수학 면접구술고사 완벽 가이드

(서울대·포스텍용)

과학동아 2002년 11월~2009년 3월 연재분 통합 풀버전

과학동아에 연재되고 있는 '심층면접 완벽가이드'를 여러분이 보기 쉽게끔 전면편집해서 새로운 책자로 제작했습니다. 이번에 총 6개월 이상을 편집 및 교정에 매달린 끝에 수학·물리·화학·생물을 합해서 총 일천육백 페이지가 넘는 방대한 양을 완료하게 되었습니다. 그러나 원본(저해상도 그림파일)이 부실하기 때문에 오류가 발생했을 가능성이 높습니다. 이 책자로 공부하다가 내용상의 오류를 발견하면 제게 연락주시면 즉시 수정해서 새로 올리겠습니다.

네이버→(teuksusy/teuksusy), 다음→(teuksu/포스텍학부), 오르비→(teuksu/포스텍학부)

하나포스메일→teuksusy@hanafos.com, 네이버메일→teuksusy@naver.com

제가 이렇게 면접구술고사 대비용 책자를 제작하는 이유는 가정형편은 빈한하나 서울대·포스텍에 진학하고 싶은 열정에 사무친 일반고 학생들을 위함입니다. 우수한 내신은 공부를 열심히 하면 올릴 수 있지만, 면접구술고사는 실력만으로는 힘들며, 기본원리와 문제풀이 과정을 이해해야 합니다. 즉, 무조건 암기식으로 공부해서는 곤란하다는 의미입니다.

그런 면에서 '심층면접 완벽가이드'시리즈(수학·물리·화학·생물)는 다양한 기출문제와 저자(거의 서울대 및 포스텍 출신 전문교육가들입니다.)들의 충실한 해설을 곁들인 명작으로서, 이 책자에 실린 내용들을 전부 이해하면 상당한 수준까지 면접구술고사에 대비할 수 있습니다.

그리고 이번 시리즈에서는 일체의 목차를 제공하지 않습니다. 그 이유는 실제 면접구술고사에서 어느 항목에서 출제될지 전혀 예상하지 못하는 상황에서 잠깐 문제를 보고 개요를 파악하고 풀이해야 하기 때문에 미리 그런 훈련을 쌓아야 한다고 생각했기 때문입니다.

그러므로 이 책자로 공부한다고 생각하면 안되고, 어디까지나 실전대비용으로 활용하기 바랍니다.

아무쪼록 열공해서 서울대·포스텍에 진학하는 기쁨이 있기를 기원합니다.

–이명환 올림–

2002년 11월-수학 면접구술고사 완벽가이드

공교육의 붕괴와 쉬운 수능시험으로 인한 고교생의 학력 저하는 한국 교육의 심각한 문제로 떠오르고 있다. 이런 상황에서 변별력을 잃은 학생부나 수능의 문제점을 보완하기 위해 서울대 등에서 처음 시도한 심층면접 구술시험이 여러가지 논란 속에서 지필 고사와는 다른 제 3의 시험으로 자리잡고 있다. 구술시험은 암기된 교과 지식뿐 아니라 사고력, 창의력, 문제 해결력 등의 고차원적 학습 능력까지 측정함으로써 수능의 약점을 보완할 수 있기 때문이다. 특히 심층 구술시험의 중심에 있는 구술 수학은 이공계열 학생에게 전략 과목으로 자리잡고 있으며 수능식 스피드 학습에서 본고사 수준까지의 심화 학습까지 요구함으로써 창의적 사고를 중심으로 하는 새로운 학습으로의 전환을 선도하게 됐다.

구술 수학이 입시에서 또다른 부담으로 작용할 수도 있지만 문제를 위한 문제 풀이식 수학 학습에서 탈피해, 수학 문제 이면에 숨은 인간적이고 문화적인 수학의 세계를 맛보며 그 직관적 의미와 실질적 응용을 경험할 수 있는 기회를 제공하기도 한다. 수학이란 문제를 빨리 푸는 것 이상으로 논리적이고 창의적인 사고방식이 중요하다. 그래서 수학은 이공계열에 진학하려는 수험생에게 기본적 수학 지식 이외에 창의적 사고와 실질적으로 응용을 할 수 있는 소양을 길러 낸다는 측면에서 매우 중요하다. 그러나 이런 소양을 평가할 수 있는 적당한 시스템이 없는 국내 상황에서, 구술 수학은 단순한 시험을 뛰어넘어 수험생에게 진정한 수학의 세계를 선보일 것이다.

결론적으로 구술 수학은 손으로 직접 신속 정확하게 풀어야 하는 기존 시험과는 달리 교수와의 커뮤니케이션을 통해 단순한 수학 지식뿐 아니라 창의력과 사고력, 문제 해결력 등과 같은 수험생의 다양한 학습 능력을 측정하는 스펙트럼이라고 할 수 있다.

끝없이 이어지는 연쇄 질문들

수험생의 진정한 수학 능력을 측정하기 위해 시험의 형식과 내용이 조금씩 보완·개발되고 있다. 하지만 2001학년도와 2002학년도의 수시 모집과 정시 모집에 출제됐던 문제를 분석해보면 주로 미·적분학 개념을 응용한 다양한 수학적 추론능력을 묻는 복합 문제가 대부분이었다. 단순한 개념과 원리의 이해 정도를 측정하는 것부터 복잡한 계산 테크닉을 요구하는 본고사 문제수준까지 범위나 난이도가 다양했는데, 먼저 기출 문제를 살펴보면 대략 다음과 같다.

· 피자를 3번 칼질해서 8등분할 수 있는 방법을 찾아라

· $\sqrt{2}$가 무리수임을 증명하라

· 타원과 쌍곡선의 정의를 말하라

· 미·적분학의 기본 정리에 대해서 설명하라.

· 구분구적법이란 무엇인지 설명하고 구의 부피를 구분구적법으로 구하라

· 귀류법이란 무엇인가?

· 구구단의 9단의 특징을 말하라.

· 독도의 체적을 구해보라

· $\log x$를 미분하라

· π에 대해 설명하라

나열된 문제들은 공통수학과 수학Ⅰ·Ⅱ의 다양한 범위에 걸쳐 출제됐다. 즉 대부분 교과과정에서 한 번쯤 경험한 문제들이기 때문에 쉽게 풀 수 있을 만한 수준이다. 그러나 실제 면접시험에서는 다단계 피라미드식 질문이 몇 단계에 걸쳐 계속 추가되므로, 단순 암기된 지식에 의존할 경우 날카로운 교수의 질문에 제대로 답할 수 없을 것이다. 기존에 알려진 출제 문제는 대부분 기본적 뼈대 문제에 불과한데 숨겨진 다단계 질문까지 종합해서 분석하면 구술 수학의 특징은 크게 다음의 3가지로 분류할 수 있다.

구술 수학의 세 가지 특징

첫째 창의적 사고력을 측정한다. 창의적 사고는 모든 학문의 기초 소양일뿐 아니라 인생에 있어서도 지혜의 근원이 된다. 정의와 개념을 묻는 문제부터 조금은 황당한 문제까지 다양한 형식으로 출제된 구술 수학은 묻고 답하는 과정 속에 창의적 사고 능력을 알아보고자 하는 성격이 강하다.

대부분의 대학교에서 미분에 관련된 정의나 개념을 묻는 문제가 출제되었는데, 교과서의 내용을 암기하고 있다면 별로 무리 없이 답할 수 있다. 그러나 실제 생활이나 과학과 관련지어 미분이 응용되는지 예를 들어보라면 여러가지 답이 나올 수 있을 것이다. 평소에 얼마나 호기심 어린 눈으로 수학을 공부해 왔으며 얼마나 창의적 사고 능력을 길렀느냐에 따라 편차가 심해질 것이다.

반복적 문제 풀이나 암기 위주의 수학 공부는 창의적 사고력을 길러주지 않는다. 만약 피타고라스 정리를 증명하라는 구술 시험에서 수험생이 중학교 교과서에 나와 있는 증명의 절차를 잘 외워서 그대로 증명했다면 창의적 사고에 의해 문제를 해결했다고 칭찬할 교수는 아무도 없을 것이다. 창의적 사고력을 측정하기 위해서는 피타고라스의 정리가 아니라 그 역, 즉 '어떤 삼각형이 피타고라스 정리를 만족한다면 그것은 직각삼각형이다'를 증명하라는 문제도 출제될 수 있을 것이다.

서울대 자연과학대학의 심층면접 출제위원장이었던 모교수는 황당한 구술 문제를 통해 미래의 자연과학도로서의 소양을 알아볼 수 있다고 말했다. 실제로 '우리나라의 이발사는 모두 몇명인가?'라는 문제가 출제됐는데, '통계청에 가서 알아보면 됩니다. '라든지 '이것이 수학 문제 맞습니까?'라고 대답해서는 안될 것이다. 출제 교수의 마음을 잘 읽고 창의적 대답을 해야 할 것이다. 특히 '맨홀 뚜껑이 둥근 이유'(서강대)나 '우리나라에 1년 동안 내린 빗방울의 개수'(경희대) 같은 기출문제는 생각할 수록 재미있는 문제인데, 수학하고 관련이 없는 듯 하면서도 너무나도 수학적인 문제들로 창의적 사고를 측정하는 대표적인 문제들이었다.

두 번째는 개념과 원리의 이해 정도를 묻는다는 점이다. 개념의 이해야말로 수학 공부의 핵심이다. 사실 이것을 위해 수많은 문제를 풀어보는 것인데, 기존의 시험은 앞뒤가 뒤바뀐 느낌이다. 따라서 구술 수학에서는 수학적 개념의 정확한 이해 정도를 측정하게 된다. 특히 수Ⅰ·Ⅱ에 나오는 여러가지 정의와 개념의 이해는 시험을 떠나서 대학교에 진학해 심화된 수학이나 과학을 공부하는데 필수적이다. 개념을 정확하게 이해한다는 것은 생각처럼 쉬운 일이 아니다. 미국의 천재 물리학자 리차드 파인만 교수는 학생에게 양자역학을 가르칠 때 항상 이런 말을 했다고 한다."양자역학을 정확하게 이해하는 것은 상대성이론을 이해하는 것보다 어렵다. 그러나 양자역학을 마스터했다면 중·고등학생에게 예를 들어가면서 쉽게 설명할 수 있어야 한다."

수학에서 어떤 추상적 개념을 이해했다는 것은 암기된 지식을 바탕으로 한 인위적인 이해를 넘어 직관적 의미를 파악했다는 것이며, 즉시 구체적인 모델을 머릿속에 이미지화할 수 있어야 한다는 뜻이다. 여러 대학에서 집중적으로 출제된 문제들을 살펴보면 라디안, 로그, 조건부 확률, 삼수선

의 정리, 일차변환, 연속함수, 미분가능 함수, 중간값 정리, 롤의 정리, 평균값 정리, 로피탈 정리 등으로 쉽게 이해할 수 있는 것들이다. 그러나 교과서에 나온 것을 암기하는 정도를 넘어 직관적 의미를 파악해둬야 하고 유도 과정이나 증명 과정 하나하나를 잘 이해해야 한다.

마지막은 문제해결 능력을 측정한다는 특징이다. 장교가 전쟁터에서 부하를 지휘하면서 돌발적인 상황을 지혜롭게 헤쳐나가기 위해서는 이론적 전략 전술에 능통해야 하고 그것을 바탕으로 실전 상황에 대처할 수 있는 응용 능력을 평소에 길러야 한다. 수학도 마찬가지다. 철저한 개념과 원리를 숙지한 다음 고도의 계산 능력과 응용력을 길러야 한다. 미적분에 관해 역사적 배경부터 그 중요성까지 아무리 많이 알고 있어도 실질적으로 미적분 문제를 계산하지 못한다면 수학을 공부했다고 할 수 없을 것이다.

포스텍의 기출문제인 '$\cos 20°$가 무리수임을 증명하라'는 문제는 이를 잘 보여준다. 이 문제는 문제 해결 전략을 미리 세워 접근해야 하는데, 첫단계가 3배각 공식으로 시작한다. 3배각 공식이 기억이 나지 않아도 교수가 알려 주는데(물론 약간의 감점이 있다) 수학 경시 수준의 정수론까지 중무장돼 있지 않으면 마지막 단계를 증명하기가 어려운 문제였다.

다른 예를 들면,

'$g(x) = \frac{1}{A}\int f(t)f(1-t)\,dt$의 그래프의 개형을 그려라'

(서울대 공대 다단계 마지막 문제)라는 문제가 있다. 이 문제는 심화된 미적분의 계산 능력과 테크닉이 없다면 매우 어려운 문제인데, 이 한 문제로 당락이 결정됐다.

이렇듯 서울대와 포스텍, KAIST 등의 대학은 교과서 내용을 크게 벗어나진 않았지만 고도의 문제 해결력을 요구하는 문제들을 출제했다. 실마리를 잡고 전략을 짜고 다양한 테크닉으로 격파해 나가는 고도의 응용력을 기르지 않는다면 이런 형태의 문제들은 정복하기 힘들 것이다.

구술 수학 셀프 시뮬레이션

지금까지 각 대학의 합격자를 살펴보면 심층구술 면접에서 당락의 30-50%가 바뀌었음을 알 수 있다. 수시는 물론 정시모집에서도 당락의 주요 변수가 될 구술시험은 수험생에게 또다른 부담을 주고 있고 내신과 수능 준비 외에 별도의 학습을 요구한다.

특히 이공계열의 수험생에게 구술 수학은 가장 중요한 합격의 열쇠가 될뿐 아니라 기계적인 문제 풀이 위주의 학습에서 심화 학습으로의 전환을 유도하는 촉매제가 될 것이다. 하지만 **구술 수학이라고 해서 특별한 교재나 학습법이 있을 수는 없다.**

다만 학생 스스로 평소에 창의적인 자세를 갖고 능동적인 학습을 한다면 하늘에서 갑자기 뚝 떨어진 뚱딴지같은 구술 수학 문제가 오히려 건전한 수학적 눈을 키워 주는 고마운 친구가 될 수도 있을 것이다. 앞에서 출제 경향을 몇 가지로 나눠 살펴봤지만, 구술 수학은 기본적으로 교과 과정을 크게 벗어나지 않는다. 평소에 내신이나 수능 준비를 하면서 동시에 구술 수학을 충분히 대비할 수 있는 요령을 두 가지로 나눠 알아보자.

첫째, 출제된 문제를 모두 풀어보면서 경향을 숙지하자. 구술 수학의 형식이나 내용은 계속 보완·발전되고 있으므로 막연하게 공부를 한다면 자칫 시간 낭비가 될 수도 있다. 출제된 문제 중에서 개념 위주의 문제들은 기본적 정의나 유도 과정을 모두 암기하되 확실하게 이해가 되지 않는 문제는 학교 선생님이나 친구에게 질문을 해서라도 반드시 이해를 하고 넘어가야 한다. 왜냐하면 구술 수학은 확실하게 이해를 하지 않으면 교수의 추가 질문에서 반드시 약점이

드러나기 때문이다.

문제 해결력 부분과 관련된 것 중에 정수론과 미적분 테크닉은 반복 학습을 통해 완전히 익혀 둬야 한다. 이 부분은 수능시험과도 직접 연결될뿐 아니라 숨겨진 수학적 힘을 제공한다. 특히 정수론 부분은 교과서에서 자세히 다루지 않기 때문에 참고서를 준비해 체계적으로 학습해야 응용력이 생긴다.

두 번째는 스스로 구술 수학 문제를 창조해보자는 것이다. 수학 문제를 창조하는 것이 어려워 보이지만 조금만 훈련하면 문제를 푸는 것보다 훨씬 쉽고 재밌다. 창의적 사고능력은 단순히 기출문제를 푼다고 쉽게 생기는 것이 아니다. 오히려 창의적 사고를 방해할 수도 있다. 그러나 문제 창조의 과정은 그 자체가 매우 창의적인 과정이고 스스로 생각할 수 있는 귀중한 기회를 제공하기 때문에 창의적 사고 능력을 길러 줄 수 있다.

수학 교과서에 관련된 것 뿐 아니라 우리가 보고 듣고 느끼는 우주 삼라만상 모두가 수학 문제가 될 수 있다. 꼭 수학이라는 느낌을 가질 필요도 없다. 그냥 호기심을 갖고 계속 스스로에게 질문을 던지면 된다.

왜 수학을 배우는가, 왜 집합은 항상 첫 단원에 등장하는가, 왜 음수 곱하기 음수는 양수인가, 왜 방정식을 배우고 난 후 함수를 배우는가, 왜 원의 면적은 πr^2인가,

이런 우스꽝스런 질문에서부터 담배 1갑에 담배가 20개 있는 이유는, 미분을 다른 식으로 정의할 수는 없는가, $\sin 36°$를 기하학을 이용해서 구하면, 내 머리카락의 개수는 어떻게 구할까 등의 제법 수학적 문제까지 마음가는데로 만들어보자. 답을 알 필요도 없다. 스스로 수십 개를 만들어 30% 정도만 독창적으로 해결해본다면 이미 구술 수학의 창의성 부분은 정복한 것이나 마찬가지다. 이상으로 구술 수학의 전반적인 경향과 대비 전략에 대해서 간단하게 요약해봤다. 구술면접이란 기본적으로 인간 대 인간의 만남이고 커뮤니케이션이다.

비록 시험이지만 여러분은 면접관인 교수를 느낄 수 있고 교수는 여러분을 느낄 수 있다. 미래에 대한 확고한 의지와 열정으로 성실하고 진지하게 조금은 독창적으로 공부를 해 왔다면 아니 앞으로 그렇게 해 간다면 구술 면접에서 몇 개의 실수를 하더라도, 또는 어눌한 표현을 하더라도 면접관은 여러분의 그 뜨거운 소망을 느낄 수 있을 것이다. 이것이 바로 구술 수학이다.

1. 증명의 기법

대부분의 대학에서 교과서 수준의 쉬운 증명문제가 출제됐다. 증명은 수학의 시작이자 끝이지만 수능식 정답 고르기 학습에 익숙해진 수험생 대부분은 증명문제를 어려워한다. 증명의 기법을 익히기 전에 여러가지 수학의 정의와 성질, 정리를 명확히 이해하고 있어야 하고 교과서에 나오는 증명문제를 잘 정리해 둬야 한다. 특히 $\sqrt{2}$가 무리수임을 증명하라는 식의 기본 증명들은 교과서와 시중의 참고서에 잘 나와있는데, 이런 것들은 역사적 의미를 갖고 있기 때문에 반드시 익혀둬야 한다.

▶ 구술시험 현장중계

$\cos 20°$는 유리수인가 무리수인가?(포스텍2002)

교수 : 그래 자네의 생각은?

학생 : $\cos 20°$는 무리수라고 생각합니다.

교수 : 무리수라구? 그럼 증명을 할 수 있겠는가?

학생 : 좀 어려운데 귀류법을 이용하면 될 것 같아요. 전략은 대충 세웠는데 3배각 공식이 갑자기 생각이 안나서….

교수 : …….

학생 : 먼저 3배각 공식을 유도해 보겠습니다.

교수 : 아니, 지금 유도한다구? 됐네. 내가 가르쳐 주지. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$로 주어진다네.

학생 : 아 그렇군요. 그럼 증명하겠습니다

$\cos 60° = \cos 3 \times 20° = 4\cos^3 20° - 3\cos 20°$

그러므로 $4\cos^3 20° - 3\cos 20° = \dfrac{1}{2}$이 됩니다. 여기서 $\cos 20°$를 유리수라고 가정하면 $\cos 20° = \dfrac{p}{q}$라 둘 수 있는데 이것을 윗 식에 대입하여 정리하면 $8p^3 - 6pq^2 = q^3$이라는 식이 나옵니다. 이 식을 잘 보면 좌변이 짝수인데…(여기서 교수가 중단시킨다).

교수 : 잠깐 여기서 혹시 빠진 것은 없나?

학생 : 음, 아까 가정에서 p와 q는 서로소인 정수라는 것을 빼먹었습니다.

교수 : 좋아 계속하게.

학생 : 아까 나온 식 $8p^3 - 6pq^2 = q^3$을 잘 보면 좌변은 짝수이므로 q도 짝수가 됩니다

그러므로 $q = 2k$라고 두고 이 식에 대입하여 정리하면 $p^3 = k^3 + 3pk^2$ 같은 식이 됩니다. 우변에서 k가 홀수이면 p가 짝수이건 홀수이건 이 식을 만족할 수 없습니다

그래서 k가 짝수가 되어야 하는데 k가 짝수이면 우변이 짝수이므로 p도 짝수가 되됩니다. 그런데 이렇게 되면 p와 q가 서로소라는 가정에 모순이 됩니다. 그러므로 $\cos 20°$도 유리수가 아닙니다.

교수 : 훌륭하게 증명했군.

학생 : 감사합니다. 그런데 3배각 공식을 유도할 수 있는데 기회를 주십시오.

교수 : 하하. 괜찮네. 수고했으니 나가보게.

▶ 감상 포인트 :

2002학년도 포스텍 구술시험의 실전 상황을 각색한 내용이다. 이 문제는 처음 작전을 잘 짜야 하는데 3배각 공식이 생각나지 않아서 당황하면 다음 단계로 전진할 수 없다. 하지만 이 문제에선 3배각 공식 자체가 중요한 것이 아니라 정수론과 관련된 사고 능력이 쟁점이다($\sin 20°$일 때도 마찬가지다). 구술시험은 쟁점이 아닌 것은 대수롭지 않게 생각한다. 바로 이 점이 구술 수학의 특징이자 묘미다. 수험생이 실전에서 갑자기 헷갈려 공식이 생각나지 않거나 틀렸을 경우 교수가 친절하게 가르쳐 준다. 교수가 가르쳐 주기 전에 먼저 질문을 해서 힌트를 구할 수도 있다. 이런 점을 잘 인식해서 구술 수학을 준비하면 수능과는 달리 단순 실수에 대한 부담은 없을 것이다. 또한 무작정 개념이나 테크닉을 달달 외우면서 공부하는 학생은 오히려 실전

에서 쟁점을 놓치기 쉽다는 점을 명심해야 한다. 한편 내용적인 면에서는 정수론과 관련된 부분을 잘 익혀 둬야 하는데, 교과 과정에서는 잘 다루지 않기 때문에 수능 모의고사 문제 중에서 정수론에 해당하는 문제를 잘 정리해 두는 것이 좋을 것이다.

▶ 유형 연구 1

1. 수학적 귀납법이란 무엇인가?(카톨릭대,숙명여대 등).
2. 모든 자연수 n에 대해서 $3^{2n}-1$은 8의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명하라.

▶ 예시 답안

1) 어떤 명제가 모든 자연수 n에 대해 성립함을 증명할 때 '첫째 $n=1$일 때 주어진 명제가 성립한다. 둘째 $n=k$일 때 주어진 명제가 성립한다면 $n=k+1$일 때도 이 명제가 성립한다'는 것을 보여주는 증명방법을 수학적 귀납법이라 한다. 다른 식으로 표현하면 다음과 같다. 자연수n에 대한 명제$P(n)$에서 $P(1)$이 참이고, $P(k)$가 참이면 $P(k+1)$도 참이라는 사실을 밝히면 명제 $P(n)$은 항상 참이다. 이런 증명방법을 수학적 귀납법이라 한다.

2) i) $n=1$일 때 분명히 성립한다.

ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $3^{2k}-1=8m$(m은 양수)로 둘 수 있는데 양변에 9를 곱하고 8을 더하면 $3^{2(k+1)}-1=8(9m+1)$ 이 된다. 그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 i)과 ii)에 의해 모든 자연수 n에 대해서 $3^{2n}-1$은 8의 배수다.

▶ Tip

수학이란 우리가 이성적으로 판단하고 추리하는 논리의 다른 모습이다. 추리와 논리는 연역적 사고법에 의해 전개된다. 물리학, 화학 같은 자연과학은 관찰과 실험 등을 통해 자연에 존재하는 '법칙'을 발견해 낸다. 물론 여기서도 연역적인 사고법에 의해 가설을 만들고 이론을 세우지만 기본적 체계는 실험을 통해 증명해야 하는 것이다. 이에 비해 수학은 인간의 순수한 추상적 사유에 의해 연역되는 진리를 다룬다. 수학의 학문적 특징은 '공리'라고 불리는 가장 기초적인 약속에서 출발해 많은 명제들을 연역적으로 증명해 나간다는 점에 있다. 연역이란 이치에 맞게 하나하나 추리해 나가는 과정으로 우리가 판단하고 결정하는 일상 생활에서도 항상 연역의 과정이 있다.

한편 수학의 특징이 연역적 논리 전개라고는 하지만 때로는 귀납적 추론도 필요하다. 그러나 단순한 귀납적 추론을 통해 얻은 결과물은 확실한 수학적 진리성을 확보하기 위해 수학적 논증으로 보완돼야 하고 이것이 바로 수학적 귀납법이다. 수학적 귀납법을 최초로 도입한 수학자는 파스칼(B. Pascal 1623-1662)이다. 자연과학은 단순한 귀납적 추론에 의해 설정된 가설을 '실험'을 통해 확인하지만, 수학에서는 수학적 귀납법의 완전한 형식 체계를 통한 증명만이 진리로 받아들여진다.

고교 수준의 대부분 수학적 사실이나 정리들은 수학적 귀납법을 통하지 않아도 유도하거나 증명할 수 있고, 가끔은 왜 수학적 귀납법이 필요한지 의문이 생길 때도 있다. 하지만 교과서 수준 이상의 복잡한 상황 속에서는 유도하거나 직접 증명이 잘 안되는 경우가 자주 발생한다. 이

때 간단한 귀납법을 이용해 증명할 수 있다. 예를 들면 $1+2+...+n$의 합공식은 쉽게 유도되지만 $1^2+2^2+......n^2$의 경우엔 수학적 귀납법을 통하는 편이 훨씬 간단히 증명할 수 있다. 수학적 귀납법은 모든 n에 대한 절대적 확신을 주는 논증 체계로서의 가치뿐 아니라 연역이 잘 안되는 상황을 쉽게 돌파하는 무기로 더욱 빛난다.

▶ **추천문제 : $2^n > 2n+1(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$이 성립함을 증명하라.**

▶ 유형 연구 2

1) 귀류법이란 무엇인가?(서울대, 부산대,고려대 등).
2) 귀류법을 이용해 소수의 개수가 무한함을 증명하라.

▶ 예시 답안

1) 귀류법은 증명 방법의 하나로 결론을 부정해 가정이 모순임을 보여줌으로써 결론이 옳다는 것을 보여주는 증명 방법이다. 명제 $p\rightarrow q$가 참임을 증명하기 위해서는 대우명제 $\sim q\rightarrow \sim p$가 참임을 증명하면 되는데, 이것을 직접 증명하는 것이 아니라 명제 '$\sim q\rightarrow p$ '가 거짓임을 밝힘으로써 $\sim q\rightarrow \sim p$이 참이고 따라서 $p\rightarrow q$가 참임을 간접적으로 증명하는 것이다.

2) 소수의 개수가 유한하다고 가정하고 그 유한 개의 소수를 $p_{1,}\ p_{2,}\ \cdots,\ p_n$이라고 두자. 이제 다음과 같은 수 $P=p_1\times p_2\times\cdots\times p_{n+1}$을 생각해보면 분명 이 수는 1이 아니고 소수 $p_1,\ p_2,\ \cdots p_n$ 중 어느 수와도 다르다. 그러므로 가정에 의해 P는 합성수다. 그런데 이 수를 $p_1,\ p_2,\ \cdots p_n$ 중 어떤 수로 나누어도 나머지가 1이다. 즉 P는 어떤 소수의 곱으로도 나타낼 수가 없다. 이는 모순이다. 따라서 소수의 개수는 무한하다.

▶ Tip

유클리드의 '원론'(Elements)은 인류 역사상 가장 유명한 수학책인데, 중학교 때 배우는 대부분의 도형에 관한 내용은 이 원론에 나온다. 또한 이 책은 서양 근대 과학정신의 성립에 엄청난 영향을 줬다. 특히 원론의 제9권에 나오는 '소수의 개수는 무한하다'는 증명은 가장 아름다운 증명 중 하나로 평가받고 있다. 유클리드가 이 증명에서 사용한 기법이 바로 귀류법으로 수학의 증명기법 중에서 가장 강력한 힘을 갖고 있다. 19세기 위대한 철학자 쇼펜하우어는 수학을 매우 싫어했는데, 그 이유가 바로 귀류법 때문이라고 한다. 직접 증명을 하지 않고 결론을 부정해 모순을 보여줌으로써 결론이 옳다고 증명하는 방법이 별로 유쾌하게 다가오지 않았나보다. 두 개의 방이 있는데 1번 방에는 호랑이가 있고 2번 방에는 고양이가 들어 있다. 1번 방에 호랑이가 있음을 증명하라고 했을 때, 2번 방의 문을 열어보고 호랑이가 없다는 것을 보여주고 1번 방에 호랑이가 있다고 증명하는 것이 귀류법이라고 볼 수 있는데, 쇼펜하우어에게는 이 방법이 뭔가 명확하지 보이지 않았나보다.

▶ 추천 문제

모든 자연수 x에 대해 정의된 다음 함수는 일대일 함수임을 증명하라.

$f(x) = \sqrt{2}\,x - [\sqrt{2}\,x]$

2. 미적분의 세계

고교수학에서 가장 중요한 부분 중 하나가 바로 미적분 분야다. 쉬운 수능을 보완하기 위해 구술시험이 생겼고 수학에서는 바로 이 미적분 분야가 구술 수학의 핵심이라고 말해도 과언이 아니다. 학교나 과별로 학생을 선발하는 기준이 조금씩 다르지만 미적분은 항상 수험생의 수학적 능력을 측정하는 기준이 됐다. 그러므로 미적분 부분을 완전히 터득해 두기만 해도 구술 수학의 반은 정복했다고 할 수 있다. 구술 수학의 특징상 미분과 적분에 관련된 개념이나 원리를 묻는 유형이 주류이지만, 수험생은 실질적 미적분의 계산능력이나 응용 테크닉을 터득하고 있지 않다면 미적분학을 안다고 말할 수 없다. 이른바 명문대라고 지칭하는 대부분의 대학은 개념과 원리에 관련된 것뿐 아니라 복잡한 미적분 계산능력을 요구하는 문제도 출제한다. 수험생은 교과서 수준 이상으로 계산 테크닉을 익혀둬야 하겠다.

▶ 구술시험 현장 중계

☞ **평지에서 일정한 속력으로 물체를 쏘아 올릴 때, 물체를 가장 먼 지점에 떨어지도록 하려면 수평방향 속력과 수직방향 속력이 같아야 함을 실수 a,b에 관한 절대부등식 $a^2+b^2 \geq 2ab$를 이용해 증명하시오(한양대 2002).**

교수 : 증명해 보겠나.

학생 : 원점 O에서 속력 v로 지면과 θ 각도를 이루도록 물체를 쏘아 올릴 때 이 물체의 x, y 방향의 속도와 위치를 분석하면 다음과 같습니다.

먼저 수평방향의 초기 속도와 수직 방향의 초기 속도는 각각 $v_{x_0} = v\cos\theta$, $v_{y_0} = v\sin\theta$가 되는데, 이것을 각각 a와 b로 두고 수평방향과 수직방향의 운동방정식을 기술해 보겠습니다.

먼저 수평방향의 이동거리 x는 힘을 받지 않기 때문에 $x = at$가 되고 수직방향의 이동거리는 y는 중력의 반대 방향으로 힘을 받으므로 $y = bt - \frac{1}{2}gt^2$이 됩니다. 여기서 물체가 땅에 떨어지는 시간 $y=0$으로 두면 시간 t를 구할 수 있죠.

즉 $0 = bt - \frac{1}{2}gt^2$에서 물체가 떨어지는 시간 $t = \frac{2b}{g}$입니다. 이 시간동안 수평방향의 이동거리 $x = a \times \frac{2b}{g} = \frac{2ab}{g}$가 됩니다. 이 식에 $a = v\cos\theta$, $b = v\sin\theta$를 대입하면 $x = \frac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v^2\sin 2\theta}{g}$가 됩니다. 여기서 수평이동거리 x를 최대로 하려면 $\sin 2\theta = 1$이 돼야 하므로 $\theta = 45^\circ$일 때 최대가 됩니다.

교수 : 잘 했네. 그런데 문제에서 절대부등식을 이용해 증명하라고 했는데 어떻게 된 건가?

학생 : 음. 그렇군요. 아는 문제가 나와 너무 흥분했어요. 조금만 시간을 주세요(약 2분이 흘렀다).

교수 : 이젠 할 수 있겠나?

학생 : 네. 아까 마지막 식 $x=\dfrac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g}$에서 바로 증명하면 됩니다. 산술 기하평균 부등식에 의해 $\sin^2\theta+\cos^2\theta \geqq 2\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta}=2\sin\theta\cos\theta$가 성립하는데, 등호가 성립하는 경우는 $\sin\theta=\cos\theta$일 때이므로 본 문제가 증명됩니다.

교수 : 음, 잘 했네.

▶ 감상 포인트

이 상황은 2002학년도 한양대의 실전 상황을 각색한 것이다. 구술에서는 미적분과 관련된 응용력을 측정하는 문제가 자주 등장한다. 특히 실생활이나 과학과 관련된 문제는 통합교과적인 성향이 강하므로 수학 외적인 내용도 평소에 숙지해 둘 필요가 있다. 여기서는 물리학의 가장 중요한 테마 중 하나가 출제됐으므로 외워서 즉시 답할 수 있다. 하지만 실전에서 너무 익숙한 문제여서 오히려 교수가 묻고자 하는 핵심을 놓치는 경우가 발생한다. 위 상황에서처럼 교수가 특별하게 요구하는 수학적 기법을 이용하지 않더라도 훌륭하게 증명할 수 있지만 감점을 당할 수 있다. 실전에서 혹시 아는 문제를 만났더라도 오히려 침착할 필요가 있다. 후닥닥 빨리 푼다고 특별히 득이 되지 않는다는 점을 명심해야 한다.

▶ 유형 연구 1

정적분과 부정적분의 정의와 관계를 설명하라(서울대,서강대,동국대 등).

▶ 예시 답안

부정적분과 정적분의 관계는 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$로 요약할 수 있는데, 증명은 다음과 같다.

1) 정적분과 부정적분과의 관계

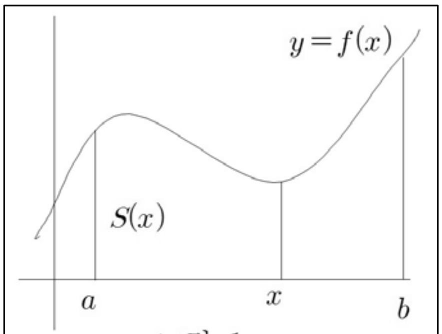


그림 1

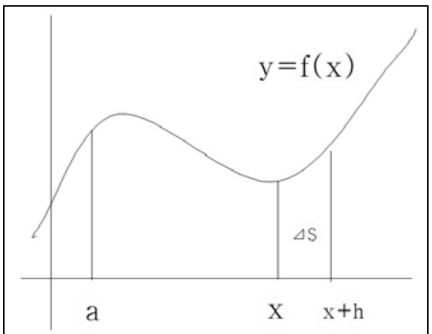


그림 2

오른쪽 그림1과 같이 a에서 x까지 곡선 $y=f(x)$와 x축 사이의 넓이를 $S(x)$라 하면, 정적분의 정의에 의해 $S(x)=\int_a^x f(t)dt$이다. 그러면, $h>0$일 때, 그림2에서 $\varDelta S=S(x+h)-S(x)=\int_x^{x+h} f(t)dt$가 된다. 여기서 $[x,\ x+h]$에서 $f(x)$의 최대값을 M, 최소값을 m이라 하면 $mh \leqq S(x+h)-S(x) \leqq Mh$ 즉 $m \leqq \dfrac{S(x+h)-S(x)}{h} \leqq M$ 여기서 $h\to 0$이면 $m\to f(x)$, $M\to f(x)$이므로 $\lim_{h\to 0}\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}=f(x)$가 된다. 이것은 $S'(x)=f(x)$을 의미하는데, 이는 도형의 넓이를 나타내는 함수 $S(x)$의 도함수 $f(x)$가 됨을 의미하며, 이로써 $f(x)$를 부정적 부정적분(미분의 역연산)함으로써 도형의 넓이를 계산 할 수 있다는 사실을 의미한다.

2) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$의 증명.

$S'(x) = f(x)$에서 $f(x)$의 부정적분의 하나를 $F(x)$라 하면

$S(x) = F(x) + C$ ………①

$S(x) = \int_a^x f(t)dt$이므로 $S(a) = 0$이 된다 즉 ①식에서 $S(a) = F(a) + C = 0$

$\therefore\ C = -F(a)$ ………②

②에 ①을 대입하면 $S(x) = F(x) - F(a)$ ………③

우리가 구하는 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dt$는 $S(b)$에 해당하는데 ③식에서 x에 b를 대입하면

$S(b) = F(b) - F(a)$가 되므로 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$가 된다. 이 정리를 미적분학의 기본정리라 한다.

▶ Tip

미분학(differential calculus)과 적분학(integral calculus)을 합쳐서 통칭 미적분학이라고 하는데, 영어로는 '켈큐러스'(calculus)라고 한다. Calculus는 계산 또는 계산법이라는 뜻이지만 원래는 돌(stone)이라는 뜻을 갖고 있었다. 그런데 인류가 돌을 세 면서 셈법을 터득해서였는지 몰라도 이것이 계산법이라는 말로 통용됐고, 셈법 중에서 가장 강력하고 우아한 셈법인 미적분학을 지칭하는 단어가 됐다. 고교시절 공부하는 미적분학은 미분을 먼저 배우고 미분의 역연산으로 부정적분을 배운 후 정적분과 결합시켜 자연스럽게 도형의 면적이나 부피를 계산하는 법을 익힌다. 하지만 역사적으로는 적분학이 미분학보다 먼저 발달했다. 적분학은 도형의 넓이나 부피를 구하는 방법(구분구적법)으로 연구됐고, 미분학은 그보다 늦게 변화율, 접선문제, 함수의 최대 최소에 대한 문제와 관련돼 발전했다. 17세기에 이르러 뉴턴과 라이프니츠가 적분과 미분이 서로 역연산 관계에 있다는 사실을 명확하게 밝혔는데, 이를 미적분학의 기본정리라 부른다. 이 정리를 바탕으로 미적분이라는 통일적 이론체계가 구축돼 현대 과학을 이끄는 힘이 됐다.

▶ 추천문제

$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt\ (x > 0)$ 일때 $f(xy) = f(x) + f(y)$가 성립함을 증명하라

▶ 유형 연구 2

다음의 상황을 읽고 물음에 답하라(중앙대 2003).

평면 위에 두 개의 도로 A,B가 있다. 도로 A는 점 (0, 0)에서 출발해 곡선 $y = x\sqrt{x}$을 따라 오른쪽으로 뻗어 있고, 도로 B는 점 (0, 4)에서 시작돼 $y = x + 4$인 직선을 따라 A와 마찬가지로 오른쪽으로 뻗어 있다.

1) 두 도로가 만나는 지점을 P라 할 때, P의 x 좌표를 구하라.

2) 한대의 자전거가 점 $(0, 0)$에서 출발해 매초 1의 속력으로 곡선도로 A를 따라 진행한다. 이때 점 P까지 도달하는데 걸리는 시간은 얼마인가?

3) 위 문제2)에서의 자전거와 동시에 다른 한 대의 자전거가 점 $(0, 4)$에서 출발해 직선 도로 B를 따라 이동한다. 이동하는 동안 두 자전거 위치의 x좌표는 항상 같고 따라서 동시에 p에 도달한다. 이 경우 B 도로를 달리는 자전거가 P에 도달할 때의 속력을 구하라.

▶ 예시 답안

1) 점 P의 좌표를 (x, y)라 두면 두 도로가 만나는 지점의 x 좌표는 $x\sqrt{x}=x+4$ 두고 풀면 되는데, 양변을 제곱하고 전개하면 $x^3-x^2-8x-16=0$ 이 된다. 이 식을 풀면 $x=4$이다.

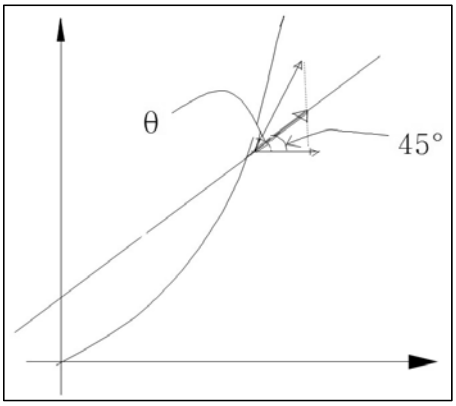
2) 원점에서 점 P까지 A도로를 따라갈 때의 거리는 다음과 같이 거리 적분공식을 이용하면 구할 수 있다.

$$\int_0^4 \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$$

$$=\frac{8}{9}\int_1^{\sqrt{10}} t^2 dt\left(\sqrt{1+\frac{9}{4}x}=t\text{로 치환}\right)$$

$$=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

여기서 시간=거리/속력이므로 $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$(초)이다.



3) P에 도착할 때의 도로 A를 달리는 자전거의 속도 벡터v_a가 x축과 이루는 각을 θ라 두면 $\tan\theta=y'(4)=3$이 된다(속력이 1/초이므로 $|v_a|=1$). 우리가 구하고자 하는 도로 B를 달리는 자전거의 속력은 $\frac{|v_a|\cos\theta}{\cos 45}=\frac{1}{\sqrt{5}}$가 된다.

▶ 추천문제

$\int_0^1 \sqrt{x+\sin x}\,dx$의 근사값을 구하시오(연세대 2001).

3. 여러가지 아이디어와 테크닉

구술 수학에서는 교과서에 나열된 방정식, 부등식 등의 단순개념뿐 아니라 창의성과 아이디어를 필요로 하는 문제들이 많이 등장한다. 특히 기하학에 관련된 아이디어 발상 문제는 기하학적 사실을 많이 암기하고 있어야 할뿐 아니라 논리적으로 추론하는 고도의 사고력이 필요하다. 다른 부분과는 달리 이런 형식의 문제들은 어떤 문제가 나올지 예측하기 어려우므로 유형 문제를 충분히 이해하고, 추천 문제 수준을 모두 연습해 자신감을 가져야 한다. 또한 기하학과 대수학, 미적분학, 복소수 등을 결합시킨 테크닉 문제의 경우는 구술 수학의 단골 메뉴가 된다는 점을 명심하고 기본 테크닉도 함께 익혀둬야 하겠다.

▶ **구술시험 현장 중계**

☞ 상수 c와 복소수$z_k=\cos\left(\frac{2k\pi}{n}+c\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}+c\right)$에 대해서 일반항 a_n이 다음과 같은 수열이 있다.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}|z_k-z_{k-1}|$$

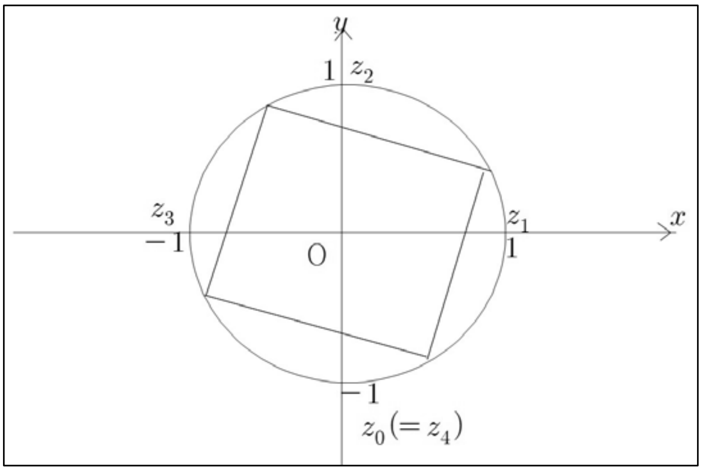
(1) a_4를 구하라.

(2) 수열 $\{a_n\}$은 수렴하는가? 또는 발산하는가? 만일 수렴한다면 그 극한값은 얼마인가?

교수 : 자, 준비됐으면 설명을 자세히 해 보게.

학생 : 먼저 1번 문제를 풀어 보겠습니다.

복소수 $z_k=\cos(\frac{2k\pi}{n}+c)+isin(\frac{2k\pi}{n}+c)$는 절대값이 1이고 편각이 $\frac{2k\pi}{n}+c$입니다. 따라서, 이 복소수들은 모두 단위 원 위에 존재합니다. a_4를 구하기 위해 $z_0,\ z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4(=z_0)$를 단위 원 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같습니다.



한편, $|z_k-z_{k-1}|$은 두 복소수 z_k, z_{k-1} 사이의 거리를 뜻하므로 a_4는 정사각형 둘레의 길이입니다.

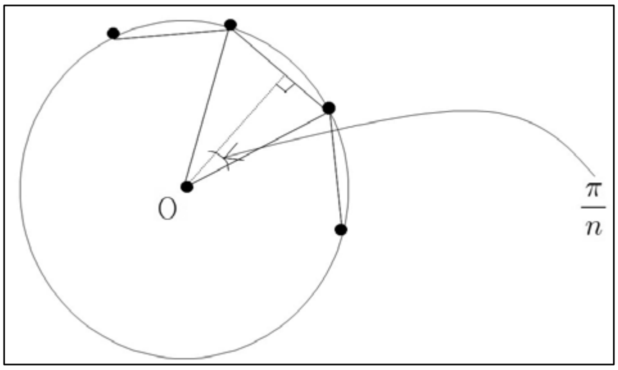
단위원에 내접하는 정사각형의 둘레의 길이는 $4\sqrt{2}$ 입니다.

교수 : 음. 좋아. 그런데 여기서 c는 무엇을 의미하는가?

학생 : 위 그림에서 보듯이 c는 복소수 $z_0,\ z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4(=z_0)$가 단위 원주 위에 위치할 때, 편각이 각각 c 만큼 회전됐다는 것을 의미합니다. 따라서 c가 어떤 값을 갖더라도 문제의 결과는 변하지 않습니다.

교수 : 잘 했네. 그럼 계속해서 2번을 풀어 보게나.

학생 : 문제1 번처럼 도형을 이용하면 쉽게 풀 수 있습니다.



오른쪽 그림을 보면 수열 $\{a_n\}$은 원에 내접하는 정n각형의 둘레의 길이를 의미합니다. 즉 원에 내접하는 정 n각형의 한변의 길이를 구하면 $2\sin\frac{\pi}{n}$이 되는데 둘레의 총 길이는 $2n\cdot\sin\frac{\pi}{n}$입니다.

교수 : 잘 했네. 그럼 극한값은?

학생 : 아까도 말했지만 이 수열은 정n각형의 둘레의 길이를 의미하므로 극한값은 결국 수렴하고 그 극한값은 원주가 되므로 2π입니다.

교수 : 직관적으로 말고 좀더 수학적으로 증명을 할 수 없겠나?

학생 : 물론 좀더 엄밀하게 표현하면 $\lim_{n\to\infty} 2n \cdot \sin\frac{\pi}{n}$를 구하는 것입니다. 위 식에서 $\frac{\pi}{n}$를 θ로 놓으면 $\lim_{n\to\infty} 2n \cdot \sin\frac{\pi}{n} = 2\pi \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} = 2\pi$입니다. 따라서 2π에 수렴합니다.

교수 : 훌륭하군. 합격을 빌겠네

학생 : 감사합니다.

