S_2\cup S_6$의 모든 원소의 합이 17이 되도록 하는 상수 k에 대하여 $100k$의 값을 구하시오. [4점]

5지선다형

미적분

23

▸ 21055-1083

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$의 값은? [2점]

① $\frac{\pi}{2}-\ln 2$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\ln 2$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi-\ln 2$

④ $\pi-\ln 2$ ⑤ $\sqrt{2}\pi-\ln 2$

24

▸ 21055-1084

$0<x<2\pi$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{\sin x}{2-\cos x}$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 모든 실근의 합은? [3점]

① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π

④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

25

▸ 21055-1085

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=4\sqrt{2t},\ y=t^2+\frac{1}{t}$$

이다. 점 P의 속력이 최소일 때, 점 P의 가속도는 (a, b)이다. a^2+b^2의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16

④ 18 ⑤ 20

26

▸ 21055-1086

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{f(x)}=\alpha\ (\alpha\neq 0),\ \lim_{x\to 2}\frac{\ln f(x)}{x-2}=\beta$$

일 때, $\alpha+\beta$의 값은? (단, α, β는 상수이다.) [3점]

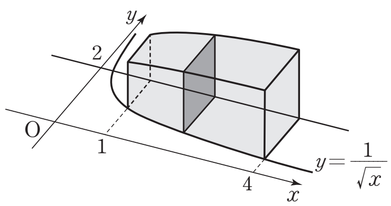
① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{11}{6}$ ③ 2

④ $\frac{13}{6}$ ⑤ $\frac{7}{3}$

27

▸ 21055-1087

그림과 같이 곡선 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$과 세 직선 $x=1$, $x=4$, $y=2$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $2\ln 2$　② $2\ln 2+1$　③ $2\ln 2+2$
④ $2\ln 2+3$　⑤ $2\ln 2+4$

28

▸ 21055-1088

두 함수

$$f(x)=(x^2+ax+b)e^x,\ g(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}$$

이 모두 $x=1$에서 극값을 갖는다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 극댓값을 각각 M_1, M_2라 할 때, $M_1\times M_2$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.) [4점]

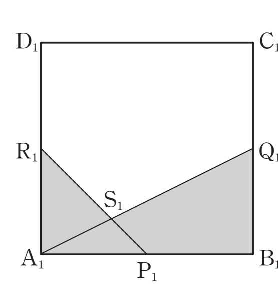
① $12e^{-3}$　② $16e^{-3}$　③ $12e^{-4}$
④ $16e^{-4}$　⑤ $20e^{-4}$

단답형

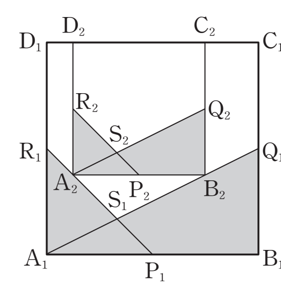
29

▸ 21055-1089

[그림 1]과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1B_1의 중점을 P_1, 선분 B_1C_1의 중점을 Q_1, 선분 A_1D_1의 중점을 R_1이라 하고, 선분 A_1Q_1과 선분 P_1R_1의 교점을 S_1이라 할 때, 다섯 개의 점 A_1, B_1, Q_1, S_1, R_1을 연결하여 만든  모양의 다각형 $A_1B_1Q_1S_1R_1$의 넓이를 T_1이라 하자. [그림 2]와 같이 선분 R_1S_1 위의 점 A_2, 선분 Q_1S_1 위의 점 B_2, 선분 C_1D_1 위의 두 점 C_2, D_2에 대하여 사각형 $A_2B_2C_2D_2$가 정사각형이 되도록 네 점 A_2, B_2, C_2, D_2를 잡는다. 선분 A_2B_2의 중점을 P_2, 선분 B_2C_2의 중점을 Q_2, 선분 A_2D_2의 중점을 R_2라 하고, 선분 A_2Q_2와 선분 P_2R_2의 교점을 S_2라 할 때, 다섯 개의 점 A_2, B_2, Q_2, S_2, R_2를 연결하여 만든  모양의 다각형 $A_2B_2Q_2S_2R_2$의 넓이를 T_2라 하자. 이와 같은 방법으로 계속하여 자연수 n에 대하여 다섯 개의 점 A_n, B_n, Q_n, S_n, R_n을 연결하여 만든  모양의 다각형 $A_nB_nQ_nS_nR_n$의 넓이를 T_n이라 할 때, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n$의 값은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이고, 선분 C_nC_{n+1}의 길이는 선분 C_nD_{n+1}의 길이보다 작다.) [4점]