▶ 감상 포인트

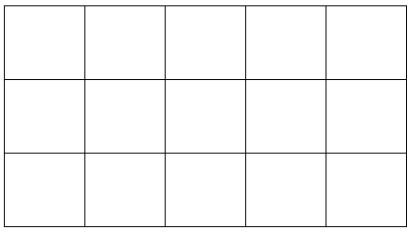
이 문제는 2002학년도 서울대 구술시험 실전 상황을 각색한 것이다. 이 문제를 풀어 합격한 K군은 처음엔 도형을 이용하지 않고 풀다가, 첫 문제 속에서 아이디어가 떠올라 쉽게 풀 수 있었다고 한다. 고교 수준의 복소수 문제는 도형을 이용해 쉽게 이해할 수 있는데, 서울대와 KAIST에서는 자주 출제되는 분야이기도 하다. 특히 한두 문제로 평가하는 구술시험의 특징상 피라미드식 다단계 문제들이 등장하는데, 아이디어나 논리전개의 실마리는 첫 문제 속에 숨겨져 있다. 역으로 말하면 다단계 문제에서 첫 문제를 놓치면 이후 문제들은 해결하기 어렵다고 보면 된다. **첫 문제가 혹시 막히더라도 반드시 교수에게 도움을 요청해 다음 문제를 푸는 실마리를 얻도록 해야 한다.**

▶ 유형 연구 1

아래 그림과 같은 도로망이 있다. 생쥐 한 마리가 점 O를 출발해 1초에 한칸씩 길을 따라 위, 아래, 왼쪽, 오른쪽 마음대로 움직인다고 가정하고 다음 물음에 답하라.

1) 2003초 후에 점 Q 위에 있을 수 있는가?

2) 4초 후에 점 Q 위에 있을 모든 경우의 수를 구하여라.



▶ 예시 답안

1) 동서남북 마음대로 움직일 수 있기 때문에 어떤 위치도 갈 수 있는 것처럼 보인다. 그러나 몇 번 시행 착오를 통해 조사해 보면 점 Q에 가기 위해서는 시간이 2이상인 짝수 초 후에 가능하다는 점을 알 수 있다. 그러므로 점 Q 위에 있을 수 없다.

2) 위로, 아래로, 오른쪽으로, 왼쪽으로 이동한 칸수를 각각 a, b, c, d라 하자. 원점 O에서 Q로 이동하려면 오른쪽 (c)로 1칸, 위(a)로 1칸 가면 되는데, 4초 동안 움직이므로 다음 식으로 나타내진다.

$a+b+c+d = 4 \cdots\cdots$ ①

$c-d = 1 \cdots\cdots$ ②

$a-b = 1 \cdots\cdots$ ③

①, ②, ③을 변변 더하고 정리하면 $a+c=3$($0 \leq a, b, c, d \leq 4$인 정수)이므로 가능한 a와 c

의 순서쌍은 다음과 같다.

$(a,\ c) = (0,\ 3), (3, 0), (1,\ 2), (2,\ 1)$ 여기서 각 경우를 대입해 보면

$a=0,\ c=3$일 때, $d=2,\ b=-1$: 조건에 맞지 않는다.

$a=3,\ c=0$일 때, $b=2,\ d=-1$: 조건에 맞지 않는다.

$a=1,\ c=2$일 때, $b=0,\ d=1$

같은 것이 있는 수열의 가지 수로 계산하면 $\frac{4!}{2!}=12$(가지)

$a=2, c=1$일 때도 마찬가지로 계산하면

$\therefore\ 12+12\ =\ 24$(가지)

▶ 추천 문제

평면 위의 어느 세 직선도 한 개의 삼각형을 만들도록 차례로 직선을 잡는다. n개의 직선을 평면 위에 잡을 때 나눠지는 부분을 잘 생각하면서 다음 질문에 답하라.

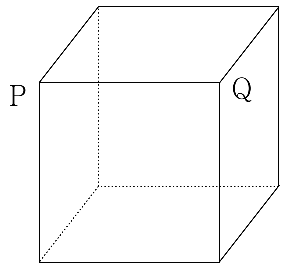
i) 나눠진 부분 중 유한 면적을 가지는 부분의 개수를 구하라

ii) 나눠진 부분 중 무한 면적을 가지는 부분의 개수를 구하라.

▶ 유형 연구 2

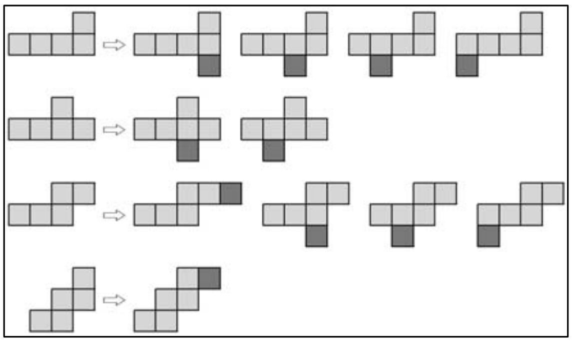
1. 정육면체 주사위의 전개도는 모두 몇 종류인가?

2. 한변의 길이가 1인 정육면체 주사위에서 점 P에서 Q까지 실로 연결했다(단 두 점을 잇는 최단거리). 이때 이 실은 반드시 주사위의 여섯 면을 지나야 한다. 이 실의 길이는 얼마인가?



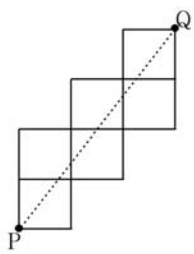
▶ 예시 답안

1) 왼쪽에 5개 짜리 기본형에서 1개씩 추가해 보면서 여러가지 전개도를 만들어보면 화살표 오른쪽처럼 총 11 가지가 나온다.



2. 6개의 면을 모두 지나는 최단거리는 문제1의 전개도를 참고하면 우측 그림과 같다.

$\therefore$ 최단거리는 5이다



▶ 추천 문제

정육면체 모양의 두부를 가로 l개 세로 m개 높이로 n개를 쌓아 직육면체를 만들었다. 철사로 이 직육면체의 대각선을 통과시킬 때 철사가 통과하는 두부의 개수를 구하라. 단 $l,\ m,\ n$은 서로소이다(포스텍 2001).

2003년 1월-수학 면접구술고사 완벽가이드

■ 구술시험 현장중계 1-개념과 원리

모든 실수에서 연속인 함수 $f,\ g$에 대해 함수 $f\times g$를 얻는 연산 $\times$를 다음과 같이 정의한다. $$(f\times g)(x)=\int_0^x f(t)g(t)dt$$ **이때, 연산 $\times$에 대한 항등원이 있는가를 조사하라(서울대 2002년 심층면접 기출문제).**

교수 : 자, 이제 자네의 의견을 논리적으로 설명하게나.

학생 : 먼저 항등원을 $i(\times)$라 두면 $(f\times i)(x)=(i\times f)(x)=f(x)$가 됩니다. 그러므로

$f(x)=\int_0^x f(t)\,i(t)\,dt$입니다. 위 식의 양변을 각각 미분하면 $f'(x)=f(x)\,i(x)$가 되죠.

물론 $f(0)=0$이고요. 따라서 $i(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$가 됩니다. 따라서...

교수 : 좋아. 그럼 주어진 연산의 항등원이 있다고 할 수 있는가?

학생 : 그럼요.

교수 : 그래? 그럼 항등원이 함수에 따라 달라지는데 항등원이 여러 개일 수 있는가?

학생 : 음… 죄송합니다만, 어떤 연산에 대해서 항등원이 유일해야 합니까?

교수 : 잘 생각해보게나.

학생 : 약간 착각을 한 것 같은데 항등원은 유일해야 할 것 같군요. 그런데 항등원은 유일하다는 것을 증명해야 합니까?

교수 : 증명할 수 있다면 해보게나

학생 : 증명은 못하겠습니다. 어쨌든 결론적으로 이 연산에는 항등원이 있습니다.

교수 : 수고했네.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

이 문제는 아주 쉬운 문제이지만 쟁점을 빨리 알아차리기 쉽지 않다. 미적분과 대수학적 기초 원리를 교묘하게 결합시킨 이 문제를 통해 교수는 무엇을 평가하고 싶은 것일까?

위 상황에 등장하는 학생은 주어진 연산의 정의에 따라 항등원을 잘 구했지만 함정에 빠진 느낌이다. 수학적 개념이나 정의를 충실하게 이해하고 정리해두지 않는다면 쉽게 함정에 빠지고 문제의 핵심을 빗나갈 수 있다. 개념과 정의는 수학의 뼈대다. 평소 수학 문제를 풀 때 개념과 정의의 명확한 이해에 중점을 두면서 테크닉을 익혀야 한다. 테크닉보다는 수학적 개념과 정의의 명확한 이해가 구술수학에서 더 중요할 수도 있다는 점을 명심해야 한다.

[추천 문제]

정의역과 공역이 실수의 집합인 함수 f가 '모든 실수 x에 대해' $f(x)^2=1$을 만족한다.

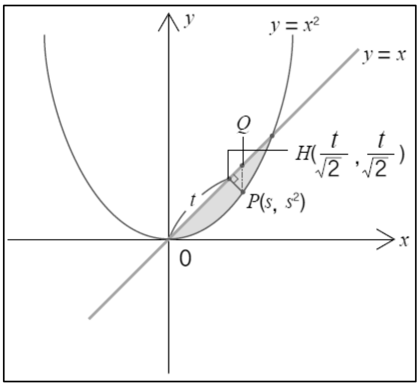
1) 이 조건을 만족하는 함수를 4개 이상 말해보아라

2) 이런 함수는 얼마나 많은가?(2002 서강대 심층면접 기출문제)

■ 구술시험 현장중계 2-미적분학의 세계

좌표평면에서 포물선 $y=x^2$과 직선 $y=x$에 의해 둘러싸인 도형을 직선 $y=x$를 축으로 하여 회전시킨 회전체의 부피를 구하여라.

▶ 구술 시뮬레이션 1



학생 : 먼저 $y=x$ $(x \geq 0)$ 위의 점을 H로 하고 $\overline{OH}=t$라고 하면 $H=(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}})$가 됩니다.

점 H를 지나면서 $y=x$에 수직인 직선 $x+y=\sqrt{2}t$와 $y=x^2(x \geq 0)$의 교점을 $P(s, s^2)$이라 하고, t와 s의 관계를 구하면, $s+s^2=\sqrt{2}t$가 됩니다.

그러므로 $t=\frac{s+s^2}{\sqrt{2}}$이 되고, $dt=\frac{2s+1}{\sqrt{2}}ds$로 변환됩니다. 물론 여기서 t : $0 \to \sqrt{2}$일 때 s : $0 \to 1$이 되죠.

그래서 $\overline{PH}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{PQ}=\frac{s-s^2}{\sqrt{2}}$이 되므로 회전체 적분공식을 적용해서 구하면 다음과 같습니다.

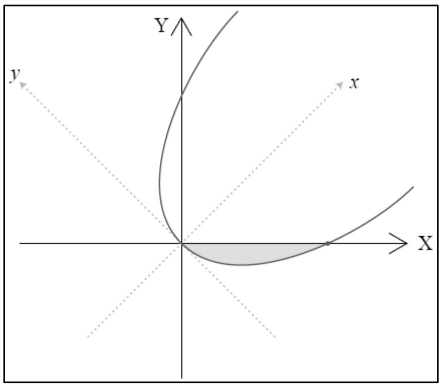
$$V=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\overline{PH}^2dt=\pi\int_0^1(\frac{s-s^2}{\sqrt{2}})^2\frac{2s+1}{\sqrt{2}}ds$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\int_0^1(2s^2-3s^4+s^2)ds$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi$$

교수 : 음, 좀 복잡하지만 훌륭해.

▶ 구술 시뮬레이션 2



교수 : 긴장하지 말고 한 번 풀어보게나.

학생 : 우선 변수를 잡고 회전체 적분공식을 이용하기가 어렵습니다. 그래서 그래프를 $-45°$ 회전해 직선 $y=x$를 x축으로 하고 x축 위의 회전으로 생각해서 풀어보겠습니다.

포물선상의 점 (x, x^2) $(x \geq 0)$을 $-45°$ 회전한 값을 (X, Y)라 하면 행렬을 이용해 다음과 같이 표현할 수 있습니다.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(-45°) & -\sin(-45°) \\ \sin(-45°) & \cos(-45°) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{cases} X = \dfrac{x+x^2}{\sqrt{2}} \\ Y = \dfrac{-x+x^2}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

여기서 $dX = \dfrac{2x+1}{\sqrt{2}}dx$이고 $X: 0 \to 2$, $x: 0 \to 1$가 되는 것을 고려해 회전체 적분공식을 이용해서 계산하면 다음과 같습니다.

$$V = \int_0^{\sqrt{2}} \pi Y^2 dX = \pi \int_0^1 \left(\frac{x^2-x}{\sqrt{2}}\right)\frac{2x+1}{\sqrt{2}}dx = \frac{\sqrt{2}}{60}\pi$$

교수 : 음, 기발한 방법이군.

[추천 문제]

두 함수 f, g를 각각 $f(x) = \begin{cases} x \ (0 \le x \le 1) \\ 0 \ (x < 0 \text{ 또는 } x > 1) \end{cases}$ $g(x) = \int_0^1 f(x-t)dt$으로 정의할 때 $y = g(x)$의 그래프를 그려라.

■ 구술시험 현장중계 3-증명의 기법과 테크닉

정수 n에 대하여 다음을 증명하여라.(단, $n > 0$)
1) $\sqrt{n}$이 유리수이면 $\sqrt{n}$은 정수이다.
2) $\sqrt{n^2+1}$은 유리수이다.

교수 : 자, 순서대로 증명해보게나.

학생 : 예. 먼저 $\sqrt{n}$이 유리수라고 가정하면 $\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$라 둘 수 있습니다. 물론 p와 q는 서로소인 정수입니다.

양변을 제곱하면 $n = \dfrac{p^2}{q^2}$이 되죠.

이 식을 정리하면 $p^2 = nq^2 = q(nq)$가 되는데, 이 식을 잘 살펴보면 p^2이 q의 배수임을 알 수 있습니다. 따라서 $q = 1$입니다.

교수 : 잠깐, 갑자기 왜 $q = 1$이 되지?

학생 : 음…. 그건 p^2이 q의 배수이므로 당연하게 p가 q의 배수가 되죠. 그런데 여기서 p와 q는 서로소이므로 $q = 1$이 된 것입니다, 그래서 $\sqrt{n} = p$로 표현되죠. 다시 말해 $\sqrt{n}$은 정수가 된다는 뜻입니다.

교수 : 좋아. 그럼 다음 문제도 해보게나.

학생 : 귀류법을 이용하겠습니다. 일단 $\sqrt{n^2+1}$이 유리수라고 가정하면 앞 문제1)에 의해 정수가 됩니다. 즉 $\sqrt{n^2+1} = m$인 정수 m이 존재합니다.

양 변을 제곱하면 $n^2+1 = m^2$이 되므로 $m^2 - n^2 = (m-n)(m+n) = 1$을 만족합니다.

따라서 $m+n=1$, $m-n=1$이 돼야 하는데 이것을 풀면 $m=1$, $n=0$이 나오므로 모순입니다.

그러므로 $\sqrt{n^2+1}$은 무리수입니다.

교수 : 아주 훌륭해.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

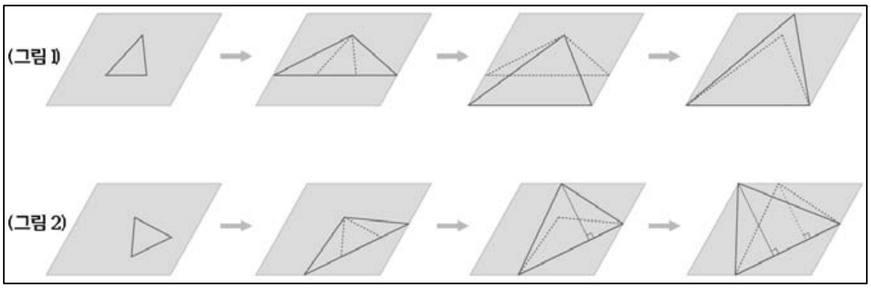
위 상황의 테마는 전형적인 정수론 기법에 관한 것이다. 정수론은 교과서에서 만날 기회는 거의 없지만, 수학경시대회나 수능시험에서 단골메뉴가 되고 있는 중요한 수학의 한 분야다. 단순히 몇 가지 테크닉만 익히면 어려움 없이 공부할 수 있는 일반적 수학과는 달리 정수론은 많은 훈련과 수학적 사고력이 필요한 분야다. 따라서 구술 면접시험에서 단골 메뉴가 되고 있다. 특히 수학경시 문제 유형과 비슷한 형태의 문제들이 포스텍에는 자주 출제되고 있다. 2가 무리수임을 증명하는 문제와 같이 정수론과 관계된 증명문제들은 이미 많은 대학교에서 구술문제로 등장했다. 앞으로 다양한 형태로 진화된 문제들이 계속 출제될 가능성이 높다.

[추천 문제] $x^2-2x=8y-2y^2$을 만족하는 정수해 $(x,\ y)$를 모두 구하라(2002 포스텍 기출문제).
[힌트-'정수해'라는 말이 결정적 단서다.]

■ 구술시험 현장중계 4-다양한 아이디어

1) 넓이가 2인 평행사변형의 내부에 있는 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 넓이는 1 이하임을 보여라.

2) 넓이가 4인 삼각형의 내부에 점이 7개가 있으면 그 중 3개의 점을 꼭지점으로 하는 넓이가 1 이하인 삼각형이 반드시 존재함을 보여라(2002년 포스텍 심층면접 기출문제).



교수 : 자, 그럼 한 번 증명해 보세요.

학생 : 1)번 문제는 당연한 것 같은데요….

교수 : 그래 당연하긴 당연하죠. 하지만 논리적으로 증명을 한 번 해보세요.

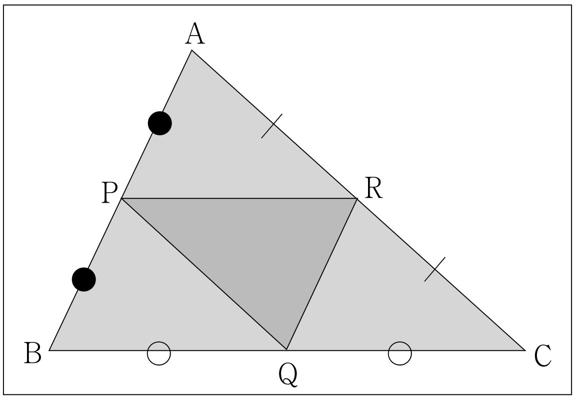
학생 : 음, 일단 평행사변형 내부에 임의의 삼각형을 그린 (그림1)처럼 해보면 될 것 같습니다.
(그림1)처럼 밑변과 평행한 삼각형의 변부터 조금씩 변형시켜 면적을 키워다 보면 마지막 단계의 삼각형의 면적이 최대가 되잖아요. 그런데 이때 최대 면적은 평행사변형의 면적의 반, 즉 1이 됩니다. 그러므로 임의의 삼각형의 면적은 1이하가 되죠.

교수 : 그래? 대충 그럴듯하군요. 만약 삼각형의 어느 한변도 평행사변형의 한변에 평행하지 않는 경우는 어떻게 증명하나요?

학생 : 음, 그럴 경우도 마찬가지인 것 같습니다. 아무 변을 잡고 (그림2)처럼 변형시켜 면적을 키우면 마지막 단계의 삼각형이 면적이 최대가 되죠.

교수 : 좋습니다. 그럼 두 번째 문제로 들어가보죠.

학생 : 우선 삼각형을 ABC라 두고 세변의 중점을 각각 P, Q, R이라 하겠습니다. 그러면 면적이 1인 작은 삼각형이 생기는데, 이 4개의 삼각형에 점 7개를 찍는 경우를 생각하면 됩니다. 먼저 세 점 이상의 점이 어떤 한 삼각형 안에 찍힌 경우에는 바로 증명이 됩니다. 이 경우가 아닐 경우는 모든 작은 삼각형에 점이 두 개 이하로 찍히는 경우인데, 모든 삼각형이 점을 2개씩 가지면 점이 모두 8개가 되므로 이 경우를 제외하면 모든 작은 삼각형에는 한 개 또는 두 개의 점만이 찍히게 된다고 볼 수 있죠.



그럼 중앙에 작은 삼각형 PQR과 옆에 있는 하나를 합쳐서 점이 3개 또는 4개가 찍힌 평행사변형을 택할 수 있습니다. 이 평행사변형에는 점이 3개 또는 4개 있으므로 문제 1)에 의해 면적이 1이하인 삼각형을 반드시 만들 수 있습니다.

교수 : 음…. 잘 했습니다.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

위 증명과정에서는 '비둘기 집의 원리'라는 유명한 논리가 적용됐다. 비둘기 집의 원리란 비둘기 집이 n개가 있고 비둘기 $n+1$ 마리가 비둘기 집에 들어간다면 적어도 어느 한집에는 두마리 이상의 비둘기가 들어 간다는 내용을 담고 있다. 언뜻 직관으로 쉽게 이해 가는 것이라도 증명을 하려면 어디서부터 시작해야 할지 막막하다. 그러나 증명의 실마리는 간단함에서부터 출발한다. 특히 위의 문제와 같은 경우는 젖먹이도 알 수 있는 당연한 사실을 담고 있다. 이럴 경우 비둘기 집의 원리를 이용하면 좀더 쉽게 결론을 낼 수 있다. 위 문제는 직관적으로 당연한 문제 속에 수학에서 증명의 핵심이 무엇인가를 짐작하게 해준다.

수학경시대회 등을 통해서 비둘기 집의 원리가 알려졌을 수도 있지만 이름조차 들어본 적이 없는 학생이 적지 않을 것이다. 만약 이런 유형의 문제를 처음 대한다면 무척 당황할 것이다. 하지만 구술시험은 수학의 천재적 재능을 알아보기 위한 시험이 아니다. 평소에 과학 잡지나 수학 교양서적 등을 꾸준히 읽으면서 교과서 외적인 수학 원리나 개념 등을 평소에 정리해 둔다면 위와 같은 유형의 심층면접 문제에 큰 도움이 될 것이다.

[추천 문제]

학생수가 43명인 어떤 학급에 비타민 a, b, c를 골고루 나눠줘 모든 학생에게 복용시켰다. 모든 학생은 한 종류 이상의 비타민을 먹었지만 3종류의 비타민을 모두 먹은 학생은 없었다. 이를 증명하라.

2003년 02월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

문제1. 다음 질문에 대해 답하라.
1) 함수의 정의에 대해 설명하라.
2) 일대일 함수와 일대일 대응을 각각 설명하라.
3) 역함수를 정의하고 함수의 그래프를 이용해 기하학적으로 설명하라.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

중·고교 과정에 나오는 함수의 정의는 매우 간단하지만 정확하게 암기하고 있는 학생은 드물다. 대부분의 구술시험에서는 정의를 잘 이해하고 응용할 수 있는지를 묻는 문제가 자주 출제된다. 함수의 그래프를 그려 방정식을 풀거나 최대·최소를 구하는 문제 유형은 지필 고사에서도 여러가지 함수 기법과 연결돼 있으므로 매우 중요하다. 그러나 대부분의 수험생은 함수 그 자체의 의미나 정의를 정확하게 이해하지 못하는 경우가 많다. 수학은 다른 어떤 것보다 정확한 정의를 암기하고 이해하는 것이 중요하다. 이것을 익히기 위해 응용문제를 푼다고 해도 과언이 아니다. 특히 함수에 관련된 여러가지 수학적 용어나 정의는 잘 정리해둬야 한다.

▶ 해설 및 모범답안

1) 어떤 주어진 관계에 의해 집합 X의 원소 x에 집합 Y의 원소 y가 짝지어지는 것을 집합 X에서 집합 Y로의 대응이라 한다. 이 대응 관계를 함수라 부른다. 여기서 X를 이 함수의 정의역, Y를 공변역(공역)이라 한다.

   다시 말해 정의역 X의 원소 x를 공역 Y의 원소 y에 대응시키는 관계를 함수라고 하는데, 함수를 f라 하면 $y=f(x)$가 되며, 이 함수를 $f: X \to Y$, $y=f(x)$로 나타낸다.

2) 공역의 모든 원소가 정의역에 하나씩 대응되는 함수다. 정의역의 원소 x에 대응하는 공역의 원소를 y라 할 때, 다음 관계를 만족시키면 함수 f를 일대일 함수라 한다. 모든 x_1, x_2에 대해 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다. 일대일 대응은 일대일 함수 중에서 공역과 치역이 일치하는 경우를 말한다.

3) 역함수는 주어진 함수의 역관계를 나타내는 대응관계를 말한다. 어떤 함수 $f: X \to Y$가 일대일 대응일 때 역함수가 존재한다. 즉 함수 f가 일대일 대응을 이루고 있다면 Y의 임의의 원소 y를 택할 때 $f(x)=y$가 되는 x가 정의역 X에 존재한다. 이렇게 대응시켜주는 관계를 함수 f의 역함수 (f^{-1})이라 하고 기호로 $f^{-1}: Y \to X$로 나타낸다.

   역함수가 존재하는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 임의의 점을 (p, q)라 하자. 분명히 $q=f(p)$가 성립하는데 역함수의 정의에 따라 $f^{-1}(q)=p$이다. 이것은 점 (q, p)가 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위에 존재한다는 것을 의미한다. 마찬가지로 함수 $y=f^{-1}(x)$ 위의 임의의 점 (r, s)를 택하더라도 (s, r)은 $y=f(x)$의 그래프 위에 존재한다. 이것은 두 함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대해 대칭이 됨을 말한다.

▶ Tip

함수의 정의와 개념은 쉬운듯 하면서 어려운 것이다. 교과서에서 배우는 대응의 명확한 의미와 기호가 개발된 것이 18세기 이후라는 사실을 안다면 함수가 어렵다고 기죽을 필요 없을 것 같

다. 함수(function)라는 말을 처음으로 사용한 사람은 미적분을 개발한 라이프니츠였다. 함수라는 개념은 수학의 역사와 더불어 존재했다고 봐도 무방하다. 데카르트의 해석기하학에서 자연스럽게 함수의 개념이 등장하지만 변수들 간의 일반적인 대응 관계로 확장된 것은 19세기 이후의 일이다. 변수 x와 y 사이에 x의 값이 정해지면 y값이 정해진다는 관계가 있을 때, y는 x의 함수라 한다. 또 x를 독립변수, y를 종속변수라 했다. 이때는 반드시 식으로 나타낼 필요가 없이 추상적인 관계만을 설정해 함수를 정의했다. 이런 식의 일반적인 함수를 탄생시킨 수학자가 바로'비둘기집의 원리'로 유명한 디리클레다. 이런 역사적인 배경을 이해한다면 함수를 좀더 쉽게 이해할 수 있을 것이다.

문제2. 휴대폰 통화 요금은 통화 시간이 30초 경과할 때마다 50원씩 추가된다. 통화시간 t초에 대한 요금을 $f(t)$라 할 때, $f(t)$의 함수식을 구하고 그래프를 그려 설명하라(단 기본 요금은 100원이고 30초 미만으로 통화할 경우는 기본요금만 내면 된다).

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

이런 문제 유형을 통해 함수를 직접 만들어보면서 실생활에 널리 응용할 수 있도록 충분히 훈련해야 한다. 특히 통화 요금뿐 아니라 계단식으로 증가하는 여러가지 현상에 가우스 함수를 응용할 수 있어야 한다. 함수를 구하는 과정은 패턴을 찾는 과정과 유사한데, 패턴을 수식으로 바꾸는 일은 쉽지 않으므로 꾸준한 훈련이 필요하다.

▶ 해설 및 모범답안

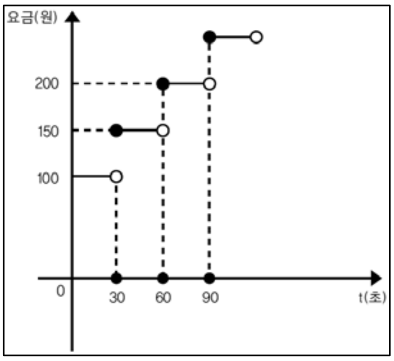
ⅰ) $0 < t < 30$일 때 기본 요금 100원을 내면 된다.

$\therefore\ f(t) = 100$

ⅱ) $30 \le t \le 60$일 때 $f(t) = 100 + 50 = 150$

ⅲ) $60 \le t \le 90$일 때 $f(t) = 100 + 2 \times 50 = 200$

이 규칙을 일반화해 함수 $f(t)$를 구하면 $f(t) = 50\left[\dfrac{t}{30}\right] + 100$이 된다.



문제3. 다음 질문에 대해 답하라.

1) 도함수란 무엇인가?

2) 도함수의 정의를 이용해 $y = \ln x$를 미분하여라.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

미분과 관련된 것은 구술에서 가장 중요한 테마다. 테크닉이나 응용뿐 아니라 기본적인 정의나 개념을 숙지하는 것도 중요하다. 평균변화율과 순간변화율, 미분계수, 도함수, 접선의 기울기 등의 기본적 내용부터 물리학에 등장하는 평균속도, 순간속도 등도 비교해 정리해둬야 한다.

▶ 해설 및 모범답안

1) 도함수는 평균변화율의 극한값으로 정의된다. 평균변화율은 물리학에서 평균속도와 관련이 있는데, 평균속도는 곧 x값의 변화량 $\triangle x$에 대한 y값의 변화량 $\triangle y$의 비율이다.

함수 $y=f(x)$에서 구간 $[a,\ a+\Delta x]$에서의 평균변화율이 $\Delta x\to 0$일 때의 극한값, 즉

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이 존재할 때 이 극한값을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 순간변화율 또는 미분계수라 하고 $f'(a)$라 표시한다.

도함수는 $x=a$의 순간변화율 $f'(a)$에서 상수 a를 변수 x로 바꾸어 놓은 것과 같다.

다시 말해 도함수는 미분가능한 함수 $y=f(x)$에서 임의의 x에 대해 x에서의 미분계수

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

를 대응시키는 함수를 말하며, 함수 $f(x)$의 도함수를 y', $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$ 등으로 나타낸다.

2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$에서 $f(x)=\ln x$를 대입하면 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$

$$=\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}\times\frac{1}{x}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}$$

$$\therefore (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

▶ Tip

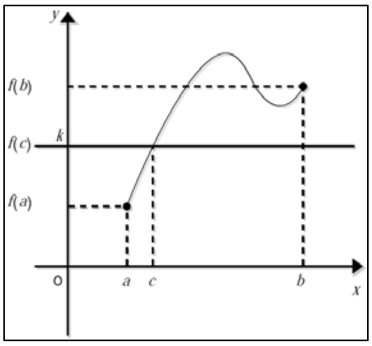
프랑스의 수학자 페르마가 쓴'곡선에 접선을 긋는 문제와 극대값, 극소값을 구하는 문제를 해결하는 방법', 베로의'함수로 나타내는 곡선 위의 한 점에서 접선을 긋는 방법'등이 뉴턴과 라이프니츠에 영향을 줬다. 라이프니츠는 평면곡선의 접선이나 법선의 연구에서 미분을 생각해냈으며, 오늘날 사용하는 기호를 도입했다. 영국의 뉴턴은 라이프니츠와는 독립적으로 물체의 운동 속도와 가속도의 연구에서 미분법을 발견해 라이프니츠보다 약 1년 늦게 발표했다. 이후 18세기에 들어와서 미적분학은 극한의 개념이 명확하지 않아 하나의 계산 기술로서만 크게 발전했다. 19세기에는 오늘날과 같은 미적분학이 확립됐다. 특히 오늘날 사용하는 여러 가지 기호들 y', $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$ 등은 모두 라이프니츠가 고안한 것으로 평균변화율에서 자연스럽게 극한의 표시로 사용됐다.

문제4. 다음 질문에 대해 답하라.
1) 중간값 정리에 대해 설명하시오.
2) 방정식 $x^3+2x+2=0$의 근은 몇 개인가? 또 실근은 몇 개 있는가?

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

중간값 정리는 직관적으로 당연한 것이지만 엄밀한 증명은 고교 교육과정에서 다루지 않는다. 그러나 지금까지 출제된 구술문제를 보면 고교 교육과정에서 다루지 않았던 주제들도 종종 등장했다. 특히 미적분 분야에서 증명없이 나오는 여러가지 정리들 중에서 로피탈의 정리, 평균치 정리, 롤의 정리 등은 그 자체로 매우 중요하고 응용범위가 넓기 때문에 잘 정리해둬야 한다.

중간치 정리는 미적분과 직접적인 관계는 없지만 구술시험에 항상 등장하는 테마다. 미분은 극한의 수학이고 극한을 논할 때는 연속함수가 등장한다. 연속함수는 중간값 정리를 만족한다. 방정식의 근을 구하거나 근의 존재성 유무를 따질 때 직관적으로 받아들이는 결과들을 수학적으로 세련되게 표현한 것이 중간값 정리다. 너무나 당연하지만 '수학적인 표현법'을 정확히 익혀둬야 하고, '수학적 증명'이란 무엇인지 다시 한 번 되새겨보자.

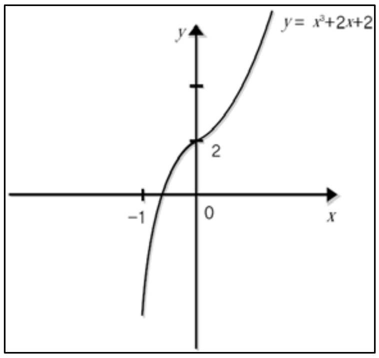


▶ 해설 및 모범답안

1) 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, $f(a) \neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k라 하면 $f(c) = k$가 되는 c가 구간 $[a, b]$에 적어도 하나 존재한다는 것이다.

2) 이 방정식은 3차 방정식이므로 3개의 근이 존재한다. 실근의 존재 유무는 적당한 값을 대입해보면 중간값 정리를 이용한다.

$f(-1) = -1 < 0$이고 $f(0) = 2 > 0$이므로 중간값의 정리에 의해 $(-1,\ 0)$ 사이에 적어도 한 개의 실근이 존재한다.



또한 주어진 방정식 $x^3 + 2x + 2 = 0$에서 $y = x^3 + 2x + 2$라고 두고 미분하면 $y' = 3x^2 + 2 > 0$이 된다. 이것은 $y = x^3 + 2x + 2$가 단조증가 함수이므로 $(-1,\ 0)$ 사이에 $x^3 + 2x + 2$의 실근이 1개 존재함을 의미한다. 나머지 두근은 허근이 된다.

문제5. 다음 질문에 대해 답하라.

1) 무리수의 상등법칙과 복소수의 상등법칙에 대해 설명하라.

2) 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 한 근이 $p + qi$이면 $p - qi$도 근이 됨을 증명하라(단 $a,\ b,\ c,\ p,\ q$는 실수).

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

공통수학에서 잠깐 등장하는 복소수 단원은 수 체계의 정의 정도만 간단하게 다룬다. 위 문제에서 등장한 복소수 상등의 법칙은 매우 기초적이지만 중요하고 수험생이 놓치기 쉬운 개념이다. 이과계열에서만 배우는 확장된 복소수 단원은 좀더 심도 깊은 내용을 다루며, 구술 면접에서 많이 등장했다.

▶ 해설 및 모범답안

1) 가. 무리수의 상등법칙

무리수의 상등법칙은 $a,\ b$가 유리수이고, $\sqrt{m}$이 무리수일 때, '$a + b\sqrt{m} = 0$의 필요충분조건은 $a = 0,\ b = 0$'이라는 것이다. 이것을 증명하면 다음과 같다.

$a + b\sqrt{m} = 0$이라고 두자. 만약 $b \neq 0$이면 $\sqrt{m} = -\dfrac{a}{b}$가 된다.

이 식은 좌변은 무리수이고 우변은 유리수이므로 모순이다.

즉 $b=0$, $a=0$이 된다. 역으로 $b=0$, $a=0$이면 $a+b\sqrt{m}=0$임은 당연하다.

나. 복소수의 상등법칙

복소수의 상등법칙은 a, b가 실수일 때 '$a+bi=0$의 필요 충분조건은 $a=0$, $b=0$'이라는 것이다. 이것을 증명하면 다음과 같다

$a+bi=0$이라 두자. 여기서 $b\neq0$이라 하면 $bi=-a$, $i=-\dfrac{a}{b}$가 된다.

이것은 허수=실수가 돼 모순이다. 그러므로 $b=0$이고, $a=0$이 된다. 그 역은 당연하다.

2) $p+qi$를 $ax^2+bx+c=0$의 근이라고 두면 $a(p+qi)^2+b(p+qi)+c=0$이다.

이 식을 잘 정리하면

$(ap^2-aq^2+bp+c)+(2apq+bq)i=0$이 된다.

여기서 a, b, c, p, q는 실수이므로 1)번 문제에서 설명한 복소수상등법칙에 의해

$ap^2-aq^2+bp+c=0$

$2apq+bq=0$이 된다.

그런데 $p-qi$를 주어진 방정식에 대입하면

$(ap^2-aq^2+bp+c)-(2apq+bq)i=0$

따라서 $p-qi$도 이 방정식의 근이 된다.

▶ Tip

복소수와 관련된 수학은 현대수학의 범주에 속하고 과학기술에 다양하게 응용된다. 16세기 유럽의 수학자들은 대수적 문제 풀이에서 음수가 제곱근을 가진다는 가정이 유용하다는 사실을 인식하기 시작했다. 음수에 대한 제곱근을 정의하기 위해서 방정식 $x^2+1=0$에 대한 근의 존재를 가정했다. 이 방정식의 근으로 탄생된 허수의 확장된 형태가 복소수다($i^2=-1$이 되고, 기호 i는 오일러에 의해 처음으로 사용됐다).

복소수(complex number)란 a와 b가 실수일 때, $a+bi$ 꼴의 수다. 여기에서 a를 실수부분(real part), b를 허수부분(imaginary part)이라 한다. 특히 $b=0$이면 실수가 된다. 18세기까지만 해도 복소수는 방정식을 푸는 과정에서 나타나는 가상적인 수(허수)로 인식돼 실재 존재하지 않는 유령과 같은 존재였다. 복소수체계를 논리적으로 규명한 사람은 영국의 해밀튼이었다. 이후 복소수는 우여곡절 끝에 수학적인 실체로 자리잡았다. 실수를 직선 위의 한 점으로 생각할 수 있는 것과 같이 복소수는 이차원 평면 위의 한 점으로 생각할 수 있다. 이와 같은 복소수의 시각화는 가우스에 의해 정립됐다.

복소수의 사용은 미적분학의 발전을 가져왔고, 복소 변수 함수론을 낳았다. 복소 변수 함수론의 발전은 19세기 수학을 대표하는 중요한 특징 중 하나다. 20세기에 와서 복소수의 사용은 전자공학, 양자역학, 유체역학 등의 영역에서 필수적인 부분으로 자리잡고 있다.

문제6. 갑과 을 두 사람은 12시와 1시 사이에 어떤 장소에서 만나기로 약속했다. 누가 먼저 약속 장소에 도착하든지 10분 이상 기다리지 않기로 했다. 두 사람이 만날 확률을 구하라.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

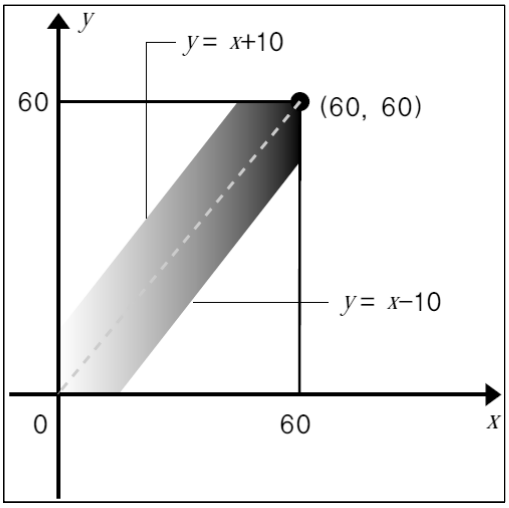
경우의 수나 확률을 구하는 문제는 수학적 사고력을 알아보는 중요한 수단이 돼왔다. 대부분의 수험생은 이 단원을 어려워하고 그나마 암기된 몇 가지 공식으로 기계적으로 해결하려 한다. 사실 확률 단원은 다른 분야에 비해 특별한 기술이나 공식이 없고 문제에 따라 패턴을 잡아야 하기 때문에 정복하기 쉽지 않다. 그러나 구술시험 준비를 위해서는 기본적인 확률의 정의와 개념을 잘 숙지하고 경우의 수를 계산하는 몇 가지 유형을 정확하게 정리해두면 충분하리라 본다.

이 문제를 통해서 기하학적 확률문제와 관련된 여러가지 사고법을 익혀두는 것도 중요한 전략이 될 것이다.

▶ 해설 및 모범답안

갑과 을이 약속 장소에 도착하는 시각을 각각 12시 x분과 12시 y분이라 하면, 두 변수 x, y를 좌표로 하는 점 (x, y)를 좌표평면 위에서 생각할 수 있다.

여기서 $0 \le x \le 60$, $0 \le y \le 60$이 되고 만나기 위해선 $|x-y| < 10$이 돼야 한다. 우측 그림처럼 기하학적 확률개념을 활용하면 확률은 $\frac{11}{36}$이 된다.



▶ Tip

인류가 탄생한 이래로 자연의 우연과 필연 문제는 계속 연구돼 왔으나 궁극적인 우연과 불확실에 대한 학문적인 접근은 이뤄지지 않았다. 16세기에 이르러서야 구체적으로 확률계산에 대한 생각을 하게 됐다. 1494년 파촐리는 자신의 저서에서 게임이 중단됐을 경우에 상금의 분배문제를 언급했다. 또한 우연의 사실을 수학화하려고 노력한 사람 중에 파스칼은 친구의 부탁으로 주사위 문제와 분배의 문제를 진지하게 다뤘으며, 이 문제를 페르마에게 전했다. 이들 두 사람은 이 문제를 명쾌하게 해결했고, 이는 확률이 수학적 이론으로서 세워지는 결정적 계기가 됐다. 이후 확률에 관련된 일련의 수학적 연구는 급속도로 진행돼 오일러, 라플라스, 가우스 등의 노력으로 수학의 한 분야로 자리잡았다.

위 문제에서 등장하는 기하학적 확률은 프랑스의 생물학자 뷔퐁에 의해 많이 연구됐다. 뷔퐁은 뉴턴의 미적분법을 프랑스에 소개했고, 일과 놀이를 통한 실험으로 확률 이론을 기하학적으로 생각했다. 특히 '뷔퐁의 바늘문제'라고 하는 확률문제는 무리수 π와 관련돼 유명해졌는데 다음과 같다.

'평면 위에 같은 간격으로 평행선을 그어서 그 간격과 같은 길이의 바늘을 무작위로 던질 때 직선과 교차할 확률은 얼마인가?'

(정답은 $\frac{2}{\pi}$).

2003년 3월-수학 면접구술고사 완벽가이드

문제1. 다음 질문에 답하라.
1) 소수란 무엇인가?
2) 소수의 갯수가 무한함을 증명하라.
3) 어떤 자연수 n이 소수인지 아닌지 어떻게 알 수 있을까?

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

우리가 흔히 쓰는 1, 2, 3 … 등의 자연수 또는 정수에 관한 연구로부터 시작된 '정수론'은 말 그대로 '수'에 대한 학문 그 자체이고 수학 역사를 지배해 왔다. 대부분의 학생들은 약수, 배수, 소수 등과 같은 낱말의 정의나 개념은 초등학교때부터 배워왔기 때문에 매우 익숙하지만, '정수론'을 체계적으로 공부하지 않았기 때문에 그 심오하고 아름다운 '수'의 세계를 느낄 수 없다.

수능시험에서 자주 등장하는 '정수론'을 단편적으로 암기해서는 그 본질을 터득하기가 어렵고, 구술시험에서 원론적인 질문에 매끄럽게 대답할 수 없다. 이 문제를 통해서 '정수론'의 핵심 주제인 '소수'에 관한 여러가지 개념과 증명의 기법을 정리해 두고, 소수가 어떻게 현대수학의 영역까지 지배하고 있는지 각자 고민해 보자.

▶ 해설 및 모범답안

1) 소수란 1과 자기자신 외에는 약수가 없는 양의 정수를 말한다. 예를 들면 2, 3, 5, 7 … 등과 같은 수는 소수이고, 소수가 아닌 수를 합성수라 한다.

2) 소수의 개수를 유한하다고 가정하고, 그 유한 개의 소수를 $P_1, P_2, \cdots P_n$ 이라 두자. 이제 다음과 같은 수 $P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_{n+1}$ 을 생각해보면 이 수는 분명 1이 아니고, 소수 $P_1 \cdots P_n$ 중 어떤 수로 나누어도 나머지가 1이다.

   즉 P는 소수 $P_1, \cdots, P_n$을 약수로 가지지 않음으로 P는 소수이고, $P_1 \cdots P_n$과는 다르다. 이것은 모순이다. 그러므로 소수의 갯수는 무한하다.

3) $\sqrt{n}$보다 작거나 같은 모든 소수가 n을 나누지 않으면 n은 소수가 된다(예를 들어 $\sqrt{2003}$보다 작거나 같은 소수 2, 3, 5, 7, … 41, 43은 모두 2003의 약수가 아니므로 2003은 소수다).

   증명은 다음과 같다.

   n을 합성수라고 가정하면 $n = n_1, n_2$가 되는 1보다 큰 자연수 n_1, n_2가 존재한다. 여기서 n_1, n_2를 나누는 소인수를 각각 P_1, P_2라고 두면 $P_1 \le n_1$, $P_2 \le n_2$, $P_1\,P_2 \le n_1\,n_2 = n$이어야 한다. 이것은 n보다 작거나 같은 모든 소수가 n을 나누지 않는다는 가정의 모순이다.

▶ 확장문제
자연수 n과 $n!$ 사이에는 항상 소수 P가 존재함을 증명하라(단 $n > 2$).

▶ Tip

소수(素數)는 영어로 prime number라고 하는데, 소(素)라는 글자는 '하얀색' '순수' '근원적인' 의미를 가지고 있다. 시인 '김소월'의 이름이나 화학과 물리학에서 나오는 '원소'나 '소립자'의 '소'는 모두 같은 글자다. 여기에는 '하얀색'과 '순수' '근원' 등의 뜻이 내포돼 있다. 소수는 화학에서 나오는 기본 원소와 비슷한데 1과 자기자신 외에는 약수가 없다는 뜻이 바로 근원적으로 존재한다는 의미가 된다. 6이라는 분자(숫자)는 원소 2와 원소 3의 결합(곱셈)에 의해 탄생된 것으로 (6=2×3) 6의 실체는 소수 2와 소수 3이다.

과학자가 '원자'와 '소립자'에 매혹되듯이 수학자는 '소수'에 강한 애착을 갖기 마련이다. 소수의 개념이 정립된 것은 고대 그리스 시대 피타고라스로 알려져 있는데 소수가 무한함을 증명한 사람은 유클리드이다.

17세기 페르마에 의해 '소수'의 연구는 '정수론'이라는 수학의 분야로 자리잡고, 가우스에 의해 크게 발전한다. 가우스는 '정수론'을 수학의 여왕으로 추대할 정도로 매우 중요시 했는데, 현대 과학의 핵심적인 이론의 기본이 되고 있다. 특히 컴퓨터 시대에 있어서 정수론은 암호학으로 새로이 주목받고 있다.

문제2. a, b, c가 실수이고 $a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$, $abc>0$이면 a, b, c는 모두 양수임을 증명하라.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

수학적 증명은 귀류법, 수학적 귀납법 등 여러가지 논리적으로 완벽하다고 인정되는 형식적 체계속에서 이뤄지기도 하고, 다양한 연역적 테크닉을 통해 이뤄지기도 한다. 구술시험에서 증명문제는 기교적인 접근 보다는 원론적인 접근을 선호한다. 이것은 수능시험의 단점을 보완하기 위한 측면도 있지만, '암기력' 보다는 '사고력'을 중요시하는 구술시험의 특성 때문이기도 하다.

이 문제를 통해서 다양한 증명의 기술을 정리해 둔다면 수학의 힘이 강해질 것이다.

▶ 해설 및 모범답안

먼저 $a<0$이라고 두면 $abc=a(bc)>0$에서 $bc<0$이다. $ab+bc+ca=bc+a(b+c)>0$이므로

$$\therefore\ a(b+c)>-bc>0$$

여기서 $a<0$이라고 가정했으므로 $b+c<0$이다.

그런데 $a+b+c=a+(b+c)<0$이 되어 $a+b+c>0$과 모순이 된다.

$$\therefore\ a>0$$

같은 방법으로 $b>0$, $c>0$이 되는 것도 증명할 수 있다.

위 방법은 기본적으로 '귀류법'을 이용해 간단하게 증명하는 것인데 약간의 기교를 사용하면 다음과 같이 증명할 수도 있다.

먼저 $a+b+c=p$, $ab+bc+ca=q$, $abc=r$이라 두면 p, q, r은 실수이고 모두 양수이다.

t에 대한 방정식 $t^3-pt^2+qt-r=0$에서 근과 계수의 관계를 고려하면 a, b, c는 위 방정식의 근이 된다.

만약 $t^3-pt^2+qt-r=0$의 근 t가 음수라고 가정하면 $t^3<0$, $-pt^2<0$, $-r<0$이 되어 $t^3-pt^2+qt-r=0$이 될 수 없다.

그러므로 위 방정식의 근 $a,\ b,\ c$는 모두 양수다.

▶ 확장 문제 : $a,\ b,\ c$가 모두 0과 1 사이의 수일 때 $abc+2>a+b+c$임을 증명하라.

문제3. 다음 질문에 답하라.
1) 산술·기하 평균에 대해서 설명하라.
2) 직사각형의 둘레를 l, 면적을 S라 두면 항상 $\frac{l^2}{S} \ge 16$이 성립함을 증명하라.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

교과서에 나오는 중요한 절대 부등식은 산술·기하 평균 부등식($\frac{a+b}{2} \ge ab,\ \ a, b$는 양수)과 조쉬·쉬바르쯔 부등식 ($(a^2+b^2)(x^2-y^2) \ge (ax+by)^2$)이 있다.

위 부등식의 증명은 별로 어렵지 않지만 모두 암기해 둬야 한다. 수능시험과 구술시험에서 단골메뉴로 등장하는 최대·최소 문제를 푸는 테크닉으로 매우 중요하고 '사고력' 신장에도 도움이 되는 절대 부등식의 의미를 깊이 새겨야 겠다.

▶ 해설 및 모범답안

1) 대수적 증명

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{2} \ge 0$$

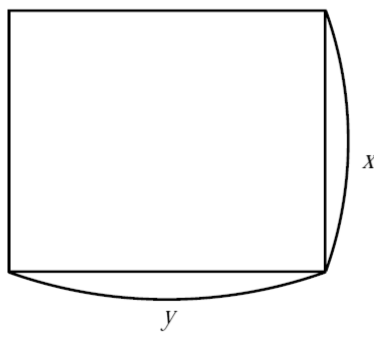
$$\therefore \frac{a+b}{2} \ge ab(\text{등호는 } a=b\text{일 때 성립})$$

여기서 산술평균은 등차 중앙과 같고 일상적인 의미의 평균이다. 기하평균($\sqrt{ab}$)은 가로, 세로가 a, b인 직사각형과 면적이 같은 정사각형의 한변의 길이로 주어진다.

산술·기하 평균 부등식의 직관직 증명은 아래 그림과 같다.

먼저 정사각형의 4변을 a와 b로 똑같이 나눈 다음 작은 정사각형을 버리고 생각해 보자.

2) 직사각형의 변의 길이를 각각 $x,\ y$라고 하자.



$\therefore$ 둘레 $l=2(x+y)$ 　　면적 $S=xy$

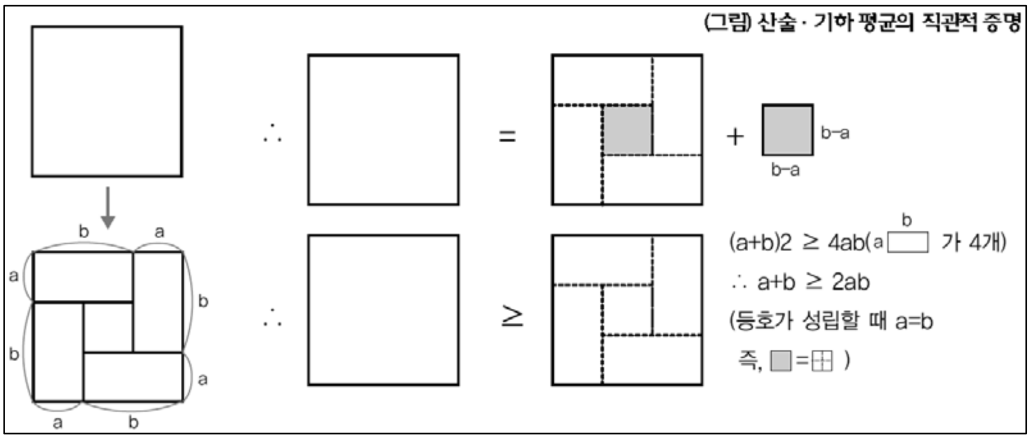
산술·기하 평균 부등식에 의해

$$\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$$

$$\therefore \frac{l}{4} \ge S \qquad \therefore \frac{l^2}{16} \ge S$$

$$\therefore \frac{l^2}{S} \ge 16$$

(등호가 성립할 때 $x=y$, 즉 정사각형일 때)



▶ 확장 문제 : 양수 a, b가 $a+b=1$을 만족할 때 $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2$의 최소값을 구하라.

문제4. 다음 질문에 답하라(2002년 서울대 공대). $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x>0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$ 일 때 1) $y=f(x)$는 $x=0$에서 미분가능함을 보이고 도함수를 구하라. 2) $\mathrm{A}=\displaystyle\int_0^1 f(t)f(1-t)dt$라 둘 때 $g(x)=\dfrac{1}{\mathrm{A}}\displaystyle\int_0^x f(t)f(1-t)dt$의 그래프의 개형을 그려라.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

미적분에 관한 구술문제로 가장 어려운 것 중 하나로 꼽히는 문제다. 서울대 공대에 지망했던 학생들이 처음 이 문제를 보고 매우 당황했다고 한다.

미분이란? 적분이란?과 같은 단순 질문이 아니라, 복잡한 테크닉을 요구하는 이 문제는 우리에게 시사하는 바가 크다. 미적분의 기본적인 원리뿐 아니라 실질적인 기술을 익혀두지 않는다면 본고사식 구술문제를 정복하기 힘들 것이다. 수능이 쉽게 출제되더라도 평소에 미적분 부분은 심도있게 공부하는 자세를 길러야겠다.

▶ 해설 및 모범답안

1) $x=0$에서 미분가능성을 알아보자.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$

여기서 좌극한, 우극한을 보면

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)}{h}=0\text{이고 } \lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h}$$

여기서 $\dfrac{1}{h}=t$로 두면

$$\lim_{h\to+0}\frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h}=\lim_{h\to\infty}\frac{t}{e^{t}}=0$$

$\therefore\ f'(0)=0$ ($x=0$에서 미분가능)

$x>0$일 경우는 $f'(x)=\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$

$x<0$일 경우는 $f'(0)=0$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} & x>0\end{cases}$$

2) i) $x\le 0$일 때

$$g(x)=\frac{1}{A}\int_0^x f(t)f(1-t)\,dt$$

$$=-\frac{1}{A}\int_{\pi}^0 f(t)f(1-t)\,dt$$

$=0$ ($\because t\le 0$에서 $f(t)=0$)

ii) $0<x<1$일 때

$$g(x)=\frac{1}{A}\int_0^x f(t)f(1-t)\,dt>0$$

($\because 0<x<1$이면 $0<1-t<1$이므로 $f(t)>0,\ f(1-t)>0$)

iii) $x=1$일 때

$$g(1)=\frac{1}{A}\int_0^1 f(t)f(1-t)\,dt=\frac{A}{A}=1$$

iv) $x>1$일 때

$$g(x)=\frac{1}{\mathrm{A}}\int_0^x f(t)f(1-t)dt$$

$$=\frac{1}{\mathrm{A}}\int_0^1 f(t)f(1-t)dt+\frac{1}{\mathrm{A}}\int_1^x f(t)f(1-t)dt$$

$=1+0$ ($\because t<1$이면 $1-t<0$이므로 $f(1-t)=0$)

$=1$

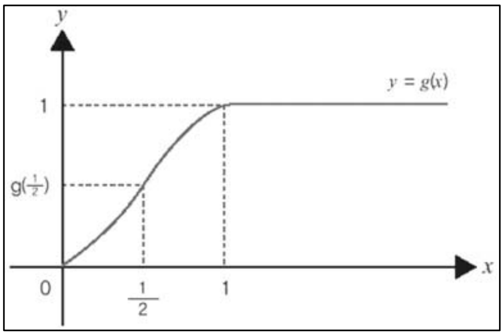
여기서 $g'(x)=\dfrac{1}{\mathrm{A}}f(x)f(1-x)\ge 0$

$$g''(x)=\frac{1}{\mathrm{A}}\{f'(x)f(1-x)-f(x)f'(1-x)\}$$

$$\therefore g''\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

$\therefore\left(\dfrac{1}{2},\ g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$은 변곡점이다.

위 사실을 종합해서 그래프를 그리면 다음과 같다.



▶ 확장 문제

$f(x)=|x-1|$일 때 $g(t)=\int_0^{x-1} f(x)dx$라 두자.

$y=g(t)$의 그래프를 그려라.

문제5. A는 출근할 때 반드시 버스, 지하철, 또는 택시를 탄다. 그런데 이 사람은 버스를 타고 출근한 다음날은 택시를 타고, 택시를 타고 출근한 다음날은 버스를 $\frac{2}{3}$, 지하철은 $\frac{1}{3}$의 확률로 이용하고, 지하철을 탄 다음날은 버스나 택시를 같은 확률로 이용한다.
1) 만약 A가 오늘 아침 주사위를 던져서 1이 나오면 버스를, 소수가 나오면 택시를, 그 이외의 눈이 나오면 지하철을 이용한다. A가 내일 아침 출근할 때 버스, 지하철, 택시를 이용할 확률을 각각 구하라.
2) 내일 A가 출근할 때 드는 교통비의 평균과 분산을 구하라(단, 버스비와 지하철 요금은 600원이고, 택시비는 3000원이다).

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

확률과 통계 단원은 학생들이 가장 어려워 하는 것 중 하나다. 확률은 많은 문제를 풀어보고 유형을 익히면서 터득해야 되지만 모든 문제가 '추리'의 기본적 사고를 필요로 하기 때문에 많은 훈련과 끈기가 필요하다.

확률을 바탕으로 하는 통계학은 그 자체로 수학과 독립되는 영역이지만 고교과정에서는 기본적인 개념을 이해하고 있다면 별 무리없이 정복할 수 있다. 이상적인 경우에는 확률변수를 설정하고, 각각의 확률을 구해서 기대값과 표준편차를 구하는 과정을 거치면 된다. 하지만 이것은 확률 부분의 완전한 숙달이 동반되지 않는다면 매우 어려운 것이다. 이 문제를 통해서 기본적인 용어나 개념을 숙지하면서 구술시험에 대비해야겠다.

▶ 해설 및 모범답안

1) 오늘 출근할 때 각 교통기관을 이용할 확률은 다음과 같다.

버스 $\frac{1}{6}$, 지하철$\frac{1}{3}$, 택시 $\frac{1}{2}$

내일 아침 출근할 때 각 교통기관을 이용할 확률은 다음과 같다.

버스 : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$

지하철 : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

택시 : $\frac{1}{6}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

2) 교통비를 확률변수 x라 두고 평균 $\mathrm{E}(x)$와 분산 $\mathrm{V}(x)$를 구하면 다음과 같다.

$\mathrm{E}(x)=\Sigma Xi\,Pi$

$$=600\times\frac{1}{2}+600\times\frac{1}{6}+3000\times\frac{1}{3}$$

$=1400$(원)

$$\mathrm{V}(x)=\mathrm{E}(x^2)-\{\mathrm{E}(x)\}^2$$

$$=600^2\times\frac{1}{2}+600^2\times\frac{1}{6}+3000^2\times\frac{1}{3}-(1400)^2$$

$=116\times10^4$(원)

▶ **Tip**

statistis(통계학)의 어원은 라틴어 stato(state)에서 유래했다. state의 state를 알아보는 것(국가의 상태)이라는 의미가 내포된 statistics는 국가의 경제 상태를 알아보는 학문이라는 뜻에서 오늘날 '통계학'으로 자리를 잡았다.

17, 18세기까지 유럽에서는 주로 국가의 정치상황(state)과, 인구, 경제, 지리를 포함하는 포괄적인 '일'이나 '분야'를 총칭하는 statistics가 19세기 이후에 수학의 독립된 한 분야로서 '완전한 형식'을 갖게 됐다.

통계학에서 의미하는 평균과 표준 편차 등의 개념에 포함된 다양한 수치 변화는 복잡한 데이타들의 유형을 분석하고, 숨겨져 있는 데이타의 본질까지도 유추할 수 있게 만든다.

그러나 여론 조사 등에서 사용되는 통계학 수법은 수학적으로는 문제가 없지만, 자칫 우리의 직관을 기만하거나 왜곡을 가져올 수도 있다.

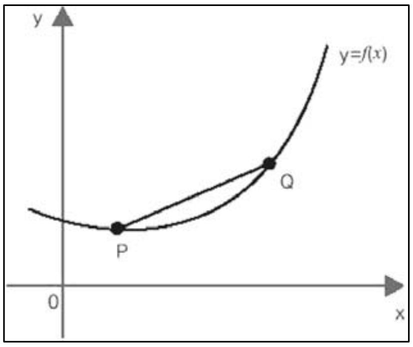
윈스턴 처칠은 "세상에는 세 종류의 거짓말이 있는데, 거짓말, 새빨간 거짓말, 통계가 그것이다"라고 말했다. 이것은 결정론과 비결정론 사이의 혼돈에 대한 처질의 상징적 표현일 수도 있지만 통계학이 갖는 원초적 위험성을 지적한 것일 수도 있다. 어떤 회사에서 99명의 월급이 대략 100만원 정도이고 한 명의 월급이 1억이라면 평균 임금이 매우 높은 모범적 회사라고 할 수 있겠는가.

2003년 04월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

문제1. 다음 질문에 답하라.
1) 곡선의 오목, 볼록성과 미분과의 관계를 설명하라.
2) $a<x<b$에서 $f''(x)<0$이면 y는 $a<x<b$에서 감소함수임을 증명하라.

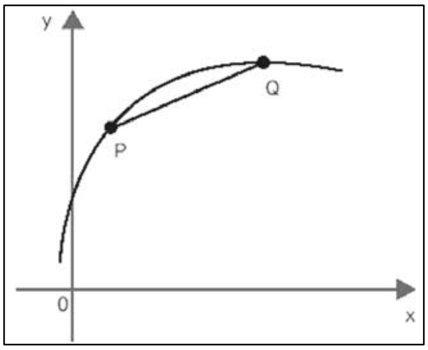
▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

곡선의 볼록성과 오목성과 관련된 2계도함수와의 관계를 이해하는 것은 곡선의 개형을 파악하는 것과 밀접한 관계를 갖는다. 미분을 한 번 한 값이 양일 경우, 즉 y′>0일 경우 곡선(또는 함수의 그래프)이 증가상태에 있다는 것은 미분의 정의를 통해 쉽게 알 수 있다. 그러나 한 번 더 미분한 2계도함수 값을 조사함으로써 좀더 자세한 곡선의 정보를 얻을 수 있다. 특히 물리학적 측면에서는 2계도함수가 가속도의 정보를 제공하는 훌륭한 도구이며, 미분을 통해서 어떤 물체의 운동에 관한 수학적 묘사를 완벽하게 할 수 있다.



아래로 볼록

미적분과 관련한 중요한 테마로 자리 잡고 있는 2계도함수 부분을 잘 이해해 둔다면 구술시험에서 큰 힘을 발휘할 수 있을 것이다.

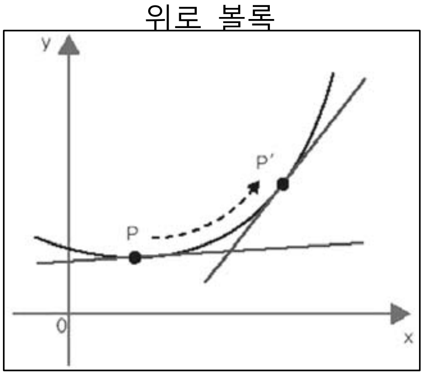


위로 볼록

▶ 해설 및 모범답안

1) 2차함수를 배울 때 아래로 볼록, 위로 볼록을 직관적으로 이해하면서 그 형태를 배운다. 곡선의 오목 볼록성의 수학적 정의는 다양하게 표현되지만 여기서는 아주 간단하게 설명하겠다. 어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 두 점 P, Q에 대해 PQ를 잇는 곡선의 호가 선분 PQ보다 아래에 있을 때, 함수는 그 구간에서 아래로 볼록이라고 한다. 물론 그 반대의 경우는 위로 볼록이라고 한다.

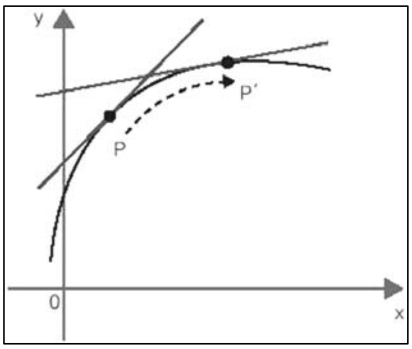
아래로 볼록한 곡선의 경우 $f'(x)>0$이 되는데 그 이유는 다음과 같다.



접선의 기울기가 증가상태

옆 그림처럼 P에서 P'로 움직일 때 P에서의 접선의 기울기보다 P'에서의 접선의 기울기 $(f'(P'))$가 더 크다.

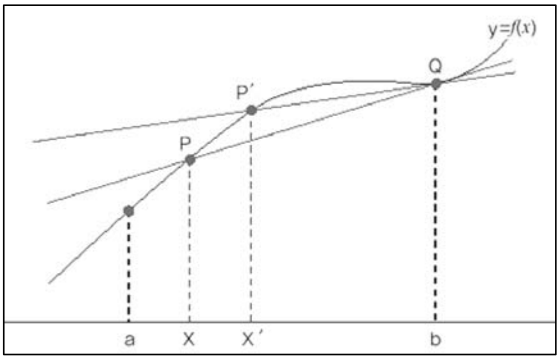
이것은 $(f'(x))$가 증가한다는 것을 의미하므로 $f''(x)>0$이 된다. 위로 볼록한 경우는 이와 반대로 해석하면 $f''(x)<0$이 되는 것을 쉽게 알 수 있다.



접선의 기울기가 감소상태

2) $a<x<b$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록한 함수이다. 아래 그림에서 $y=\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$라 두고 y의 의미를 직관적으로 파악하면 감소함수임을 알 수 있다.

이때 y는 선분 $\overline{PQ}$의 기울기를 의미하는데 x를 x'로 증가시키면 $\overline{PQ}$의 기울기보다 $\overline{P'Q}$의 기울기가 감소함을 알 수 있다.



이것은 $a<x<b$에서 곡선이 위로 볼록하기 때문에 일어나는 현상이다.

이것의 엄밀한 증명은 다음과 같다.

$y=\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$를 미분하면

$$y'=\frac{f'(x)(x-b)-(f(x)-f(b))}{(x-b)^2}$$

여기서 분자를 $F(x)$라 두고 미분하면

$$F'=f'(x)(x-b)+f'(x)-f'(x)$$

$$f'(x)(x-b)$$

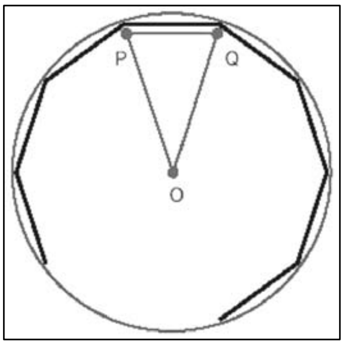
$a<x<b$에서 $f'(x)<0,\ x-b<0$이므로 $F'(x)>0$

따라서 $F(x)$는 증가함수가 되므로 $F(x)<F(b)=0$

$\therefore y'<0$이 되므로 y는 $a<x<b$에서 감소한다.

▶ 확장 문제 : 변곡점과 미분과의 관계를 설명하라.

문제2. 반지름의 길이가 r인 원의 넓이가 πr^2임을 구분구적법과 적분법을 이용해 설명하라.

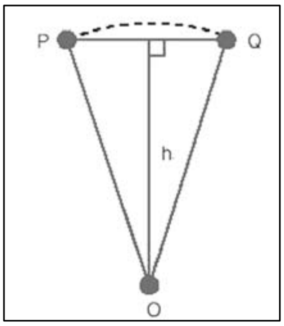


▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

구분구적법과 관련된 적분의 기초와 원리를 묻는 문제들이 구술시험에서 많이 출제됐다. 이런 문제들은 수능에서 다룰 수 없기 때문에 구술시험이 원하는 유형으로 분류된다. 처음 이런 문제가 등장했을 때 매스컴에서는 문제 해결력과 창의력을 측정하는 문제라고 격찬했다. 그러나 엄밀하게 말하면 구분구적법에 관한 여러가지 테크닉을 익히는 것은 문제 해결력이나 창의력과 상관없다. 다만 계산에 치중한 미적분 분야 속에서 역사적인 의미를 담고 있는 구분구적법 문제를 잘 이해하고 정리함으로써 적분의 발상과 아이디어를 발견할 수 있다는데 의의가 있다. 이런 문제는 수학적 호기심과 약간의 노력으로 쉽게 정복할 수 있다. 구술시험에는 기본 개념과 원리에 관한 기초적 아이디어를 묻는 문제가 자주 출제되므로, 이런 문제들을 잘 정리해둬야 한다.

▶ 해설 및 모범답안

가. 구분구적법을 이용한 설명.



어떤 도형의 넓이나 부피를 구할 때, 그 도형을 여러 개의 간단한 도형(직사각형, 원기둥)으로 세분해 세분된 기본도형의 넓이나 부피의 합으로 근사값을 구하고, 이 근사값의 극한값으로 넓이나 부피를 구하는 방법을 구분구적법이라고 한다. 이 문제에서는 원에 내접하는 정다각형으로 접근하는 방법을 이용해보겠다.

먼저 반지름 r인 원에 내접하는 정 n각형의 넓이를 S_n이라고 하면

$$S_n = n \times \triangle OPQ = n \times \frac{\overline{PQ}h}{2}$$

여기서 $n\overline{PQ}$는 정 n각형의 둘레 길이가 된다.

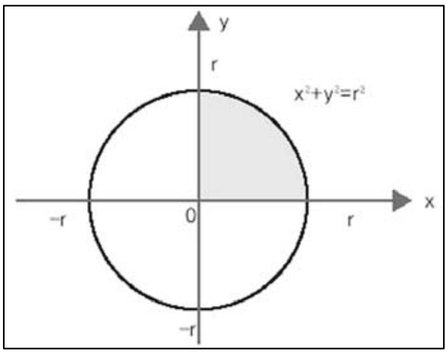
이것을 l_n이라 두면 $l_n = n\overline{PQ}$이고 $S_n = \frac{h}{2}l_n$

원의 면적을 S_n의 극한값이라 생각하면

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{h}{2}l_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} l_n \cdot h$$

$\lim_{n\to\infty} l_n$은 원의 둘레의 길이가 되므로 $2\pi r$이고, $\lim_{n\to\infty} h = r$이다.

$$\therefore S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}r \times 2\pi r = \pi r^2$$



먼저 빗금친 부분의 면적을 구하면

$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$인데 치환적분을 이용하면 그 값을 구할 수 있다.

즉, $x = r\sin\theta$로 두면 $dx = r\cos\theta d\theta$이고

$$\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - r^2\sin^2\theta} = r\cos\theta$$

(여기서 $x : 0 \to r$일 때 $\theta : 0 \to \frac{\pi}{2}$)

$$\therefore \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}r^2$$

$\therefore$ 구하는 원의 면적은 $4 \times \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \pi r^2$

▶ 확장 문제 : 삼각뿔의 부피를 구분구적법을 이용해 구하라.

▶ Tip

구분구적법(mensuration by parts)을 쉽게 표현하면 어떤 도형의 면적을 모자이크처럼 조각을 내 그 조각의 면적을 합해서 구한다는 것이다. 아주 간단한 발상이지만 교과서에 나오는 쉬운 문제들조차 계산과정은 복잡하고, 이런 과정을 통해서 일반적인 도형의 면적(또는 부피)을 구하는 것은 거의 불가능하다. 중요한 것은 이런 아이디어 속에서 뉴턴의 적분법이 탄생했다는 점이다.

역사적인 관점에서 보면 도형의 면적(부피)을 구하는 방법은 이미 고대 수학자에 의해 창안된 '실진법'에서 시작됐다. 실진법이란 도형의 내부를 다각형으로 근사화하고 이 다각형을 여러개의 삼각형으로 나눈 뒤, 이 삼각형 면적의 합을 구하면 주어진 도형의 대략적인 면적이 된다. 이때 각각의 삼각형 면적을 점점 작게 하면 삼각형 면적들의 합이 원래의 도형 면적에 점점 가까운 값이 될 것이라는 원리다. 그러나 실진법은 도형의 면적을 구하는 방법을 제시할뿐 이렇게 계산했을 때 그 결과가 유일한 것이라는 점은 언급하지 않고 있다.

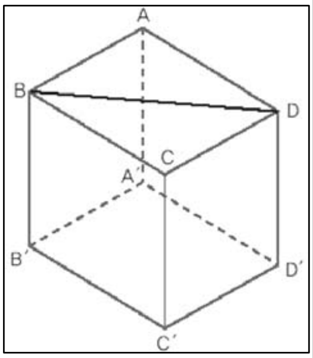
타당성에 관한 문제는 아르키메데스에 의해 원의 면적을 구하는 과정에서 제시됐다. 그의 이론은 매우 현대적이라고 평가되고 있다. 그러나 이 방법은 급수의 극한을 다루는 해석적 방법이다. 따라서 매우 복잡하다. 뉴턴과 라이프니츠에 의해 발견된 미적분법은 구분구적법을 대수적으로 취급할 수 있게 한다. 물론 이렇게 할 수 있게 된데는 데카르트의 해석기하학의 도움이 컸다.

문제3. 다음 질문에 답하라.

1) 벡터의 내적이란 무엇인가?

2) $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$라 하면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$임을 증명하라.

3) 그림의 정육면체 ABCDA´B´C´D´에서 $\overline{BD}\perp\overline{CA}$임을 증명하라.

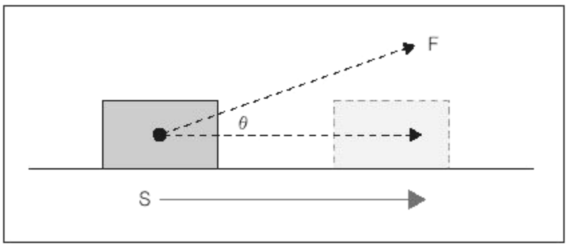


▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

구술시험에서는 벡터의 원리와 개념보다 그 응용을 중요시 여기는 경향이 있다. 스칼라와 벡터의 차이점을 구분할 수 있어야 하고, 벡터를 이용해 공간적인 문제를 해결할 수 있는 능력을 길러야 한다. 이 문제는 벡터를 기하학에 응용한 간단한 예다. 마지막 문제는 아주 논증적이고 고전적인 기하학을 이용해 증명할 수도 있다. 이 문제를 통해 기본적인 벡터 응용법을 익혀두자.

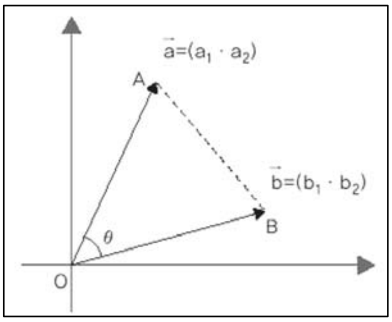
▶ 해설 및 모범답안

1) 벡터의 내적을 한마디로 설명하기는 쉽지 않다. 내적의 정의는 물리학에서 등장하는 일을 계산하기 위해 고안된 일종의 곱셈이라고 생각하는 편이 좋다.



위 그림에서 힘 F를 작용했을 때 물체가 S만큼 이동한 경우, 움직이는 방향의 F의 성분은

|F|cosθ가 된다. W=F·S에서 W=|F|cosθ×|S|가 된다(여기서는 단순한 계산을 위해 벡터 개념을 빼고 표시했다). 움직이는 방향과 힘의 방향에 따라 W=F·S가 변하므로 단순히 일은 힘×거리라고 할 수 없다. 따라서 내적을 정의해야 연산이 쉬워지고 우리의 직관을 수식에 투영할 수 있다. 즉 힘과 변위를 벡터로 표현하고 벡터 간의 일종의 곱셈으로 내적을 정의해 새로운 양(스칼라)의 탄생을 유도한다. 다시 말해 $W=\vec{F}\bullet\vec{S}=|\vec{F}|\;|\vec{S}|\cos\theta$라 정의하면 항상 $\vec{F}\bullet\vec{S}$로 W를 계산할 수 있다.



2) $A=(a_1, a_2)$, $B=(b_1, b_2)$라 두고 이 점에 해당하는 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 두자.

$\triangle OAB$에서 코사인 제2법칙을 적용하면

$$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\bullet\overline{OB}\cos\theta$$

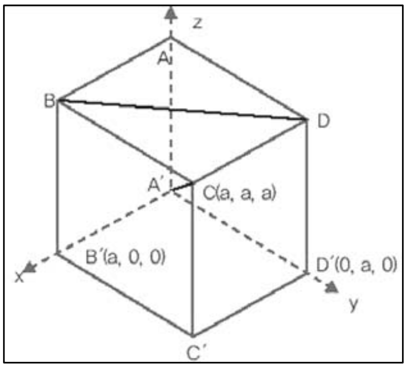
여기서 $\overline{AB}^2=(a_1-b_2)^2+(a_2-b_2)^2$

$$\overline{OA}^2=a_1^2+a_2^2$$

$$\overline{OB}^2=b_1^2+b_2^2$$

$$\overline{OA}\bullet\overline{OB}\bullet\cos\theta=\vec{a}\bullet\vec{b}$$

이 값을 대입하면 $\vec{a}\bullet\vec{b}=a_1\bullet b_1+a_2\bullet b_2$가 된다.



3) 그림에서 A'를 원점 O로 두고 직각 좌표계로 생각해 각 꼭지점을 좌표로 표시한 후 벡터로 계산해 보자.

정육면체의 한 변의 길이를 a라 두면

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B'D'}=(-a,\ a,\ O),\ \overrightarrow{A'C}=(a,\ a,\ a)$$

$$\overrightarrow{BD}\bullet\overrightarrow{A'C}=a^2-a^2=0$$

$\therefore$ $\overrightarrow{BD}$와 $\overrightarrow{A'C}$의 내적이 0이므로 $\overline{BD}\perp\overline{A'C}$이다.

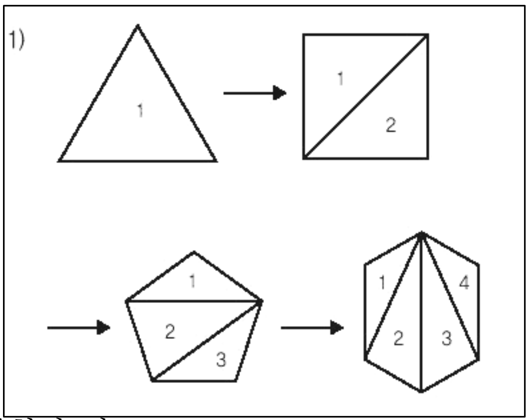
▶ 확장 문제 : 삼각형의 세 중선은 한 점에서 만남을 벡터를 이용해 증명하라.

문제4. 다음 질문에 답하라.
1) 정 n각형의 내각의 합을 구하라.
2) 합동인 정다각형으로 빈틈없이 겹치지 않게 평면을 채울 수 있는 가능한 정다각형을 모두 구하여라.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

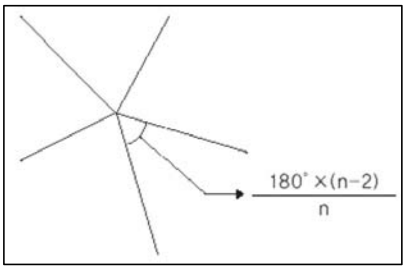
이런 문제는 추리법과 대수적 기술을 모두 알고 있어야 풀 수 있다. 다각형 내각의 합은 몇 개의 경우를 관찰함으로써 귀납적으로 알아 낼 수 있다. 이런 사고 과정을 익히는 것이야말로 수학적 힘을 기르는 최고의 방법이고 구술시험에서만 평가할 수 있다. 이 문제를 통해 귀납적 추리법을 익혀 두자.

▶ 해설 및 모범답안



1) 오른쪽 그림처럼 몇 가지를 실험 해보면 일반적인 경우를 추리할 수 있다. 즉 정 n각형은 삼각형 n−2개로 나눌수 있고 삼각형 내각의 합은 180°이므로 n각형의 내각의 합은 180°×(n−2)이다.

2) 정 n각형이 x개 모여 빈틈없이 평면을 채운다고 가정하자.



1)에서 구한 내각의 총합이 $180^{\circ}\times(n-2)$이므로 정각형의 한 내각은 $\dfrac{180^{\circ}\times(n-2)}{n}$이 된다.

문제의 조건처럼 정 n각형이 x개 모여 평면을 빈틈없이 채우면 $\dfrac{180^{\circ}\times(n-2)}{n}\times x=360^{\circ}$가 된다.

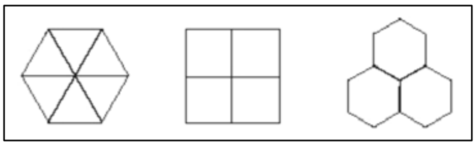
이 부정 방정식을 풀면 다음과 같다.

$$\frac{(n-2)}{n}\times x=2$$

$$xn-2x-2n=0$$

$$(x-2)(n-2)=4$$

n과 x는 자연수이므로 $(n,\ x)=(3,\ 6),\ (4,\ 4),\ (6,\ 3)$



즉 $n=3,\ n=4, n=6$일 때만 가능하다. 각각의 경우에 나타나는 모양은 오른쪽과 같다.

▶ 확장 문제 : 벌집의 구조는 왜 육각형 입체와 유사한가?

2003년 05월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

문제1. 다음 무한급수의 수렴 · 발산을 조사하라.

1) $S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$

2) $S=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

3) $S=\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{3}+\sin\frac{1}{4}+\cdots+\sin\frac{1}{n}+\cdots$

• 출제 의도와 구술 ADVICE

무한급수의 극한은 다룰 때는 부분합을 정의하고 그 부분합의 극한을 구해서 무한급수의 극한값으로 한다. 이 문제를 통해 등비수열과 같이 공식에 의해 쉽게 결정되지 않는 수열의 급수에 관한 기교를 익힐 수 있다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\zeta(s)$라 두면 위 문제와 관련해 좀더 체계적인 정리를 할 수 있다. 여기서는 $\zeta(1)$과 $\zeta(2)$의 값을 구하는 방식으로 전체 무한급수의 수렴·발산 여부를 조사해보자. 좀더 적극적인 학생은 $\zeta(2)$과 $\zeta(3)$의 정확한 값을 계산해도 상관없으나, 이 과정은 무척 까다로울 것이다.

물론 위 무한급수가 수렴할 경우 그 수렴값을 구할 필요는 없다. 특히 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$일 경우에 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산하는 대표적인 수열에 관해 익숙해지도록 평소 연습을 많이 해 극한의 오묘함을 다시 한 번 감상해보자.

▶ 해설 및 모범답안

1) $n\geq 2$일 때 분명히 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}$이 성립하고 $\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$이다.

$$\therefore\ S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=2$$

$\therefore$ S는 수렴한다고 볼 수 있다.

※ 사실 제n항까지의 부분합 S_n이 증가하고 $S_n<2$라는 점만을 이용해 전체 수열이 어떤 값에 수렴한다는 것을 엄밀하게 증명하는 과정은 고교수준을 넘는다.

2) $S=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

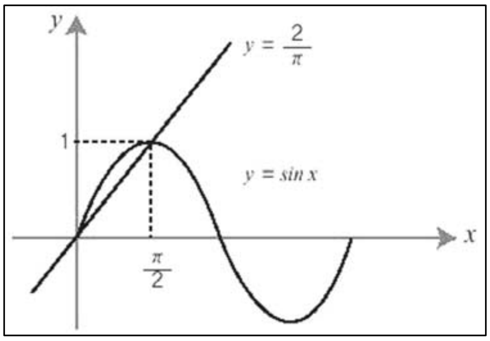
$$S=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16})+\cdots>$$

$$1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{16}+\cdots\frac{1}{16})\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=1+\lim_{k\to\infty}\frac{k}{2}=\infty$$

$\therefore$ S는 발산한다.

3) 오른쪽 그림을 참조하면 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{2}{\pi}x<\sin x$이다.



$\therefore$ $\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}<\sin\frac{1}{n}$

$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}<\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$

여기서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$은 발산하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$도 발산한다.

$\therefore$ $S=\sin1+\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{3}+\sin\frac{1}{4}+\cdots+\sin\frac{1}{n}\cdots$도 발산한다.

▶ 확장 문제

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$은 수렴하는가 발산하는가?

▶ Tip

초월적인 느낌인 '무한'을 유한한 인간이 받아들이기엔 힘들다. 또한 무한과 유한의 존재를 정확하게 인식한다고 해도 그것을 연결하는 다리를 쉽게 찾을 수 없다. 고교과정에서 배우는 수열과 극한의 단원은 미적분을 배우기 위한 하나의 수단일뿐, 이를 통해 극한의 진정한 의미를 느끼기는 힘들다. 무한대에서 일어나는 여러가지 결과들은 생각보다 복잡하고 오히려 철학적인 느낌마저 들 수 있다. 극한에 대한 의문과 호기심 그리고 무의식적 공포의 역사는 곧 인류 지성의 역사라고 해도 과언이 아니다.

고대 그리스 시대부터 극한은 정확한 개념이 파악되지 않은 채 감각적으로 이해됐고 부지불식간에 수학의 기법으로 자리잡아 왔다. 아르키메데스는 원주율을 구하기 위해 원에 내접하는 다각형 수를 무한근사법으로 구했고, 극한의 절정인 미적분이 탄생하기까지 넓이나 길이를 구하기 위해 여러가지 극한의 기법이 이용돼 왔다.

17세기 뉴턴과 라이프니츠는 무한과 극한의 정확한 이해를 바탕으로 미적분을 개발했고, 복잡한 극한 계산을 쉽게 할 수 있었다. 그러나 당시의 극한 개념은 수학적으로 완전히 정의되지 못하고 직관적으로 이해되면서 많은 오류를 야기했다. 오늘날 극한의 개념은 18세기 프랑스의 코시에 의해 정립됐고 19세기 독일의 바이어슈트라스에 의해 좀더 엄격한 규격화가 이뤄졌다.

극한은 쉬운듯 하면서 몇천년 동안 인류 지성사를 괴롭힌 난해한 속성을 가졌다. 0.999999999………가 1이 된다는 것을 어떻게 완전히 이해할 수 있을까?

문제2. 다음을 증명하라.

1) $a \ge 0$이고 n이 자연수이면 항상 $(1+a)^n \ge 1+na$임을 증명하라.

2) 위 부등식을 이용해 $4^{80} > 2 \cdot 3^{100}$임을 증명하라.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

부등식에 관한 테크닉은 터득하기 어렵지만 한 번 깨우치고 나면 매우 강력한 수학적 힘을 가져다준다. 사실 구술시험에서 어려운 부등식 문제가 등장할 가능성은 거의 없지만, 다양한 부등식 문제를 접하면서 수학적 사고력을 키워놓으면 수학에 자신감이 생길 것이다.

첫 문제는 '베르누이 부등식'이라고 하는 역사적으로 유명한 부등식이다. 처음 수학적 귀납법을 배우기 위한 훈련 문제로 많이 등장한다. 이 부등식의 증명 결과를 이용하면 여러가지 부등식을 증명할 수 있으므로 잘 익혀두면 많은 도움이 된다.

▶ 해설 및 모범답안

1) ⅰ. $n=1$일 때 성립한다.

ⅱ. $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $(1+a)^k \ge 1+ka$이다.

여기서 $1+a>0$이므로 양변에 $1+a$를 곱하면

$$(1+a)^{k+1} \ge (1+ka)(1+a)$$

여기서 우변을 보면 $(1+ka)(1+a)=1+(k+1)a+ka^2$

$$\therefore\ (1+ka)(1+a) \ge 1+(k+1)a$$

$$\therefore\ (1+a)^{k+1} \ge (1+ka)(1+a) \ge 1+(k+1)a$$

따라서 $n=k+1$일 때도 성립한다.

ⅰ과 ⅱ에 의해서 모든 자연수 n에 대해 위 부등식이 성립한다.

한편 이항정리를 이용하면 좀더 직접적으로 증명할 수 있다.

즉 $(1+a)^n = 1+{}_nC_1a+{}_nC_2a^2+\cdots+{}_nC_na^n \ge 1+{}_nC_1a = 1+na$

2) $4^{80} > 2 \cdot 3^{100}$은 $(\frac{4^4}{3^5})^{20} > 2$임을 증명하면 된다.

$(\frac{4^4}{3^5})^{20} = (\frac{256}{243})^{20}$에서 $\frac{256}{243} > 1+\frac{1}{20}$임을 간단한 계산을 통해서 알 수 있다.

또한 $(1+\frac{1}{20})^{20} \ge 2$가 됨을 (1)번 부등식을 이용하면 알 수 있다.

$$\therefore\ (\frac{4^4}{3^5})^{20} = (\frac{256}{243})^{20} > (1+\frac{1}{20})^{20} \ge 2$$

이것으로 증명이 완성됐는데, 풀이 과정에서 $\frac{256}{243} > 1+\frac{1}{20}$이 된다는 점을 생각해내는 것이 풀이 과정의 핵심이라 할 수 있다.

▶ 확장 문제

n이 2 이상인 자연수이고 x가 음이 아닌 실수일 때 $x^n - 1 \geq n(x-1)$임을 증명하라.

문제3. 좌표평면상에서 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 할 때 다음 질문에 답하라. 1) 평면에서 임의로 다섯개의 격자점을 고른다. 이 다섯개의 격자점 중에서 적당한 두 점을 잇는 선분은 그 위에 격자점을 포함함을 증명하라. 2) 평면에서 임의의 격자점 세개를 택해 삼각형 ABC를 만들었다. 이 삼각형 둘레의 길이를 k라 할때 항상 $\overline{AC} - \overline{AB} > \frac{1}{k}$임을 증명하라(단 $\overline{AC} > \overline{AB}$).

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

격자점 문제는 정수론과 관련된 기하문제로 출제될 가능성이 높다. 문제풀이의 아이디어는 간단하지만 이에 익숙하지 않으면 생각하기는 어렵다.

수학외적인 지식과 사고력을 기르지 않는다면 이런 유형의 문제는 정복하기 힘들므로 평소에 꾸준한 연습이 필요하다. 처음 문제는 홀짝을 이용하는 분류법으로 해결하고 두 번째 문제는 약간의 기교가 필요하다. 이 문제를 통하여 수학의 새로운 기법을 익혀두자.

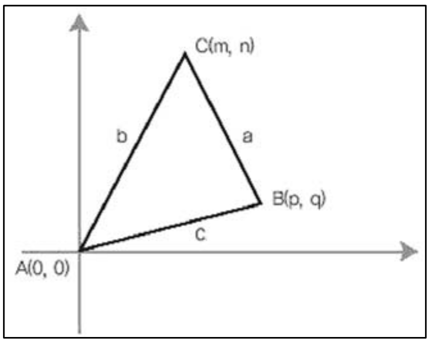
▶ 해설 및 모범답안

1) 격자점 $P(x, y)$의 기본적인 패턴을 살펴보면 x좌표와 y좌표는 홀수 아니면 짝수다. 이것을 다음과 같은 4가지 홀짝형으로 나눠 보자.

(홀, 홀), (홀, 짝), (짝, 홀), (짝, 짝).

이 네가지 패턴만이 존재하는데 임의로 5개의 격자점을 택하면 반드시 두 점은 같은 형식에 들어간다. 같은 형식에 해당되는 두 점의 중점은 항상 격자점이 되는데, $\frac{\text{정수}+\text{정수}}{2}$는 항상 정수가 되기 때문이다. 다시 말해 임의로 택한 5개의 점 중에서 같은 형식에 들어가는 두 개의 점을 택해 선분을 만들면 그 선분의 중점은 격자점이 되기 때문에 증명이 완성됐다. 문제에는 중점이라는 말이 없지만 중점이 격자점이 된다는 사실을 이용하면 증명은 충분하다.

2) 삼각형 ABC에서 꼭지점 A를 원점에 이동시키고 꼭지점 B, C의 좌표를 각각 $(p,\ q)(m,\ n)$이라 두자.



$\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$라 두고 $b^2 - c^2$를 계산하면 $(m^2 + n^2) - (p^2 + q^2)$이 된다.

여기서 $b^2 - c^2$은 분명히 정수고 $b > c$이므로 항상 $b^2 - c^2 \geq 1$이 되는 것은 당연하다.

삼각형 둘레의 길이 $k = a + b + c$이므로 $(b-c)k = (b-c)(b+c+a) = (b^2 - c^2) + (b-c)a$이 성립하고 $(b-c)k > b^2 - c^2 \geq 1$이 된다.

$\therefore\ b-c>\dfrac{1}{k}$

이것으로 $\overline{AC}-\overline{AB}>\dfrac{1}{k}$임이 증명됐다.

▶ 확장문제

격자점을 꼭지점으로 갖는 정삼각형은 존재할까?

문제4. 다음 물음에 답하라. 1) 주사위를 한 번 또는 두 번 던져 마지막 눈의 수를 득점으로 하는 게임이 있다. 먼저 주사위를 한 번 던져서 눈의 수를 보고 주사위를 한 번 더 던질 것인가를 결정할 수 있다. 예를 들어 주사위를 처음 던져 눈의 수가 6이 나왔다면 다시 던질 필요가 없고, 1이 나왔다면 한 번 더 던지고 싶을 것이다. 그렇다면 최대 득점하기 위해 어떤 전략을 세우는 것이 가장 유리할지 수학적으로 설명하라. 2) 위와 같은 게임에서 세 번까지 던지는 것이 가능할 때 두 번째와 세 번째를 던질지 안던질지 결정을 어떻게 하는 것이 가장 유리한가?