[그림 1]



[그림 2]

30

▸ 21055-1090

실수 전체의 집합에서 증가하고 이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$가 있다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=0$
> (나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=\{f(x)\}^3$과 x축 및 직선 $x=t$로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선 $y=\{g(x)\}^3$과 x축 및 직선 $x=f(t)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 서로 같다.

어떤 양수 a에 대하여 $f(a)=f'(a)=\dfrac{1}{8}$일 때,

$\displaystyle\int_a^0 xf''(x)\,dx=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정답과 풀이 105쪽

실전 모의고사 4회

제한시간 100분 | 배점 100점

5지선다형

01

▶ 21054-1091

$\sqrt[8]{3^7} \times \sqrt{3^{\frac{9}{4}}}$의 값은? [2점]

① $\sqrt{3}$ ② 3 ③ $3\sqrt{3}$
④ 9 ⑤ $9\sqrt{3}$

02

▶ 21054-1092

$\int_0^1 (4x^3-3ax^2+4)\,dx=2$일 때, 상수 a의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

03

▶ 21054-1093

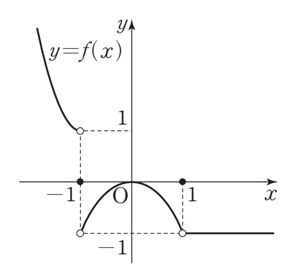
함수 $y=\log_2\left(\sqrt{2}x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다. 상수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

04

▶ 21054-1094

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 1+} f(x)+\lim_{x\to -1-} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

05

▸ 21054-1095

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이고 $\frac{1}{3-\tan\theta}=3+2\sqrt{2}$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$
② $-\frac{2+\sqrt{3}}{3}$
③ $-\frac{2+\sqrt{2}}{3}$
④ $-\frac{1+\sqrt{3}}{3}$
⑤ $-\frac{1+\sqrt{2}}{3}$

06

▸ 21054-1096

다항함수 $f(x)$가

$$\frac{d}{dx}\int f'(x)\,dx=3x^2+2ax,\ f(2)-f(1)=19$$

를 만족시킬 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

07

▸ 21054-1097

10 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}2x+b & (x\le a)\\ 2x^2-3b & (x>a)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? [3점]

① 2
② 3
③ 4
④ 5
⑤ 6

08

▸ 21054-1098

함수 $y=8\sin\left\{\frac{\pi}{6}(x+7)\right\}$ $(0\le x\le 12)$의 그래프와 직선 $y=4\sqrt{3}$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표의 합은? [3점]

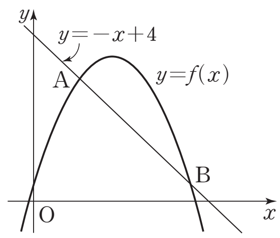
① 14
② 16
③ 18
④ 20
⑤ 22

09

▸ 21054-1099

그림과 같이 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+4$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 점 A에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 기울기가 3일 때, 점 B에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 기울기는?

(단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]



① -3　② -4　③ -5
④ -6　⑤ -7

10

▸ 21054-1100

$\log 2\times\log 5=a$일 때,

$$(\log 25)^4-(\log 4)^4=p(1-2a)\sqrt{1-qa}$$

이다. 두 자연수 p, q의 합 $p+q$의 값은? (단, $0<qa<1$) [4점]

① 16　② 18　③ 20
④ 22　⑤ 24

11

▸ 21054-1101

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_3=3$, $b_2=6$
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$$a_{n+3}-a_{n+1}=b_{n+2}-b_n=b_{n+3}-b_{n+1}$$
이다.