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

확률을 구하는 문제가 수능이나 내신시험에 등장할 때는 대부분 경우의 수를 구한 후 확률의 정의에 의해 답을 구하면 된다. 경우의 수를 쉽게 구할 수 없다면, 확률은 항상 어려울 수밖에 없다. 이 문제는 전형적인 구술시험의 특성을 갖고 있다. 계산에 의해 단순한 답을 유도하는 것이 아니고 여러가지 수학적 모델을 검토하고 계산한 후 설명하는 전략 문제다. 따라서 이런 유형의 문제에는 확률뿐 아니라 어떤 내용이라도 담을 수 있다.

예를 들어 전국일주 여행을 가는데 시간과 돈을 절약하는 최선의 방법을 구하라는 문제도 생각할 수 있을 것이다. 중요한 것은 얼마나 수학적으로 문제를 검토하고 논리적으로 표현하느냐 하는 것이다. 이 문제를 통하여 수학적 전략을 어떻게 세워나가는지를 잘 익혀두자.

▶ 해설 및 모범답안

1) 주사위를 던질 때 나오는 눈의 수의 기대값은

$$\sum X_iP_i=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+\cdots+6\times\frac{1}{6}=3.5\text{이다.}$$

그러므로 처음 던진 주사위의 눈을 보고 두 번째를 포기할지 말지는 전적으로 두 번째 주사위의 기대값과 비교하면 된다.

즉 처음 던진 주사위의 눈이 3 이하이면 두 번 던지는 것을 선택하고 4 이상이면 두 번째는 포기한다. 이것이 최상의 전략이다.

2) 주사위를 세 번까지 던질 수 있다면 상황이 약간 복잡해진다. 이해를 돕기 위해 두 가지 과정으로 나눠 생각해보자. 먼저 첫 번째는 나온 눈이 마음에 안들어서 또는 너무 작아서 두 번째를 던진 경우에, 나온 눈의 수가 3이하면 세 번째를 선택하고 4 이상이면 세 번째를 포기하는 것이 유리하다(위 1)번 문제 참조).

그렇다면 처음 나온 눈의 수를 보고 두 번째를 던질지 안던질지 어떻게 결정할 것인가? 이

과정이 좀 복잡하다. 일단 두 번째 나온 눈의 수가 3이하이면 세 번째에 기대할 수 있는 득점 3.5에 기대를 걸어 보고, 4 이상이면 세 번째를 포기하고 두 번째 나온 눈의 수로 득점한다. 결국 두 번째 이후를 이 기준에 따라 주사위를 던지는 경우 득점의 기대값은

$$3.5\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=4.25$$

그러므로 처음 주사위를 던져서 나온 눈의 수와 이 기대값을 비교하면 된다. 즉 처음 나온 눈의 수가 4 이하면 두 번째를 던지는 것이 유리하고, 5 이상이면 첫 번째를 선택하는 것이 유리하다. 위 두 가지 과정을 요약하면 다음과 같은 전략을 세우는 것이 최선이다.

i. 첫 번째 나온 눈의 수가 4 이하면 무조건 다시 던지고 5 이상이면 첫 번째에서 멈춘다.

ii. 두 번째를 던진 후 나온 눈의 수가 3 이하면 세 번째를 던지고 4 이상이면 두 번째에서 멈춘다.

▶ 확장문제

위 문제에서 네 번까지 던질 수 있다면 어떤 전략이 최선일까?

▶ Tip

인생에서 나오는 여러가지 선택의 상황에 어떻게 최선의 전략을 세울 수 있을지에 대한 시뮬레이션을 이런 확률게임 문제를 통해 조금은 경험할 수 있다. 백화점에서 여러가지 디자인의 옷을 입어보고 결정할 때 어떤 기준으로 옷을 선택하는가? 각자의 만족도와 가격을 비교한 뒤 옷을 사겠지만 자신이 마음에 들어하는 옷은 모두 소량이고 그 옷을 사려고 하는 사람은 엄청나게 많을 때 어떻게 결정해야 할까? 어떤 옷이 마음에 들었는데 옆 매장에 가서 다른 옷을 구경하는 동안 그 옷이 다른 사람에게 팔릴 수 있다면 마음에 드는 이 옷을 사야 하는가? 이런 간단한 갈등 상황에서는 수학이 당장 필요가 없겠지만 인생이나 사회 전체의 흥망을 좌우하는 결정적인 선택의 순간에는 수학이야말로 절대적인 기준이 될 것이다.

여러분이 만약 배우자를 맞선을 통해서 결정한다고 하자. 하루에 한 명씩 1백일 동안 매일 맞선을 볼 수 있다고 가정한다면 몇 번 정도 맞선을 보고 배우자를 결정해야 할까?(맞선을 보고 바로 다음날 결정하지 않는다면 상대방은 다른 사람과 결혼한다고 가정해보자) 물론 처음 맞선을 보고 "이 사람이 바로 내 사람"하면서 선택을 할 수도 있겠지만, 아직 99번의 가능성을 생각한다면 쉽지는 않을 것이다.

이런 경우는 37번 정도 맞선을 무조건 보고 38번째부터 그동안 본 37명보다 더 마음에 들면 그 사람을 선택하는 것이 필승의 전략이다. 왜 37이냐 하는 것은 복잡한 수학 계산을 통해 증명된 것이다. 위의 주사위 문제와는 약간 다르지만 우리의 인생살이가 너무 골치 아플 때 37%를 기억하면 도움이 될 것이다. 물론 여러분은 맞선을 1백 번 보고 배우자를 선택하는 일은 없겠지만 말이다.

2003년 06월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

이번호에서는 명제부터 미분법까지 이전에 출제됐던 문제를 중심으로 기초적이고 필수적인 개념을 정리해보자. 이 기본문항을 중심으로 교과서를 찾아가면서 확장된 개념과 원리를 숙지하기 바란다.

구술수학은 말로 표현하는 것이 핵심이라는 점을 명심해야 한다. 자신의 생각을 말로 직접 표현하는 것이 문제를 풀어 답을 구하는 것보다 쉽다고 생각할 수도 있겠지만, 정확한 개념이해와 직관적인 느낌을 갖고 있지 않다면 횡설수설로 빠질 수 있다. 이것이 구술의 묘미며 어려운 점이다. 유치원에 다니는 어린 조카가 미분이 뭐냐고 질문을 했을 때 자신이 이해하고 있는 개념을 쉽게 전달할 수 있는가? 수학에서 어떤 사실 또는 내용의 개념을 말할 때는 철저한 이해를 바탕으로 자신만의 언어로 표현하는 것이 중요하다.

문제1. 다음 명제는 참인가 거짓인가?(2002 서강대, 부산대 수시 응용)
1) a가 유리수이고 b가 무리수이면 a+b는 무리수다.
2) a가 유리수이고 b가 무리수이면 ab는 무리수다.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

고교수학의 첫 부분을 장식하는 집합과 명제는 그 자체로 별로 어렵지 않다. 하지만 단원 속에 나오는 문제들을 증명하는 것은 까다롭다. 이는 여러가지 수학적인 개념과 테크닉이 없기 때문이지, 이 단원을 이해 못해서 그런 것이 아니다. 그렇다고 이 단원만 잡고 공부하는 것은 어리석은 일이다. 다른 단원을 공부하면서 실력이 향상되면 자연스럽게 이 단원은 정복된다. 다만 구술면접에서 요구하는 정도의 기본적인 개념과 증명의 기법을 몇 가지 암기하고 있어야 한다.

이 문제는 명제의 참과 거짓을 판단하고 이를 증명하는데 초점이 있다. 반례를 들어서 거짓임을 보이는 방법을 숙지하고 실전에서 논리를 장황하게 이끌지 않는 요령을 익히도록 하자.

▶ 해설 및 모범답안

1) 직접 증명보다는 귀류법으로 증명하는 것이 쉽다. 먼저 a+b를 유리수 p라 가정하자. p=a+b에서 b=p−a가 된다. 여기서 p와 a는 유리수고, 유리수는 사칙연산에 대해서 닫혀있으므로 b도 유리수가 된다. 이것은 b가 무리수라는 가정에 모순이다. 그러므로 이 명제는 참이다.

2) 이 명제는 거짓이다. 반례를 하나 들어보자.

$a=3$, $b=\log_3 2$라 두면 $a^b=3^{\log_3 2}=2^{\log_3 3}=2$가 된다. 이것은 이 명제가 항상 성립하는 것은 아니라는 점을 보여준다. 물론 여기에서 $\log_3 2$는 무리수이고, 간략한 증명은 다음과 같다.

$\log_3 2$를 유리수라고 가정하면 $\log_3 2=\dfrac{q}{p}$로 표현된다(p, q는 서로소인 자연수).

로그의 정의로부터 $3^{\frac{q}{p}}=2$이고, 여기서 양변을 p제곱하면 $3^q=2^p$이 된다. 3과 2는 서로소이므로 위의 등식은 성립하지 않는다. 그러므로 $\log_3 2$는 무리수다.

▶ 심화 문제

$\sqrt{2}$는 무리수임을 증명하라.

문제2. 다음을 증명하라. 1) 연속한 세개의 자연수를 곱하면 항상 6의 배수. 2) n이 자연수일 때 $n(n+1)(2n+1)$은 항상 6의 배수.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

교과서나 내신시험에서는 별로 다루지 않는 정수론의 문제가 수능에 자주 등장하거나 구술시험에 후보문제로 계속 추천되는 이유는 논리적으로 접근하는 수학적 능력이 정수론 문제를 통해서 잘 드러나기 때문이다.

이런 문제의 유형은 단순히 외워서는 좋은 점수를 얻기 힘든 기하학과 비슷한 면이 있다. 변화가 심하고 패턴이 정해져 있더라도 출제자는 얼마든지 다양하게 변화를 줄 수 있기 때문이다.

지금까지 정수론에서 구술시험은 그렇게 어려운 문제가 출제되지 않았다. 하지만 완전정복을 위해서는 많은 문제를 풀어보고 고민하며 생각하는 훈련을 해야 한다.

이 문제는 정수론의 기본적인 내용을 담고 있다. 하지만 그 기초를 확실히 하는 뜻에서 중요한 문제라 할 수 있다. 특히 서로소의 개념이 담고 있는 진정한 의미와 정수의 분류법을 잘 이해하면 실전에서 큰 도움이 된다.

▶ 해설 및 모범답안

1) $n(n+1)(n+2)$로 나타내면 일단 세개의 수에는 반드시 짝수가 있다. 그리고 반드시 3의 배수도 존재한다. 이는 당연하다. 그러므로 2의 배수이면서 3의 배수이면 6의 배수가 된다. 2와 3이 서로소이므로 이 추리는 정당하다. **이때 중요한 점은 서로소라는 말을 빼먹는다면 틀린 추리임을 명심하라.**

2) $n(n+1)(2n+1)$의 식을 잘 보면 연속한 두 자연수가 곱해져 있으므로 항상 2의 배수임을 알 수 있다. 그럼 항상 3의 배수가 됨을 보이면 증명은 완성된다. 이것을 보이기 위해 $n=3k,\ 3k+1,\ 3k+2$로 분류해 각각 대입하면 된다.

$n=3k$인 경우 주어진 식은 $3k(3k+1)(6k+1)$이므로 이 수는 3의 배수다. $n=3k+1$인 경우 주어진 식은

$$(3k+1)(3k+2)(6k+3)=3(3k+1)(3k+2)(2k+1)$$

로 표현되므로 3의 배수다. $n=3k+2$인 경우도 비슷하게 증명된다. 이것은 모든 n의 경우에 항상 3의 배수가 됨을 의미하므로, 종합하면 $n(n+1)(2n+1)$은 6의 배수가 된다.

위에서는 정수론적 기법을 이용해 증명을 했는데, 식을 조금만 바꾸면 좀더 쉽게 증명할 수도 있다.

주어진 식의 세 번째 항을 적절하게 쪼개서 조작하고 전개하면,

$n(n+1)(2n+1)=n(n+1)\{(n-1)+(n+2)\}=(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2)$가 된다.

이 식을 보면 연속한 세수의 곱으로 모두 표현되므로 1)에 의해서 6의 배수가 됨을 알 수

있다. 참고로

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

라는 식을 알고 있다면 좌변은 항상 정수이므로 우변의 분자는 6의 배수임을 알 수 있다.

문제3. 다음 질문에 답하라. 1) 2차방정식의 근의 공식을 유도하라. 2) 실계수 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한근이 p+qi이면 p−qi도 근임을 증명하라.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

중·고교 수학의 추억으로 간직하는 유명한 공식 중에서 근의 공식은 가장 간단명료하면서 그 위력에 감탄을 금할 수 없는 것 중 하나다. 가장 기본적인 것이 가장 중요하다는 평범한 진리 속에서 구술시험의 방향을 가늠할 수 있다. 그러나 근의 공식을 아는 것과 유도 과정을 매끄럽게 진행한다는 것은 서로 다른 얘기다. 유도 자체가 별로 중요한 것은 아니지만 일반화시킬때 그 속에 숨은 아이디어를 찾아내는 것이 중요하다.

이차방정식의 근의 공식은 완전제곱꼴로 바꾸는 것이 핵심이다. 이것을 잘 이해하고 식을 조작하는 기술을 익힌다면 핵심을 이해했다고 볼 수 있다.

▶ 해설 및 모범답안

1) $ax^2+bx+c=0$를 풀기 위해서는 우선 양변을 x^2의 계수인 a로 나눈다.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

여기서 상수항을 우변으로 이항하면, $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$이다.

양변에 x의 계수의 $\frac{1}{2}$의 제곱인 $(\frac{b}{2a})^2$을 더하면

$x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}+(\frac{b}{2a})^2$이 된다.

마지막으로 좌변을 완전제곱식으로 나타내고, 우변의 식을 정리해서 다음처럼 유도하면 끝난다.

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2) 위 문제에서 구한 근의 공식을 이용하면 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$은 이 방정식의 두 근이 되는데 a, b, c가 실수이므로 $b^2-4ac<0$일 때 허근을 갖는다. 근의 공식에서 허수 부분 앞에서

부호가 바뀌므로 p+qi가 한근이면 p−qi도 근이 된다.

참고로 다단계문제에서는 앞의 문제를 참고해 뒤의 문제를 풀어나가므로 이렇게 증명하는 것이 가장 이상적이다.

참고로 위 문제는 복소수의 상등법칙(p+qi=0의 필요충분조건은 p=0, q=0이다)을 이용해 증명할 수도 있다.

▶ **심화문제 : 두 정수 m, n에 대해 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 근이 유리수이면 이 근은 정수임을 증명하라,**

문제4. 다음 질문에 답하라. 1) 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 합공식을 유도하라(단 r≠1). 2) 컴퓨터 한대가 감염된 후 다른 10대의 컴퓨터가 감염되는데 약 2시간이 소요되는 바이러스가 나타났다. 이 고약한 바이러스가 한국에 상륙해 어떤 한 컴퓨터를 감염시켰다고 가정하자. 우리나라에 보급된 모든 컴퓨터의 10%가 감염되는데 걸리는 시간을 대략적으로 구하라. 단, 현재 우리나라의 컴퓨터는 1천만대가 있다고 가정하라(2002년 이대 수시 1학기 응용).

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

등비수열의 합에 관련된 문제들은 수능시험에서 자주 다뤄지고 수열에서 중요한 부분을 차지한다. 등비수열뿐 아니라 등차수열에 관한 공식도 스스로 유도하는 연습을 해둬야 하고, 응용문제들도 많이 풀어보기 바란다. 특히 은행과 관련한 이자나 경제 성장률처럼 규칙적으로 변화하는 시스템은 등비수열과 관계가 있고 지수, 로그의 성질을 함께 포함하기 때문에 시험에 나올 가능성이 높다.

▶ 해설 및 모범답안

1) 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항을 a_n이라 두면 $a_n=ar^{n-1}$이 되고, 합은 다음과 같이 표현된다.

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

①식의 양변에 r을 곱하면

$$rS_n=ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

②−①을 하면 $(r-1)S_n=a(r^n-1)$

$r\neq1$이므로 $S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$이 된다.

2) 먼저 바이러스가 감염되는 단계를 살펴보면 첫 2시간 후에 10대가 감염되므로 다시 2시간이 경과하면 감염된 10대의 컴퓨터가 각각 10개씩 또 감염을 시킨다. 이런 식으로 2시간이 지날 때마다 컴퓨터가 등비수열을 이루면서 감염된다. 감염되는 단위시간이 2시간이므로 2시간 후에 감염된 모든 컴퓨터의 수는

$$10+10^2+10^3+\cdots+10^t=\frac{10(10^t-1)}{10-1}=\frac{10(10^t-1)}{9}$$

여기서 1000만대의 10%는 100만대이므로

$$\frac{10(10^t - 1)}{9} = 1000000 \qquad \therefore\ 10^t = 900000$$

이것을 만족하는 t의 범위는 $5 < t < 6$이므로 대략 12시간 후면 10%가 감염된다고 볼 수 있다.

▶ 심화 문제

이번 달 초부터 월 1백만원씩 3년 동안 은행에 적금을 하려고 한다. 월 이율 8%로 복리로 계산할 때 3년 후 총 금액을 구하라.

문제5. 다음 질문에 답하라.
1) 미분가능한 함수란 무엇인가.
2) y=x|x|는 x=0에서 미분가능한가.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

미분 단원에서는 기본 개념을 이해하는 것 자체가 중요하고 어려운 과정에 속한다. 극한, 연속, 미분계수, 미분가능성, 증가함수, 감소함수, 극대, 극소 등 여러가지 개념들을 잘 정리해둬야 하고 구술시험에서 논리적으로 표현할 수 있도록 훈련해야 한다. 특히 기하학적인 직관을 갖고 논리적으로 접근할 수 있어야 한다.

연속은 말 그대로 연속적인 속성을 이해하면 되고, 미분가능성은 뾰족한 점이 없이 매끄럽게 곡선이 나타나는 느낌을 이해하면 충분하다. 이 문제처럼 직관적으로 애매한 경우에 논리적으로 접근하는 법을 익힌다면 기묘한 함수가 나오더라도 충분히 해결할 수 있을 것이다.

▶ 해설 및 모범답안

1) 미분가능한 함수의 정의는 다음과 같다.

어떤 구간 (a, b)의 임의의 점 c에서 주어진 연속 함수 $y = f(x)$의 다음의 극한값이 존재할 때 주어진 함수를 구간 (a, b)에서 미분가능한 함수라 한다.

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \left(\text{또는 } \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right)$$

이때 $f'(c)$를 $x = c$에서의 미분계수(또는 도함수)라 한다.

그런데 이 미분계수의 정의는 극한으로 돼있기 때문에 극한 값이 존재하는지를 확인해야 한다. 그러므로 우극한 값과 좌극한 값을 비교하는 것은 당연하고, 이 두 극한 값이 일치할 때 미분가능하다고 정의하는 것이다.

참고로 어떤 점에서 미분계수는 접선의 기울기를 의미한다. 이때 미분계수를 구하기 위해 교묘하게 평균기울기를 구하는 방식으로 극한값을 구하는 형식을 취했다는 점을 이해해야 한다.

2) $y = x|x|$가 $x = 0$에서 미분가능한지를 판정하기 위해서는 미분의 정의에 충실하게 식을 적고 다음과 같이 좌미분계수와 우미분계수를 구하면 된다.

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{h|h|}{h}=\lim_{h\to 0-}|h|=0$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h|h|}{h}=\lim_{h\to 0+}|h|=0$$

두 값이 일치하므로 $x=0$에서 미분가능하고 미분계수는 0이다.

▶ 심화 문제

$y=|e^x-e^{2x}|-2$의 $x=0$에서 연속성과 미분가능성에 대해서 구술하라.

문제6. 다음 질문에 답하라.

1) 평면 위에 n개의 직선이 있을 때 이들 직선에 의해 평면은 몇 개의 부분으로 나뉘어지는가? 단 어느 두 개도 평행이 아니고 어떤 세 개도 동일한 점에서 만나지 않는다.

2) 위 문제의 조건에 따라 나누어진 부분 중에 유한 면적을 가진 부분은 몇 개인가?

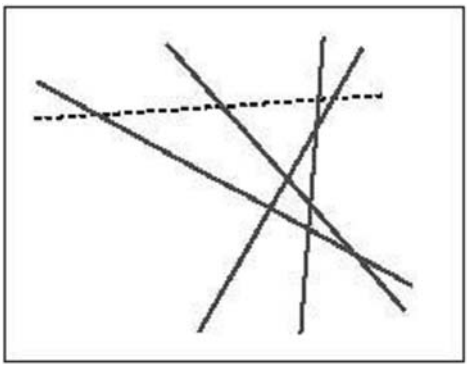
▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

구술시험에는 교과서 외적인 추리 문제가 자주 등장한다. 기본적인 유형은 대부분 패턴찾기의 범주에 속하는데, 평소에 추리하고 수학적으로 사고하는 습관을 기르지 않는다면 쉽게 정복하기 어렵다. 이 문제는 기본적으로 수열의 점화식을 이용해 공간나누기를 추론하는 것이다. 순발력이 없다면 실전에서 당황할 수밖에 없을 것이다. 구술 공부를 할 때 이런 점을 숙지하면서 기본적인 내용을 착실히 정리한다면 좋은 결과를 얻을 것이다.

▶ 해설 및 모범답안

1) n개의 직선으로 나뉘어지는 평면의 개수를 a_n이라 두면

$a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=7,\ \cdots$



이 수열의 규칙을 살펴보면 직선 한 개가 추가될 때마다 그 때까지의 직선의 총 수만큼 평면이 분화되면서 증가한다.

즉, $a_2=a_1+2,\ a_3=a_2+3,\ \cdots,\ a_{n+1}=a_n+n+1$

이 규칙은 점화식 $a_{n+1}=a_n+n+1$을 의미하는데 이 수열은 계차수열 $b_n=n+1$이므로 다음처럼 일반항을 구하면 된다.

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

$$=2+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+1$$

2) 유한 면적을 가진 부분을 구하는 요령도 위에서 한 것처럼 규칙을 찾아서 점화식을 만들면 되는데 여기서는 다른 방법으로 구해보자.

옆 그림을 잘 보면 4개의 직선에 직선 한 개(그림에서 점선)를 추가하면 교점이 4개 생긴다는 것을 알 수 있다. 여기서 항상 무한 면적을 갖는 부분은 2개가 증가한다.

직선을 계속 추가하면서 관찰하면 기존 직선의 개수와는 상관없이 무한 면적은 항상 2개씩 증가한다는 점을 알 수 있다. 그렇다면 무한 면적의 개수는 등차수열이 되고 n개의 직선이 존재할 때 무한 면적 부분의 개수는 2n임을 알 수 있다

그러므로 1)에서 구한 총 개수에서 무한 면적 부분의 개수 2n을 빼면 원하는 답을 구할 수 있다.

즉 유한 면적 부분의 개수는

$$a_n - 2n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 - 2n$$

$$= \frac{(n-2)(n-1)}{2} \quad (n \geq 3)$$

▶ 심화 문제

공간에 n개의 평면이 있을 때 공간은 몇 개의 부분으로 나눠지는가?(단 어떤 4개의 평면을 택해도 유한한 공간을 만든다)

2003년 07월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

문제1. 다음 질문에 답하라
1) 3의 배수 또는 9의 배수를 판정하는 방법에 대해 설명하라.
2) 1부터 11까지 11개 자연수를 차례로 이어 붙여 만든 수 N=1234567891011을 소인수 분해 하면 $2^a3^b5^c$처럼 나타낼 수 있다. 여기서 2의 최대지수 a와 3의 최대지수 b를 구하라.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

정수론에 관한 문제는 수능시험뿐 아니라 구술시험에서도 중요하게 다뤄진다. 정수론에서 가장 기본적인 것 중 하나는 배수와 약수에 관한 것이다. 특히 배수판정법은 빠른 계산을 위해서도 반드시 익혀둬야 하며 그 원리도 잘 이해하고 있어야 한다.

어떤 수가 3의 배수인지를 판정하는 손쉬운 방법은 각 자리수를 더해서 그 수가 3의 배수인지를 확인하는 것이다. 예를 들어 2001은 각 자리수를 더하면 3이 나오므로 3의 배수다. 같은 방법으로 1234는 10이 나오므로 3의 배수가 아니다. 이와 유사하게 9의 배수를 판정할 수 있다. 초등학교 때부터 나오는 3, 4, 5, 7, 9의 배수판정법과 그 원리를 잘 정리해둔다면 정수론의 기본기가 충실해질 것이다.

▶ 해설 및 모범답안

1) 주어진 수가 3 또는 9의 배수가 되는지는 각 자리수를 더한 값이 3 또는 9의 배수가 되는지를 알아보면 된다.

   각 자리수의 합이 배수 판단의 근거가 되는 이유는 다음과 같다.

   십진법으로 표현되는 임의의 정수는 $a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\cdots a_110+a_0$으로 나타낼 수 있다.

   이 수를 다음과 같이 변형하면

   $a_n(999\cdots9+1)+a_{n-1}(99\cdots9+1)+\cdots\cdots a_1(9+1)+a_0$

   $=a_n\times999\cdots9+a_{n-1}\times99\cdots9+\cdots\cdots a_1\times9+a_n+a_{n-1}+\cdots a_1+a_0$가 된다.

   여기서 999…9 등은 모두 3의 배수이므로 $a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$이 3의 배수면 이 수는 3의 배수가 된다. 같은 방법으로 9의 배수도 확인할 수 있다.

2) N=1234567891011은 분명히 홀수이므로 소인수 2를 갖지 못한다. 따라서 $a=0$이다.

   N=1234567891011의 각 자리수를 모두 더하면 48이 된다. 이것은 분명 3의 배수이지만 9의 배수는 아니다. 이는 주어진 정수 N이 3으로 나눠지지만 9로는 나눠지지 않음을 의미한다. 그러므로 3의 최대지수 $b=1$이다.

▶ 심화 문제

1부터 100까지의 수를 모두 곱한 수를 소인수분해했을 때 소수 3의 최대지수는?

문제2. 다음 질문에 답하라.

1) 함수와 함수의 그래프, 일대일 함수에 대해서 각각 설명해보라.

2) Z는 정수 전체의 집합이고, 함수 $f: Z \to Z$가 항상 $f(a+b)=f(a)+f(b)$, $f(1)=2$를 만족할 때 이 함수는 일대일 함수임을 증명하라.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

쉽고도 어려운 것이 함수에 관한 문제다. 기교적인 문제를 풀어보는 것보다 정확한 정의와 개념을 이해하고 정리해 두는 편이 구술시험에 도움이 될 것이다. 추상적이기 때문에 단순히 개념을 암기하는데 만족한다면 낭패를 볼 수 있다. 이 문제는 구술시험에서 여러 차례 출제됐던 문제를 약간 변형한 것이다. 특히 일대일 함수나 역함수의 정의는 정확하게 이해하고 있어야 하며, 정의를 증명하는 기법도 정리해 둬야 한다.

▶ 해설 및 모범답안

1) 두 집합 X, Y에서 집합 X의 각 원소가 집합 Y의 원소에 반드시 하나씩 대응할 때, 이 대응을 집합 X에서 집합 Y로의 함수라 한다. 이 함수를 f라 하면 기호로 $f: X \to Y$와 같이 나타낸다.

$y=f(x)$에 대해 $G_f=\{(x, y) \in A \times B \mid y=f(x)\}$를 함수 $f(x)$의 그래프라 한다.

즉 함수 $f: X \to Y$에서, 정의역 X의 각 원소 x에 대응하는 함수값 $y=f(x)$와의 순서쌍 $(x, f(x))$ 전체의 집합을 좌표로 하는 점들을 좌표평면에 나타낼 때, 이들 점 전체의 집합을 그 함수의 그래프라 한다. 결국 함수의 그래프는 함수 그 자체와는 다르다는 것을 알 수 있다. 그래프는 어떤 대응을 의미하는 함수에 순서쌍을 도입해 집합으로 재구성한 것이라 볼 수 있다.

함수 $f: X \to Y$가 다음 조건 $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ 또는 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$를 만족할 때 이 함수를 일대일 함수라 한다.

2) 먼저 $f(n)=f(1+(n-1))=f(1)+f(n-1)=f(1)+f(1)+f(n-2)$임은 당연하고, 이런 식으로 계속해서 전개해 나가면 $f(n)=nf(1)$이 됨을 알 수 있다.

이를 바탕으로 다음과 같이 증명하면 된다.

$a \neq b$이면 $f(a)-f(b)=f(a+(-b))=f(a-b)=(a-b)f(1)=2(a-b) \neq 0$

$\therefore\ f(a) \neq f(b)$

이것으로 일대일 함수임이 증명됐다.

▶ 심화 문제

음이 아닌 정수에 대해 함수 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f(10nk)=f(n)+k\ (k=0, 1, \cdots 9)$를 만족할 때, $f(2003)$의 값은?(단, 이 함수는 일대일 함수다)

문제3. 2차 정사각행렬 A, B, E에 대해 $A+B=E$, $AB=0$일 때 다음 질문에 답하라(단 $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$).

1) $BA=0$임을 증명하라

2) $A^2+B^2=E$임을 증명하라

3) n이 자연수일 때 항상 $A^n+B^n=E$임을 증명하라.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

행렬에 관련된 구술수학은 철저하게 기본 정의와 개념에 중점을 두고 있다. 행렬의 곱에 대한 정의와 역행렬에 관한 여러가지 성질은 구술수학의 단골 메뉴다. 특히 행렬의 곱셈에서 교환법칙이 성립하지 않는다는 것이 본질적으로 무엇을 의미하는가를 잘 알아둘 필요가 있다.

이 문제는 이런 성질과 주어진 조건을 이용해 교묘하게 일반화시키는 과정을 묻고 있다. 수학적 귀납법을 이용한 행렬의 증명문제는 자주 등장하는 것은 아니지만 한 번쯤 정리함으로써 증명의 두려움을 극복할 수 있을 것이다.

▶ 해설 및 모범답안

1) $BA=(E-A)(E-B)$

$$=E-(A+B)+AB$$

$$=0$$

2) $A+B=E$에서 $A(A+B)=AE$

$$\therefore\ A^2+AB=A$$

$AB=0$이므로 $A^2=A$

같은 방법으로 하면 $B^2=B$가 된다

$$A^2+B^2=A+B=E$$

3) 직접 증명보다는 수학적 귀납법이 더 위력적이고 간단하다.

ⅰ) $n=2$일 때는 성립한다.

ⅱ) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $A^k+B^k=E$이다.

여기서 $n=k+1$일 때 성립함을 증명하면 된다.

$$\begin{aligned} A^{k+1}+B^{k+1} &= AA^k+BB^k=A(E-B^k)+B(E-A^k) \\ &=(A+B)-(AB^k+BA^k) \\ &=(A+B)-\left[(AB)B^{k-1}+(BA)A^{k-1}\right] \\ &=E \end{aligned}$$

ⅰ)과 ⅱ)에 의해 $\therefore\ A^n+B^n=E$

▶ 심화 문제

$A+B=0,\ AB=E$일 때 $A^3+B^3=0$임을 증명하라.

문제4. 극한값 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}$을 구하는 방법을 2가지 경우로 설명하라.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

수열의 극한값은 약간의 기교와 공식을 이용하면 쉽게 구할 수 있다. 하지만 적분을 이용하면

더 일반적으로 접근할 수 있다. 정적분의 출발점은 수열의 극한과 관련이 있고 수열의 무한급수를 정적분으로 변형하는 것은 정적분의 본질이라 볼 수 있다. 앞으로 구술수학에 등장할 가능성이 매우 높은 유형이라는 것을 명심하고 철저하게 익혀둬야 하겠다. 이 문제는 매우 간단하게 처리할 수 있지만 교과서나 기타 참고서를 보면서 기본원리를 다시 정리하기 바란다.

▶ 해설 및 모범답안

1) 수열공식을 이용하는 방법

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}{n^4}=\frac{1}{4}$$

2) 정적분의 정의를 이용하는 방법

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3}\frac{1}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\left[(\frac{1}{n})^3+(\frac{2}{n})^3+\cdots+(\frac{n}{n})^3\right]\frac{1}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^3\frac{1}{n}\\&=\int_0^1 x^3dx\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

▶ 심화 문제

부정적분과 정적분의 정의에 대해서 설명하라.

문제5. 복소수 z를 나타내는 점 p가 복소평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름이 1인 원주 위를 움직일 때 다음 복소수 w를 나타내는 점 Q는 어떤 도형을 나타낼까?

1) $w=iz-i$

2) $w=z^2$

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

복소수는 비교적 첨단수학에 속하고 과학기술에 직접적으로 응용된다. 복소수에 관련된 문제들은 서울대 등 여러 학교에서 난이도가 높게 출제됐고 수능 수학의 수준을 뛰어넘는 기교를 요구하기도 한다. '복소수란 무엇인가?'라는 기본적 개념부터 여러가지 응용기술까지 연마하면서 철저히 공부해둬야 복소수를 완전하게 정복할 수 있다.

이 문제는 복소평면 위에서 일어나는 여러가지 기하학적 상황을 복소수의 기본성질을 이용해 파악할 수 있는지를 묻고 있다. 문제 해결을 위해서는 기하학적인 입장에서 평행이동이나 회전과 관련된 복소수의 특징을 철저히 이해하고 있어야 한다.

▶ 해설 및 모범답안

1) $w=iz-i$에서 $iz=w+i$ $\therefore$ $z=-i(w+i)$

그런데 문제의 조건으로부터 $|z|=1$이므로

$$|-i(w+i)|=1$$

$$\therefore |w+i|=1$$

이것은 w를 나타내는 점 Q가 점 $(-i)$를 중심으로 하고 반지름이 1인 원주 위의 점임을 의미한다.

2) 복소수의 곱은 회전을 의미하는데 이 식을 잘 보면 어떤 각도만큼 회전시킨다.

여기서 반지름이 1인 원 위의 점으로 생각하면 역시 원래의 원 위를 도는 점으로 볼 수 있다.

다른 각도로 생각해 보면 더욱 명확하다.

$$|w|=|z^2|=|z|=1$$

그러므로 $|w|=1$이 되고 이것은 w를 나타내는 점 Q는 원점을 중심으로 하고 반지름이 1인 원주 위의 점임을 의미한다.

▶ 심화 문제

−1의 제곱근은 무엇인가? i의 제곱근은 무엇인가?

문제6. 다음 질문에 답하라

1) 조건부 확률이란 무엇인가.

2) 주사위 1의 눈에서 k의 눈까지의 면은 파란색을 칠하고 나머지 k+1의 눈에서 6까지의 면은 붉은색을 칠한다(단 k=1, 2, …5). 이 주사위를 던질 때 짝수가 나오는 사건을 A, 파란 면이 나오는 사건을 B라 한다. A와 B가 독립이 될 k의 값을 구하라.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

조건부 확률은 중학교 수준으로 충분히 이해할 수 있지만, 이것을 기호화시키고 추상화시킬 때 문제는 어려워진다. 고교 수학 중에서 가장 어려운 단원 중의 하나인 확률은 경우의 수를 신속 정확하게 계산하지 못한다면 정복하기 힘들다. 특히 조건부 확률은 개념 그 자체를 이해하는 것이 쉽지 않다. 특히 정의와 기호에 너무 집착한다면 더욱 이해하기 어려워진다.

두 사건을 비교할 때 서로 연관을 갖고 있다는 것(종속 사건)을 이해한다면 조건부 확률을 이해하기 조금 쉬워진다. 이 문제를 통해 정확한 개념과 응용법을 익히고 부족한 것은 다른 참고서를 통해서 꼭 보충하기 바란다.

▶ 해설 및 모범답안

1) 조건부 확률이란 사건 A가 일어났다는 가정하에 사건 B가 일어날 확률을 의미하고 기호로는 $P(B|A)$로 표현한다.

이 조건부 확률의 수학적 정의는

$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\,P(B|A)$이다.

즉 두 사건 A와 B가 동시에 일어날 확률은 먼저 A가 일어나고 B가 일어난다고 볼 때 B는 A가 일어났다는 가정하에 B가 일어날 확률을 곱해 계산한다는 뜻이다.

2) 조건부 확률에서 $P(B|A)=P(B)$이면 사건 A와 사건 B는 독립이 된다. 그러므로 $P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$이 성립하면 사건 A와 사건 B는 독립이 될 것이다.

이 문제는 k에 따라 상황이 달라지므로 다음처럼 도표로 그려보면 독립인지 종속인지 쉽게 알 수 있다.

k	1	2	3	4	5
$P(A)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$P(B)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$
$P(A\cap B)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$

$P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$가 성립하는 경우를 확인해 보면 $k=2$ 또는 4일 때 독립이 된다.

▶ 심화 문제

어떤 두 사건이 배반이면 독립인가? 또 두 사건이 독립이면 배반인가?

2003년 08월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

문제1. 사람의 몸 속에 들어있는 전자의 개수를 대략 구해보라.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

구술시험의 가장 큰 특징 중 하나는 정확한 공식이나 풀이법이 없는 문제에 대한 논리적 접근 방법을 묻는 문제가 출제된다는 점이다. 일반적인 객관식 시험이나 단답형 시험에서는 나올 수 없는 이런 추리 문제는 구술시험에 나올 가능성이 매우 높다. 일례로 우리나라 미용업에 종사하는 이발사(미용사 포함)는 모두 몇명인지를 추측하는 문제가 서울대에서 나온 적이 있었는데 제대로 답을 한 학생이 거의 없었다고 한다. 대부분의 학생은 이런 식의 문제에 익숙하지 않거나 중·고교때 스스로 생각하고 추리하는 경험을 해본 적이 없기 때문일 것이다. 이 문제는 맨홀 뚜껑이 둥근 이유나 우리나라에 일년 동안 내리는 빗방울의 개수 구하기 등 실제로 출제됐던 추리문제의 범주에 들어간다. 과학적인 지식과 수학적 사고력이 결합돼 있지 않으면 접근을 어떻게 해야할지 처음부터 막히는 문제들이다.

일본의 후지산을 깎아서 평야를 만든다고 가정할 때 후지산의 흙과 돌을 모두 다른 곳으로 옮기는데 10t 트럭 몇 대가 필요한지를 묻는 문제가 예전에 미국 MIT의 구술시험에 나온 적이 있었다. 이 문제를 풀기 위해서는 흙의 부피와 밀도 등 여러가지 수치를 알고 있어야 하지만 이런 값들을 정확하게 몰라도 풀이의 전략은 세울 수 있다. 문제의 핵심은 풀이 전략의 논리성과 간략성에 있다. 전자의 개수를 구하는 문제도 물리적인 수치보다는 접근하는 방법이 더 중요하다. 각자 몇 가지 전략 문제를 스스로 만들어 친구들과 토론을 통해 이런 종류의 추리문제를 철저히 대비하도록 하자.

▶ 해설 및 모범답안

1) 사람 몸은 분자로 구성돼 있고 분자는 원자의 결합으로 만들어진다. 원자는 다시 원자핵과 전자로 구성돼 있다. 원자핵은 양성자와 중성자로 구성돼 있는데 양성자와 중성자의 질량은 거의 비슷하고 전자의 질량은 양성자에 비해 매우 가벼워 무시해도 될 정도다(대략 양성자 질량의 $\frac{1}{1800}$ 정도).

   원자는 음전하를 가진 전자와 양전하를 가진 양성자가 존재하지만 전체적으로는 중성이다. 이것은 전자와 양성자는 개수가 서로 같고 전하량이 동일하기 때문이다. 이런 전반적인 물리적 사실을 통해 우리 몸이 갖고 있는 전자의 개수를 구해보자.

   만약 몸무게가 60Kg이라고 가정하면 양성자의 질량은 30Kg이라고 생각해도 된다. 양성자 1개의 질량은 1.67×10^{-27}Kg이므로 30Kg을 이것으로 나누면 양성자의 개수를 구할 수 잇다

   $$\text{양성자의 개수} = \frac{30\text{Kg}}{1.67\times10^{-27}\text{Kg}} = 1.796\times10^{28} \fallingdotseq 2\times10^{28}$$

   양성자의 개수와 전자의 개수는 같다고 할 수 있으므로, 구하는 전자의 개수는 대략 2×10^{28}개로 볼 수 있다.

2) 위 답안은 양성자 한 개의 질량을 알고 있어야 가능하다. 하지만 양성자의 질량을 모른다면 어떻게 할까. 가능한 방법이 있다.

우리 몸을 이루는 대부분의 분자를 물이라고 가정하자. 실제로 물은 전체 체중의 60-70%를 차지하므로 몸이 모두 물이라 생각해도 큰 무리는 없다. 물(H_2O)이 몇 개 정도 있는지 알 수 있다면 수소 원자의 개수를 알 수 있다.

물분자의 분자량(18)을 이용해 체중이 60Kg인 사람의 몸에 들어있는 수소 원자의 수를 구하면, $\frac{60000}{18} \times 6 \times 10^{23} \times 2 = 4 \times 10^{27}$ 정도가 된다.

수소 원자의 개수와 전자의 개수가 같다고 가정하면 대략 위에서 계산된 수치로 볼 수 있다. 하지만 위의 수치에는 산소의 전자가 빠져 있으므로 이를 계산해야 한다. 산소의 전자 개수를 수소의 전자 개수의 대략 10배 정도로 환산하면 사람의 몸 속에 들어있는 전자의 총수는 10^{28}에서 10^{29} 정도로 추정할 수 있다.

▶ 확장 문제

1년 동안 지구에 떨어지는 빗방울의 개수를 구하려면 어떻게 해야 하나(2001년 경희대).

문제2. 용량이 10L인 어항과 광물질의 농도가 1g/L인 상수원이 있다. 어항 속에 이 상수원의 물을 가득 채운 상태에서 증발에 의해 8L의 물이 남았을 때 xL의 물을 덜어내고 같은 상수원의 물을 가득 채운다. 이와 같은 물갈이를 무수히 반복했을 때 어항 속의 물에 녹아있는 광물질의 최대농도가 1.5g/L을 넘지 않도록 하는 x의 최소값을 구하라(2002년 한양대 응용).

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

이런 문제는 어떤 상태와 다음 상태의 관계를 수학적으로 알아내는 것이 중요하다. 점화식으로 표현할 수 있다면 첫 단계는 성공이다. 두 번째 단계는 약간의 테크닉을 이용해 수학적으로 완전한 풀이를 완성하는 것이다. 이 문제는 수능시험에 출제될 수 있는 중요한 문제이므로 수열을 공부한 학생은 반드시 풀어봐야 할 것이다. 수열은 그 자체로 중요하지만 응용력을 기르지 않는다면 별로 힘을 쓸 수 없다. 어떻게 점화식을 만드는지 잘 관찰해보고 구술시험의 경향에 대해서 익혀보자.

▶ 해설 및 모범답안

1) n 번 물갈이를 했을 때 어항 속에 남아 있는 광물질의 양을 a_n이라 하면 다음의 점화식을 얻을 수 있다.

$$a_{n+1} = a_n - a_n \frac{x}{8} + 2 + x = \left(1 - \frac{x}{8}\right) a_n + 2 + x$$

여기서 $a_1 = 10 - 10 \cdot \frac{x}{8} + 2 + x = 12 - \frac{x}{4}$ 이다.

이 점화식으로 나타내어 지는 수열의 일반항을 구하기 위해 $\frac{16}{x} + 8 = p$라고 두고 준식을 다음처럼 변형시켜 보자.

그럼 새로운 수열 $a_n - p$는 등비수열이 된다.

$$\therefore\ a_n - p = (a_1 - p)(1 - \frac{x}{8})^{n-1}$$

여기서 $0 < 1 - \frac{x}{8} < 1$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = p = \frac{16}{x} + 8 \le 15$$

$$\therefore\ x \ge \frac{16}{7}$$

그러므로 구하는 답은 $\frac{16}{7}L$이 된다.

▶ 확장 문제

피보니치 수열의 점화식을 유도하고 일반항을 구하라.

문제3. 다음 질문에 답하라.
1) 함수의 연속성에 대해서 말하여라.
2) 함수 $f(x) = 0(x:$ 유리수$)$, $f(x) = 1(x:$ 무리수$)$로 정의될 때 이 함수의 연속성을 말하라.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

함수의 연속성과 미분가능성은 구술수학의 단골 메뉴다. 수학적인 정의를 정확하게 이해하고 표현하는 것은 문제를 푸는 테크닉을 익히는 것 이상으로 중요하지만, 문제의 특징상 수능과 같은 객관식 문제에는 등장할 수 없다.

따라서 구술시험에 잘 나올 수밖에 없다. 구술시험을 준비하는 학생은 수학적 정의를 잘 익히고 직관적인 이해도 아울러 겸비해야 한다.

이 문제는 지난 2월호에도 등장했지만 추가 질문을 풀어보면서 어떻게 사용되는지를 잘 살펴보도록 하자. 추가 질문 2)는 직관적으로 항상 불연속임을 알 수 있다. 하지만 이렇게 정의된 함수의 그래프를 머리로 떠올릴 수 있겠는가?

▶ 해설 및 모범답안

1) 함수 $y = f(x)$가 $x = a$에서 연속일 조건은 다음과 같다.

ㄱ) $x = a$에서 함수값 $f(a)$가 정의된다.

ㄴ) 극한값 $\lim_{x\to 0} f(x)$가 존재한다.

ㄷ) $\lim_{x\to 0} f(x) = f(a)$가 성립한다.

위의 세 가지 조건 중 어느 것이든 만족하지 않을 때, 불연속이라 한다.

직관적으로는 함수의 그래프가 끊어지는 점이 없이 모두 연결된 상태라고 이해할 수 있다. 하지만 이런 말을 수학적으로 엄밀하게 표현하려면 위의 세 가지 조건이 모두 필요하다. 어떤 점에서 연속인 것은 위의 정의에 따라 결정되고 어떤 구간에서 연속이라는 것은 그 구간 내의 모든 점에서 연속일 때를 말한다.

2) 일단 임의의 점 $x=a$에서 연속이라고 하면 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재해야 한다. 이것은 x가 a로 접근할 때 극한값이 존재한다는 뜻이므로 a에 수렴하는 수열에 대해서도 성립해야 한다. a에 수렴하는 두 수열 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$을 생각해보자.

여기서 항상 x_n은 유리수이고, y_n은 무리수인 수열로 가정한다.

따라서 $\lim f(x_n)=0$이고 $\lim f(y_n)=1$이다.

이것은 x가 a에 접근할 때 유리수로 접근할 때와 무리수로 접근할 때 극한값이 달라진다는 의미이므로 $x=a$에서 불연속이다.

예를 들어 $x=3$에서 극한값을 보면 $x_n=3+\dfrac{1}{n}$, $y_n=3+\dfrac{\sqrt{2}}{n}$로 두고 접근시키면 극한값이 각각 0, 1이 되므로 불연속임을 쉽게 알 수 있다.

▶ 확장 문제

함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서 연속임을 보여라.

문제4. 다음 질문에 답하라.

1) 중간값 정리란 무엇인가?

2) x_1, x_2,…… x_n은 폐구간 $[0, 1]$에 있는 n개의 실수일 때, 방정식 $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x-x_i|=\dfrac{1}{2}$을 만족시키는 실근 x가 폐구간 $[0, 1]$ 안에 적어도 한 개 존재함을 증명하라.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

중간값 정리에 관련된 문제는 대부분의 학교에서 출제됐다. 1학기 때도 다룬 문제지만 여기서 다시 한 번 정리해보자. 중간값의 정리는 연속과 관계 있는 매우 중요한 것이지만 직관적으로 당연한 것이다. 이 당연한 논리 속에서 숨어있는 강력한 응용력을 깨닫게 되면 수학의 오묘함에 또한 번 놀랄 것이다.