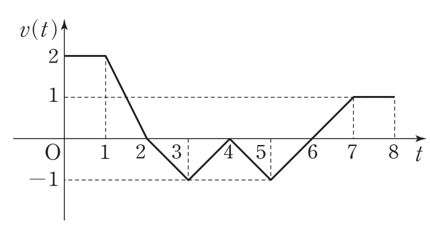
$\sum_{k=1}^{8}(a_{k+1}-b_{k+1})=48$일 때, $\sum_{k=1}^{8}(a_{2k}-b_{2k+1})$의 값은? [4점]

① 118　② 120　③ 122
④ 124　⑤ 126

12

▸ 21054-1102

수직선 위에서 좌표가 1인 점 A를 출발하여 8초 동안 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같을 때, 점 P가 출발 후 수직선 위의 좌표가 3인 점 B를 세 번째 지날 때까지 실제로 움직인 거리는? [4점]



① 5　② $\frac{11}{2}$　③ 6
④ $\frac{13}{2}$　⑤ 7

13

▸ 21054-1103

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1=1$이고 모든 자연수 n에 대하여 $3S_n=(n+2)a_n$이 성립할 때, $a_n=pn^2+qn$이다. 다음은 상수 p, q를 구하고, 이를 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> $a_1=1$이고, $3S_n=(n+2)a_n$에서
> $n=2$일 때 $3(a_1+a_2)=(2+2)a_2$
> 이므로 $a_2=3$이다.
> 즉, $\begin{cases} p+q=1 \\ 4p+2q=3 \end{cases}$
> 이므로 연립방정식을 풀면
> $p=\boxed{\text{(가)}}$, $q=\boxed{\text{(나)}}$이다.
> 따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은
> $a_n=\boxed{\text{(가)}}\times n^2+\boxed{\text{(나)}}\times n$ …… (＊)
> 이다.
> (i) $n=1$일 때,
> $a_1=\boxed{\text{(가)}}\times 1^2+\boxed{\text{(나)}}\times 1=1$
> 이므로 (＊)이 성립한다.
> (ii) $n=m$일 때, (＊)이 성립한다고 가정하면
> $a_m=\boxed{\text{(가)}}\times m^2+\boxed{\text{(나)}}\times m$
> 한편, $3S_n=(n+2)a_n$에서 $3S_{m+1}=(m+3)a_{m+1}$이므로
> $a_{m+1}=\boxed{\text{(다)}}\times a_m=\frac{1}{2}\times\boxed{\text{(라)}}$이다.
> 따라서 $n=m+1$일 때도 (＊)이 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (＊)이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 α, β라 하고 (다), (라)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(\alpha+\beta)+g\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$의 값은? [4점]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

14

▸ 21054-1104

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(4)=0$이고 방정식 $f'(x)=0$의 두 근의 차는 5 이상이다.
> (나) $0<h<5$인 임의의 h에 대하여
> $$\int_{4-h}^{4} f'(x)\,dx\times\int_{4}^{4+h} f'(x)\,dx<0$$

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근의 차의 최솟값은? [4점]

① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

15

▸ 21054-1105

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=1$
> (나) $f'(0)=f'(1)=-3$
> (다) $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 가지며
> $|f(\alpha)-f(\beta)|=|\alpha-\beta|$이다.

$f(2)$의 값은? [4점]

① -21 ② -19 ③ -17 ④ -15 ⑤ -13

단답형

16
▸ 21054-1106

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_{12}-a_6=30$일 때, $a_{20}-a_{18}$의 값을 구하시오. [3점]

17
▸ 21054-1107

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=(-2x^3+1)f(x)$$

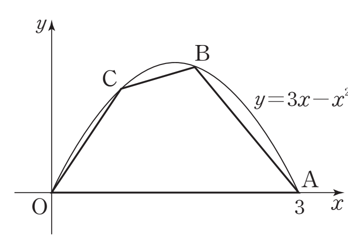
이고 $g(-1)=9$, $g'(-1)=3$일 때, $f'(-1)$의 값을 구하시오. [3점]

18
▸ 21054-1108

함수 $f(x)=\begin{cases} 4x & (x<8) \\ \log_2 x+29 & (x\geq 8) \end{cases}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 방정식 $(g\circ g)(a)=4$를 만족시키는 실수 a의 값을 구하시오. [3점]

19
▸ 21054-1109

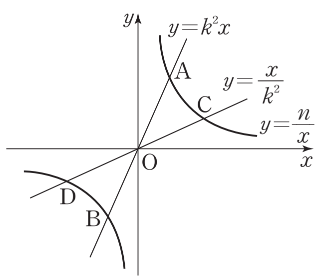
그림과 같이 두 점 O$(0, 0)$, A$(3, 0)$과 곡선 $y=3x-x^2$ $(0<x<3)$ 위를 움직이는 서로 다른 두 점 B, C에 대하여 사각형 OABC의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 B, C의 좌표를 각각 B(α, β), C(γ, δ)라 하자. $\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값을 구하시오. (단, $0<\gamma<\alpha<3$) [3점]



20

▸ 21054-1110

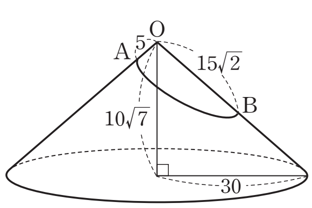
$k>1$인 상수 k와 자연수 n에 대하여 그림과 같이 함수 $y=\frac{n}{x}$의 그래프와 직선 $y=k^2x$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $y=\frac{n}{x}$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{k^2}$가 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 네 점 A, B, C, D의 x좌표를 각각 a, b, c, d라 할 때, 네 수 d, b, a, c는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 네 수 d, b, a, c의 공차가 16 이하인 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. (단, 점 A와 점 C는 제1사분면의 점이다.) [4점]



21

▸ 21054-1111

그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 30이고 높이가 $10\sqrt{7}$인 원뿔이 있다. 이 원뿔의 옆면 위를 움직이는 점 P가 이 원뿔의 꼭짓점 O로부터 거리가 5인 점 A에서 출발하여 꼭짓점으로부터 거리가 $15\sqrt{2}$인 지점 B에 최단거리로 이동하여 도착하였다. 점 P가 이동한 거리를 구하시오. (단, 세 점 A, O, B에서 밑면에 내린 수선의 발을 각각 A′, O′, B′이라 할 때, 점 O′은 선분 A′B′ 위에 있다.) [4점]



22

▸ 21054-1112

15 이하인 두 자연수 a, b에 대하여 곡선 $y=x^3-a^2x+a^3$과 곡선 밖의 점 P$(b, 0)$이 있다. 점 P에서 곡선 $y=x^3-a^2x+a^3$에 그은 접선이 세 개가 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 p, 점 P에서 곡선 $y=x^3-a^2x+a^3$에 그은 접선이 두 개가 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 q라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

5지선다형

미적분

23 ▸ 21055-1113

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 (x, y)가

$x=2\ln t,\ y=t+\frac{1}{t}$

이다. $\frac{dy}{dx}$의 값이 $-\frac{3}{4}$인 시각에서의 점 P의 속력은? [2점]

① $\frac{5}{4}$　② $\frac{5}{2}$　③ 5　④ 10　⑤ 20

24 ▸ 21055-1114

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin\frac{x}{2}\,dx$의 값은? [3점]

① $2-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$　② $2-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$　③ $2-\frac{\pi}{3}$　④ $4-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$　⑤ $4-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$

25 ▸ 21055-1115

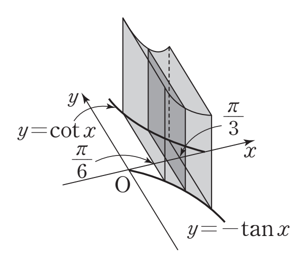
열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여

$f(0)=0$이고 $f'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{\cos^3 x}$이다. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{4}$　④ 1　⑤ $\frac{5}{4}$

26 ▸ 21055-1116

그림과 같이 두 곡선 $y=\cot x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$, $y=-\tan x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 및 두 직선 $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　③ $\sqrt{3}$　④ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

27

▸ 21055-1117

두 함수 $f(x)=e^{-2x+\pi}+1$, $g(x)=a\sin^2 x+b\cos x$의 그래프는 점 $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{2},\ 2\right)$에서 만나고, 점 P에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선과 점 P에서 곡선 $y=g(x)$에 접하는 직선이 서로 수직이다. 상수 a, b에 대하여 ab의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$

④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

28

▸ 21055-1118

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+ax^3+bx+c}{4+x+x^{2n}}$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 $x=1$에서 미분가능할 때,

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x-1)-f(-1)}{x}$의 값은?