▶ 해설 및 모범답안

1) 직관적으로 너무 당연해서 수학적으로 표현하는 것이 오히려 이상한 느낌이 들지만 다음과 같다(엄밀한 증명은 매우 어렵고 또다른 엄밀한 정의가 필요하다).

   함수 $f(x)$가 폐구간 $[0, 1]$에서 연속이고, $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$사이의 임의의 값 k에 대해 $f(c)=k$, $a<c<b$를 만족시키는 c가 적어도 하나 존재한다.

   이것을 '중간값 정리'라 한다.

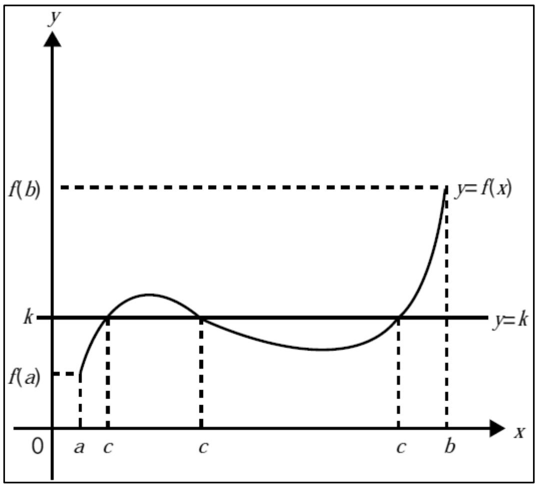
2) 중간값 정리를 이용해 간단하게 풀 수 있다.

   먼저 $f(t)=\dfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}|t-x_i|$라 두면

$$f(0)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$f(1)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|1-x_i|=1-f(0)$$

$$\therefore\ f(0)+f(1)=1$$



그러므로 $f(0)>\frac{1}{2}$이면 $f(1)<\frac{1}{2}$이고 $f(0)<\frac{1}{2}$이면 $f(1)>\frac{1}{2}$이 된다.

이 함수 $f(x)$는 폐구간 [0, 1]에서 연속이므로 중간값 정리에 의해서 이 구간에서 $f(x)=\frac{1}{2}$을 만족하는 실근 x가 존재한다고 말할 수 있다.

▶ 확장 문제

함수 $f(x)=(x-a)(x-b)+x$일 $f(c)=\frac{a+b}{c}$때가 되는 실수 c가 존재함을 중간값 정리를 이용해 증명하라.

문제5. 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 제1사분면의 원주의 길이는 $\frac{\pi}{2}$임을 증명하라(2002년 서울시립대 응용).

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

적분의 기본원리의 이해와 테크닉은 자연계 학생이라면 무조건 어느 정도 수준까지는 마스터해야 한다. 이 문제는 전형적인 구술 문제로, 접근하는 방법이 두 가지다. 두 가지 모두 익혀둬야 하지만 원론적으로 길이의 적분공식이 어떻게 유도되는지 직관적으로 이해해야 한다. 이해를 정확하게 하고 있다면 유도할 수 있고 적분의 정확한 의미도 파악할 수 있다. 이것이 자유자재로 된다면 적분 응용력이 생기고 적분에 대한 막연한 두려움도 없어진다.

▶ 해설 및 모범답안

반지름의 길이가 1인 원을 함수 형식으로 표현하면(제1사분면) $y=\sqrt{1-x^2}\quad(0\le x\le 1)$이다. 구하는 제1사분면의 원주의 길이 L은 다음과 같이 적분을 하면 된다.

$$L=\int_0^1\sqrt{1+(\frac{dy}{dt})^2}\,dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}})^2}\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

여기서 $x=\sin\theta$로 두면

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,d\theta$$
$$=\frac{\pi}{2}$$

또다른 풀이는 매개변수를 이용하는 것이다. 원의 방정식을 매개변수로 표현하면 $x=\cos t,\ y=\sin t$가 된다 $(0\le t\le\frac{\pi}{2})$.

따라서 $L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dt$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,d\theta$$
$$=\frac{\pi}{2}$$

▶ 확장 문제

선분의 길이를 구하는 적분 공식을 간단하게 유도하라.

2003년 09월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

문제1. 다음 질문에 답하여라.

1) 두 양의 정수 a, b에 대해 a를 b로 나눌 때 몫을 q라 하고 나머지를 r이라 두면 $a=bq+r$(단 $0 \le r < b$)로 표현된다. 이때 a와 b의 최대공약수와 b와 r의 최대공약수가 같음을 보여라.

2) n이 자연수일 때 n^2과 $n+1$은 항상 서로소임을 보여라.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

정수론은 기본적인 증명의 원리를 정확하게 이해하지 못하면 응용력이 생기지 않는다. 매회 정수론 문제를 수록하면서 이 점을 강조했다. 이 문제는 정수론의 기초 중 기초라 할 수 있다.

특히 2)번 문제를 해결하기 위해 간단한 원리가 어떻게 적용되는지 잘 살펴보면서 다시 한 번 정수론의 기초를 정리해보자.

▶ 해설 및 모범답안

1) a와 b의 최대공약수를 d라 하면 $a=a'd$, $b=b'd$라 쓸 수 있다(여기서 a'과 b'는 서로소이다). 이 식을 $a=bq+r$에 대입하고 정리하면, $r=(a'-b'q)d$가 된다.

따라서 r은 d의 배수가 되고 d는 결국 b와 r의 공약수가 된다.

$b=b'd$이고 $r=(a'-b'q)d$이므로 b'과 $a'-b'q$가 서로소가 되면 b와 r의 최대공약수는 d가 된다.

만약 b'과 $a'-b'q$가 서로소가 아니라고 가정하면 이 두 수는 1인 아닌 공약수를 갖게 된다. 이 수를 k라 두자. 그러면 $b'=kn$, $a'-b'q=km$으로 쓸 수 있고, 첫 번째 식을 두 번째 식에 대입해 정리하면 $a'=k(m+nq)$가 된다. 이 식은 a'과 b'는 공약수 k를 갖게 된다는 의미이므로 이것은 a'과 b'가 서로소라는 가정에 모순이다.

따라서 b'과 $a'-b'q$는 서로소이고 d는 b와 r의 최대공약수다.

2) 직관적으로 n^2과 $n+1$은 서로소임을 알 수 있지만 1)번 문제의 결과를 이용하면 쉽게 증명할 수 있다.

n^2을 $n+1$로 나눠 몫과 나머지를 구해서 표현하면 $n^2=(n+1)(n-1)+1$이 된다. 그러므로 n^2과 $n+1$의 최대공약수는 $n+1$과 1의 최대공약수와 같고 이것은 1이 되므로 증명이 됐다.

▶ 확장 문제

a와 b가 서로소이면 $a+b$와 ab도 서로소임을 증명하라.

문제2. 실수 x, y, z가 $x^2+y^2+z^2=1$을 만족할 때 다음 질문에 답하라.

1) $xy+yz+zx$의 최대값과 최소값을 구하라.

2) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$의 최소값을 구하라.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

실수 조건을 갖는 최대·최소문제는 공통수학에서 가장 중요한 응용분야다. 구술시험뿐 아니라 수능에서도 다양하게 다뤄지는 최대·최소문제는 2차함수의 그래프를 이용하거나 산술기하평균 부등식으로 쉽게 풀린다.

좀더 심화된 테크닉을 익히기 전에 코시-슈바르쯔 부등식의 응용 기법을 익혀둔다면 강력한 수학적 힘을 얻을 수 있다. 이것은 산술기하평균 부등식이 본질적으로 코시-슈바르쯔 부등식으로부터 유도될 수 있기 때문이다. 이 문제를 통해 실수 조건을 이용한 기법과 코시-슈바르쯔 부등식을 이용한 기법을 비교 검토하면서 다양한 기법을 익혀 보자.

▶ 해설 및 모범답안

1) $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\geq 0$

$\therefore\ x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$

조건에서 $x^2+y^2+z^2=1$이므로

$\therefore\ 1\geq xy+yz+zx$ ………… ①

$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=\frac{1}{2}\left[(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\right]\geq 0$

$\therefore\ x^2+y^2+z^2\geq -(xy+yz+zx)$

조건에서 $x^2+y^2+z^2=1$이므로

$\therefore\ xy+yz+zx\geq -1$ ………… ②

①과 ②에서 $-1\leq xy+yz+zx\leq 1$

따라서 $xy+yz+zx$의 최대값은 1이고 최소값은-1이다.

별해) 코시-슈바르쯔 부등식을 이용하면 간단하게 구할 수 있다.

$(x^2+y^2+z^2)(y^2+z^2+x^2)\geq(xy+yz+zx)^2$에서 $x^2+y^2+z^2=1$을 대입하면 된다.

2) 코시-슈바르쯔 부등식에 의해

$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)\geq\left(x^2\frac{1}{x^2}+y^2\frac{1}{y^2}+z^2\frac{1}{z^2}\right)^2=(1+1+1)^2$이다.

그러므로 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$의 최소값은 9가 된다.

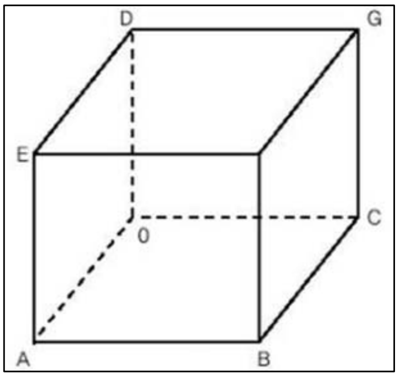
▶ 확장 문제

반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 삼각형 면적의 최대값을 구하라.

문제3. 정육면체의 한 꼭지점에 생쥐가 있다. 이 생쥐는 한 꼭지점에서 1회마다 변을 따라 다른 꼭지점으로 한칸씩 이동한다. 꼭지점에서 다른 꼭지점으로 이동할 때 방향을 선택할 확률은 모두 같다고 가정하고 다음 질문에 답하라.

1) 생쥐가 0점에서 출발해 2003회 이동한 후 다시 0점으로 돌아올 확률을 구하라.

2) 0점에서 출발한 생쥐가 $2n$회 이동해 다시 0점에 돌아올 확률을 P_n이라고 할 때, P_{n+1}과 P_n의 관계를 구하라.



▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

이 문제는 확률의 응용 문제로 고도의 수학적 사고력이 있어야 풀 수 있다. 2_n회 이동 후의 확률을 구하기 위해 점화식을 유도하는 과정이 재미있는데, 점화식을 스스로 유도하는 것은 고교수학에서는 수준 높은 추리과정에 속한다. 확률을 구하는 문제지만 수열의 일반식에 관한 통찰력을 갖고 있어야 이런 유형의 문제를 정복할 수 있다.

기본적인 실마리는 짝수와 홀수일 때를 구분해 위치를 파악해 내는 것이다. 이것은 간단한 시행착오를 통한 사고실험을 통해서 쉽게 알아낼 수 있지만, 이런 훈련을 평소에 소홀히 한 학생은 당황하기 마련이다. 지난번에 소개한 문제와 함께 점화식을 유도하는 연습을 충분히 해보기 바란다.

▶ 해설 및 모범답안

1) 처음 0점에서 1회 진행하면 꼭지점 A, C, D 세 곳으로 이동할 수 있다. 여기서 한 번 더 진행(2회 진행)하면 O, E, G, B로 이동할 수 있다.

   몇 회 더 진행해 보면 항상 짝수번 진행을 할 때만 다시 O점으로 돌아 올 수 있다는 점을 확인할 수 있다. 그러므로 2003회 이동해서 제자리로 돌아올 확률은 없다.

2) 1)번 문제와 같이 몇 번 진행을 시켜보면 2회 이동으로 0점으로 돌아오는 것은 다음과 같다는 것을 알 수 있다.

   첫째 꼭지점 E, B, G에서 출발하면 2회 이동 후 O점으로 진행할 수 있다. 예를 들면 E→D→O 또는 E→A→O로 이동하면 된다.

   이때의 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3 = \frac{1}{3}$이 된다. B, G도 마찬가지다.

   둘째 O점에서 출발해 2회 이동 후 다시 O점으로 돌아오는 경우는,

   O→A→O, O→D→O, O→C→O 이 세 가지 경우가 있다. 각각의 확률은 모두 $\left(\frac{1}{3}\right)^2$이 되므로 O점에서 O점으로 이동하는 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3 = \frac{1}{3}$이 된다.

   위의 사실을 종합해보면 P_{n+1}과 P_n의 관계를 알 수 있다.

   $2n$회, $2n+1$회, $2n+2$회를 연속적으로 적용시켜보면 $2n$회 이동 후에는 O에 존재하거나 E, B, G에 존재함을 알 수 있다. 이 경우는 모두 $2n+2$회째 O점으로 이동할 수 있다.

   즉 $P_2 = \frac{2}{9}(1-P_1)$, $P_3 = \frac{2}{9}(1-P_1-P_2)$

$$\therefore\ P_{n+1} = \frac{1}{9}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} P_k\right)$$

▶ 확장 문제

한 번에 1개 또는 2개의 계단을 오를 수 있을 때 n계단을 오르는 서로 다른 방법의 모든 경우의 수를 a_n이라 하자. a_{n+1}과 a_{n+2}의 관계를 점화식으로 나타내어라.

문제4. 다음 질문에 답하여라. 1) 함수 f가 실수를 정의역으로 하는 함수이고 임의의 실수 x, y에 대해서 항상 $f(xy) = f(x)f(y)$를 만족시킨다. 이런 조건을 만족하는 함수를 예를 들어보라. 2) 함수 g가 실수를 정의역으로 하는 함수이고 임의의 실수 x, y에 대해 항상 $g(x+y) = g(x) + g(y)$를 만족시킬 때 $g(x) = kx$임을 보여라(단 $g'(0) = k$이고 미분가능하다).

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

이 문제는 함수 방정식 문제에 속하는 전형적인 특징을 갖고 있다. 함수 방정식 문제는 특별한 풀이 방법이 없기 때문에 시행착오를 통한 사고실험에 의해 규칙이나 실마리를 얻어야 한다.

이런 유형을 만났을 때는 오히려 편안한 마음으로 좀 '무식'하게 접근하는 배짱이 필요하다.

2)번 유형문제는 미분을 이용하는, 전형적인 수학기법에 의해 쉽게 풀리는 문제다. 두둑한 배짱과 미분응용력으로 출제가능성이 높은 함수 방정식 문제들을 하나씩 정리해 나가기 바란다.

▶ 해설 및 모범답안

1) 이 조건을 만족하는 함수는 매우 많다. 몇 가지 예를 들면 상수함수 $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = |x|$ 등을 들 수 있다. $f(x) = |x|$일 때 $f(x) = |xy| = |x||y| = f(x)f(y)$를 만족함을 쉽게 확인할 수 있다.

2) $$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)+g(h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h} \\ &= g'(0) \\ &= k \end{aligned}$$

$g(x) = kx + c$(c는 상수)

$g(0+0) = g(0) + g(0)$이므로 $g(0) = 0$이 된다.

따라서 $c = 0$이다. $\therefore\ g(x) = kx$

▶ 확장 문제

함수 f가 실수를 정의역으로 하고 임의의 실수 x, y에 대해서 $f'(0) = 2$, $f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy$를

만족시킨다. 이와 같은 조건을 만족하는 함수 f를 구하라.

문제5. 다음을 증명하여라.

$z=\cos\theta-\sin\theta+i\sin 2\theta$**일 때** $\lim_{n\to\infty}|z|^2=0$**임을 보여라. 단** $0<\theta<\frac{\pi}{4}$**이다(2002학년도 서강대).**

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

복소수에 관련된 수학적 기초이론과 응용기술이 이과 수학에서 가장 중요한 테마 중 하나다. 따라서 복소수 단원에 좀더 많은 시간을 투자하면 좋은 성과를 거둘 수 있다. 대부분의 대학 구술시험에서 이런 유형의 문제가 실제로 출제됐고 출제되리라 예상할 수 있다. 이 문제는 삼각함수의 여러가지 법칙들을 알고 있다면 매우 쉽게 풀 수 있다. 그러나 한 문제 푸는 것으로 만족하지 말고 심도 있게 어려운 문제들도 다뤄보면서 복소수, 삼각함수 단원을 완전 마스터하기 바란다.

▶ 해설 및 모범답안

$$|z|=\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta)^2+\sin^2 2\theta}=\sqrt{1-\sin 2\theta+\sin^2 2\theta}$$

여기서 $\sin 2\theta=t\ (0<t<1)$라 두면, $|z|=\sqrt{t^2-t+1}=\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

분명히 $\frac{\sqrt{3}}{2}<|z|<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}|z|^2=0$임을 알 수 있다.

▶ 확장 문제

$|z|=4$, $|\omega-4|=4$를 만족하는 두 복소수 z와 ω에 대해 $|z+\omega|$의 최대값을 구하라.

문제6. 다음 질문에 답하여라.

1) $97=a_0+3a_1+3^2a_2+\cdots+3^na_n$**을 만족하는** $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,a_n$**을 구하라. 단** $a_k\ (k=0,1,2,n)$**는−1, 0, 1의 값을 가진다.**

2) **1g, 3g, 9g, 27g, 81g의 5개의 분동과 2개의 접시가 있는 양팔저울을 이용해 잴 수 있는 무게는 모두 몇 개인가?(단 분동을 접시 위에 올려놓지 않을 때도 있다).**

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

이런 유형은 구술시험의 최고봉으로 꼽히는 창의적 사고와 수학적 문제 해결능력을 측정하는 범주에 속하는 고난도 문제다. 문제를 가만히 보면 3진법과 관계가 있다는 것을 바로 알 수 있다. 하지만 계수가 0, 1, 2가 아니고−1, 0, 1로 바뀌어 있기 때문에 깊이 있게 추리하지 않으면 제대로 풀 수 없다. 특히 2)번 문제는 일반적인 3진법으로 풀어도 결과에 차이가 없지만 양팔저울의 특징과 주어진 추가 한 개씩만 존재하기 때문에−1, 0, 1을 이용해 3진법을 전개시키는 것이 필수적이다.

▶ 해설 및 모범답안

1) 97을 3진법으로 전개하면,

$$\begin{aligned}97&=1\cdot 3^4+1\cdot 3^2+2\cdot 3+1\\&=1\cdot 3^4+1\cdot 3^2+(3-1)\cdot 3+1\\&=1\cdot 3^4+1\cdot 3^2+3^2-3+1\\&=1\cdot 3^4+(3-2)\cdot 3^2+3^2-3+1\\&=1\cdot 3^4+1\cdot 3^3+(-1)3^2+(-1)3+1\end{aligned}$$

$\therefore\ a_0=1,\ a_1=-1,\ a_2=-1,\ a_3=1,\ a_4=1$이고 나머지는 모두 0이 된다.

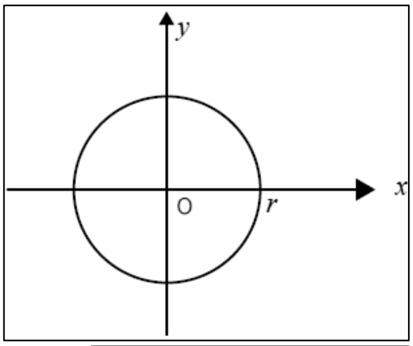
2) 주어진 분동을 이용해 잴 수 있는 무게는, $a_0+3a_1+3^2a_2+3^3a_3+3^4a_4$이고 $a_k\,(k=0,1,2,3,4)$는-1, 0, 1의 값을 가진다. 잴 수 있는 무게의 최소값은 1이며 최대는 121이다. 모든 자연수는 3진법 표현 후 위와 같이 나타낼 수 있으므로 무게는 모두 121개가 된다.

문제7. 반지름의 길이가 r인 구의 부피는 $\frac{4}{3}\pi r^3$이고 겉넓이는 $4\pi r^2$이라는 것을 증명하라.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

이 문제는 적분의 중요한 원리를 내포하고 있어 구술시험에 가장 많이 나오는 유형으로 볼 수 있다. 적분개념과 간단한 기술만 갖고 쉽게 풀 수 있는 문제이지만, 2)번에서 등장하는 부등식이 진정으로 무엇을 의미하는지 심사숙고해야 한다. 직관적으로 이 부등식을 느낄 수 없다면 각자 고통스런 훈련을 통해서 직관적 이해를 얻기를 바란다. 부피를 미분해보면 영감이 떠오를지도 모른다.

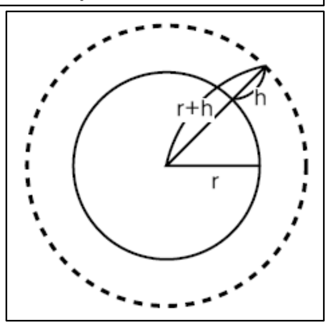
▶ 해설 및 모범답안



$x^2+y^2=r^2$인 원을 x축 둘레로 회전시킨 부피가 구의 부피이므로 다음처럼 회전체의 부피를 구하는 적분식을 이용하면 간단하게 구할 수 있다

$$V=\int_{-r}^{r}\pi y^2\,dx=\int_{-r}^{r}\pi(r^2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}\pi r^3$$

반지름의 길이가 r인 구의 부피를 $V(r)$, 겉넓이를 $S(r)$이라 두면, 작은 양수 h에 대해 반지름 $r+h$인 구의 겉넓이는 $S(r+h)$가 된다. 그림에서 처음 반지름이 r이 되는 곳에서 구의 얇은 껍질을 생각해보면 다음과 같은 부등식이 성립한다.



$$S(r)h<V(r+h)-V(r)<S(r+h)h$$

여기서 $V(r+h)-V(r)=\frac{4}{3}\pi(r+h)^3-\frac{4}{3}\pi r^3$

$$=\frac{4}{3}\pi(3r^2+3rh+h^2)h$$

$$\therefore\ S(r)<\frac{4}{3}\pi(3r^2+3rh+h^2)<S(r+h)$$

$$\lim_{h\to 0}S(r)\leq\lim_{h\to 0}\frac{4}{3}\pi(3r^2+3rh+h^2)\leq\lim_{h\to 0}S(r+h)$$

$$\therefore\ S(r)=4\pi r^2$$

▶ **확장문제**

반지름의 길이가 r인 원을 중심에서 b만큼 떨어진 직선을 둘레로 회전시킨 입체(토러스)의 부피를 구하라.

2003년 10월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

지금까지는 정수론과 방정식, 함수, 벡터, 미적분, 확률 통계 등 고교 수학의 내용을 정리하면서 심층면접에 필요한 여러가지 기교를 연습하는데 중점을 뒀다. 이번호는 2학기 수시모집을 대비해 기술적이고 기교적인 것보다는 기본적인 개념을 중점적으로 정리했다.

자주 출제된 주제에 대한 기출문제를 충분히 숙지하고 정리함으로써 자연스럽게 구술시험을 총정리할 수 있도록 구성했다. 연습과 총정리가 따로 있을 수 없지만 정리하는 기분으로 지금까지의 내용을 차분히 복습하기 바란다.

이번호를 볼 때는 실전 심층면접에 임하는 자세로 문제를 풀기 바란다. 해설을 미리 보지 말고 정신을 집중해서 스스로 답을 구해야 한다. 이렇게 연습을 해두면 실제 시험장에서 당황하지 않고 차분히 문제를 풀 수 있다.

수학용어나 개념들은 단원별로 정리하면서 정확한 수학적 정의를 다시 한번 확인할 필요가 있다. 또한 π가 무엇이냐 하는 문제에 어떻게 답을 하는지 잘 살펴보고 좀더 필요한 배경지식은 각자 다른 책과 인터넷을 참조해 보강하길 바란다.

문제1. 다음 수학 용어의 정의를 말하라(경희대, 서강대, 건국대, 서울대 등)

1) 함수

2) 수열

3) 라디안

4) 복소수의 극형식

5) 일차변환

6) 독립사건, 종속사건

7) 주기함수

8) 우함수 기함수

▶ 해설 및 모범답안

1) 함수 : 공집합이 아닌 두 집합 X, Y에서 X의 각각의 원소 x에 하나의 Y의 원소 y가 대응하는 관계를 X에서 Y로의 함수라 하고 $f: X \rightarrow Y$로 표현한다.

2) 수열 : 어떤 규칙에 따라 수를 나열한 것을 수열이라 하고, 각 수를 수열의 항이라 하며, n번째 항을 일반항이라고 한다. 수열은 간단히 $\{a_n\}$으로 표현한다.

3) 라디안 : 부채꼴에서 반지름의 길이와 호의 길이가 같을 때 중심각을 1라디안(1호도)이라 하고, 이것을 각 단위로 측정하는 방법이 호도법이다. π라디안은 180°에 해당한다.

4) 복소수의 극형식 : 복소평면에서 복소수 $z=a+bi$를 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 꼴로 표현한 것을 복소수의 극형식이라고 한다. 여기서 r은 복소수의 절대값($|z|$)이라 부르는데, 원점과 z 사이의 거리를 의미한다. θ는 z의 편각($Arg(z)$)이라 하는데 원점과 z를 연결한 선분이 x축(실수축)과 이루는 각도를 의미한다.

5) 일차변환 : 변환 $f(x, y) \to (x', y')$에서 x', y'이 각각 상수항을 갖지 않는 x, y의 일차식으로 나타내어질 때, 이런 변환 f를 일차변환이라 한다. 여기서 변환이란 좌표평면 위의 각 점을 좌표평면 위의 점으로 옮기는 대응을 의미한다.

6) 독립사건, 종속사건 : 사건 A가 일어난 경우와 사건 A가 일어나지 않은 경우에 따라 사건 B가 일어날 확률이 다를 때 두 사건은 종속사건이라 하고, 사건 A가 일어나는 여부와 관계 없이 사건 B가 일어날 확률이 달라지지 않을 때 두 사건은 독립사건이라 한다. 두 사건 A, B가 종속사건이면 $P(B|A) \neq P(B|A^c) \neq P(B)$이고, 독립사건이면 $P(B|A)=P(B|A^c)=P(B)$가 성립한다.

7) 주기함수 : 모든 x에 대해 함수 $f(x)$가 $f(x+T)=f(x)$ (단, $T \neq 0$)를 만족시킬 때 $f(x)$를 주기함수라 하고, 이 식을 만족하는 최소의 양수 T를 주기라 한다.

8) 우함수와 기함수 : 함수 $f(x)$가 임의의 x에 대해 $f(-x)=f(x)$일 때 우함수라 하고, 함수 $f(x)$가 임의의 x에 대해 $f(-x)=-f(x)$일 때 기함수라 한다.

문제2. 원주율 π가 무엇인지 정의하고, 그 값을 찾는 방법을 설명하라(건국대, 부산대 등).

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

원 넓이의 공식, 원 둘레의 길이 등의 공식은 수험생이라면 누구나 알고 있다. π는 수학에서 가장 빈번하게 사용하는 상수이고 무리수이며 초월수다. 그러면 π의 정확한 개념은 무엇일까. π의 값이 3.14…라는 사실은 어떻게 찾아낸 것일까.

현대의 슈퍼컴퓨터가 π값을 몇자리까지 계산했다는 등의 이야기는 무엇을 의미하는 것일까.

이런 질문들은 아주 기본적인 수학적 진리에 대한 호기심에서 출발한다. 이런 호기심이 수학 발전의 원동력이 되고, 수험생에게는 수학적 사고력을 키워주는 기초가 된다.

원주율에 대한 여러가지 내용이나 개념, 원리는 구술수학의 중요한 주제임을 명심하고 좀 더 깊은 내용들은 각자 다시 정리해보기 바란다.

▶ 해설 및 모범답안

π는 원주율을 나타낸다. 원주율은 지름과 원 둘레 길이의 비율이다. 즉 원 둘레의 길이를 l, 반지름을 r이라 하면 $\pi = \dfrac{l}{2r}$이다.

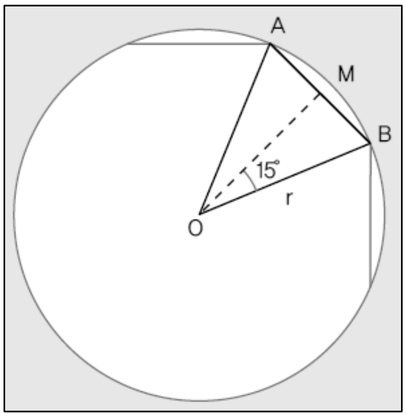
π값은 지름의 길이와 원 둘레의 길이를 직접 재서 근사값을 구하면 될 것 같다. 그러나 지름은 직선이니까 길이를 잴 수 있지만, 원 둘레의 길이를 구하는 것은 쉬운 일이 아니다.

값을 구하려면 정확하게 원 둘레의 길이를 구해야 하는데, 미적분이 발견되기 전에는 쉬운 일이 아니었고, 다만 근사적으로 값을 구했다.

원 안에 정n각형을 그려 그 둘레의 길이를 통해 원 둘레 길이의 근사값을 구할 수 있다. n의 값을 늘려 갈수록 원 둘레의 근사값은 정확해질 것이다. π의 값이 약 3이라는 것은 아주 오래 전부터 알려진 사실이다. π를 과학적으로 계산한 최초의 인물은 아르키메데스였던 것으로 추정하고 있다.

원주의 길이는 임의의 내접 정n각형의 둘레의 길이와 외접 정n각형의 둘레의 길이 사이에 존재한다. 정6각형, 정12각형, 정24각형, 정48각형… 이런 식으로 n을 늘려 가면서 내접다각형과 외접다각형의 둘레의 길이를 구해 나가면 원의 둘레와 π에 대한 좀더 정확한 값에 근접하게

된다. 아르키메데스는 이런 방법으로 $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$라는 π의 근사값을 구했는데, 소수 둘째자리까지 써보면 3.14가 된다. 이렇게 내•외접 다각형을 이용해 π를 계산하는 방법을 '고전적 방법'이라 한다. 이 방법은 17세기까지 사용됐다.



예를 들어 원 안에 정12각형을 그려 π값의 근사값을 계산해보자. 오른쪽 그림에서 AB의 길이는 $2BM = 2r\sin 15°$가 된다.

따라서 정12각형의 둘레의 길이는 $24r\sin 15°$가 되고 대략적으로 $\pi = \frac{24r\sin 15°}{2r} = 12r\sin 15°$가 된다.

여기서 sin15°의 값을 이용하면 π값이 계산된다. 정24각형, 정48각형… 이런 식으로 n을 늘려가면 더욱 정확한 π값을 계산할 수 있다.

문제 3. 자연수 집합의 원소의 개수가 많은가, 짝수 집합의 원소의 개수가 많은가?(아주대 2001 응용)

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

칸토르의 무한과 집합론에 관한 혁명적 발상과 정리들은 수학사적으로 하나의 사건이며 위대한 업적으로 평가된다.

중•고교 시절 첫 단원을 장식하는 집합의 이론들은 쉬운 듯 하면서도 어려운 주제이고, 역사적으로 중요한 여러가지 내용을 많이 포함한다.

특히 무한에 관한 엄밀한 수학적 고찰은 일반인에게 충격과 경외감을 던져 주기도 한다. 물론 매우 어렵고 수험생은 이해하기 쉽지 않은 점도 있지만, 이 문제를 통해 수학의 최고봉에 근접해 보는 경험도 구술면접에 도움이 될 것이다.

이 문제는 수학적인 기법의 측면에서 중요하기보다는 상식을 넘는 기묘한 발상에 대한 고찰과 호기심의 측면에서 더욱 중요하다.

▶ 해설 및 모범답안

자연수의 집합과 짝수의 집합은 모두 무한 집합으로, 집합의 원소 사이에 1:1 대응관계가 성립하므로 원소의 개수는 동일하다고 해야 한다. 여기서 짝수를 자연수 범위 안에서만 생각해 보면 아래 그림과 같은 1:1 대응관계가 성립한다.

$$\begin{array}{c} \{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\ \} \\ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow \\ \{\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \cdots\ \} \end{array}$$

위 문제를 언뜻 보면 짝수는 자연수 중 일부이므로 당연히 자연수의 개수가 많을 것으로 생각할 수 있다. 그러나 위에서처럼 두 집합의 원소를 1:1 대응시켜 나가면 원소의 개수가 서로 같다고 볼 수 있다.

즉 무한집합에서는 원소의 개수를 비교하는데 약간의 어려움이 있는데, 칸토르가 이 문제를 해결했다. 칸토르는 두 무한집합의 원소 사이에 1:1 대응관계가 있다면 두 집합의 원소의 개수(이를 칸토르는 '농도'라고 함)는 같다고 주장했다. 이에 따르면 자연수와 유리수는 농도가 같고(놀라운 사실!), 실수의 농도는 자연수의 농도보다 크다.

문제 4. 로그를 사용하는 이유는 무엇인가? 또 삼각함수가 생겨난 이유는 무엇인가?(서울대, 건국대 등)

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

로그 함수와 삼각함수는 계산을 편리하기 위해서 고안된 것이다. 수학자들은 계산을 편리하기 위해 여러가지 기법을 개발을 했는데, 로그나 삼각함수는 미적분처럼 일종의 계산기와 같은 것이다.

구술시험에서는 이런 식의 기본 질문부터 로그함수나 삼각함수의 여러가지 성질들을 간단하게 증명하라는 식의 문제까지 다양하게 출제됐고, 또 출제될 가능성이 높다. 예를 들면 $\log MN = \log M + \log N$, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$이 되는 이유를 물어볼 수 있다. 이런 질문에 대한 답변은 교과서에 나오는 성질들을 잘 정리해 둬도 별 어려움이 없을 것이다.

▶ 해설 및 모범답안

로그(logarithm)란 '비(比)의 수'를 의미하며 로그를 창안한 사람은 17세기 수학자 네이피어(John Napier)다. 네이피어는 좀더 빠르게 복잡한 계산을 처리하기 위해 로그를 고안했다. $\log MN = \log M + \log N$처럼 곱셈과 나눗셈이 좀더 단순한 계산인 덧셈과 뺄셈으로 바뀐다는 점이 로그의 장점이다.

네이피어의 로그 정의는 매우 복잡한 것이었는데, 브리그즈(Henry Briggs)가 네이피어에게 밑이 10인 로그를 제안했다. 네이피어가 이에 동의해 의견의 일치를 봤고, 이로서 오늘날 상용로그라 부르는 로그가 탄생했다.

로그를 이용하면 큰 숫자의 계산, 지수가 복잡한 수의 계산을 쉽게 할 수 있다. 라플라스가 "로그의 발명으로 일거리가 줄어서 천문학자의 수명이 배로 늘어났다"고 말한 사실은 이를 단적으로 나타내는 사례다. 오늘날엔 소형 계산기의 발달로 인해 계산 방법으로서 로그의 의미는 퇴색했다. 그러나 로그함수와 그 역함수인 지수함수는 현대의 수학에서 핵심적인 위치를 차지하고 있다.

삼각법(Trigonometry)의 기원은 고대문명까지 거슬러 올라가는데, 기원전 1650년경 고대 이집트의 문헌에서 이미 피라미드 밑면에서 이면각의 코탄젠트 값과 관계되는 문제가 나타났다. 바빌로니아의 점토판에서는 시컨트 표가 포함돼 있다.

삼각법이 발달하기 시작한 것은 건축 측량기술 및 천문학의 발달과 깊은 관계가 있다. 삼각법의 의의는 직삼각형은 그 크기와 관계없이 일정한 각도가 주어졌을 때 변의 길이의 비율이 일정하다는 사실이다. 이런 사실을 이용하면 실제로 잴 수 없는 건물의 높이나 강폭의 길이 등을 수월하게 계산할 수 있다. 2세기경 프톨레마이오스는 사인값을 0°에서 90°까지 0.25°간격으로 계산했다.

문제 5. 정사면체 주사위 2개를 던지는 실험을 한다. 다음 물음에 답하라(2002 숙명여대 응용).

1) 나올 수 있는 결과를 모두 나열하라.

2) 두눈 수의 합이 6이 될 확률을 구하라.

3) 육면체 주사위 1개와 정사면체 주사위 1개를 동시에 던져 두눈의 수의 합이 6이 될 확률을 구하라.

▶ 해설 및 모범답안

1) 가능한 경우는 (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)/(2, 1), … (4, 3), (4, 4)의 16가지가 있다.

2) 두눈의 합이 6이 되는 경우는 (2, 4), (3, 3), (4, 2)의 3가지이므로 구하는 확률은 $\frac{3}{16}$이다.

3) 나올 수 있는 모든 경우는

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)

(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)

⋮

(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4)

의 24가지이고 두눈의 합이 6이 되는 경우는 (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 4가지이므로 구하는 확률은 $\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$이다.

문제 6. 다음 물음에 답하라.

1) 집합 X={1,2,3,4,5,6}에 대해 집합 X에서 X로의 함수 f 중에서 일대일 대응인 것의 개수를 구하라.

2) 1)에서 구한 일대일 대응 f가 다음 조건을 만족할 확률을 구하라.

$i, j \in A,\ i+j=7$이면 $f(i)+f(j)=7$이다.

▶ 해설 및 모범답안

1) 일대일 대응이 되려면 정의역의 원소 1에 대응하는 공역의 원소는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개 원소 중 하나다. 정의역의 원소 2에 대응하는 공역의 원소는 정의역의 원소 1에 대응한 공역의 원소를 제외한 5개가 된다. 같은 방법으로 나머지 정의역의 원소도 마찬가지다. 즉 일대일 대응을 만족하기 위해서 어떤 한 원소가 대응한 공역의 원소는 다른 정의역의 원소가 대응될 수 없다. 그러므로 구하는 함수의 개수는 6!=6×5×4×3×2×1=720개다.

2) 정의역의 원소 중에서 합이 7이 되는 경우는 (1, 6), (2, 5), (3, 4)의 세 가지가 있다. 공역의 원소 중에서 합이 7이 되는 경우도 마찬가지로 3가지가 있다. 이들을 두 개씩 묶어서 세트로 보고 정의역과 공역의 원소가 각각 3개인 일대일 대응을 생각할 수 있으므로 일대일 대응 f의 개수는 3×2×1=6이다.

그런데 여기서 각 세트끼리 대응시킨 후 세부 순서를 바꿀 수 있다. 예를 들면 정의역의 (2, 5)와 공역의 (3, 4)가 대응 되는 경우의 수는 2가지가 나온다. 각 세트의 경우에 모두 2 가지 경우를 생각할 수 있으므로 모든 경우의 수는 6×2×2×2×1=48이다.

그러므로 구하는 확률은 $\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$이다.

문제 7. 현재의 8자리 전화번호의 자리수가 얼마나 더 늘어날 것인지 말하시오(이화여대 응용).

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

특별한 기교나 지식적인 면보다는 사고력이나 문제 해결력을 알아보기 위해서 이와 같은 문제들이 구술시험에 자주 출제된다. 어떤 공식에 의해서 기계적으로 풀기보다는 창의적이고 논리적으로 접근해야만 좋은 점수를 얻을 수 있다. 논리적이고 창의적인 사고야말로 수학교육의 목표일 수도 있다.

우리나라 이발사의 수나 맨홀 뚜껑이 둥근 이유를 묻는 문제들도 위와 같은 유형의 문제라 할 수 있다. 정확한 답을 구하는 것이 중요한 것이 아니라 접근하는 과정이 중요하다. 이런 과정을 중요시 여기는 문제들은 앞으로도 출제될 가능성이 많다. 다음의 해설도 하나의 예에 불과하다. 각자 더 세련된 답을 구해보자.

▶ 해설 및 모범답안

전화번호 자리수가 향후 꽤 오랫동안 더 늘어나지 않을 것이라고 예상한다. 그 이유는 다음과 같다. 전화번호의 자리수는 전체 전화대수에 따라 정해질 것이다. 우리나라 인구가 4천 5백만명 정도고, 4명을 1가구로 가정하면 약 1천만 가구 정도가 되므로 가정에 보급된 전화대수는 1천만대 정도에 이른다. 또한 관공서나 회사에 보급된 전화의 대수는 우리나라 경제활동 인구를 약 2천만 명으로 추산하고, 평균적으로 직장인 2명당 1대의 전화가 있다고 보아 1천만대로 가정하도록 한다.

이런 가정하에서는 우리나라에 약 2천만대의 전화가 있는 것으로 추정할 수 있다. 전국을 10개 정도의 지역으로 나눠 지역 번호를 정하면, 지역당 평균 2백만대의 전화가 있게 되므로 7자리 번호로도 충분하다. 그런데 8자리 번호가 필요했다는 것은 전화가 가장 많은 서울의 전화대수가 1천만대를 초과했기 때문일 것이다.

즉 전화번호의 자리수는 전화의 최대 밀집지역인 서울을 기준으로 살펴보는 것이 타당하다. 서울의 전화대수가 1억대가 넘는 시점에 이르면 9자리 전화번호가 필요하다. 그러나 1억대가 넘는다 해도 서울 안에서 지역번호를 세분화하는 방법이 있을 수 있다. 현재 (02)인 지역번호를 (020-029)까지 10가지로 세분화하면 8자리 번호로 최대 10억대의 전화를 나타내는 것이 가능해진다.

그런데 서울의 전화대수가 10억대를 넘지는 않을 것으로 예상한다. 현재 전화기는 저렴하기 때문에 필요한 만큼 충분히 보급돼 있다고 볼 수 있다. 따라서 전화대수의 증가는 서울 인구의 증가와 비례할 것이다. 그런데 서울은 지리적으로나 인구밀도 측면에서 보나, 인구 증가에 일정한 한계가 있다. 서울 인구 자체가 줄고 있다는 기사도 있다. 현재와는 전혀 다른 고밀도 도시의 기술적 조건이 갖춰지지 않는 한 서울의 인구 증가로 인해 필요한 전화의 대수가 10억대를 넘어서진 않을 것으로 보인다.

문제 8. 다음 물음에 답하라.

1) 공간 상의 한 점 $p(x_1, y_1, z_1)$과 평면 $a: ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d_1|}{a^2+b^2+c^2}$$ 임을 증명하라.

2) 실수 x, y, z가 다음 두 식을 만족하는 실수해 (x, y, z)를 모두 구하라.

$$x^2+y^2+z^2=1$$

$$x+y+z=\sqrt{3}$$

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

평면에서 점과 직선의 거리를 유도하는 방식은 구술시험뿐 아니라 수능에서도 출제가 될 가능성이 높다. 3차원에서 평면과 점의 거리는 형식적으로는 2차원의 거리와 같다. 벡터를 통한 증명은 계산이 간결하고 발상이 멋있다는 특징이 있다.

두 번째 문제는 단순한 방정식을 어떻게 기하학과 연결시키는지 잘 보여주는 예다. 삼수선의 정리, 벡터의 내적, 복소수의 극형식 등 증명과 유도가 간단한 것은 모두 정리해 두자.

▶ 해설 및 모범답안

1) 점 $p(x_1, y_1, z_1)$에서 평면 α에 내린 수선의 발을 $H(x_0, y_0, z_0)$라 하면, 점 H는 평면 α위의 점이므로 $ax_0+by_0+cz_0+d=0$을 만족한다.

평면 α의 법선벡터 $\vec{v}$=(a, b, c)이고, 점 P, H의 위치 벡터를 가각 $\vec{p}, \vec{h}$라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HP}\bullet\vec{v}&=(\vec{p}-\vec{h})\bullet\vec{v}\\&=\vec{p}\bullet\vec{v}-\vec{h}\bullet\vec{v}\\&=ax_1+by_1+cz_1-(ax_0+bx_0+cx_0)\\&=ax_1+by_1+cz_1+d\end{aligned}$$

여기서 분명히 $\overrightarrow{HP}$와 $\vec{v}$는 평행하므로

$$\overrightarrow{HP}\bullet\vec{v}=\pm|\overrightarrow{HP}|\bullet|\vec{v}|$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{HP}\bullet\vec{v}|=|\overrightarrow{HP}|\bullet|\vec{v}|$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{HP}|=\frac{|\overrightarrow{HP}\bullet\vec{v}|}{|\vec{v}|}=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

2) $3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0$

여기서 좌변은 항상 0보다 크거나 같은데 좌변을 계산하면 0이 된다.

$$\therefore\ x=y=z$$

$x+y+z=\sqrt{3}$에서 $3x=\sqrt{3}$이고 구하는 해는 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$이다.

※ 다른 풀이

$x^2+y^2+z^2$은 공간에서 구를 나타내고 $x+y+z=\sqrt{3}$은 평면의 방정식이다. 이 두 방정식을 만족하는 실수해는 구와 평면이 만나는 원 위에 존재하게 된다.

이 구의 원점에서 평면에 이르는 거리 d는 위 1) 문제를 참조해 쉽게 구할 수 있다.

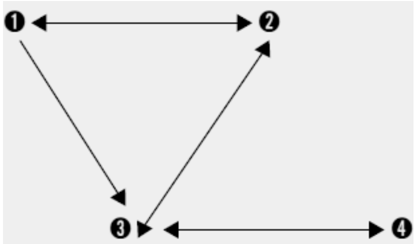
즉 거리 $d=\dfrac{|-\sqrt{3}|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=1$

그러므로 평면은 이 구에 접하게 되고 그 접점이 구하는 유일한 해가 된다.

구와 평면의 위치를 잘 생각해보면 접점은 대칭적이고 x축, y축, z축과 동일한 거리에 놓이게 된다.

그러므로 구하는 점은 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$이 되고 이것이 위 문제의 해가 된다.

문제 9. 4개의 도시를 연결하는 버스노선이 그림과 같고 이 노선에 대응하는 행렬 $A=(a_{ij})$를 i도시에서 j도시로 가는 노선이 있으면 $a_{ij}=1$, 없으면 $a_{ij}=0$로 정의한다. 다음 물음에 답하라(화살표는 버스가 가는 방향이다).



1) 우리가 만든 노선행렬은 $A=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$이 됨을 간단히 설명하라.

2) A^2을 계산하고 $A^2=(b_{ij})$에서 b_{ij}는 무엇을 의미하는 지 간단히 설명하라.

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

오일러의 케니히스 베르크 다리 문제에 대한 논의부터 지도에 색칠하는 4색 문제까지 그래프에 관련된 이론들은 계속 발전했고, 현대 컴퓨터수학의 근간이 됐다.

이 문제는 좀 생소하겠지만 일상에서 만날 수 있는 여러가지 사건을 그래프와 행렬을 이용해서 모델링할 수 있다는 예를 보여주는 문제다. 주어진 조건에 따라 천천히 따라가면 생각보다는 쉽게 답을 구할 수 있다.

▶ 해설 및 모범답안

1) 화살표 방향을 고려하면 a_{ij}는 어떤 도시 i에서 j로 가는 버스노선의 경우를 나타낸다.

예를 들어 $a_{13}=1$은 ①에서 ③으로 가는 노선이 존재한다는 뜻이고 $a_{13}=0$은 노선이 없다는 뜻이다. 이는 화살표 방향을 보면 쉽게 이해할 수 있다.

2) $A^2=AA\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&1&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$

A^2은 두 번 갈아타서 갈 수 있는 노선을 의미한다. 즉 $b_{11}=1$은 버스를 두 번 갈아타서 ①에서 출발해 다시 ①로 오는 경우의 수를 의미한다. 그림에서처럼 ①에서 ②로 가서 다시 ①로 오는 방법이 한 가지가 있다는 뜻이다.

$b_{22}=2$는 ②에서 ②로 가는 방법의 수가 ①이나 ③을 경유하는 총 2가지가 존재함을 말한다. 다른 b_{ij}들도 마찬가지로 방법으로 해석하면 된다.