(단, a, b, c는 상수이고, n은 자연수이다.) [4점]

① 2 ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$

④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

단답형

29

▸ 21055-1119

함수 $f(x)=x^3+ax$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 등식

$$xg(x)=\{f(x)-f'(x)\}e^{x-a}+2\int_0^x g(t)\,dt+6e^{-a}$$

을 만족시킨다. $g(1)=1$일 때, $g(a)$의 값을 구하시오.

(단, a는 상수이다.) [4점]

30

▸ 21055-1120

함수 $f(x)=(x^2+ax+b)e^x$ (a, b는 실수)와 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$와 $g(t)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 서로 다른 두 실수 α, β가 존재한다.

(가) 함수 $y=|f(x)-f(\alpha)|$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하다.
(나) 함수 $y=g(t)$는 $t=\beta$에서 불연속이고,
$\lim_{t\to\beta-}g(t)=\lim_{t\to\beta+}g(t)$이다.

$\alpha+\beta=1$이고 $f(\alpha)f(\beta)=-5e$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

(단, $\lim_{x\to-\infty}x^2e^x=0$) [4점]

실전 모의고사 5회

제한시간 100분 | 배점 100점

5지선다형

01 ▸ 21054-1121

$(2\sqrt{2})^{-3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

02 ▸ 21054-1122

함수 $f(x)=(2x-x^2)(x+2)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

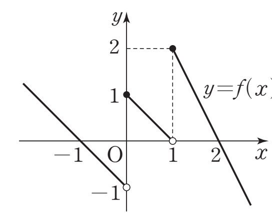
03 ▸ 21054-1123

$0<a<1$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=a^{1-x}$이 $2\le x\le 4$에서 최솟값 4를 가질 때, $a\times f(3)$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

04 ▸ 21054-1124

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to1+}f(x)\times\lim_{x\to0+}f(-x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

05 ▸ 21054-1125

$\sum_{k=1}^{n}(3k+1)^2-\sum_{k=1}^{n}(3k-2)^2=360$일 때, 자연수 n의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

06 ▸ 21054-1126

$0\le x<2\pi$일 때, 방정식

$$2(\cos x-1)^2-3=\sin x-4\cos x$$

의 서로 다른 모든 해의 합은? [3점]

① $\frac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{2}\pi$
④ 3π ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

07
▸ 21054-1127

함수

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-x+2a & (x<1) \\ -x+3a & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

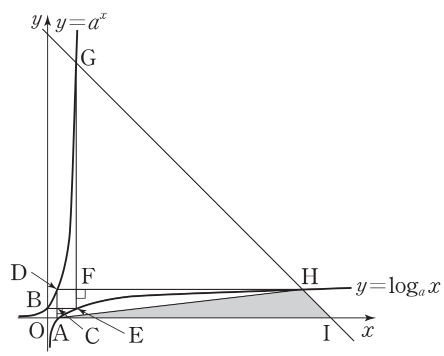
08
▸ 21054-1128

함수 $f(x)=x^3-3x^2-6x+10$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(-1, 12)$, $\mathrm{B}(a, f(a))$에서의 접선을 각각 l_1, l_2라 하면 두 직선 l_1, l_2는 서로 평행하다. 점 A와 직선 l_2 사이의 거리는? [3점]

① $2\sqrt{10}$ ② $\frac{12\sqrt{10}}{5}$ ③ $\frac{14\sqrt{10}}{5}$ ④ $\frac{16\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{18\sqrt{10}}{5}$

09
▸ 21054-1129

그림과 같이 곡선 $y=\log_a x$가 x축과 만나는 점을 A, 곡선 $y=a^x$이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=a^x$과 만나는 점을 D, 점 B를 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 E라 할 때 선분 AD와 선분 BE가 만나는 점을 C라 하자. 점 D를 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점 H와 점 E를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=a^x$과 만나는 점 G에 대하여 선분 DH와 선분 EG가 만나는 점을 F라 하고 두 점 G, H를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 I라 하자. 두 정사각형 OACB와 CEFD의 넓이의 비가 1 : 4일 때, 삼각형 AIH의 넓이는? (단, O는 원점이고 $a>1$이다.) [4점]



① $\frac{79}{2}$ ② $\frac{81}{2}$ ③ $\frac{83}{2}$ ④ $\frac{85}{2}$ ⑤ $\frac{87}{2}$

10
▸ 21054-1130

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $F(x)$를

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

라 할 때, 다음이 성립한다.