2003년 11월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

■ 단원 출제 경향 및 대비 방안

지난달에 이어 이번 호에서도 2학기 수시모집을 대비해 기본 개념들을 중점 정리했다. 특히 심층 면접을 대비해 출제 빈도가 높거나 기본 개념의 이해 정도를 측정하는 문제들을 중심으로 구성했다. 일상과 연관된 확률 문제는 구술시험에서 단골 출제된다는 것을 명심하고 평소 논리와 직관을 동시에 적용하는 노력을 기울여 주길 바란다. 또 기본 소양 문제도 자주 출제된다는 것을 감안해 평소 교과외적인 수학의 역사나 에피소드에 관한 서적을 읽어보길 적극 추천한다. 기본적인 공리나 정리를 숙지하는 일이야 말로 기하학 정복의 지름길이라는 점, 다시 한 번 강조한다.

문제1. 세개의 문 가운데 한 곳에만 선물을 숨겨 놨다. 문 하나를 선택한 뒤 선물이 없는 남은 한 곳을 보여주고 다시 선택할 기회를 줬을 때 바꾸는 것이 좋은가?(부산대 2002 응용)

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

이 문제는 출제된 지문만 가지고는 핵심을 정확하게 이해하기가 힘들다. 먼저 조건부 확률과 관련이 있다는 것을 파악해야 한다.

학생들은 대부분 확률문제를 어렵게 생각하고 대충 외워서 문제를 푸는 경향이 있다. 확률은 기본적으로 경우의 수를 신속하게 계산할 수 있어야 하는데 특히 이번 문제는 조건부확률의 개념을 잘 이해해서 조직적으로 접근하면 쉽게 풀 수 있다.

▶ 해설 및 모범답안

세개의 문을 각각 A, B, C라고 가정하자. 이미 선택한 문을 바꾸지 않는 경우를 생각해 본다면 세개의 문 가운데 하나를 골라 상품을 타게 되는 것이므로 확률은 $\frac{1}{3}$.

다시 문을 바꾼다고 가정하자. 이때는 처음 선택한 문에 상품이 있을 때와 없을 때로 나눠 생각해 볼 수가 있다. 처음 선택한 문에 상품이 있을 경우는 $\frac{1}{3}$이고, 이 경우 문을 바꾸게 되므로 상품을 받지 못한다. 처음 선택한 문에 상품이 없는 경우는 $\frac{2}{3}$이다.

이 경우 사회자가 빈 문을 보여주기 때문에 나머지 한 곳에 반드시 상품이 있어야 하므로 바꿀 경우 상품을 받을 수 있게 된다. 따라서 문을 바꾸지 않을 경우는 상품을 탈 확률이 $\frac{1}{3}$, 문을 바꿀 경우는 상품을 탈 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 출연자는 선택한 문을 바꾸는 것이 유리하다

이 상황을 모식도를 그려서 다시 정리하면 오른쪽과 같다.

	A	B	C
1	○	×	×
2	×	○	×
3	×	×	○

여기서 O표는 자동차가 들어있는 문 X는 비어있는 문이다. A를 선택했다고 했을 때, 첫 번째 경우는 사회자가 B나 C 중 하나를 열게 된다. 그대로 있으면 상품, 옮긴다면 빈 문이다. 두 번째 경우는 사회자가 C를 연다. 그대로 있으면 빈 문, 움직이면 상품을 얻게 된다. 세 번째 경우엔 B를 열게 된다. 그대로 있으면 빈 문, 움직이면 상품을 탄다. 즉 가만히 있을 때 상품을

탈 확률 $\frac{1}{3}$, 움직일 때 상품을 탈 확률이 $\frac{2}{3}$임을 알 수 있다.

▶ Tip

이 문제는 몬티홀 문제로 한때 미국 전역을 떠들썩했다. 몬티는 자신의 재력으로 친구들에게 선의의 장난을 하는 것을 즐기는 마음씨 좋은 백만장자.

어느날 그는 마릴린이란 가난한 친구에게 내기를 제안했다. "이번 크리스마스 선물로 네게 선물을 하고 싶으면 그냥 주면 재미가 없잖아? 이런 게임을 하자고. 저 건물에 세개의 문이 있지? 이 가운데 한 곳에는 멋진 고급 승용차가 있고 나머지 문들 뒤에는 자전거가 있다네. 자네가 선택한 문 뒤에 있는 선물을 주도록 하지." 얘기를 들은 마릴린이 그 중 하나를 고르자 몬티가 새로운 제안했다.

"그걸 골랐나? 내 당신에게 한 번의 기회를 더 주지. 내가 남은 두 개의 문들 중 자전거가 있는 문을 열지. 그리고 나서 원래의 선택을 고수하든지 아니면 나머지 하나로 바꿔도 되네."

마릴린에게 남은 문들 중 하나를 더 선택할 권리가 주어졌다. 그렇다면 자동차를 받기 위해선 원래대로 고집하는 게 나을까, 아니면 선택을 바꾸는 편이 나을까? 과연 몬티는 더 나은 기회를 준 것인가? 확률로는 원래 선택한 문이 아닌 다른 문을 선택할 경우에 자동차를 타게 될 확률이 더 높다.

이 문제에 대한 상담을 맡았던 IQ 228의 최고 지능 보유자 메릴린 보스 사반트는 다음과 같은 조언을 했다. "선택을 바꾸세요. 처음 선택한 그대로의 상태로는 이길 확률이 $\frac{1}{3}$이지만 다른 문으로 바꾸면 이길 승산이 두배인 $\frac{2}{3}$가 됩니다." 이 조언은 엄청난 항의를 불렀다. 하지만 그녀의 조언은 옳은 것이다. 왜 그런지 생각해 보자.

◎ A에 자동차가 있을 경우

<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>유지</th><th>변경</th><th></th></tr>
<tr><td>선택</td><td>사회자</td><td>×</td><td rowspan="2">당첨</td><td rowspan="2">꽝</td><td rowspan="2">자동차가 A에 있고 문 A를 선택하면 사회자는 B나 C를 선택할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>선택</td><td>×</td><td>사회자</td></tr>
<tr><td></td><td>선택</td><td>사회자</td><td>꽝</td><td>당첨</td><td rowspan="2">A에 자동차가 있으므로 사회자는 절대 A를 선택하지 않는다.</td></tr>
<tr><td></td><td>사회자</td><td>선택</td><td>꽝</td><td>당첨</td></tr>
</table>

◎ B에 자동차가 있을 경우

<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>유지</th><th>변경</th><th></th></tr>
<tr><td>선택</td><td></td><td>사회자</td><td>꽝</td><td>당첨</td><td rowspan="2">B에 자동차가 있으므로 사회자는 절대 B를 선택하지 않는다.</td></tr>
<tr><td>사회자</td><td></td><td>선택</td><td>꽝</td><td>당첨</td></tr>
<tr><td>사회자</td><td>선택</td><td>×</td><td rowspan="2">당첨</td><td rowspan="2">꽝</td><td rowspan="2">자동차가 B에 있고 문 B를 선택하면 사회자는 A나 C를 선택할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>×</td><td>선택</td><td>사회자</td></tr>
</table>

◎ C에 자동차가 있을 경우

<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>유지</th><th>변경</th><th></th></tr>
<tr><td>선택</td><td>사회자</td><td></td><td>꽝</td><td>당첨</td><td rowspan="2">C에 자동차가 있으므로 사회자는 절대 C를 선택하지 않는다.</td></tr>
<tr><td>사회자</td><td>선택</td><td></td><td>꽝</td><td>당첨</td></tr>
<tr><td>사회자</td><td>×</td><td>선택</td><td rowspan="2">당첨</td><td rowspan="2">꽝</td><td rowspan="2">자동차가 C에 있고 문 C를 선택하면 사회자는 A나 B를 선택할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>×</td><td>사회자</td><td>선택</td></tr>
</table>

유지해서 당첨될 확률 : $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

변경해서 당첨될 확률 : $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

결국 출연자는 처음 선택한 문을 변경했을 때 당첨될 확률이 더 높다.

문제2. 정다면체를 설명하고 정육각형으로 정다면체를 만들 수 없는 이유에 대해 논리적으로 답하라(2002 숙명여대 응용).

▶ 해설 및 모범답안

모든 면이 정다각형이고 꼭지점에 모인 면의 개수가 같은 볼록한 다면체를 정다면체라고 한다. 입체도형을 만들려면 한 꼭지점에 적어도 3개의 면이 모여야 한다. 두 개만으로는 꼭 달라붙게 되어 입체가 되지 않는다. 정다면체를 구성하는 면으로는 정삼각형, 정사각형, 정오각형, 정육각형, 정칠각형 등을 생각해 볼 수 있다.

그런데 정삼각형이 한 꼭지점에 3, 4, 5개까지 모일 때는 문제가 없지만 6개가 모이면 360°가 되고 7개 이상이면 360°를 넘기 때문에 꼭지점은 생기지 않는다. 마찬가지로 정사각형은 3개가 모이면 괜찮지만 4개 이상은 360°를 초과해 다면체를 구성할 수 없다. 꼭지점 한 개에 정삼각형이 3개 모이면 정사면체, 4개가 되면 정팔면체, 5개이면 정이십면체가 된다.

또 정사각형이 3개 모이면 정육면제, 정오각형이 3개가 모이면 정십이면체가 되고 더 이상의 정다면체는 만들어지지 않는다.

정다면체의 각 면이 정삼각형으로 이뤄졌다고 가정하자.

첫 번째 경우는 세 면이 만나서 꼭지각을 이룰 때인데 이 경우는 각들의 합이 60°×3=180°이다. 이것이 바로 정사면체가 된다.

두 번째 경우는 정삼각형 네 개가 한 꼭지점에 모일 때인데 이때의 꼭지각은 60°×4=240°, 정팔면체가 된다.

세 번째로 정삼각형이 다섯개가 한 꼭지점에 모인 경우. 이때 꼭지각은 60°×5=300°이고, 정이십면체가 된다. 정삼각형이 여섯개가 모이면 각의 합이 360°가 되어 다면체 구성이 불가능해진다.

이번엔 정사각형으로 다면체를 만드는 경우를 생각하자. 적어도 세 면이 모여야 하므로 이때는 90°×3=270°, 정육면체가 된다. 앞서와 마찬가지로 네 개가 모이면 90°×4=360°가 돼 다면체 구성이 불가능하다.

마지막으로 정오각형의 경우. 정오각형은 한 각이 108°이기 때문에 세 면이 모이면 108°×3=324°로 정십이면체가 된다. 정오각형으로는 그 이상의 다면체를 만들 수 없다. 아울러 한각이 120°인 정육각형도 다면체를 구성할 수 없다. 따라서 존재하는 모든 정다면체는 앞서 열거한 다섯개 뿐이다.

결론적으로 정다면체는 정삼각형으로 3개, 정사각형으로 1개, 그리고 정오각형으로 1개 등 모두 5개밖에 없으며 정육각형 정다면체는 존재하지 않는다.

[문제3] 다음 질문에 답하여라.

1) n이 자연수일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

2) $S = \frac{1}{10}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2001}}\right)$의 정수부분을 구하라. (단, $\sqrt{2001} = 44.7$로 계산)

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

이 문제는 매우 기교적인 방법을 필요로 한다. 피라미드식 질문에는 보통 첫 문제에 실마리가 숨겨져 있다. 구술 수학에서 응용문제가 나온다면 위와 같이 피라미드 다단계의 형식을 가질 것이다. 지금까지 출제된 기출문제를 통해서도 그것을 충분히 감지할 수 있을 것이다. 증명과정 모습은 지루한 것 같지만 적분을 이용해서 교묘하게 부등식을 만들어 내는 내용은 재미있다. 미분적분이 가지는 이런 기교적인 면을 잘 정리해 둔다면 든든한 힘이 될 것이다.

▶ 해설 및 모범답안

1) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$은 $x > 0$에서 감소함수이므로 ($\because y' = -\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{2} < 0$)

$n \le x \le n+1$이면 $\frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{1}{\sqrt{x}} \ge \frac{1}{\sqrt{n+1}}$이 된다.

위 부등식의 각 변을 적분하면

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}} dx < \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} dx$$

$\therefore \ \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \frac{1}{\sqrt{n}}$이 성립한다.

2) 1)의 결과에 $n = 1, 2, 3, \cdots, 2000$을 대입하면

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \frac{1}{\sqrt{1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{2001}} < \int_{2000}^{2001} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \frac{1}{\sqrt{2000}}$$ 이 된다.

위 부등식의 변변을 모두 더하면

$10S - 1 < \int_1^{2001} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < 10S - \frac{1}{\sqrt{2001}}$이 된다.

$$10S - 1 < 2\sqrt{2001} - 2 < 10S - \frac{1}{\sqrt{2001}}$$

$\therefore$ 87.…<10S<88.에서 8.7…S<8.8… 즉, S의 정수 부분은 8이다.

문제4. 다음 질문에 답하여라.

1) 공간상의 두 점 A B로부터 거리가 같은 점들은 집합은 무엇일까?

2) 공간상의 세 점 A B C로부터 거리가 같은 점들의 집합은 무엇일까?

3) 사면체 ABCD가 있다. 이 사면체의 꼭지점 ABCD로부터 거리가 같은 점들의 집합은 무엇인가?

▶ 출제 의도와 구술 ADVICE

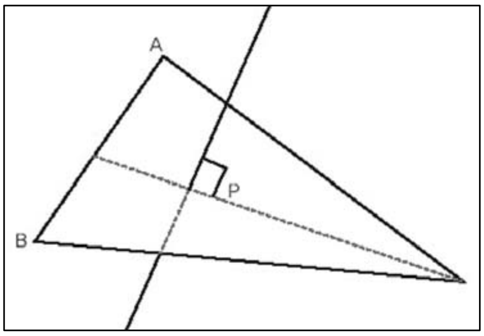
중학교 때 배운 평면기하와 고등학교 나오는 해석기하를 적절하게 적용시키는 문제가 자주 출제되고 있다. 이런 문제는 공간도형에 대한 직관적 이해와 상상력이 필요하고 평면도형에 관한 여러가지 기본 지식을 적용할 수 있어야 한다.

▶ 해설 및 모범답안

1) 평면에서 두 점 A,B로부터 같은 거리만큼 떨어진 점의 집합은 선분AB의 수직 이등분선임은 쉽게 이해할 수 있다. 공간으로 확장해서 생각하면 선분 AB의 수직 이등분선은 무수히 많이 존재한다.

이 수직이등분선으로 이루어진 평면을 선분AB의 수직이등분평면이라고 하면 임의의 점에서 두 점 AB에 이르는 거리는 모두 같게 되므로 바로 이 수직이등분평면이 우리가 구하는 집합이 된다.

2) 공간상의 일직선 위에 있지 않은 세 점으로부터 같은 거리만큼 떨어진 점들의 집합은 세 점 A, B, C를 품는 평면에 수직이고 삼각형 ABC의 외심을 지나는 직선이다.



왜냐하면 1)에서 설명한 것처럼 공간에서 A와 B로부터 같은 거리만큼 떨어진 점들의 집합은 선분 AB의 수직 이등분평면이다. 마찬가지로 두 점 B, C로부터 같은 거리만큼 떨어진 점들의 집합은 선분 BC의 수직이등분평면이다. 두 수직이등분평면의 교선이 우리가 구하는 집합이 된다.

이 직선은 선분 AB에 수직이고 선분 BC에 수직이므로 삼각형 ABC를 품은 평면에 수직이다. 그리고 이 직선은 삼각형 ABC의 외심을 지남을 알 수 있다.

3) 사면체의 꼭지점 A, B, C, D로부터 같은 거리만큼 떨어진 점은 유일하게 하나 존재한다. 먼저 2)에 의해서 세 점 A, B, C로부터 같은 거리만큼 떨어진 점들의 집합은 세 점 A, B, C를 품는 평면에 수직이고 삼각형 ABC의 외심을 지나는 직선이다.

마찬가지로 세 점 B, C, D로부터 같은 거리만큼 떨어진 점들의 집합은 세 점 B,C,D를 품는 평면에 수직이고 삼각형 BCD의 외심을 지나는 직선이다. 두 직선이 만약 교점을 가진다면 그 점에서 네 점 A, B, C, D에 이르는 거리는 모두 같게 되므로 주어진 조건을 만족시킨다.

첫째 이 두 직선은 평행할 수 없다. 왜냐하면 A, B, C. D는 동일한 평면 위의 점이 아니기 때문에 A, B, C를 품는 평면에 수직인 직선과 B, C, D를 품는 평면에 수직은 직선은 평행할 수 없다.

둘째 두 직선은 꼬인 위치에 있지 않다. 왜냐하면 두 직선 모두 선분 BC의 수직 이등분평면 위의 점이기 때문이다.

따라서 동일 평면 위의 두 직선이므로 꼬인 위치일 수 없다. 이상에서 동일 평면 위에 있지 않은 네점 A, B, C, D에서 같은 거리만큼 떨어진 점은 유일하게 하나 존재함을 알 수 있다.

2003년 12월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

■ 단원 출제 경향 및 대비 방안

이번호는 원리적이고 기본적인 문제가 아니라 실전 테크닉 문제 위주로 꾸며봤다. 시험을 앞둔 수험생이라면 기출문제를 정리하는 것이 가장 바람직한 시험준비가 되겠지만 지금까지 나왔던 내용들이 기출문제 중심의 기본 개념들을 담고 있으므로 테크닉만을 따로 연습해 보는 것도 충분한 가치가 있을 것이다.

이번호에서는 미적분을 제외한 구술 실전에서 까다롭게 생각되는 정수론, 집합, 공간도형에 관한 문제들을 중심으로 소개한다. 실전에서 당황하지 않고 제대로 실력 발휘를 하려면 특히 이 부분에 대한 강한 자신감이 뒷받침되어야 한다.

어설픈 예상 문제를 풀기보다 지금까지 연재된 여러가지 기본 문제들을 정리하고 이번호에 중점적으로 다뤄진 문제들로 마무리해서 자신의 수학 실력을 향상시켜보기 바란다.

문제1. 1, 2, 3 세개의 숫자 가운데 어느 하나를 갖는 네 개의 수 a_1, a_2, a_3, a_4가 차례로 있다. $a_1+a_2+a_3+a_4=8$일 때, $(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2+(a_4)^2$의 최대값을 구하라.

▶ 해설 및 모범답안

1이 a개, 2가 b개, 3이 c개 들어있다고 가정하자.

$a+b+c=4 \qquad a+2b+3c=8$

두 식을 연립하여 풀면 $b=4-2a$, $c=a$

$b\geq 0$, $c\geq 0$이므로 $0\leq a\leq 2$이다.

$(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2+(a_4)^2=a+4b+9c=2a+16$

$0\leq a\leq 2$이므로 최대값은 $a=2$일 때 20이다.

문제2. 집합 X, A, B가 있다. X에는 원소 5개가 있고 $A\subset X$, $B\subset X$이다.

1) 부분집합 A와 B를 동시에 만들 수 있는 가지수는?

2) A의 모든 원소가 B에 속하도록 A와 B를 만들 수 있는 가지수는?

3) A에는 속하지만 B에는 속하지 않는 원소가 있도록 A와 B를 만들 수 있는 가지수는?

▶ 해설 및 모범답안

1) $n(X)=5$이므로 X의 부분집합의 개수는 2^5개. 따라서 부분집합 A, B를 동시에 만들므로 $2^5\times 2^5=2^{10}=1024$개.

답 : 1024개

2) 조건에 따라 $A\subset B\subset X$를 만족시키는 순서쌍 (A, B)의 가지수이므로

$n(B)=0$일 때, $1\times 2^0=1$

$n(B)=1$일 때, $5\times 2^1=10$

$n(B)=2$일 때, ${}_5C_2\times 2^2=40$

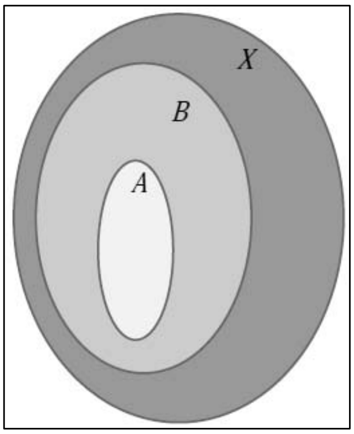
$n(B)=3$일 때, ${}_5C_3\times 2^3=80$

$n(B)=4$일 때, ${}_5C_4\times 2^4=80$

$n(B)=5$일 때, ${}_5C_5\times 2^5=32$

따라서 1+10+40+80+80+32=243

답 243개



그림처럼 집합 A, B, X가 만들어져야 하므로 원소 5개를 이 세 개에 적절하게 배치시키면 된다.

그러므로 조건을 만족하는 순서쌍 (A, B)는 $3^5=243$개가 된다.

3) $A\cap B\neq\Phi$, 즉 $A-B\neq\Phi$이므로 $A\not\subset B$.

1)과 2)의 $(A,\ B)$의 개수에서 $A\subset B\subset X$인 경우를 제외하면 된다.

그러므로 1024−243=781개.

답 781개

문제3. 10개의 같은 선물을 6명의 어린이들에게 나누어 주는 경우의 수를 구하여라(단, 각각의 어린이는 최소한 1개 이상의 선물을 받는다).

▶ 해설 및 모범답안

우선 6명의 어린이들에게 1개씩 선물을 나눠준다. 이제 남은 4개의 선물을 6명에게 나눠줄 수 있는 경우의 수를 구하면 된다. 4개를 분리하는 방법은

4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1이므로

i) 6명중 한 어린이에게 4개를 나눠주는 방법(4=4) : 6가지

ii) 6명중 한 명에게 3개, 다른 한 명에게 1개를 나눠주는 방법(4=3+1) : 3개를 주는 어린이를 택하는 방법이 6가지, 나머지 5명중에서 1개를 주는 어린이를 택하는 방법이 5가지이므로 6×5=30가지.

iii) 6명중 2명의 어린이에게 각각 2 개씩 나눠주는 방법(4=2+2) : 2개를 주는 어린이 한 명을 택하는 방법이 6가지, 나머지 5명 가운데 다시 2개를 주는 또다른 어린이를 택하는 방법이 5가지. 그런데 A라는 어린이가 2개를 받고, 다음에 B라는 어린이가 2개를 받은 경우와 B라는 어린이가 2개를 받고, 다음에 A라는 어린이가 2개를 받은 경우가 같은 것이므로 구하는 경우의 수는 $\frac{1}{2}\times6\times5=15$가지.

vi) 6명중 3명의 어린이에게 각각 2개, 1개, 1개를 나눠주는 방법(4=2+1+1) : 이번 경우도 iii)의 경우처럼 A가 2개, B가 1개, C가 1개를 받은 경우와 A가 2개, C가 1개, B가 1개의 선물을 받은 경우가 중복된다. 따라서 구하는 경우의 수는 $\frac{1}{2}\times6\times5\times4=60$가지.

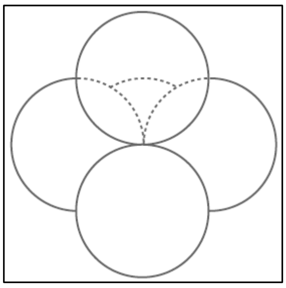
v) 6명 가운데 4명에게 1개씩 나눠주는 방법(4=1+1+1+1) : 4명의 어린이가 똑같이 1개씩

받으므로 선물을 받지 않는 2명을 뽑는 경우를 생각하자. 역시 A가 선물을 받지 않고, 다음에 B가 선물을 받지 않는 경우와 B가 선물을 받지 않고, 다음에 A가 선물을 받지 않는 경우가 같으므로 구하는 경우의 수는 $\frac{1}{2}\times6\times5=15$가지.

∴ 구하는 모든 경우의 수는 따라서 6+30+15+60+15=126가지.

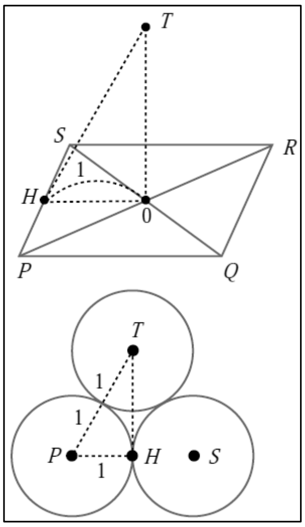
별해 : 어린이 6명이 받는 선물 개수를 각각 $x_1, x_2, \cdots, x_6$라 하면 $x_1+x_2+\cdots+x_6=4$를 만족하는 음이 아닌 정수해의 갯수를 구하는 문제가 된다. 이것은 6개에서 중복을 허락해서 4개를 뽑는 것과 같기 때문에 ${}_6H_4={}_9C_4$로 계산하면 된다. 중복조합을 알면 쉽게 계산이 되는데 아쉽게도 중복조합이 최근 교육 과정에서 제외됐다.

문제4. 오른쪽과 같이 반지름의 길이가 1인 쇠구슬 5개 중 4개를 가지고 각 구슬의 중심이 정사각형의 꼭지점을 이루도록 평면 위에 붙여 놓는다. 나머지 1개의 쇠구슬을 4개의 쇠구슬과 접하도록 가운데에 올려 놓았을 때, 평면으로부터 쌓아 올린 쇠구슬 꼭대기까지의 높이를 구하여라.



▶ 해설 및 모범답안

다섯 개의 쇠구슬의 중심을 각각 P, Q, R, S, T라 하면 그들의 배열은 오른쪽 그림과 같다.



정사각형 $PQRS$의 중심을 O라 하면 $\overline{OH}=1$

$$\overline{TO}^2=\overline{TH}^2-\overline{OH}^2$$

$$=\overline{TH}^2-1$$

$\overline{TH}$는 그림과 같이 배열하므로 $\overline{TH}=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$

$\overline{TO}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$

지면에서 꼭대기까지의 높이는 지면에서 O까지 1, O에서 T까지 $\sqrt{2}$, T에서 꼭대기까지 1이므로 높이는 $2+\sqrt{2}$이다.

문제5. A, B 2종류의 세균을 배양하고 있다. 세균 A는 30분마다 분열해서 개수가 2배로 되고, 세균 B는 1시간마다 분열해서 개수가 3배가 된다고 한다. ($\log_{10}2=0.301$, $\log_{10}3=0.477$)

1) 세균 A가 최초로 3개 있다. 1백만개를 넘는 것은 배양을 시작해서 몇 시간 뒤인가.

2) 1개의 세균 A와 1천개의 세균 B를 동시에 배양을 시작한다. 세균 A의 수가 B의 수를 따라 잡는 것은 배양 시작 후 몇 시간 뒤인가.

▶ 해설 및 모범답안

1) 세균 A가 n시간 후에 문제와 같이 1백만개를 넘는다고 하면

$3 \cdot 2^{2n} > 10^6 \quad \therefore \log 3 + 2n\log 2 > 6$

$\therefore$ 0.477+0.602n>6 $\therefore$0.602n>5.523

$\therefore$ n>9.17

여기서 n은 0.5의 배수이므로 n=9.5
그러므로 9시간 30분 후 1백만개가 넘는다고 보면 된다.

2) 문제의 조건에서 $2^{2n} \geqq 1000 \times 3^n$ …… ① n시간 후에 세균 A가 세균 B의 수를 따라 잡는 경우.

$2^{2n+1} \geqq 1000 \times 3^n$ ………… ② n시간 30분 후 세균 A가 세균 B의 수를 따라 잡는 경우.

여기서 ①②에서 ②의 부등식이 작은 n을 만족하므로

$(2n+1)\log 2 \geqq \log 1000 + n\log 3$

$\therefore 0.301(2n+1) \geqq 3 + 0.477n$

$\therefore 0.125n \geqq 2.699 \qquad \therefore n \geqq 21.592$

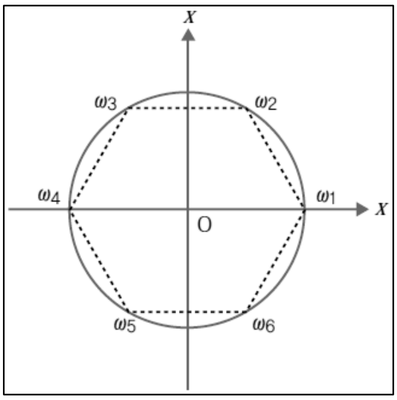
그러므로 22시간 30분 후 B의 수를 따라 잡는다.

[문제6] 복소평면에서 반지름의 길이가 1인 단위원을 6등분한 점을 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6$라 한다.

1) $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6$의 값을 구하라.

2) $\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4\omega_5\omega_6$의 값을 구하라.

3) $(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)(\omega_1 - \omega_4)(\omega_1 - \omega_5)(\omega_1 - \omega_6)$의 값을 구하라.



▶ 해설 및 모범답안

1) 정육각형이므로 $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6 = 0$

2) $x^6 - 1 = (x - \omega_1)(x - \omega_2) \cdots (x - \omega_6)$이므로 $x = 0$을 대입하면,

$\therefore \omega_1\omega_2\omega_3\omega_4\omega_5\omega_6 = -1$

3) $(x - \omega_1)(x - \omega_2) \cdots (x - \omega_6) = (x-1)(x - \omega_2) \cdots (x - \omega_6)$

$(\because \omega_1 = 1)$

$x^6 - 1 = (x-1)(x^5 + x^4 + \cdots + x + 1)$이므로

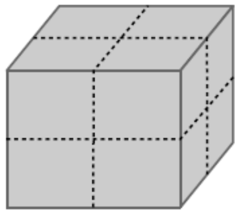
$\therefore x^5 + x^4 + \cdots + x + 1 = (x - \omega_2) \cdots (x - \omega_6)$

$x = \omega_1 = 1$을 대입하면 $6 = (1 - \omega_2) \cdots (1 - \omega_6) = (\omega_1 - \omega_2) \cdots (\omega_1 - \omega_6)$

별해 : $(\omega_1-\omega_2)(\omega_1-\omega_3)(\omega_1-\omega_4)(\omega_1-\omega_5)(\omega_1-\omega_6)$

$$=\omega_6\times\overset{\frown}{\omega_6\omega_1}\text{중점}\times 2\omega_1\times\overset{\frown}{\omega_2\omega_1}\text{중점}\times\omega_2=6$$

[문제7] 오른쪽 그림과 같이 큰 정육면체를 크기가 같은 8개의 작은 정육면체로 분할했다. 모든 꼭지점 중에서 임의로 세 꼭지점을 선택하여 선분으로 연결할 때, 삼각형이 만들어질 확률을 구하시오.



▶ 해설 및 모범답안

꼭지점은 모두 27개이다.

이 가운데 세 점을 취하는 방법은

$${}_{27}C_3=\frac{27\cdot 26\cdot 25}{6}=2925\text{가지}.$$

또 삼각형이 되지 않는 경우는 세 점이 일직선 위에 있는 경우이므로 그 가지수를 구하면

i) 각 모서리와 평행하게 세 점을 취할 때

9×3=27 가지

ii) 각 면의 대각선 위의 세 점을 취할 때

9×2=18가지

iii) 공간의 대각선 상의 세 점을 취할 때

4가지

따라서, 만들어지는 삼각형의 총 개수는

2925−(27+18+4)=2876개

그러므로 삼각형이 되는 확률은 $\frac{2876}{2925}$이 된다.

2004년 01월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

■ 구술 면접 현장 중계

귀류법이란 무엇인가. 귀류법이 성립하는 이유를 설명하고, 귀류법 증명을 이용하여 소수의 개수가 무한히 많음을 증명하라.

▶ 면접 시뮬레이션

학생 : 귀류법은 증명방법의 하나로, 결론을 부정하면 가정에 모순된다는 것을 보여줌으로써 결론이 옳다는 것을 입증하는 방법입니다. 즉 대우명제 $\sim q \to \sim p$가 참임을 증명함으로써 $p \to q$도 참임을 증명하는 것입니다.

교수 : 그렇다면 대우명제를 증명하면 원래 명제가 증명되는 까닭은 무엇입니까.

학생: 조건 p의 진리집합을 P, 조건 q의 진리집합을 Q라 할 때, $p \to q$가 참이라는 것은 $P \subset Q$임을 뜻합니다. 그런데 $\sim q \to \sim p$가 참이라면 $Q^C \subset P^C$이 되고 따라서 $P \subset Q$가 됩니다. 결국 $P \subset Q$이기 때문에 $p \to q$가 참이 되는 것입니다.

교수 : 잘 답해 줬습니다. 또 다른 예를 들어 말해 보세요.

학생 : 예. 우리가 알고 있는 무리수 $\sqrt{2}$가 진짜 무리수임을 증명할 때 귀류법을 이용하면 간단합니다. 이 증명의 핵심은 '$\sqrt{2}$가 유리수라고 가정'하고 시작하는데 이 가정이 틀렸다는 것을 증명하는 것이 핵심입니다.

교수 : 그렇다면 귀류법을 이용하여 소수의 개수가 무한히 많음을 증명해 보세요.

학생: 소수의 개수가 유한하다고 가정하고, 이를 $P_1, P_2, \cdots, P_n$이라 하겠습니다. 이때 $N = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_{n+1}$이라는 수를 생각해 보면 N은 소수가 아니므로 합성수이고 따라서 소수들의 곱으로 표현돼야 합니다. 그런데 N은 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 어느 것으로도 나눠 떨어지지 않습니다. 이것은 모순입니다. 따라서 소수의 개수는 무한히 많습니다.

교수 : 다음은 소수를 정의해 보세요.

학생 : 1보다 큰 자연수 중, 1과 자기 자신 외에 양의 약수를 갖지 않는 수입니다.

교수 : 그럼 1도 소수인가요.

학생 : 1도 소수인 것 같은데 교과서에서는 소수가 아니라고 정의돼 있습니다.

교수 : 그렇다면 소수를 정의할 때 왜 1을 제외할까요.

학생 : 만약 1을 소수라고 한다면 어떤 수를 소인수 분해할 때 여러가지로 소인수 분해되기 때문에 전개하는데 번거로워질 것 같습니다.

교수 : 예. 소인수 분해 과정에서 여러 개의 정답이 나오는 것을 피하기 위해 1을 소수에서 제외한 것이죠. 어쨌든 잘 대답했습니다.

■ 감상포인트

아주 기본적인 정의와 개념에 대한 철저한 이해는 구술 시험 준비의 첫 단계다. 특별한 수학적 테크닉이 필요하지 않기 때문에 방심할 수도 있다. 그러나 이런 내용들은 평소에 정리만 잘 해

두어도 시험에서의 고득점은 문제없다.

본문 속에 등장하는 귀류법과 소수에 관한 내용은 그 자체로도 매우 중요하고 앞으로 계속 시험에 등장할 가능성이 높다. 앞의 시뮬레이션에서 보듯 암기한 것을 충분히 정리해 대답하는 기본 요령은 아무리 강조해도 지나침이 없다. 다만 충분한 이해 과정이 없다면 교수의 다단계 질문에 막혀 감점 당할 수가 있다. 귀류법은 아주 간단한 논리 형식을 가지고는 있지만 아주 명쾌하고 쉬운 증명법이 아니다. 가끔 소수 개수의 무한성 증명을 할 때 증명이 틀렸다고 오해하는 학생들이 있다.

예를 들면 소수 2, 3, 5, 7, 11, 13이라는 여섯개의 소수가 있다고 할 때 이 소수들을 모두 곱하고 1을 더한 새로운 수는 소수가 아니므로 증명이 틀렸다고 착각한다. 물론 2×3×5×7×11×13+1=59×509이므로 소수가 아니다. 그러나 증명의 핵심은 이 새로운 수가 2, 3, 5, 7, 11, 13으로는 나눠지지 않는다는 것이다.

■ 심층가이드

● 유클리드의 원론과 귀류법

유클리드가 쓴 '원론'은 흔히 서양에서 성서 다음의 베스트셀러로 불린다. 우리가 중학교에서 배우는 도형에 대한 이론 대부분은 이 '원론'에 수록된 것이다. 이 책은 2천년 이상 기하학의 교과서로 군림해 왔으며, 서양 근대 과학의 성립에 큰 영향을 준 것으로 평가받고 있다. 유클리드의 '원론'은 모두 13권으로 4백65개의 명제를 수록하고 있으며, 기하학뿐만 아니라 수리론도 담고 있다.

유클리드 원론의 9권 20번째 명제가 '소수의 개수는 무한하다'라는 것인데, 이 명제에 대한 증명은 흔히 수학자들이 수학적 우아함의 모델로 간주하고 있다. 유클리드가 이 증명에서 사용한 방법이 바로 귀류법으로 그 내용은 이미 앞에서 살펴본 것과 같다.

● 귀류법 증명과 무리수의 발견

귀류법 증명의 가장 오래된 대표적인 예는 $\sqrt{2}$가 무리수임을 증명하는 것이다. 이 증명은 논증수학의 기원이라고 주장하는 학자가 있을 정도로 중요한 수학사적 의미를 지닌다.

$\sqrt{2}$가 무리수라는 사실은 피타고라스 학파에 의해 발견됐는데 그 증명은 다음과 같다.

[증명] $\sqrt{2}$가 유리수라고 가정하면 $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ (a와 b는 서로소인 정수)

$a=\sqrt{2}b$, 즉 $a^2=2b^2$

a^2이 2의 배수이므로 a도 2의 배수이다.

$a=2k$라 놓으면 $4k^2=2b^2$, 즉 $b^2=2k^2$

b^2이 2의 배수이므로 b도 2의 배수.

이는 a와 b는 서로소라는 가정에 모순된다. 그러므로 $\sqrt{2}$는 무리수다.

● 귀류법에 숨어있는 배중률

어떤 사람이 남자임을 증명하는 방법은 여러가지가 있다. 만약 그 사람이 여자가 아님을 증명한다면 자동으로 그 사람은 남자가 된다. 이렇게 증명하는 것이 바로 귀류법인데 가만히 생각해보면 좀 이상하다는 것을 알 수 있다. 전혀 이상하지 않다면 다른 예를 들어보자. 문이 한

개씩인 방이 두 개 있는데, 이 가운데 방A에는 호랑이가 있고 방B에는 고양이가 있다고 하자. 방A에 호랑이가 있다는 것을 어떻게 증명하면 될까. 이를 귀류법적으로 증명하면 방B의 문을 열어보고 고양이가 있다는 것을 보여주면 된다. 하지만 방A에 호랑이가 있다는 것을 직접 본 사람은 아무도 없다. 증명을 했다고 볼 수 있을까.

$\sqrt{2}$가 유리수가 아님을 증명하면, 그것은 곧 $\sqrt{2}$가 무리수임을 자동적으로 증명한 꼴이다. 그러나 $\sqrt{2}$가 무리수라는 것을 직접 본 사람은 아무도 없다. 그런데 어떻게 증명된 것일까. 그것은 바로 실수는 정확하게 유리수와 무리수 두 종류로 나눠진다는 확고불변한 전제 때문이다.

귀류법은 A라는 명제를 증명하고자 할 때 'A가 아니다'는 부정을 도입함으로써 모순을 유도, A임을 증명한다. 즉 'A가 아닌 것이 아니면 A다'라는 논리 관계가 적용된 것이다.

고전논리학은 자동률 'A는 A이다', 반사율 'A가 B라면 B는 A이다', 배중률 'A이거나 A가 아니거나 둘 중의 하나다'를 기초로 삼고 있다. 너무나 뻔한 얘기를 하고 있는 것처럼 보이지만, 가만히 생각해보면 이들 중 어느 하나라도 흔들린다면 논리학은 사상누각이 되버린다는 것을 알 수 있다. 따라서 확실성을 담보하기 위해 논리학자들은 일반인이 보기에 괴상한 짓거리를 하고 있는 것처럼 보이는 것이다.

배중률이 문제를 야기할 수 있는 경우는 어떤 증명이 무한체 또는 무한집합을 대상으로 귀류법적 증명을 실행하고자 할 때다. 배중률은 유한집합을 대상으로 할 때만 분명하게 성립하지만, 무한집합에 적용했을 때 많은 귀류법적 증명들이 과연 어떤 명제나 존재에 대한 진정한 증명이냐에 대해 의문이 제기되고 있는 것이다. 즉 어떤 무한체 혹은 무한집합이 어떤 속성을 갖는다 또는 그것에 어떤 속성을 갖는다는 것을 증명하고자 할 때, 존재하지 않는다고 가정하고 모순을 유도함으로써 존재를 증명하게 되는데, 이 경우 존재 실체를 제시하는 것이 불가능한 경우가 있을 수도 있기 때문이다.

한 예로 원주율의 십진법 전개를 생각해 보자. 이것이 무리수이며 초월수라는 사실은 이미 익히 알려져 있다. 이를 십진법으로 전개할 때 9를 6개 연속시킨 숫자 배열이 존재할까. 물론 존재한다. 소수점 이하 7백62번째 자리에서 나타남을 볼 수 있다. 그렇다면 9가 연속으로 1백개 배열된 숫자 배열은 나타날까. 이에 대해 이런 배열이 존재하지 않는다고 단정하는 것은 잘못이라고 말할 수 있다. 하지만 이것이 그런 배열이 존재한다는 사실을 증명하고 있는 것도 아니다. 즉 이 경우 배중률은 성립하지 않고 있다.

다시 돌아가서 어떤 사람이 여자가 아니면 남자임에 틀림없는지 생각해 보면, 배중률의 핵심을 이해할 수 있을 것이다.

[문제1]

1. m, n을 정수라 할 때,

1) n^2을 3으로 나눈 나머지가 2가 되지 않음을 보여라.

2) $m^2+n^2=l^2$이 성립할 때, m, n 중 적어도 한쪽이 3으로 나눠 떨어짐을 1)의 결과를 이용해서 보여라.

▶ 전문가 클리닉

정수론에서 가장 핵심적인 기술이 바로 정수를 분류하는 기술이다. 어떤 수를 n으로 나누면

나머지가 0에서 $n-1$까지 존재하므로 이를 가지고 n개로 분류하는 것이 바로 정수의 합동 이론이다. 예를 들어 5로 나눈 나머지를 가지고 분류하면 3과 13은 같은 수가 되는데, 둘 다 5로 나누면 나머지가 3이고 두 수는 합동이 된다($13 \equiv 3 (mod\ 5)$).

이 증명은 전형적인 귀류법과 정수분류법을 이용하고 있다. 어려운 내용은 아니지만 증명을 보면서 핵심 아이디어를 터득하기 바란다.

▶ 예시답안

1) $n=3k$(k : 정수) : $n^2=(3k)^2=9k^2=3(3k^2)$.

$n=3k+1$(k : 정수) : $n^2=(3k+1)^2=3(3k^2+2k)+1$.

$n=3k+2$(k : 정수) : $n^2=(3k+2)^2=3(3k^2+4k+1)+1$.

제곱수를 3으로 나누면 나머지가 0과 1 뿐이다.

2) 귀류법 이용.

m^2, n^2 모두 3으로 나누어 떨어지지 않는다면, 1)의 결과에서

$m^2=3k+1,\ n^2=3l+1$ (k, l : 정수).

즉, $m^2+n^2=3(k+l)+2$

한편 1)에서 $l^2=3p$ 또는 $l^2=3p+1$(p : 정수)이므로 모순.

따라서 $m^2+n^2=l^2$을 성립하려면 m, n 중 적어도 한 쪽은 3으로 나누어 떨어진다.

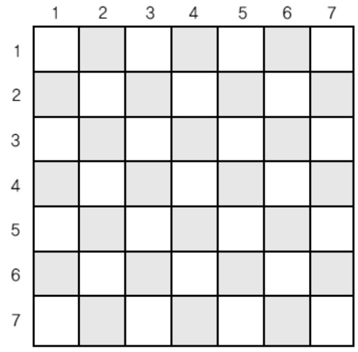
[문제2]

어떤 학급의 49명 학생이 7행 7열로 앉아 있다. 각 좌석의 전, 후, 좌, 우의 좌석을 그 좌석의 인근 좌석이라 할 때, 49명 학생이 모두 제자리를 떠나서 인근 좌석에 가서 앉을 수 있겠는가. 그 이유를 말하여라.

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 쉬운 문제처럼 보이지만 해설에서 제시하는 특이한 증명법을 배우기 전까지는 매우 어려운 문제일 수도 있다.

이런 증명법을 염색법이라고 한다. 염색법을 이용한 증명은 경이롭기까지 하다. 지금까지 구술시험에 등장한 적은 없지만 수학이 무엇인가에 대한 영감을 줄 것이다.



▶ 예시답안

모든 좌석마다 2 또는 3, 혹은 4개의 인근 좌석이 있어서 조건대로 바꾸어 앉을 수 있을 것 같다. 하지만 다음 그림처럼 좌석에 흑백이 엇갈리게 색을 칠한다면 조건대로 앉을 수 없음을 알 수 있다. 왜냐하면 검정색 좌석에 앉은 사람과 흰색 좌석에 앉은 사람이 누구도 빠짐없이 서로 바꿔 앉아야 하지만 좌석 개수가 1개 차이나기 때문이다.

[문제3] 다음을 증명하라.

1) **세 정수 a, b, c는 절대값이 홀수다. 방정식 $ax^2+bx+c=0$은 유리수를 근으로 갖지 않는다.**

2) **a, b가 홀수일 때, 방정식 $x^2+ax+b=0$는 정수해를 갖지 않는다.**(2002 포스텍 응용)

▶ 전문가 클리닉

정수론은 수학적 재능을 알아보는 가장 좋은 분야 중의 하나라는 말이 있다. 아이디어와 기법은 다양하지만 시작은 홀짝 분석 기법부터 익혀야 한다.

이 문제는 너무나 유명한 나머지 좀 공부한다는 학생이라면 풀이를 외울 정도다. 역시 증명의 기본 바탕은 귀류법이다. 정수론 정복의 첫 단계라 생각하고 차근차근 실력을 쌓아보자.

▶ 예시답안

1) 만약 $ax^2+bx+c=0$가 유리수를 근으로 가진다고 가정하고, 그 근을 $x=\frac{q}{p}$(p, q : 서로소인 정수)라 하자.

즉, $a\left(\frac{q}{p}\right)^2+b\left(\frac{q}{p}\right)+c=0$

$\therefore\ aq^2+bpq+cp^2=0,\ aq^2+cp^2=-bpq$

(단, $|a|$, $|b|$, $|c|$: 홀수).

즉, $|aq^2+cp^2|=|bpq|$ ⋯ $*$

여기서, p, q는 서로소인 정수이므로,

i) p:홀수, q:홀수이면, $(*)$의 좌변=짝수, 우변=홀수, 모순.

ii) p:홀수, q:짝수이면, $(*)$의 좌변=홀수, 우변=짝수, 모순.

iii) p:짝수, q:홀수이면, $(*)$의 좌변=홀수, 우변=짝수, 모순.

때문에 $x=\frac{q}{p}$는 근이 될 수 없다.

예를 들면 $x^2-3x+1=0$의 해는 $x=3\pm\sqrt{5}$가 된다.

물론 이처럼 귀류법을 이용하지 않고 다르게 증명을 할 수도 있다.

2) $x^2+ax+b=0$가 두 근 α, β가 정수라면, 근과 계수와의 관계에서, $\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$(단, α, β:홀수)

i) α:짝수, β:짝수이면, a, b 모두 짝수, 모순.

ii) α:짝수, β:홀수 혹은 α:홀수, β:짝수이면, a는 홀수, b는 짝수, 모순.

iii α:홀수, β:홀수이면, a는 짝수, b는 홀수이므로 모순.

이상에서, 정수해를 가질 수 없다.

[문제4]

1) 평면에서 3개의 직선으로 구분할 수 있는 평면의 최대 개수는 7개이다. 4개의 직선으로 구분할 수 있는 평면의 최대 개수는 몇개인가. 그리고 이유는 무엇인가.

2) n개의 직선으로 구분할 수 있는 최대 개수는 몇개인가.