(가) $F(x)$는 $x=0$에서만 극값을 갖는다.
(나) 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

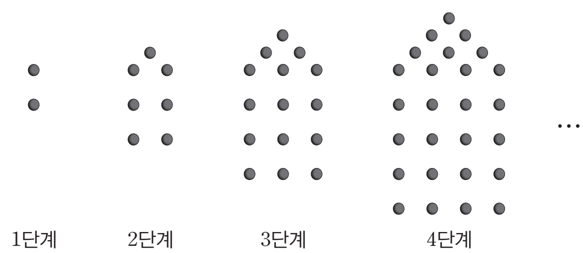
$F(1)-F(-1)=-4$일 때, $F(2)$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

11

▸ 21054-1131

그림은 일정한 규칙으로 바둑돌을 배열하여 단계별로 나타낸 것이다. n단계에서 사용된 바둑돌의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [4점]



① 585 ② 590 ③ 595 ④ 600 ⑤ 605

12

▸ 21054-1132

이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt-9x-4$$

가 $x=-1$에서 극값 0을 갖는다. $g'(1)=-8$일 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

13

▸ 21054-1133

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=\frac{(4n+1)\times(2n)!}{2\times n!}$$

이다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{(2n+1)!}{n!}-1 \qquad \cdots\cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=5$, (우변)$=5$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=\frac{(2m+1)!}{m!}-1$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k=\frac{(2m+1)!}{m!}-1+\frac{\boxed{(가)}}{2\times(m+1)!}$$

$$=\frac{\boxed{(나)}\times(2m+1)!}{(m+1)!}-1$$

$$=\frac{\{2(m+1)+1\}!}{(m+1)!}-1$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{(2n+1)!}{n!}-1$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(1)+g(2)$의 값은? [4점]

① 256 ② 258 ③ 260 ④ 262 ⑤ 264

14

▸ 21054-1134

길이가 5인 선분 AB 위를 움직이는 두 점 P, Q는 점 A에서 동시에 출발하여 점 B에 도달하면 점 A방향으로 움직이고, 점 A에 도달하면 점 B방향으로 움직인다. 출발한 후 t초까지 두 점 P, Q가 움직인 거리가 각각 $2t^3$, $3t^2+12t$일 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $t=2$일 때, 두 점 P, Q의 운동 방향은 같다.

ㄴ. $0<t\le2$일 때, 두 점 P, Q가 같은 방향으로 움직이면서 만나는 횟수는 2이다.

ㄷ. $0<t\le5$일 때, 두 점 P, Q가 만나는 횟수는 55이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15

▸ 21054-1135

삼차함수 $f(x)=x^3+kx$에 대하여 다항함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 0이 아닌 임의의 실수 a에 대하여

$$f'(a)=\frac{f(a)-f(g(a))}{a-g(a)}$$

(나) 방정식 $f'(x)\times f'(g(x))=k^2$의 실근 중 0이 아닌 두 실근의 곱은 $-\frac{5}{4}$이다.

0이 아닌 실수 x에 대하여 $g(x)\neq x$일 때, $g(k)$의 값은? (단, k는 음의 상수이다.) [4점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

단답형

16

▸ 21054-1136

등차수열 $\{a_n\}$에서

$a_{10}+a_{20}=50$, $a_{10}-a_{20}=30$

일 때, a_5의 값을 구하시오. [3점]

17

▸ 21054-1137

곡선 $y=(x+2)(x^2-2x+4)$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]

18

▸ 21054-1138

$0\le x\le2\pi$에서 정의된 함수 $f(x)=a\cos 2x+b$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3$

(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 2이다.