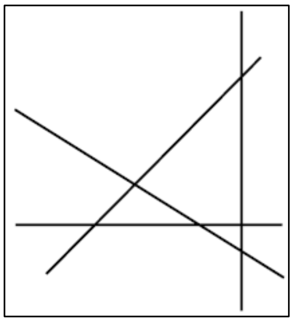
3) 공간에서 3개의 평면으로 구분할 수 있는 공간의 최대 개수는 8개다. 4개의 평면으로 구분할 수 있는 최대 개수는 몇개인가. (2001 서울대 컴퓨터공학부)

▶ 전문가 클리닉

수열과 관련된 문제는 일반적인 것을 생각하기 전에 몇가지 특수한 경우를 조사해보고 패턴을 유추해보는 것이 중요하다.

단순한 문제지만 반드시 스스로 시행착오와 훈련을 거듭해 보면서 스스로 유도하는 힘을 길러야 한다. 이런 학습법을 발견학습이라고 한다. 구술 시험에는 이처럼 발견학습에 바탕을 둔 문제들이 자주 등장한다.

▶ 예시답안



1) 네 직선이 모두 평행하지 않고 어떤 세 직선이 한 점에서 만나지 않도록 오른쪽 그림처럼 그리면 11개가 된다.

2) n개의 직선으로 구분할 수 있는 정면의 최대 개수를 a_n이라고 하자. 1)에서처럼 어떤 두 직선도 평행하지 않고 어떤 세 직선도 한 점에서 만나지 않게 해주면 (n+1)번째 직선이 추가될 경우, 기존 n개의 직선과 모두 만나면서 (n+1)개의 영역을 더 만들게 된다.

즉, $a_{n+1}=a_n+n+1$

$$\therefore\ a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=\frac{n^2+n+2}{2}$$

즉, $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$개

3) 3개의 평면으로 분할된 8개의 영역이 있을 때, 네 번째 평면은 8개의 영역 중 최대 7개까지 지날 수 있다. 즉, 7개의 영역이 추가로 생긴다. 따라서 8+7=15(개)이다.

2004년 02월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

이번 호에서도 구술면접에 자주 출제되는 몇 가지 유형과 기본개념들을 정리했다. 특히 심층면접에 대비해 출제 빈도가 높거나 기본 개념의 이해 정도를 측정하는 문제들을 중심으로 구성했다. 교과서에서 볼 수는 없지만 구술시험에서 단골 출제되는 문제에 관해서도 언급했다. 실전같은 분위기를 연출하기 위해 마련된 구술 면접 시뮬레이션도 꼼꼼히 읽어보자.

■ 구술 면접 현장 중계

정수 $\sqrt{n}$에 대해 다음을 증명하여라(단 $n>0$).
1) **$\sqrt{n}$이 유리수이면 $\sqrt{n}$은 정수다.**
2) **$\sqrt{n^2+1}$은 무리수다.**

▶ 면접 시뮬레이션

학생 : 네. 먼저 $\sqrt{n}$이 유리수라고 가정하면 $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$로 표현할 수 있습니다. 물론 p와 q는 서로소인 정수입니다. 양변을 제곱하면 $n=\frac{p^2}{q^2}$이 됩니다. 식을 정리하면 $p^2=nq^2=q(nq)$가 되고, p^2이 q의 배수라는 사실을 알 수 있습니다. 따라서, $q=1$입니다

교수 : 잠깐만요. 갑자기 왜 $q=1$이 됐나요? 자세히 설명해 보세요.

학생 : p^2이 q의 배수이므로 당연히 p도 q의 배수입니다. 그런데 두 수가 서로소이므로 $q=1$입니다. 따라서 $\sqrt{n}=p$로 표현합니다. 이것은 다시 말해 $\sqrt{n}$이 정수라는 뜻입니다.

교수 : 그럼 다음 문제로 넘어 가세요.

학생 : 귀류법을 이용해 풀어보겠습니다. $\sqrt{n^2+1}$이 유리수라면 앞문제1)의 결과에 따라서 정수가 됩니다. 즉, $\sqrt{n^2+1}=m$인 정수 m이 존재합니다. 양변을 제곱하면 $n^2+1=m^2$이 되고 $m^2-n^2=(m-n)(m+n)=1$을 만족합니다.

따라서 $m+n=1$, $m-n=1$이 되는데 해가 $m=1$, $n=0$이 나오기 때문에 모순입니다.
그러므로 $\sqrt{n^2+1}$은 유리수가 아닌 무리수입니다.

■ 감상포인트

앞선 상황은 전형적인 정수론에 관한 것이다. 정수론을 교과서에서 볼 기회는 거의 없지만, 수학경시대회나 대입수능시험에서 단골로 출제되는 중요한 부분이다. 유형만 익히면 별 어려움 없이 풀 수 있는 일반문제와 다르게 많은 훈련과 고도의 수학적 사고력이 필요하다. 포스텍의 경우, 이 같은 유형과 비슷한 문제들을 자주 시험에 내고 있다. $\sqrt{2}$가 무리수임을 증명하는 문제처럼 정수론과 관계된 증명문제들은 이미 많은 입시에서 출제됐지만 앞으로도 계속 출제될 가능성이 높다.

[문제1] a, b, c, l, m, n은 모두 자연수다. 이 가운데 l, m, n은 어느 2개도 1 이외의 공약수를 갖지 않는다.

$\frac{a}{l}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}$가 자연수라면, $\frac{a}{l}, \frac{b}{m}, \frac{c}{n}$도 모두 자연수임을 보여라.

▶ 전문가 클리닉

정수론 문제를 풀기 위해서는 여러가지 기술이 복합적으로 사용된다. 하지만 이번 문제는 중학생도 생각할 수 있는 아주 기본적인 아이디어만을 이용해 접근하고 있다. 약수, 배수, 소수, 서로수와 같은 쉬운 정의와 개념만을 가지고 멋지게 풀어내는 과정을 음미하면서 정수론 기법을 하나씩 익히기 바란다.

▶ 예시답안

$\frac{a}{l}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}=N$(자연수)이라 하면,

$amn+bln+clm=Nlmn$

$\therefore\ amn=l(Nmn-bn-cm)$

즉, amn은 l의 배수.

조건에서 l, m, n은 서로소이므로 mn, l도 서로소다.

$\therefore\ a$는 l의 배수. 따라서 $\frac{a}{l}$는 자연수.

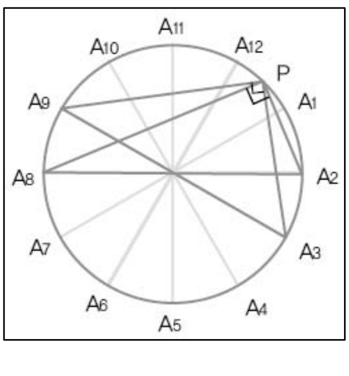
같은 방법으로, b는 m의 배수이고 c는 n의 배수다.

그러므로 $\frac{a}{l}, \frac{b}{m}, \frac{c}{n}$는 모두 자연수다.

[문제2] 반지름 1인 원둘레를 12등분하는 점을 차례로 A_1, A_2, ⋯ A_{12}라 할때, 원둘레 위의 한 점 P에 대해 $\overline{A_1P}^2+\overline{A_2P}^2+\cdots+\overline{A_{12}P}^2$을 구하라.

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 기하학의 본질과 응용 방법을 이해했는지 묻는 문제다. 문제 자체가 복잡해 보이기 때문에 자칫 어려운 삼각기하를 사용하고 싶은 충동이 생긴다. 그러나 원둘레 위의 한 점에 관한 아무런 정보도 없다. 이 점이 바로 문제 풀이의 해법을 제시한다. 해설을 잘보면 간단한 기하원리가 적용된다.



▶ 예시답안

원둘레를 12등분하는 점 $A_1, A_2, \cdots A_{12}$에서 임의의 점 P까지 각각의 선분 $\overline{PA_1}, \overline{PA_2}, \cdots \overline{PA_{12}}$는 지름에 대한 원주각이 각각 90°이다. 6개의 직각3각형 $\triangle PA_1A_7$, $\triangle PA_2A_8$, $\triangle PA_3A_9$, $\triangle PA_4A_{10}$, $\triangle PA_5A_{11}$, $\triangle PA_6A_{12}$가 되도록 각각의 선분을 연결한다.

직각3각형 $\triangle PA_1A_7$에서 $\overline{PA_1}^2+\overline{PA_7}^2=\overline{A_1A_7}^2$, $\triangle PA_2A_8$에서 $\overline{PA_2}^2+\overline{PA_8}^2=\overline{A_2A_8}^2$이므로

$$\overline{A_1P}^2+\overline{A_2P}^2+\cdots+\overline{A_{12}P}^2=\overline{A_1A_7}^2+\overline{A_2A_8}^2+\cdots+\overline{A_6A_{12}}^2$$

=4+4+4+4+4+4=24

[문제3](2004년 서강대 응용) 어떤 초원에 분포하는 토끼와 사슴의 수를 각각 x, y라 한다. 이들이 1년간 뜯어먹는 풀의 소비량 G와 x, y 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

$G=kx^my^{1-m}$(k는 상수이고 0이 아니다.)

2000년에 비해 2003년에는 토끼 수가 44%, 사슴 수가 20%씩 각각 늘어나 전체 풀 소비량이 30% 증가했을때 m값을 구하라(log1.2=0.080, log1.3=0.114, log1.4=0.146으로 계산한다).

▶ 전문가 클리닉

문제 자체가 어려운 것은 아니지만 소비량을 구하는 G=kx^{m}y^{1-m}이라는 식에 당황스럽다. 먼저 구술 시험의 특성상 이런 식을 유도하라는 문제는 등장하지 않는다. 어떤 식으로 주어진 함수나 법칙보다는 단순한 수학적 기법을 요구하는 경우가 많다. 이런 문제들은 평소 공부해온 지식으로 충분히 해결 가능하다. 이런 형태의 문제들은 다시 출제될 가능성도 높다. 특히 지수와 로그에 관련된 응용문제들은 평소에 자주 풀어보기 바란다.

▶ 예시답안

2000년의 토끼 수가 x, 사슴 수가 y, 풀 소비량이 G라면, 2003년의 토끼와 사슴 수, 그리고 풀 소비량은 각각 $1.44x$, $1.2y$, $1.3G$가 된다.

$G=kx^my^{1-m}$이고 $1.3G=k(1.44x)^m(1.2y)^{1-m}=k1.2^{2m}1.2^{1-m}x^my^{1-m}=1.2^{1+m}G$

$\therefore\ 1.2^{1+m}=1.3$

양변에 상용로그를 취하면

(1+m)log1.2=log1.3

$$\therefore\ 1+m=\frac{\log1.3}{\log1.2}=\frac{0.114}{0.080}=1.425$$

그러므로 m=0.425이다.

[문제4] 함수 $f(x)=x-[x]$에 대해 집합 A, B를 다음과 같이 정의한다.

$A=\{x|f(4x)=0,\ 0\leqq x\leqq1\}$

$B=\{x|f(6x)=0,\ 0\leqq x\leqq1\}$

단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수다.

1) A, B의 원소를 각각 나열하시오.

2) n(A∩B)와 n(A∪B)를 각각 구하시오.

▶ 전문가 클리닉

위 문제는 집합론과 함수론을 적절하게 결합한 문제다. 집합에서 표기법과 원소나열법에 관한 기본 개념은 누구나 알고 있지만 함수와 결합하면 좀 복잡해진다. 이런 문제를 풀 때는 먼저 몇 가지 값을 대입해본 뒤 그 특성을 파악하는 것이 중요하다.

▶ 예시답안

1) $f(4x)=0$에서 $4x-[4x]=0$. 즉, $4x=[4x]$; 정수이고 $0 \leqq x \leqq 1$이므로

$[4x]=0, 1, 2, 3, 4$. 그러므로, $4x=0, 1, 2, 3, 4$.

따라서 $x=0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1$.

같은 방법으로 $6x-[6x]=0$. $6x=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

즉, $x=0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, 1$.

$\therefore \quad A=\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$

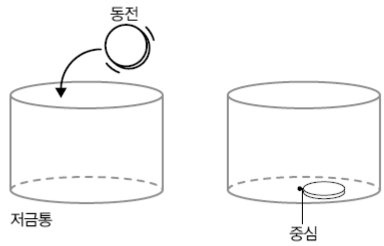
$B=\left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\right\}$

2) $A \cap B=\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$

$A \cup B=\left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, 1\right\}$

$\therefore \ n(A \cap B)=3 \qquad n(A \cup B)=9$

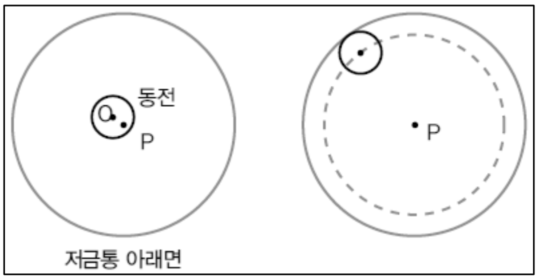
[문제5] 반지름 10인 원통형 저금통에 반지름 1인 동전을 던져 넣었다. 이 동전이 저금통 바닥의 중심을 덮을 확률을 구하라.



▶ 전문가 클리닉

착각하기 쉬운 문제다. 동전이 저금통 바닥 중심을 덮는다는 말이 쉽게 이해되지 않는다. 하지만 상식적으로 생각하면 의외로 쉽게 풀린다. 다만, 동전 중심이 움직이는 전체 범위를 다시 한 번 확인해 보기 바란다.

▶ 예시답안



1) 동전 중심을 O라 두고, 저금통의 중심을 P라 둔다. P와 O의 거리가 1보다 작으면 중심을 덮을 수 있으므로, 동전 중심이 존재할 수 있는 영역은 반지름 1인 원의 안쪽이다. $\therefore$ 면적은 π.

2) 저금통 밑면에서 동전 중심이 자유롭게 존재할 수

있는 영역은 반지름이 9인 원의 내부다.

∴ 면적은 81π.

∴ 구하는 확률은 $\frac{\pi}{81\pi}=\frac{1}{81}$

■ 심층가이드

▶ 도박에서 시작된 확률론

아주 먼 옛날부터 놀이는 인간 생활의 일부였다. 놀이를 하다보면 내기도 걸게 되고 그러다 보면 '어떻게 하면 이길 수 있을까'라는 사고가 시작된다.

이 같은 과정을 거쳐 현대의 확률론이 태어난다. 카르다노(1501-1576)는 주사위 놀이에서 이길 가능성을 계산하여 도박사를 위한 짤막한 안내문을 썼다. 그가 가장 먼저 풀었던 문제는 '주사위 2개를 동시에 던져서 나온 수의 합에 내기를 걸 경우, 합이 얼마가 될때 내기에 이길 수 있는가'라는 문제였다.

1654년 도박사 드 메레는 수학자 파스칼에게 재밌는 문제를 제시했다. 같은 실력을 가진 경기자 A와 B가 있다고 가정하고 A가 승리하려면 2점이, B가 승리하려면 3점이 각각 더 필요할 때, 만약 경기가 중단됐다면 어떻게 판돈을 분배해야 하는가라는 문제였다. 문제를 받은 파스칼은 페르마(1601-1665)와 편지를 교환하며 각자의 방식대로 답을 풀어낸다. 파스칼과 페르마는 바로 이렇게 확률에 대한 수학적 이론을 다졌다.

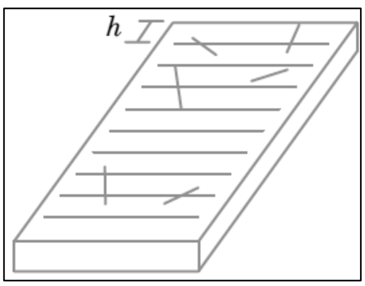
한편 1657년 호이겐스(1629-1695)는 '수학적 기대값'이라는 중요한 개념을 소개한다. 그는 어떤 사람이 상금을 받을 확률을 그것의 수학적 기대값이라 불렀다. 18세기 보험업이 성행하면서 많은 수학자들이 보험의 기초가 되는 확률론에 관심을 갖기 시작했다. 1812년 라플라스(1749-1827)는 해석적 확률론으로 고전 확률론의 체계를 완성했는데 그 출발점이 된 확률의 정의는 다음과 같다.

'어떤 시도를 할 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수가 N개, 그 N개의 경우가 모두 같은 가능성으로 일어난다고 확신할 수 있고 이 가운데 기대하는 경우의 수가 R개인 경우, 사건이 일어날 확률은 R/N이다. '

▶ 기학학적 확률과 뷔퐁

기하학적 확률은 뷔퐁의 '바늘문제'가 나온 이후 널리 알려졌다. 뷔퐁(1707-1788)은 1777년 기하학적 확률의 효시가 되는 '바늘문제'를 고안했다. 철학자이자 박물학자였던 뷔퐁은 1739년 파리 왕립식물원장으로 취임해 동식물에 관한 수많은 자료들을 수집하고 모두 36권의 박물지를 집필한 인물. 생물 진화에 대해서도 해박한 지식을 갖춘 그는 6천년 정도로만 알려져 있던 인류 기원을 7만5천년으로 정정 발표하면서 신학자들로부터 거센 항의를 받기도 했다.

그는 또 뉴턴의 미적분법을 프랑스에 소개했고, 일과 놀이를 통한 실험으로 확률 이론을 기하학적으로 발전시키는데 공헌했다.



바늘문제 : 길이 l인 바늘들을 간격이 h인 평행선을 그은 평면 위에 던질 때, 바늘이 평행선들 가운데 하나와 만날 확률 P는?

∴ $P=\frac{2l}{\pi h}$

[문제6](2003 홍익대 응용) 연산 x%y는 'x를 y로 나눈 나머지'로 정의한다.

1) 5%2를 구하라.

2) x를 임의의 자연수라 할때 x%3로 나올 수 있는 값은?

1부터 6까지 정수가 적힌 주사위와 앞면에 3 뒷면에 5가 적힌 동전이 있다.

주사위 각면이 나올 확률은 1/6, 동전의 한 면이 나올 확률은 1/2이다. 주사위와 동전을 동시에 던졌을 때 나오는 수를 각각 x, y라고 할 때 다음 질문에 답하라.

3) x%y의 값은?

4) x%y가 1이 나올 확률은?

5) x%y의 기대값은?

▶ 전문가 클리닉

첫 번째 문제의 이항연산을 이해하고 핵심을 파악했다면 이어지는 문제는 쉽게 풀린다. 물론 확률에 대한 철저한 이해가 없다면 당황할 수도 있다. 학교에서는 약간 피상적으로 다루는 경향이 있기 때문에 이항연산에 관한 응용 문제는 때마다 잘 정리해둬야 한다. 특히 기대값이나 평균은 확률하고는 다른 개념임을 유념하기 바란다.

▶ 예시답안

1) 5＝2×2+1이므로 5%2=1

2) 자연수를 3으로 나누면 0, 1, 2가 나머지가 된다. x%3이 취할 수 있는 값은 0, 1, 2다.

3) x가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고 y로 나오는 값은 3, 6이므로 x%y에 대한 연산 결과는 다음과 같다.

y \ x	1	2	3	4	5	6
3	1	2	0	1	2	0
6	1	2	3	4	5	0

따라서 0, 1, 2, 3, 4, 5를 가진다.

4), 5)

$x\%y$에 대한 확률 분포표를 만들면 다음과 같다.

$x\%y$	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

∴ $x\%y=1$일 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

따라서, $x\%y$의 기대값은

$0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{12}+4\times\frac{1}{12}+5\times\frac{1}{12}=\frac{7}{4}$이다.

2004년 03월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

이번 호에서도 구술면접에 자주 출제되는 몇 가지 유형과 기본개념들을 정리했다. 특히 물리적 개념과 연관된 대수 문제, 기하와 결합한 확률 문제 등 평소 개념정리와 풀이연습이 필요한 문제들을 중심으로 구성했다. 뉴턴과 더불어 미적분학은 물론 근대 수학의 진전에 큰 영향을 미친 라이프니츠의 일대기를 살펴본다. 또 종종 그냥 쉽게 지나쳐 버리는 부정적분과 정적분의 관계를 구술 면접 시뮬레이션을 통해 다시 한 번 강조한다.

■ 구술 면접 현장 중계

> 다음 물음에 답하여라.(2003 서강대)
>
> 1) 정적분과 부정적분을 정의하고 둘 사이의 관계를 설명하라.
>
> 2) 두 실수 a, b에 대해
>
> $a*b=\begin{cases}\dfrac{(a+b)}{2} & (a<b)\\ ab & (a\geq b)\end{cases}$ 일 때 $\int_0^2 (x^2 * 1)dx$의 값을 구하라.

▶ 면접 시뮬레이션

학생 : 정적분은 그래프의 밑넓이를 의미합니다. 부정적분은 그냥 적분기호 표시만 하면 되고, 이렇게 계산된 식에 범위를 넣고 계산해주면 정적분 값이 나옵니다. 넓이를 구할 때, 구분구적법으로 매번 계산하면 계산이 복잡해지기 때문에 부정적분을 이용한 계산법을 사용합니다.

교수 : 음. 대충은 알고 있는 것 같은데 좀더 수학적으로 설명해보세요.

학생 : 먼저 부정적분은 $\int f(x)dx$로 표시합니다. x에 대한 어떤 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, $F'(x)=f(x)$를 만족시키면 $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분 혹은 원시 함수라고 합니다. 이것을 다시 기호로 표현하면 $\int f(x)dx = F(x)+C$가 됩니다. 이때 C를 적분 상수라고 합니다.

교수 : 좋아요. 이번엔 정적분에 대해 설명해보세요

학생 : 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 이 구간에서 $f(x)$ 아래 면적을 구하기 위해 구분구적법에 극한을 적용한 것을 정적분이라 합니다.

다시 말해, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\Delta x)\cdot\Delta x$($\Delta x$는 $\dfrac{b-a}{n}$)를 '$f(x)$의 a에서 b까지의 정적분'으로 정의하고 $\int_a^b f(x)dx$로 나타냅니다.

이때 $\int_a^b f(x)dx$값을 구하는 것을 '$f(x)$를 a에서 b까지 적분한다,'라고 하며, a와 b를 각각 정적분의 '아래끝'과 '위끝'이라고 합니다.

교수 : 훌륭합니다. 그런데 부정적분과 정적분은 무슨 관계가 있나요?

학생 : 부정적분을 이용하면 정적분 값을 쉽게 구할 수 있습니다. $\int f(x)dx = F(x)+C$일 때,

$\int f(x)\,dx = F(b) - F(a)$인 관계가 성립합니다.

교수 : 정적분은 면적을 구하기 위해 구분구적법의 극한을 이용해서 정의된다고 해놓고 갑자기 부정적분을 이용한다고 말한 까닭은 무엇입니까?

학생 : 둘 다 모두 미적분학의 기본 정리를 이용하기 때문입니다.

교수 : 알았습니다. 그럼 계속해서 2) 문제를 풀어보세요.

학생 : 우선 정의에 따라 다음과 같이 구간을 나누어 계산합니다.

$$x^2 * 1 = \begin{cases} \dfrac{(x^2+1)}{2} & (x^2 < 1) \\ x^2 & (x^2 \geq 1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(x^2+1)}{2} & (-1 < x < 1) \\ x^2 & (x \leq -1,\ x \geq 1) \end{cases}$$

이므로 구간을 나누어 계산하면

$$\int_0^2 (x^2 * 1)\,dx = \int_0^1 (x^2 * 1)\,dx + \int_1^2 (x^2 * 1)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2+1}{2}\,dx + \int_1^2 x^2\,dx$$

$$= 3$$

교수 : 수고했습니다.

■ 감상포인트

위와 같은 상황은 전형적인 구술시험 형태를 반영한다. 대답하는 학생의 논리를 따라가보면 우리가 평소 무엇을 준비해야 하는지 명확히 알 수 있다. 이 문제는 미적분학에서 가장 중요한 부분을 다룬 것으로 실제 여러 대학에서 출제되기도 했다. 학생들은 부정적분과 정적분의 관계를 직관적으로 이해하고 있어야 한다.

특히 증명까지도 잘 정리해 둔다면 어떤 형태의 시험에서도 응용할 수 있을 것이다. 두 번째 문제는 연산과 직접적인 적분계산에 익숙해야 쉽게 풀린다. 특히 제7차 교육과정에서는 이 부분이 공통과정에서 빠져있기 때문에 어쩌면 이과 학생들에게는 유리한 문제라 하겠다. 하지만 반대로 문제로 출제될 가능성이 그만큼 높아질 수 있음에 유의해야 한다.

■ 심층가이드

정적분과 부정적분 사이의 관계

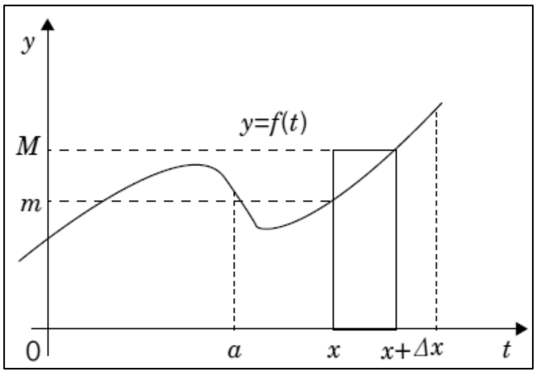
(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$

(2) $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$라 하면

$$\int_a^b f(x)\,dx [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, $f(x)\geq 0$일 때 구간 $[a,\ b]$에 속한 x를 선택할 때 곡선 $y=f(x)$와 x축 사이의 a부터 x까지의 넓이 $S(x)$를 다음처럼 정의한다.

$$S(x)=\int_a^x f(x)\,dx=\int_a^x f(t)\,dt$$



이때 x의 증분 $\triangle x$에 대한 $S(x)$의 증분을 $\triangle S$라 하자.

$\Delta x\geq 0$일 때,

$\Delta S=S(x+\Delta x)-S(x)$는 구간 $[x,\ x+\Delta x]$에서 곡선 $y=S(t)$와 t축 사이에 있는 부분의 넓이이다.

$[x,\ x+\Delta x]$에서 $f(t)$의 최대값은 M, 최소값은 m

$$m\cdot\Delta x\leq\Delta S\leq M\cdot\Delta x \ \cdots\cdots\ \text{i)}$$

$\Delta x\leq 0$일 때,

$$M\cdot\Delta x\leq\Delta S\leq m\cdot\Delta x \ \cdots\cdots\ \text{ii)}$$

i), ii) 어느 경우든 양변을 Δx로 나누면

$$m\leqq\frac{\Delta S}{\Delta x}\leqq M \ \cdots\cdots\cdots\cdots\ \text{iii)}$$

iii)에서 $\triangle x\to 0$이면 $m\to f(x), M\to f(x)$

따라서 $\triangle x\to 0$일 때 극한값을 취하면

$$f(x)\leqq\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}\leqq f(x)$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}S(x)=f(x)$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

$S(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$이면 $S'(x)=f(x)$

즉 $S(x)$는 $f(x)$의 부정적분 가운데 하나를 의미한다. 따라서 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $f(x)$라 하면

$S(x)=F(x)+C$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ i)

여기서 $x=a$라 하면 $S(a)=F(a)+C$

$S(x)$의 정의에 의하여 $S(a)=0$이므로

$C=-F(a)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ ii)

ii)를 i)에 대입하면 $S(x)=F(x)-F(a)$

$\displaystyle\int_a^x f(x)=F(x)-F(a)$에서 $x=b$이면 $\displaystyle\int_a^b f(x)=F(b)-F(a)$

위의 식 우변의 $F(b)-F(a)$를 $[F(x)]_a^b$로 표시한다.

■ 심층가이드

▶ 미적분의 창시자 라이프니츠

17세기 세계적 천재였으며 미적분법 발명에서 뉴턴의 경쟁자였던 고트프리드 빌헬름 라이프니츠는 1646년 독일 라이프치히에서 태어났다. 어릴 때부터 라틴어와 그리스어를 독학한 그는 스무살이 되기도 전에 이미 교과서를 모두 통달해서 수학, 신학, 철학, 법학에 상당 수준의 지식을 지니고 있었다.

그는 어린 나이에 '일반 특성'(characteristica generalis)에 관한 첫 번째 착상을 발전시킨다. 이는 훗날 부울(1815-1864)의 기호논리로, 또 훨씬 뒤인 1910년 화이트헤드와 러셀이 함께 지은 '수학의 원리'(Principia mathematica)를 꽃피운 뿌리가 됐다.

1672년 외교 업무로 파리에 있을때 라이프니츠는 그곳에 살고 있던 호이겐스를 우연히 만났다. 첫만남에서 그는 호이겐스를 설득해 자기에게 수학을 가르쳐 주도록 부탁한다. 이듬해 라이프니츠는 다시 정치적 임무를 띠고 런던에 파견되는데, 그곳에서 올덴버그와 사귈 수 있었다.

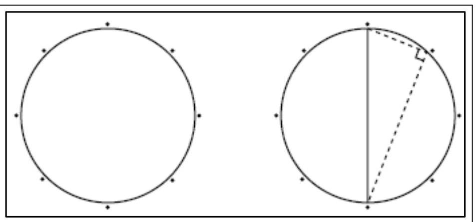
이때 그는 영국학술원에 계산기를 만들어 보내기도 했다. 라이프니츠가 미적분학에 관한 기본정리와 개념을 개발한 것은 파리를 떠나기에 앞서 브룬스빅공의 사서라는 직책을 얻기 위해서였다. 하지만 죽기전까지 미적분 발견 과정에서 뉴턴으로부터 독립적인가란 논란에 내내 휩싸일 수밖에 없었다. 특히 이 논란 때문에 1714년 그의 군주가 영국 게르만 왕에 오르게 됐음에도 불구하고 홀로 하노버에 남겨지는 불행을 맞기도 했다. 2년뒤 1716년 그가 죽었을 때에도 단지 자신의 충실한 시종만이 장례식에 참석했다고 전해진다.

그러나 라이프니츠는 천부적인 낙천주의자였다. 일생 동안 대립하는 종파를 하나로 재결합시키려고 노력했을 뿐 아니라, 중국 전역을 기독교로 개종시키는 방법 찾기에 골몰했다. 그는 신은 1로 무는 0으로 나타낼 수 있기 때문에 이진법에서 모든 수가 0과 1로 표현되는 것과 같이 신도 무에서부터 모든 것을 창조했다고 추측했다.

이런 생각을 토대로 라이프니츠는(특히 과학을 좋아했던) 중국 현황제를 비롯해 모든 중국인들을 기독교로 쉽게 개종시킬 수 있을 것이라고 낙관했다.

이밖에 그가 종교적 환상을 품고 있었다는 것을 말해주는 또다른 일례는 허수가 기독교 성경에 나오는 성령-존재와 비존재 사이 중간쯤인 양서류와 닮았다는 주장일 것이다. 어쨌든 라이프니츠는 수학사에서 연속과 이산이라는 대조적인 두 영역을 모두 이해했던 유일한 인물일 것이다.

[문제1] **어떤 원위에 같은 간격으로 점 8개를 찍는다. 이 가운데 임의로 3개를 택해 3각형을 만들려고 한다면 이때의 각형이 직각삼각형일 확률을 구하라.**



▶ 전문가 클리닉

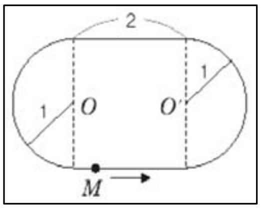
확률문제는 경우의 수를 신속하고 정확하게 계산하는 것이 중요하다. 이 문제는 전형적인 기초확률 문제로 개념보다 경우의 수를 계산하는 능력을 알아보기 위한 것이다. 특히 기하 개념을 응용한 이런 문제 유형을 잘 익혀 두면 어떻게 확률계산에 다른 개념이 융합되는지 알기 쉽다.

▶ 예시답안

두 점과 원 중심을 지나는 대각선을 하나 고정시킨다. 이때 만들어지는 직각3각형은 6개다. 대각선은 4개이므로 직각3각형은 6×4=24개이다.

$$\therefore \text{ 확률} = \frac{24}{{}_8C_3} = \frac{24}{\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}} = \frac{3}{7}$$

[문제2] 반지름 1인 반원 2개가 결합된 육상트랙을 P, Q가 달린다. P는 속력 v, Q는 속력 v^2으로 달린다. 트랙 위 어떤 한 점 M에서 동시에 출발한 뒤 처음으로 P, Q가 다시 만날 때까지 걸리는 시간을 t라 한다. t가 최소값을 가질 때 P의 속력을 구하라(단, $0<v<1$)



▶ 전문가 클리닉

이 문제는 물리적 개념인 속도와 가속도, 추리, 대수적 기법을 조금씩 포함한 복합적인 문제다. 구술시험뿐 아니라 수능시험에도 충분히 출제될 수 있다는 것을 유념하고 반드시 이해하고 넘어가야 한다. 실제로 물리 개념과 결합된 수학 문제들은 최근 구술시험에 여러 번 등장했고 앞으로 계속 출제될 가능성이 높다. 하지만 이처럼 단순 계산보다 과학 개념을 포함하는 응용문제에 대해 대다수학생들은 까다롭게 생각하는 경향이 있다. 이것은 기계적인 수학공부에 익숙해져 있기 때문이다. 평소에 과학 응용문제를 따로 정리해 두면서 그 개념들을 완전히 익히기를 권한다.

▶ 예시 답안

트랙 길이는 $4+2\pi$이므로 출발 후 처음 다시 만날 때, P와 Q 사이의 거리의 차는 $4+2\pi$가 된다.

$\therefore\ vt - v^2t = 4+2\pi$이므로 $(v-v^2)t = 4+2\pi$

$$\therefore\ t = \frac{4+2\pi}{v-v^2} = \frac{4+2\pi}{-\left(v-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} \geqq 16+8\pi$$

따라서 $v=\frac{1}{2}$일 때 t가 최소이다.

[문제3] 자연수 n에 대해 $7^{2n+1}+1$이 8의 배수임을 증명하라.

▶ 전문가 클리닉

항상 강조하지만 정수론에 관한 기본 기술은 완전히 익혀둬야 강한 수리력이 길러진다. 정수론의 경우 기본이론은 쉽지만 다양한 형태의 문제들이 존재하기 때문에 평소 공부할 때 여러가지 응용테크닉과 숨겨진 기본 원리들을 잘 정리하기를 바란다. 문제3번의 예시답안에서는 풀이법을 다양하게 소개했다. 모든 풀이법을 잘 이해하고 암기한다면 비슷한 유형을 만났을 때 손쉽게 해결할 수 있을 것이다.

▶ 예시답안

(풀이 1)

$7^2=(8-1)^2=8^2-16+1=8(8-2)+1=8\times6+1$

$\therefore$ $7^{2n}=(8\times6+1)^n=8k+1$인 정수 k가 있다.

$\therefore$ $7^{2n+1}+1=7\cdot7^{2n}+1=7(8k+1)+1=8(7k+1)$

$\therefore$ $7^{2n+1}+1$은 8의 배수다.

(풀이 2)

$7^{2n+1}+1=(7+1)(7^{2n}-7^{2n-1}+\cdots+1)=8(7^{2n}-7^{2n-1}+7^{2n-2}-\cdots+1)$

$\therefore$ $7^{2n+1}+1$은 8의 배수다.

(풀이 3)

$f(x)=x^{2n+1}$이라 놓으면 $f(x)=(x-1)(x+7)g(x)+ax+b$와 같이 쓸 수 있다.

또한, x^{2n+1}과 $(x-1)(x+7)$의 계수가 모두 정수이므로 a와 b도 정수이다.

$f(1)=a+b=1$

$f(-7)=-7a+b=(-7)^{2n+1}$

$f(1)-f(-7)=8a=7^{2n+1}+1$

$\therefore$ $7^{2n+1}+1$은 8의 배수다.

[문제4] 어떤 방을 둘로 나눠 한쪽을 A 다른 쪽을 B라 하자. 여기에 색깔이 서로 다른 공 4개를 넣으려고 한다.

1) 공 4개 모두 A에 들어갈 상황, 그리고 2개의 공이 A에 들어가고 나머지 2개의 공이 B에 들어갈 경우의 수를 각각 계산하라.

2) 각각의 공 4개가 A나 B에 들어갈 확률이 반반일 때 문항 1)의 두 상황 중 어떤 상황의 확률이 더 높은지 결정하라.

3) 공 4개가 각각 A에 들어갈 확률이 P_A=0.8이라면 문항 1)의 두 상황 중 어떤 것이 확률적으로 높은지 결정하라.

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 확률문제의 전형적인 다단계 형식을 띤다. 경우의 수를 계산하는 것이 문제해결의 열쇠다. 직관과 실제 계산된 정확한 확률을 비교해본다면 좀더 재미있게 확률문제를 공부할 수 있을 것이다.

보통 학생들이 확률문제를 어려워하는 경향이 있는데 이것은 수학책 처음에 나오는 경우의 수와 조합이론을 완전히 이해하지 못했기 때문이다. 정수론과 마찬가지로 원리는 간단하지만 문제마다 생각을 해야 하고 기계적으로 풀리지 않기 때문에 이 단원을 숙지하기가 쉽지 않은 것이다. 그래도 역시 왕도는 평소에 공부하는 습관을 조금씩 바꾸고 많은 사고 훈련을 하는 것이다.

▶ 예시답안

1) 공 4개 모두가 A에 들어갈 상황은 한 가지다. 공 2개가 A에 들어가고 나머지 2개가 B에 들어갈 경우는 ${}_4C_2 \times {}_2C_2=6$(가지)이다.

2) 4개의 공을 a, b, c, d라 할 때, 공이 A 또는 B에 들어가는 방법은 a, b, c, d 아래에 A, B를 중복을 허락해서 나열하는 방법과 같다. 따라서 4개 모두 A에 들어갈 확률은 $\frac{1}{16}$, 4개 가운데 2개가 A에 들어가고 다른 2개가 B에 들어갈 확률은 $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$이므로 후자의 확률이 더 크다.

3) 공 4개가 모두 A에 들어갈 확률은 $0.8^4 = \frac{256}{625}$이다. 4개 중 2개가 A에, 나머지 2개가 B에 들어갈 확률은 ${}_4C_2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{96}{625}$이므로 4개 모두 A에 들어갈 확률이 더 크다.

2004년 04월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

이달의 구술면접 현장중계에서는 함수의 극한 개념을 익힐 수 있는 기회를 마련했다. 또 기원과 역사를 통해 수학적 확률론이 진화해온 과정을 설명한다. 오늘날 스포츠에서는 물론 경제지표, 여론조사에까지 널리 이용되고 있는 확률론을 이해하는데 많은 도움이 될 것이다. 아울러 정수론과 최대·최소, 집합 등 다양한 문제를 함께 출제했다. 실전에서 어떤 문제가 출제될지 모르니 미리 준비하자.

■ 구술 면접 현장 중계

함수의 극한을 설명하라.(2002,2003 기출문제)

▶ 면접 시뮬레이션

학생 : 함수의 극한은 $\lim_{x\to a} f(x)$로 표시합니다. 이는 x값이 a에 가까워질 때, $f(x)$가 어떤 값에 가까워지는지를 나타낸 것으로 이를 극한값이라고 합니다. x가 $f(x)$의 정의역 안에 있는 한 원소 a에 점점 가까이 접근할 때 그 함수값이 특정값에 점점 가까이 간다면 이 값을 'a에서의 함수의 극한(또는 극한값)'이라고 합니다.

교수 : 함수의 극한과 수열의 극한의 차이점이 무엇인지 설명해보세요.

학생 : 수열은 자연수에서 정의된 함수이고 함수의 극한을 구할 때는 대부분 실수 혹은 실수의 부분집합에서 정의된 함수를 다룬다는 차이가 있습니다. 수열에서 한 점에서의 극한값은 n번째 항을 뜻하기 때문에 수열을 공부할때 반드시 일반항을 공부하는 것입니다. 수열의 극한은 항 번호가 무한히 커지면서 항이 어떤 값에 접근하는가를 보는 것입니다. 즉 극한의 정의에서 'a=무한대'일 때의 값이 바로 수열의 극한값입니다.

교수 : 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$과 함수값 $f(a)$는 무엇이 다른가요?

학생 : x가 a가 아닌 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$값이 일정한 값 b에 한없이 가까워지면 '$f(x)$는 b에 수렴한다'고 하고 b를 $f(x)$의 극한 또는 극한값이라고 합니다. 이때 $\lim_{x\to a} f(x)=b$로 나타내는데 이는 $f(a)$와 분명히 다릅니다. 특히 $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$일 때 함수 $f(x)$는 점 $x=a$에서만 연속이라고 합니다.

교수 : 그렇다면 $\lim_{x\to a} f(x)$값은 항상 구할 수 있나요?

학생 : 아닙니다. $\lim_{x\to a}\frac{1}{x^2}$처럼 $f(x)$가 ∞로, 혹은 $\lim_{x\to a}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$처럼$-\infty$로 발산할 수도 있습니다. 일단 발산할 경우는 극한값을 계산할 필요가 없지만 우극한, 좌극한이 같지 않을 경우 극한값은 없습니다.

교수 : 우극한, 좌극한은 무엇입니까?

학생 : 우극한은 x가 a보다 큰값을 취하면서 a에 접근할때, 좌극한은 작은 값을 취하면서 a에 가까워질 때의 극한입니다.

교수 : 그러면 우극한과 좌극한을 각각 구해 일치하는가를 항상 확인해야 합니까?

학생 : 꼭 그렇진 않습니다. 고교 교육과정에서는 분수함수, 구간에 따라 다른 함수, 절대값 함

수, 가우스 함수, 지수에 분수가 있는 함수 등 몇 가지를 제외하고 대부분 좌극한과 우극한이 같기 때문에 굳이 항상 확인할 필요는 없습니다.

교수 : 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x}$는 $x=0$에서 극한이 존재합니까?

학생 : 존재합니다. 왜냐하면 $x\to0$은 x가 0이 아니면서 0에 가까워지는 경우이므로 x는 절대 0이 아닙니다. 따라서 분모와 분자를 약분할 수 있고 그 극한은 1이 됩니다.

교수 : 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x}$는 $x=0$에서 정의되나요?

학생 : 정의되지 않습니다.

교수 : 정의가 되지도 않는데 $x=0$에서 극한값을 갖는다는 것은 논리적으로 모순이 아닙니까?

학생 : 그렇지 않습니다. 말씀드렸듯이 극한을 정의할 때, 함수값은 아무런 의미가 없습니다. 즉, $x=0$에서 극한값을 계산하고자 할 때, 0를 중심으로 좌측과 우측에서 한없이 접근만 하기 때문에 $x\neq0$입니다. 따라서, 분모와 분자의 약분이 가능하고 그 결과 얻어지는 상수값이 극한이 됩니다.

교수 : 수고했습니다.

■ 감상포인트

위 문제는 가장 많이 출제된 문제 가운데 하나로 시험에서 비교적 쉬운 유형에 속한다. 직접 풀지 않고 개념만 구술하면 되기 때문에 구술시험에 매우 적합한 문제다. 하지만 개념에 대한 이해가 부족하거나 정의를 잘못 알고있는 경우 오히려 치명적일 수도 있다.

개념과 정의를 철저히 정리해두지 못한 상황에서 면접교수의 날카로운 질문에 잘못 응수할 경우 낭패를 볼 수도 있다는 뜻이다. 여러가지 개념과 정의에 관한 문제들을 다시 한 번 풀어보길 권한다.

특히 여기서 소개된 수열의 극한과 함수의 극한을 비교해 설명하는 것과 $f(x)=\dfrac{x}{x}$의 극한값을 계산하는 것은 쉽게 보이지만 실제 시험장에서는 매끄럽게 답하기 어렵다는 점을 명심하길 바란다.

[문제1] a, b, c, d**는 임의로 주어진 4개의 정수다. 이때 (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)는 항상 12의 배수임을 증명하라.**

▶ 전문가 클리닉

정수론 문제는 여러가지 풀이방법을 복합적으로 사용하지만 이 문제는 중학생도 알 수 있는 아주 기본적인 아이디어만을 이용해 접근한다. 외형상 매우 어렵게 보이고 풀이의 실마리도 없어 보이지만 '비둘기집 원리'를 이용해 기막히게 증명할 수 있다. 비둘기집 원리를 이용한 문제가 구술시험에 몇 차례 출제된 적이 있어 너무 당연한 원리라고 과소평가해서는 안된다.

▶ 예시답안

$p=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$라 하고 비둘기집 원리를 적용하면 다음과 같이 의외로 간단히 풀린다.

i) a, b, c, d중에서 적어도 2개는 3으로 나눴을 때의 나머지가 같다. 그러므로 p는 3으로 나눠 떨어진다.

ii) a, b, c, d를 4로 나눴을때 나머지가 같은 것이 2개 있으면 p는 4로 나눠 떨어진다. 이때 임의의 나머지 2개가 모두 같지 않으면 a, b, c, d에는 짝수(예를 들어 a, b라고 하자) 2개, 홀수(c, d라고 하자) 2개가 존재한다. 그러면 $(b-a)$, $(d-c)$는 모두 짝수. 따라서 p는 4로 나눠 떨어진다. i), ii)에서 3과 4는 서로소이므로 p는 12의 배수다.

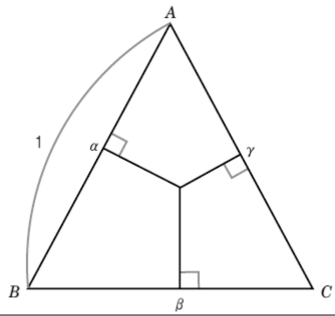
▶ Tip

비둘기집 원리는 독일의 수학자 디리클레가 공식화한 것이다. 사물 사이에 존재하는 양적 관계에서 모종의 법칙을 밝히는 수학적 원리로 여러가지 수학 문제 풀이에 유용하게 쓰인다.

4마리 이상의 비둘기를 3개의 새집에 넣으면 2마리 이상 들어간 집이 반드시 있다는 것이 이른바 비둘기집의 원리다. 원리는 지극히 당연하고 사소하게 보이지만 이산수학의 주요 관심사 가운데 하나인 배열이나 패턴의 존재성 문제를 해결할 수 있는 가장 강력한 도구 중 하나다. 이 원리를 적용한 배열문제를 풀때 무엇을 비둘기로 두고 무엇을 비둘기집으로 둘 것인가를 결정하는 것이 바로 문제해결의 관건이다. 아주 복잡하거나 풀기 어려워 보이는 문제도 비둘기집 원리를 이용해 풀수 있다는 것을 위 문제를 통해 다소나마 이해할 수 있을 것이다.

[문제2] 한변의 길이가 1인 정삼각형 ABC의 임의의 내부점 P에서 각 변에 수선을 내렸다.

이때 $\dfrac{1}{P\alpha}+\dfrac{1}{P\beta}+\dfrac{1}{P\gamma}$의 최소값을 구하라.



▶ 전문가 클리닉

최대·최소 문제는 눈감고도 풀수 있을 정도로 익숙해져야 한다. 이런 문제는 최대·최소 혹은 절대부등식과 기하학적 응용 방법을 모두 이해해야 쉽게 풀린다. 풀이는 쉽지만 정작 실전에서 만났을때 실마리를 찾기가 꽤 어려운 문제다. 해설을 참조해서 유형을 정리해두길 바란다.