$a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점]

19

▸ 21054-1139

함수 $f(x)=2x^3+ax^2-12x+b$가 $x=1$에서 극솟값 10을 가질 때, $f(-1)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점]

20

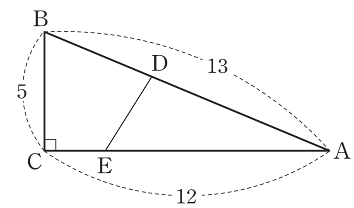
▸ 21054-1140

공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때 $S_{15}=S_{10}$이 성립한다. $a_n+25>0$을 만족시키는 n의 최댓값이 19일 때, $\sum_{k=1}^{20}|a_k|$의 값을 구하시오. [4점]

21

▸ 21054-1141

그림과 같이 $\overline{AB}=13$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CA}=12$인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AB 위의 한 점 D와 변 AC 위의 한 점 E에 대하여 선분 DE가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분할 때, 선분 DE의 길이의 최솟값을 m이라 하자. m^2의 값을 구하시오. [4점]



22

▸ 21054-1142

닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수

$$f(x)=\int_0^x t(1-t^n)\,dt \ (n\text{은 자연수})$$

의 최댓값을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}4(n+2)a_n$의 값을 구하시오.

[4점]

5지선다형

미적분

23

▸ 21055-1143

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x^2+x-13}{x^2+x+12}\right)^n$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수는? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

24

▸ 21055-1144

함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos x-\cos 2x}{x^2} & (x\neq 0) \\ a & (x=0) \end{cases}$$

이 $x=0$에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

25

▸ 21055-1145

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-n)^2}{n(2k+n)(2k-3n)}$의 값은? [3점]

① $1-\ln 7$ ② $1-\ln 6$ ③ $1-\ln 5$ ④ $1-2\ln 2$ ⑤ $1-\ln 3$

26

▸ 21055-1146

함수 $f(x)=\frac{\ln x}{x}\ (x>0)$의 그래프 위의 점 $\left(t,\ \frac{\ln t}{t}\right)$에서의 접선의 기울기를 $g(t)$라 하자. $1\leq t\leq e^3$에서 함수 $y=g(t)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은? [3점]

① 0 ② $-\frac{1}{2e^3}$ ③ $-\frac{1}{e^4}$ ④ $-\frac{3}{2e^5}$ ⑤ $-\frac{2}{e^6}$

27
▸ 21055-1147

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=8t,\ y=\frac{1}{2}t^2-16\ln t$$

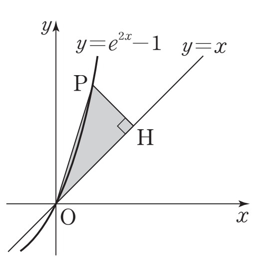
이다. 시각 $t=\alpha$ $(\alpha>1)$에서 점 P의 속력이 최소일 때, 시각 $t=1$에서 $t=\alpha$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① $16\ln 2+\frac{7}{2}$ ② $16\ln 2+\frac{15}{2}$ ③ $32\ln 2+\frac{7}{2}$
④ $32\ln 2+\frac{15}{2}$ ⑤ $64\ln 2+\frac{7}{2}$

28
▸ 21055-1148

그림과 같이 곡선 $y=e^{2x}-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ e^{2t}-1)$ $(t>0)$에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 OHP의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t^2}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

[4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

단답형

29
▸ 21055-1149

양의 실수 t에 대하여 구간 $(0, \infty)$에서 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (0<x<t) \\ \frac{\ln x}{x^2} & (x\ge t)\end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때,

$\int_1^e g(t)\,dt=\frac{p}{\sqrt{e}}+\frac{q}{e}$이다. $(p\times q)^2$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 유리수이다.) [4점]

30
▸ 21055-1150

k가 양의 실수일 때, 함수 $f(x)=\frac{2x}{(x+k)^2}$ $(x>0)$에 대하여 함수 $y=f(f(x))$가 $x=p$에서 극값을 가질 때, 서로 다른 모든 p의 값의 개수를 $g(k)$라 하자. 함수 $g(k)$가 $k=a$ $(a>0)$에서 불연속일 때, $\lim_{k\to a-}g(k)+g(a)+\lim_{k\to a+}g(k)$의 값을 구하시오.

[4점]