▶ 예시답안

$\overline{P\alpha}=x,\ \overline{P\beta}=y,\ \overline{P\gamma}=z$라 하면

삼각형 넓이$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}\times1\times x+\dfrac{1}{2}\times1\times y+\dfrac{1}{2}\times1\times z=\dfrac{1}{2}(x+y+z)$

$\therefore\ x+y+z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

코쉬-쉬바르쯔 부등식을 적용하면

$$\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}+\sqrt{z^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}}+\frac{1}{\sqrt{y^2}}+\frac{1}{\sqrt{z^2}}\right)\geq(1+1+1)^2=9$$

$\therefore\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geq\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times9=6\sqrt{3}$ ($x=y=z$일 때 최소)

[문제3] $\dfrac{x^2+y^2}{z}=\dfrac{x^2+z^2}{y}=\dfrac{y^2+z^2}{x}=6$을 만족하는 순서쌍 (x,y,z)를 구하라(단, x, y, z ∈ R).

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 실수와 관계된 부정방정식 문제다. 부정방정식 문제는 포스텍 등 많은 학교에서 출제됐는데 그 대부분이 정수론 기법을 이용한 것이다.

이번 문제는 특이하게도 실수 부정방정식으로 전형적인 '부등식 가두기' 방법으로 쉽게 풀 수 있다. 정수론적 부정방정식 기법은 다음 기회에 자세히 공부하기로 하자.

▶ 예시답안

주어진 식을 다시 정리하면 $x^2+y^2=6z,\ x^2+z^2=6y,\ y^2+z^2=6x$

대칭성을 고려해 $x\geq y\geq z$라고 가정하면

$x^2+y^2\geq x^2+z^2\geq y^2+z^2$

$\rightarrow\ 6z\geq 6y\geq 6x$

$\rightarrow\ z\geq y\geq x$이므로

$\therefore\ x=y=z$

$\therefore\ \dfrac{x^2+x^2}{x}=\dfrac{2x^2}{x}=2x=6$

$\therefore\ x=y=z=3$

정답 :(3, 3, 3)

[문제4] A, B, C 세 사람이 순서를 정해 제비뽑기를 했다. 10개의 제비 중 당첨 제비는 2개를 포함하고 한 번 꺼낸 제비는 다시 넣지 않는다고 할때, 세사람 모두 당첨될 확률을 각각 구하라.

▶ 전문가 클리닉

제비뽑기를 할 때 누가 먼저 뽑는 것이 유리할까? 직관상 먼저 뽑는 것이 유리하다는 생각이 일반적이다. 확률의 오류 중 가장 빈번하게 일어나는 것이 바로 제비뽑기의 오류다. 제비뽑기에서는 순서와 상관없이 당첨 확률은 동일하기 때문이다. 제비뽑기는 복원이든 비복원이든 순서가 있든 없든 모두가 동일한 확률을 가지는 민주적인 절차라 할 수 있다. 답을 보기전 꼭 스스로 풀어보기를 바란다.

▶ 예시답안

i) A(맨 처음 뽑는 사람)가 당첨될 확률 : $\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$

ii) B(두 번째 뽑는 사람)가 당첨될 확률 :

(A가 당첨되고 B가 당첨될 확률)+(A가 당첨되지 않고 B가 당첨될 확률)=$\dfrac{2}{10}\times\dfrac{1}{9}+\dfrac{8}{10}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{5}$

iii) C(세 번째 뽑는 사람)가 당첨될 확률 :

A가 당첨되고 B가 당첨되지 않고 C가 당첨될 확률$=\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}+\frac{1}{8}=\frac{1}{45}$

A가 당첨되지 않고 B가 당첨되고 C가 당첨될 확률$=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{8}=\frac{1}{45}$

A가 당첨되지 않고 B가 당첨되지 않고 C가 당첨될 확률$=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}+\frac{2}{8}=\frac{7}{45}$

이를 모두 합하면, $\frac{1}{45}+\frac{1}{45}+\frac{7}{45}=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$

정답 : $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}$

▶ Tip 수학적 확률론의 탄생

도박은 놀이에서 발전되어 왔을까 아니면 제비뽑기나 내기, 혹은 종교적 예언과 신탁에서 왔을까. 기원전 1천2백년경 정육면체 주사위는 복사뼈보다 더 무작위한 추출도구로 사용됐다. 최초의 원시적 주사위는 복사뼈의 둥근 양면을 갈아서 평평하게 만들어 사용했다. 도박이 고대세계에서 유행했고 덕분에 저명한 그리스, 로마인들이 운명의 여신 티케에게 제물로 바치기도 했다. 아마도 신은 우연을 통해서 인간에게 말한다는 형이상학적 세계관이 당시 세계를 지배하고 있었던 것같다. 예를 들면 사무엘서에는 기원전 1천년경 이스라엘인들이 제비를 뽑아 왕을 선출한 대목이 나온다. 제비뽑기가 지도자를 선출하는 편리한 방법일 뿐만 아니라, 그 결과 역시 신의 의지라는 것이다.

확률론이 느리게 발달했다는 점은 역사학자들에게도 여전히 어려운 연구 주제다. 물론 주사위를 던졌을 때 고른 확률이 나온다는 인식은, 더 정확한 주사위가 만들어질 때까지 나오지 않았다. 또 오랫동안 여러차례의 시행을 반복해야 하기 때문에, 던져서 나온 결과를 모두 작성하는 일은 거의 불가능했다. 이때까지 확률론을 수학적으로 접근했던 시도가 없었다는 말은 맞을 것이다. 그러다가 16세기 이탈리아 수학자들이 주사위를 이용한 도박 경기에서 승산을 계산해보려는 시도가 처음 있었다. 카르다노는 매우 간단한 확률 계산법을 이용해 도박자를 위한 간결한 안내서를 썼다.

그러나 확률론의 기원은 오히려 판돈을 분배하는 방법에서 비롯됐다. 똑같은 기량을 가진 선수 2명이 하던 경기가 도중에 중단됐을 경우 판돈을 공정하게 나눠갖는 방법을 찾아내는 것이었다. 물론 이미 얻은 득점과 남은 점수를 알수 있다는 전제에서 말이다. 파촐리는 그의 책 '대전'을 통해 득점의 문제를 수학의 연구 대상으로 삼은 최초의 연구자 중 한 명이었다. 그후 파스칼이 이 문제에 관심을 가지면서 그 문제를 페르마에게 알려준다. 두 프랑스 학자 사이에 주목할 만한 서신 왕래가 나타났고 결국 각각의 방식으로 문제를 풀었다.

우리의 개인 생활에서 수학지식은 쇼핑이나 수리, 요리와 여행 등 다방면에 활용될 수 있다. 하지만 사람들이 일을 하는 과정에서 필요로 하는 수학 능력은 놀랄 정도로 제한적이다. 이때 필요한 수학 능력은 대부분 판에 박힌 것으로, 계산기나 마이크로컴퓨터 같은 보조기구의 지원까지 받는다. 대다수 수학적 지식이 쓸모없는 것처럼 치부되지만 확률만은 결코 그렇지 않다.

신문 기사 가운데 도표나 그래프, 평균값, 추세, 추정, 평가, 상관관계, 가능성이 있는(없는) 등의 단어가 바로 확률과 관계되기 때문이다. 스포츠면은 팀의 순위표와 선수들의 전적표, 여러가지 통계로 가득 차 있다. 경제면에는 이자, 금융시장의 변동, 그리고 인플레이션과 주식시세의 변화율, 기업의 성장률을 예시하는 그래프와 도표가 나타나 있다. 일기예보의 경우에도 지난달이나 작년에 비해 날씨가 추운지, 비가 잦은지, 바람이 심한지를 나타내는 그래프가 자주 등장한다.

그런데 광고를 죽 훑어보면 수많은 거짓통계를 사용한다는 사실을 발견하게 된다. 확률, 통계가 우리 생활에서 필수적인 것이라면 그것의 중요도와 편견을 판단하는 것은 독자에게 달려있다. 그리고 여기서 제시된 문제들을 정확히 풀어 내는 것은 판단의 기초로 적용될 수 있다.

[문제5] 실수 집합 R에서 연산 *를 a*b=ab+a+b로 정의할 때 다음 물음에 답하라.
1) 실수 집합 R이 주어진 연산에 대하여 닫혀 있는지 설명하라.
2) 이 연산에서 결합법칙은 성립하는가?
3) 실수 a의 역원을 구하라.

▶ 전문가 클리닉

집합을 배우는 이유는 집합 속에 연산을 정의함으로써 수의 추상적 구조를 이해하기 위해서다. 이 문제들은 너무나도 간단해서 왜 배우는지 의심되지만 대수구조를 이해하는데 중요한 실마리를 제공한다. 시험에서는 간단하게 역원이나 항등원을 구하는 정도에 그치지만 구술에서는 종종 교환 결합법칙의 성립여부, 항등원과 역원 등 여러 성질을 물어보기도 한다.

▶ 예시답안

1) 임의의 실수 a, b에 대해

$a+b\in R$, $ab\in R$이므로 $a*b=ab+a+b\in R$

그러므로 실수집합 R에서 주어진 연산은 닫혀있다.

2) $(a*b)*c=(ab+a+b)*c$

$=(ab+a+b)c+ab+a+b+c$

$=a+b+c+ab+bc+ca+abc$

$a*(b*c)=a*(bc+b+c)$

$=a(bc+b+c)+a+bc+b+c$

$=a+b+c+ab+bc+ca+abc$

따라서$(a*b)*c=a*(b*c)$이므로 결합법칙이 성립한다.

3) 역원을 구하기 위해 먼저 항등원을 구해야 한다.

항등원이란 임의 실수 a에 대해 $a*e=e*a=a$를 만족시키는 원 e를 의미한다. 여기서 $a*e=ae+a+e=a$를 풀어 보면 항등원 $e=0$임을 알 수 있다.

그럼 본문제로 돌아가 역원을 구해보자. 역원이란 어떤 실수 a에 대해 $a*x=x*a=e$를 만족시키는 x를 a의 역원이라고 한다. 위에서 $e=0$임을 알기 때문에 $a*x=ax+a+x=0$을 풀면

$x=-\dfrac{a}{(a+1)}$ (단, $a\neq-1$)

즉, a의 역원은 $-\dfrac{a}{(a+1)}$이 되며, $a=-1$인 경우는 역원이 존재하지 않는다. 이는 일반적인 곱셈연산에서 $a=0$의 역수가 없는 것과 같다.

2004년 05월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

이번달에도 다양한 단원에서 문제들을 출제했습니다. 이제는 미적분이 수학 선택영역이 됐지만 구술 면접에서 출제될 빈도가 높은 문제입니다. 그래서 면접시뮬레이션에서 다뤄 봤습니다. 이어서 정수론에서의 최대공약수 문제, 집합과 등차수열을 혼합한 문제, 최대·최소 문제, 기하와 도형 방정식에 관련된 문제 그리고 끝으로 기본적인 명제 문제를 출제했습니다.

■ 구술 면접 현장 중계

1) 곡선의 오목, 볼록의 의미를 미분으로 설명하라.

2) $a<x<b$에서 $f''(x)<0$이면 $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$는 $a<x<b$에서 감소함수인가 증가함수인가?

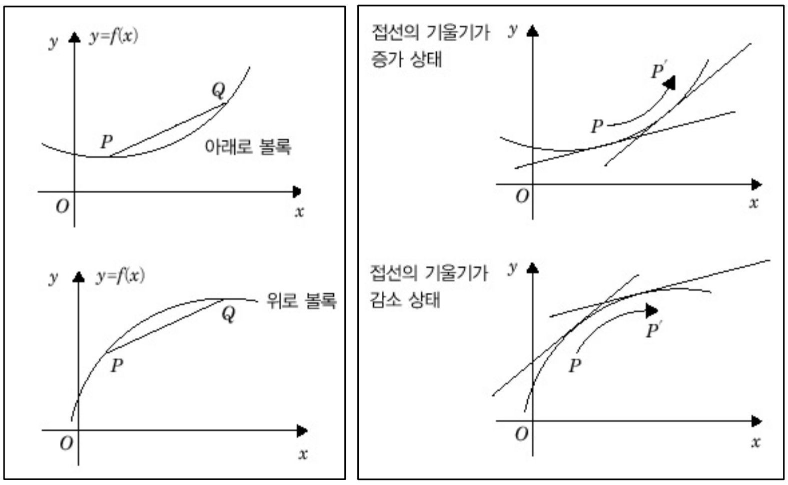
▶ 면접 시뮬레이션

교수 : 먼저 1)번 문제를 설명해 보세요.

학생 : 2차함수의 그래프 즉 포물선을 보면 아래로 볼록 혹은 위로 볼록의 형태가 있다는 것을 알 수 있습니다.

교수 : 좀더 쉽게 설명해보세요.

학생 : 곡선의 오목, 볼록의 수학적 정의는 다양하게 표현되지만 칠판에 그려서 간단하게 설명하겠습니다. 어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 두 점 P, Q에 대해 $\overline{\mathrm{PQ}}$를 잇는 곡선의 호가 선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$보다 아래쪽에 있을 때 그 구간에서 아래로 볼록이라고 합니다. 물론 그 반대의 경우는 위로 볼록이라고 합니다. 두 그림을 비교해보면 쉽게 알 수 있습니다.



교수 : 그럼 미분과의 관계를 설명해보세요.

학생 : 아래로 볼록한 곡선의 경우 $f''(x)>0$이 되는데 그 이유는 다음과 같습니다.

오른쪽 그림처럼 P에서 P′로 움직일 때 P에서의 접선의 기울기 $f'(p)$ 보다 P′에서의 접선의 기울기 $f'(p')$가 더 커집니다. 이것은 $f(x)$가 증가한다는 것을 의미하므로 $f''(x)>0$이 됩니다. 물론 위로 볼록한 경우는 반대로 해석할 수 있으며 $f''(x)<0$이 되는 것을 쉽게 알 수 있습니다.

교수 : 그럼 2계도함수와 연결해서 다시 설명해보세요.

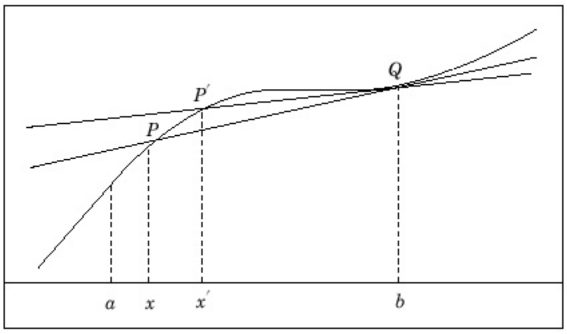
학생 : 참, 한 가지 설명이 빠졌는데 $f''(x)<0$이면 위로 볼록이고, $f''(x)>0$이면 아래로 볼록입니다.

교수 : 그럼 다음 문제에 대해서 설명해보세요.

학생 : 아까 말씀드렸듯이 $a<x<b$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록한 함수입니다.

$y=\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$라 두고 y의 의미를 직관적으로 파악하면 감소함수임을 알 수 있습니다.

y는 아래 그림에서 선분 PQ의 기울기를 의미하는데 x를 x'로 증가시키면 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 기울기에서 $\overline{\mathrm{P'Q}}$의 기울기로 그 기울기가 감소함을 알 수 있습니다. 이것은 $a<x<b$에서 곡선이 위로 볼록하기 때문에 일어나는 현상입니다.



교수 : 잘 했습니다. 좀더 엄밀하게 수학적으로 증명할 수 있나요?

학생 : 잘 모르겠습니다.

교수 : 수고했습니다.

■ 감상포인트

미적분은 구술에서 가장 중요한 영역이다. 그리고 문제에 대한 답변을 직관적으로 설명하는 것이 중요하다. 고난위 기술을 요하는 문제는 직관적인 설명보다는 어떻게 문제를 푸느냐가 득점요인이고 위와 같은 문제들은 직관적인 이해를 전달하는 것이 더 중요하다.

곡선의 볼록성과 오목성과 관련된 도함수(2계도함수와의 관계)의 의미를 이해하는 것은 곡선의 개형을 파악하는 것과 밀접한 관계를 가지고 있다. 미분을 한 번 한 값이 양일 경우 즉 $y'>0$일 경우 곡선(혹은 함수의 그래프)이 증가상태에 있다는 것 정도는 미분의 정의를 통해서 쉽게 알 수 있다. 그러나 한 번 더 미분한 값을(2계도함수) 구해 더 자세한 곡선의 정보를 얻을 수 있고 그래프의 개형을 더 정확하게 알 수 있다.

특히 물리학적인 측면에서 볼 때 2계도함수가 가속도(혹은 힘) 정보를 제공하는 훌륭한 도구가 되고 이를 통해 우리는 어떤 물체의 운동에 관한 수학적 묘사를 완벽하게 할 수가 있다. 미적분과 관련 부분을 잘 이해해 둔다면 구술시험에서 큰 힘을 발휘할 수가 있을 것이다.

본 문제 중에서 학생이 대답하지 못한 부분의 증명은 다음과 같다.

$y=\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$를 미분하면 $y'=\dfrac{f'(x)(x-b)-(f(x)-f(b))}{(x-b)^2}$

여기서 분자를 $F(x)$라 두고 미분하면 $F'(x)=f''(x)(x-b)+f'(x)-f'(x)=f''(x)(x-b)$이다.

$a<x<b$에서 $f''(x)<0,\ x-b<0$이므로 $F'(x)>0$.

따라서 $F(x)$는 증가함수가 되므로 $F(x)<F(b)=0$이다.

$\therefore\ y'<0$이 되므로 y는 $a<x<b$에서 감소한다.

[문제1]

1) **다항식 A를 다항식 B로 나눈 몫을 Q, 나머지를 R이라고 하면 A와 B의 최대공약수는 B와 R의 최대공약수와 같음을 증명하라.**

2) **n이 2 이상인 자연수일 때 n^3와 $n-1$은 항상 서로소임을 보여라.**

▶ 전문가 클리닉

지난호에 이어서 이번 문제도 정수론의 기술을 담고 있는 문제이다. 소수와 서로소에 대한 내용 중에서 가장 기본적인 유클리드 알고리즘의 원리에 관한 내용이다. 어떤 두 수의 최대공약수를 쉽게 구하는 기본원리를 이 증명의 결과를 통해 알 수 있다. 또한 두 번째 문제를 통해서

도 그것을 잘 이해 할 수 있다. 반드시 이해하고 어떻게 응용될지 상상해보자.

▶ 예시답안

1) A, B의 최대공약수를 G라고 하면,

$A=aG$ …… ①

$B=bG$(a, b는 서로소) …… ②

$A=BQ+R$에서

$R=A-BQ=aG-bQG=G(a-bQ)$ …… ③

따라서 ②, ③에서 G는 B와 R의 공약수이다.

만약 b와 $a-bQ$가 서로소가 아니라고 하면

$b=mk$, $a-bQ=mk'$(m은 공약수) …… ④

$a=mk'+bQ=mk'+mkQ=m(k'+kQ)$ …… ⑤

따라서 ④, ⑤에서 m은 a, b의 공약수이므로 a, b가 서로소라는 가정에 위배된다. 따라서 b와 $a-bQ$는 서로소이고 G는 B와 R의 최대공약수이다.

2) 직관적으로는 서로소임을 쉽게 알 수 있다. 증명은 위의 성질을 이용하면 가능하다.

먼저 $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$이므로 $n^3=(n-1)(n^2+n+1)+1$이다.

그러므로 n^3과 $n-1$의 최대공약수는 $n-1$과 1의 최대공약수와 같고 이것이 1이므로 서로소다.

[문제2] 실수들의 집합 A와 B에 대해 합집합 A+B를 $\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}$로 정의한다. 이제 $A=\{a, b, c, d\}$일 때 A+A의 원소의 개수가 7이면 A의 네 원소는 등차수열을 이룬다는 것을 증명하라(2004 포스텍).

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 구술 문제 중에서 비교적 어려운 문제에 속한다. 학생들이 구술 시험이나 수능에서 어렵게 느끼는 문제들은 계산이 복잡하거나 어려운 수식이 등장하기보다는 이 문제처럼 논리적 추론을 요구하는 특성을 가지고 있다. 이것이 구술 시험에서 원하는 것이다. 풀이를 보기 전에 스스로 추리를 해보면서 그 패턴을 파악해보는 것이 좋다. 공부과정에서는 괴롭고 힘들지만 이 추리기법을 터득하면 수학 고수가 이미 된 것이나 마찬가지다.

▶ 예시답안

a, b, c, d가 서로 다른 실수이므로 아래표와 같이 될 수 있다.

+	a	b	c	d
a	$2a$	$a+b$	$a+c$	$a+d$
b		$2b$	$b+c$	$b+d$
c			$2c$	$c+d$
d				$2d$

계산결과 2a, a+b, a+c, a+d, b+d, c+d, 2d는 모두 다른 수이고, A+A가 서로 다른 7개의

원소를 가지므로 A+A=이다.

따라서 b+c, 2b, 2c는 A+A의 원소 중의 하나와 같은 값이다.

b+c≠2a, a+b, a+c, b+d, c+d, 2d이므로

∴ b+c=a+d

2b≠2a, a+b, b+d, c+d, 2d이므로

∴ 2b는 a+c 또는 a+d

2c≠2a, a+b, a+c, c+d, 2d이므로

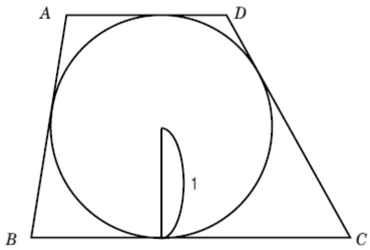
∴ 2c는 a+d 또는 b+d

만약 2b=a+d라면 2b=b+c이고 b=c가 돼 모순이다. 따라서 2b=a+c이다.

또한 2c=a+d라면 2c=b+c이고 b=c가 돼 모순이다. 따라서 2c=b+d이다.

따라서 수열 a, b, c, d에서 2b=a+c이고 2c=b+d가 돼 a, b, c, d는 등차수열을 이룬다.

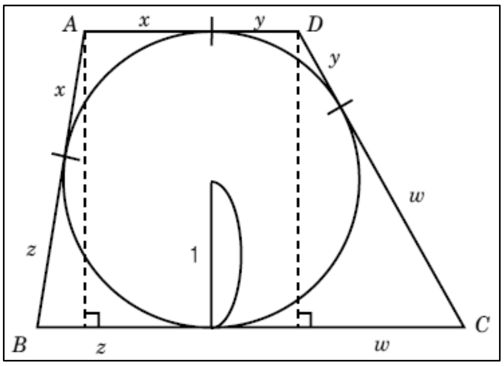
[문제3] 반지름이 1인 원에 외접하는 4각형 ABCD가 있다. $\overline{AD}+\overline{BC}$의 최소값을 구하라. (단, $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$)



▶ 전문가 클리닉

최대·최소의 문제는 응용문제 중의 하나이고 출제 가능성이 높다. 이 문제는 구술 시험 뿐 아니라 수능 준비용으로도 어울리는 문제이다. 그런데 전형적으로 단순한 개념들을 홀로 사용하기보다는 복합적으로 사용하는 것을 요구하므로 까다롭다. 우선 기하학적 성질을 이용하지 못하면 첫단계에서 막힌다. 마지막 단계에서는 최대·최소에서 중요한 산술기하평균 부등식을 이용한다. 이 기술은 그 자체로 매우 중요하므로 코쉬 슈바르즈 부등식과 함께 잘 정리해 두길 바란다.

▶ 예시답안



A와 D에서 밑변 $\overline{BC}$에 수선을 내리면 직각3각형 2개가 나온다. 그리고 피타고라스 정리에 의해서 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

① $(x+z)^2=2^2+(z-x)^2$ ∴ $xz=1$

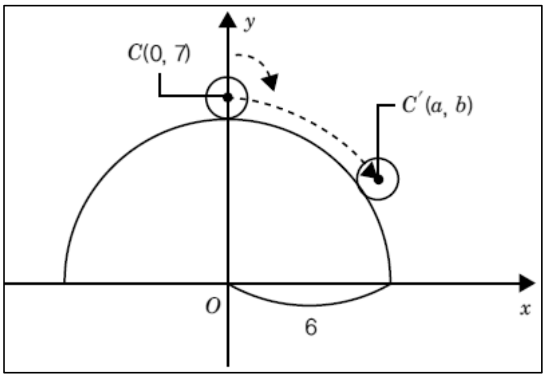
② $(y+w)^2=2^2+(w-y)^2$ ∴ $wy=1$

$\overline{AD}+\overline{BC}=x+y+z+w=(x+z)+(y+w)=2\sqrt{xz}+2\sqrt{yw}=4$

[문제4] 중심이 원점이고 반지름이 6인 반원 위에 반지름 1인 원이 놓여있다. 이 작은 원의 중심 C가 처음에는(0, 7)이었다. 미끄러지지 않고 한 바퀴 굴러 내려왔을 때, 이 작은 원의 중심 C′의 좌표를 (a, b)라 두자. 이때 a+b의 값을 구하라.

▶ 전문가 클리닉

약간 특이한 문제일수도 있는데 기본적인 기하의 개념과 도형의 방정식(해석기하)을 잘 이해하고 있다면 쉽게 해결할 수 있다. 교과서의 내용을 충분히 이해하고 응용하기 위해선 이런 종류의 문제를 많이 다뤄 보는 것이 좋다. 풀이를 보기 전에 스스로 해보자.



▶ 예시답안

1바퀴 굴리면 굴러간 길이는 2π이다.

$\therefore\ \overset{\frown}{CC'}=2\pi$

$\angle COC'=\theta$라 두면, $6\theta=2\pi$

$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{3}$

$\overline{OC'}$의 길이는 6+1=7이다.

$\therefore\ C'(a, b)$에서

$$a=7\sin\theta=7\times\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad b=7\cos\theta=\frac{7}{2}$$

$\therefore\ a+b=\dfrac{7\sqrt{3}+7}{2}$

[문제5] 다음 명제는 참인가 거짓인가?(2002 서강대, 부산대 수시 응용)

1) a가 유리수이고 b가 무리수이면 a+b는 무리수이다.

2) a가 유리수이고 b가 무리수이면 a^b는 무리수이다.

▶ 전문가 클리닉

고교수학의 첫 부분을 장식하는 집합과 명제 부분은 그 자체로 별로 어려운 것은 아니지만 단원 속에 나오는 문제를 증명하는 것은 쉽지 않다. 그런데 여러가지 수학적인 개념과 테크닉이 없기 때문에 어려움을 느끼는 것이지 이 단원을 이해 못해서 어려운 것은 아니다. 그렇다고 이 단원만 잡고 공부하는 것은 어리석다. 여러 다른 단원들을 공부하면 실력이 향상되면서 자연스럽게 이 단원은 정복이 된다. 다만 구술에서 요구하는 정도의 기본적인 개념과 증명의 기법을 몇 가지 암기하고 있어야 당황하지 않고 답할 수 있다.

본 문제 속에서는 명제의 참과 거짓을 판단하고 증명하는데 초점을 맞췄다. 그리고 반례를 들어서 거짓임을 보이는 것을 잘 보고 실전에서 장황한 논리를 이끌지 않는 요령을 익히자.

▶ 예시답안

1) 직접 증명보다는 귀류법으로 증명하는 것이 쉽다. 먼저 a+b를 유리수 p라 가정하자. 그러면 p=a+b에서 b=p−a가 된다. 여기서 p와 a는 유리수이고 유리수는 사칙연산에 대해서 닫혀 있으므로 b도 유리수가 된다. 이것은 b가 무리수라는 문제에 주어진 가정에 모순이다. 그러므로 이 명제는 참이다.

2) 이 명제는 거짓이다. 반례를 하나 들어 보자.

$a=3$, $b=\log_3 2$라 두면 $a^b=3^{\log_3 2}=2\log_3 3=2$가 된다. 이것은 이 명제가 항상 성립하는 것은 아니라는 것을 보여준다. 물론 여기에서 $\log_3 2$은 무리수이고 간략한 증명은 다음과 같다.

$\log_3 2$를 유리수라고 가정하면 $\log_3 2=\dfrac{q}{p}$로 표현된다(p, q는 서로소인 자연수). 로그의 정의로부터 $3^{\frac{q}{p}}=2$이고, 여기서 양변을 p 제곱하면 $3^q=2^p$이 된다. 3과 2는 서로소이므로 위의 등식은 성립하지 않는다. 그러므로 $\log_3 2$는 무리수이다.

2004년 06월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

이번호 구술면접 현장중계에서는 중간값 정리에 관한 문제를 다뤘습니다. 그리고 기존에 기출됐던 문제들을 응용해 경우의 수에 관련된 문제, 최소·최대문제 그리고 함수 방정식을 출제했습니다. 이 문제들은 단순한 수식풀이만으로는 해결할 수 없으므로 관련된 수학의 기본 원리를 충분히 이해하도록 합시다.

■ 구술 면접 현장 중계

1) 중간값 정리란 무엇인가?
2) $x_1, x_2, \cdots x_n$은 폐구간 $[0, 1]$에 있는 n개의 실수일 때 방정식 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lvert x-x_i\rvert=\frac{1}{2}$을 만족하는 실근 x가 폐구간 $[0, 1]$ 안에 적어도 1개 존재함을 증명하라.

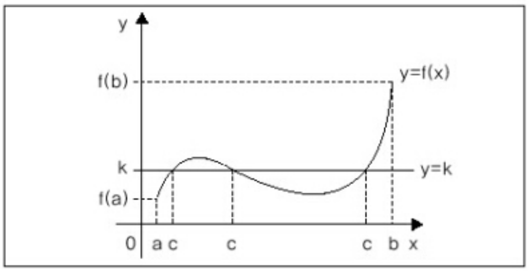
▶ 면접 시뮬레이션

교수 : 그럼 차례대로 답 해보세요.

학생 : 중간값의 정리란 교과서에 있는 대로 설명하면 다음과 같습니다.

함수 $f(x)$가 폐구간 [a, b]에서 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대해 $f(c)=k,\ a<c<b$를 만족하는 c가 적어도 1개 존재하는데 이것을 '중간값 정리'라고 합니다.

교수 : 잘 외우고 있군요. 그런데 이것은 직관적으로 무엇을 의미합니까?



학생 : 그림을 그려서 설명해 보겠습니다. 어떤 구간 [a, b]사이에서 함수값의 최대·최소사이에 적어도 하나의 임의의 값이 존재할 수 있다는 뜻인 것 같은데요.

교수 : 그럼 약간 이상하군요. 가우스 함수인 경우를 생각해 보세요.

학생 : 죄송합니다. 아까 설명한 부분에서 빠뜨린 것이 있습니다. 어떤 구간에서 함수가 연속이라는 것을 가정해야 합니다.

교수 : 잘 했습니다. 그런데 이 정리를 증명할 수 있나요?

학생 : 증명을 할 순 없습니다. 너무나 당연한데 무엇을 증명해야 합니까?

교수 : 알았습니다. 다음 문제로 넘어가죠.

학생 : 두 번째 문제는 중간값 정리를 이용해 간단하게 풀 수 있습니다.

먼저 $f(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lvert x-x_i\rvert$라 두면

$$f(0)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ f(1)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lvert 1-x_i\rvert=1-f(0)$$

$\therefore\ f(0)+f(1)=1$입니다.

여기서 양 끝점의 함수 값의 합이 항상 1이므로 $f(0) > \frac{1}{2}$이면 $f(1) < \frac{1}{2}$이고, $f(0) < \frac{1}{2}$이면 $f(1) > \frac{1}{2}$이 되는 것을 알 수 있습니다.

함수 $f(x)$는 폐구간 $[0, 1]$에서 연속이므로 중간값 정리에 의해서 이 구간에서 $f(x) = \frac{1}{2}$을 만족하는 실근 x가 존재합니다.

교수 : 잘 했습니다. 그런데 이 함수가 연속임을 어떻게 알 수 있죠?

학생 : 주어진 함수가 연속함수의 합으로 표현되므로 연속입니다. 그 이상의 설명과 정확한 증명은 모르겠습니다.

교수 : 아주 잘 했습니다.

■ 감상포인트

위 문제의 내용은 단순하지만 대답하기는 까다롭다. 그런데 이런 문제가 전형적인 구술시험 형식이다. 중간값 정리는 고교 과정에서 엄밀한 증명을 다루지 않기 때문에 직관적으로 이해하고 있어야 한다. 따라서 그림을 그리거나 예를 들어 설명을 하는 것이 중요하다. 더욱이 연속함수와 관계하여 매우 중요하게 다뤄진다. 실제로 중간값 정리의 직관적 의미는 연속함수처럼 너무나 당연한 것이다. 그러나 연속함수와 함께 잘 정리 해놔야 한다. 대다수학교에서 이 정리에 관련된 문제가 출제됐고 많은 학생들이 이 정리를 심각하게 고려해본 적이 없었기 때문에 당황하여 어떤 설명도 하지 못했다.

▶ Tip

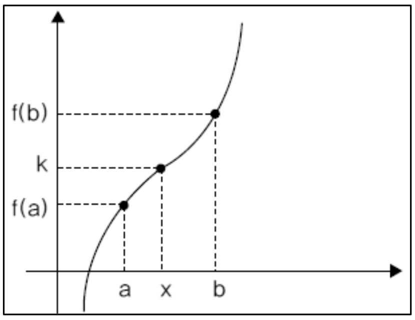
1. 연속함수의 성질

$f(x)$, $g(x)$가 주어진 구간에서 연속일 때

1) $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \times g(x)$도 연속

2) $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x) \neq 0$인 점에서 연속

$g(x) = 0$인 점에서는 불연속

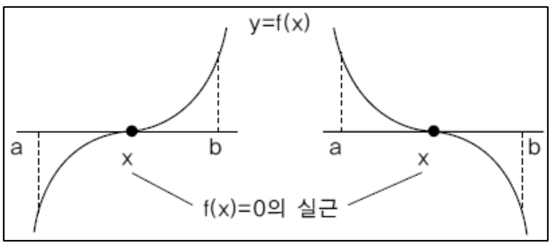


2. 중간값 정리

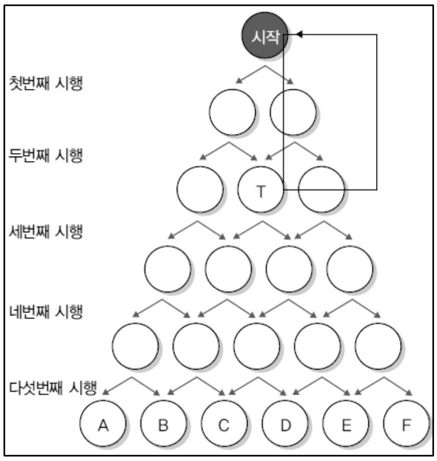
구간 $a \leqq x \leqq b$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대해 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 값을 k라고 하면 $f(x) = k$를 만족하는 x가 a와 b 사이에 적어도 1개 존재한다.

3. 중간값 정리의 응용

폐구간 $a \leqq x \leqq b$에서 연속인 함수 f가 $f(a) \times f(b) < 0$의 조건을 만족하면 방정식 $f(x) = 0$의 실근이 a와 b 사이에 적어도 1개 존재한다.



[문제1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.(중앙대 2002 응용)



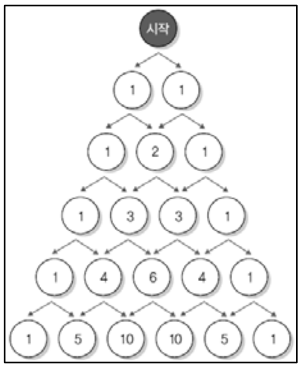
우측 그림과 같이 주사위 1개를 던져서 짝수가 나타나면 오른쪽으로 홀수가 나타나면 왼쪽으로 위치를 이동한다고 하자. 이 경우에 다른 조건을 부과하지 않는다면 주사위를 다섯번 던질 때 도착할 수 있는 위치는 A, B, C, D, E, F 중 하나일 것이다.

1) C점과 D지점에 도달할 가능성이 같은지를 설명하시오.

2) 만약 두 번째 시행에서 T의 위치에 온다면 처음부터 다시 시작하는 것으로 하자. 이런 가정하에서 C지점과 D지점에 이르게 되는 경로의 갯수를 계산하시오. 단 이미 지났던 경로를 다시 지나게 될 적에는 다른 경우의 경로로 간주하지 않는다.

3) 'I-2'의 상황에서 주사위를 던져 A, B, C, D, E, F 중 어느 한 지점에 도달하려면 평균 몇 번의 주사위를 던져야 하는지 계산하시오.

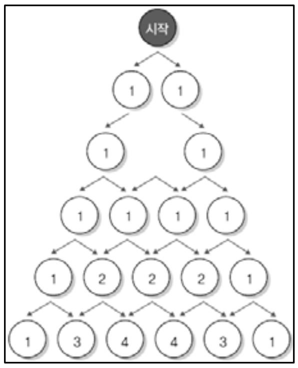
▶ 예시답안



1) A, B, C, D, E, F에 도달하는 경우의 수는 1, 5, 10, 10, 5, 1이다. 따라서 C와 D의 경우의 수가 각각 10으로 동일하다고 볼 수 있다.

여기서는 다음과 같은 그림을 이용해 한눈에 이해할 수 있도록 풀이했다. 물론 이항 전개를 이용해 가능한 갯수를 계산해도 된다.

2) C와 D에 도달하는 경우의 수는 각각 4이다. 앞의 문제처럼 C와 D의 경우의 수가 같다. 다음과 같은 그림을 이용해도 좋고, 이항 전개를 이용해 가능한 갯수를 계산해도 된다.



3) M을 계산하고자 하는 평균횟수라 하면 M은 2번을 기본적으로 던진 후 확률(1/2)로 다시 원점으로 돌아가서 다시 계산하거나, 혹은 (1/2)의 확률로 3번 더 던져서 구할 수 있을 것이다. 이와 같은 내용을 수식화하면 다음과 같다.

$M=2+(1/2)(M+3),\ (1/2)M=2+(3/2)$

$\therefore\ M=7$

혹은 M을 무한급수의 합으로 계산할 수 있다.

[문제2] 다음과 같은 가상 상황을 전제에서 아래 물음에 답하시오.(2002 중앙대 응용)

영희가 A라는 통신회사를 이용해 정보를 제공하는 인터넷 사이트를 운영하고자 한다. 모든 사용자의 월별 총이용량이 t시간일 때 통신회사 A에 지불해야 하는 비용은 다음과 같다. $0 \leqq t \leqq 3000$ 일 때, 40t+10,000원 그리고 3000 시장 조사 결과 이 사이트의 사용자들로부터 정보이용료로 시간당 x원을 받을 때(단 $0 \leqq x \leqq 100$) 월별 이용량이 100(100−x)시간이 될 것으로 예측됐다.

1) 정보이용료를 시간당 50원으로 정한다면 이 인터넷 사이트의 운영에서 기대되는 이윤은 얼마인가?

2) 이 사이트의 이윤을 최대로 하기 위해 정보이용료를 얼마로 책정해야 하는가?

3) 영희가 다른 통신회사 B를 이용하면 B사에 지불하는 비용은 단위 이용시간당 a원이 된다. A사에서 B사로 옮길 때 더 높은 이윤이 보장될 수 있다면 a는 어느 범위에 있는가?

▶ 전문가 클리닉

실생활에서 접할 수 있는 상황을 문제로 냈다. 이것을 풀기 위해서는 수학적 내용으로 재구성해야 한다. 즉 문제의 상황을 수식으로 정확히 표현하고 수학 문제로 재해석해 고교 교과서에 나오는 지식들을 활용해야 한다. 이런 문제들은 학생들의 조직적 사고와 분석 능력을 평가하기에 좋은 문제다.

▶ 예시답안

1) x=50⇒t=500이고 운영소득은 5000×50−(5000×20+70000)=80000

(답) 8만원

2) $100(100-x) \leqq 3000$

$70 \leqq x$이고 사용료가 x일 때 운영소득 $f(x)$는

$0 \leqq x < 70 \;\Rightarrow\; f(x) = 100(-x^2+120x-2700) = -100\{(x-60)^2-900\}$

그러므로 이 구간에서 f의 최대치는 $x=60$일 때 $f(60)=90000$이다.

$70 \leqq x \leqq 100 \;\Rightarrow\; f(x) = 100(-x^2+140x-4100) = -100\{(x-70)^2-800\}$

이 구간에서 f는 단조감소이고 최대치는 $x=70$일 때 $f(70)=80000$이다.

따라서 이용료를 60원으로 책정할 때 최고의 수익 9만원을 얻는다.

(답) 60원

3) $0 \leqq a \leqq 100$인 경우만 생각하면 된다. 다른 인터넷 회사를 이용할 때의 소득 $g(x)$는

$g(x) = 100(100-x)x - a100(100-x) = 100\{-x^2+(100+a)x-100a\}$

이므로 g의 최대값은 $x = \dfrac{100+a}{2}$일 때

$g\left(\dfrac{100+a}{2}\right) = 100\left(\dfrac{100-a}{2}\right)^2$이다.

그러므로 $100\left(\dfrac{100-a}{2}\right)^2 \geqq 9000$, 즉 $a<40$ 또는 $a<160$

(답) $a<40$

[문제3] 임의의 실수 x, y에 대해 $f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, $f(1)=1$일 때 함수 $f(x)$의 주기를 답하시오.

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 '함수 방정식'문제라고 불리며 아주 어려운 문제 유형에 속한다. 함수 방정식은 함수의 정의를 방정식처럼 표현해 그 의미를 한 눈에 알 수 없도록 한 것이다. 그런데 문제를 푸는 특별한 공식이 없다. 출제된 문제를 풀기 위해서는 주어진 식을 적절히 이용해서 그 주기를 구해야 한다.

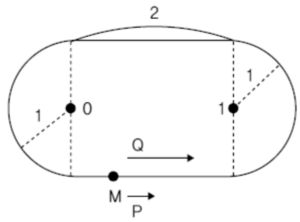
▶ 예시답안

임의의 실수 x,y에 대하여 $f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$가 성립하므로 x대신 $x+1$, y대신 1을 대입하면 $f(x+1) \cdot f(1) = f(x+2) + f(x)$이다. 이때 $f(1)=1$이므로

$$f(x)=f(x+1)-f(x+2)$$
$$=\{f(x+1)-f(x+3)\}-f(x+2)$$
$$=-f(x+3)$$
$$=-\{f(x+4)-f(x+5)\}$$
$$=-\{-f(x+5)-f(x+6)\}+f(x+5)$$
$$=f(x+6)$$

$\therefore$ 주기는 6

[문제4] 우측 그림처럼 반지름이 1인 반원 2개가 결합된 트랙 위에서 P와 Q라는 사람이 달린다. P는 속력 v, Q는 속력 v^2으로 달린다. 트랙 위의 어떤 점M에서 동시에 출발해 P, Q가 처음으로 다시 만나는 시간을 t라고 하자. t를 최소로 하기 위한 P의 속력을 구하라(단 $0<v<1$).



▶ 전문가 클리닉

이 문제에는 수식과 정리가 등장하지 않지만 어떤 상황을 긴 문장으로 제시해 학생 스스로 수식을 구성하고 수학 이론을 적용할 수 있는지를 묻는다. 실제로 수식으로 구성했을 때는 풀이가 어렵지 않지만 속도, 거리, 시간의 개념을 완전히 이해하고 있어야만 문제를 파악하고 적용할 수 있다. 이것이 전형적인 문장제 응용문제이다. 단순히 수식 풀이와 정의를 암기하고 있는 학생은 이런 문제를 해결할 수 없다. 그러므로 우선 수학의 기본 개념을 충분히 이해하고, 그것이 적용된 비슷한 유형의 문제들을 다양하게 풀어 보면서 실전에 대비하기 바란다. 특히 구술면접에서는 이런 문제들이 자주 출제된다.

▶ 예시답안

트랙의 길이는(2×2)+(2π×1)=4+2π이다. 그러므로 최초로 다시 만날때 P와 Q의 이동거리의 차는 4+2π가 된다.

$\therefore$ $vt-v^2t=4+2\pi$이므로 $(v-v^2)t=4+2\pi$

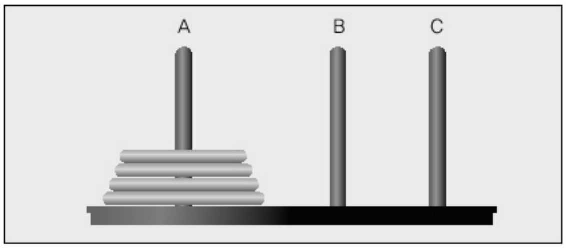
$$\therefore\ t=\frac{4+2\pi}{v-v^2}=\frac{4+2\pi}{-\left(v-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\geqq 16+8\pi$$

$\therefore$ $v=\dfrac{1}{2}$일 때 최소이다.

2004년 07월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

이번달에는 기하영역의 문제를 많이 다뤘습니다. 그리고 기본 문제 형식에서는 변화가 없지만 좀 더 어려운 문제들을 출제해 심화학습을 할 수 있도록 조정했습니다.

■ 구술 면접 현장 중계(2002 서울대 응용)



동판에 막대가 3개 있고 크기가 서로 다른 4개의 원판이 한 막대에 꽂혀 있다. 이때 다음과 같은 규칙으로 원판을 다른 막대로 모두 옮기는 놀이를 한다.

(1) 한 번에 1개의 원판만을 옮긴다.

(2) 크기가 큰 원판은 반드시 크기가 작은 원판 아래쪽에 있어야 한다. 원판을 모두 다른 막대로 옮기는데 필요한 이동횟수는 모두 몇 번인가? 그리고 원판이 n개일 때 이동횟수를 구하라.

▶ 면접 시뮬레이션

교수 : 그럼 설명해보세요.

학생 : 4개의 원판을 옮기는데 필요한 이동횟수는 총 15번입니다.

교수 : 답이 나온 과정을 자세히 설명해 보세요.

학생 : 먼저 원판이 2개일 때 이동횟수를 조사하면 다음과 같습니다. 위에 있는 작은 원판 1개를 2번 막대기로 이동시키고 큰 원판을 3번 막대기로 옮긴 후 다시 작은 원판을 3번 막대기로 옮기면 3번만에 옮길 수 있습니다. 그리고 원판이 3개일 경우는 작은 원판과 중간 원판을 2번 막대기로 이동시키고(이때 3번 이동), 큰 원판을 3번 막대기로 옮기고(1번 이동), 다시 2번 막대기의 2개의 원판을 3번으로 이동(3번 이동)시키면 됩니다. 그럼 총 이동횟수는 3+1+3=7번입니다.

교수 : 잘 했습니다. 그런데 막대기 번호는 무엇을 뜻합니까?

학생 : 특별한 의미는 없고 3개의 막대기가 존재하니깐 임의로 번호를 붙였습니다.

교수 : 좋아요. 원판이 4개인 경우도 계속해 보세요.

학생 : 원판이 4개일 때는 조금 전에 설명한 방법을 반복하면 됩니다. 우선 위에 있는 3개 원판을 2번 막대기에 옮긴 후(7번) 제일 큰 원판을 3번 막대기에 옮기고(1번), 다시 2번 막대기에 있는 3개의 원판을 이 막대기로 이동시키면(7번) 됩니다. 결국 총 이동횟수는 7+1+7=15번입니다.

교수 : 훌륭합니다. 그럼 이 문제를 일반화해서 원판의 개수가 n개일 때 이동횟수 P(n)를 구해보세요.

학생 : 일반식을 구하기 위해서 도표를 그려서 패턴을 찾아보면 다음과 같습니다.

원판의 개수	1	2	3	4	…	n
이동 회수	1	3	7	15		

이 도표를 자세히 보면 $P(1)=2^1-1$, $P(2)=2^2-1$, $P(3)=2^3-1$, $P(4)=2^4-1$의 꼴로

표현됩니다. 그러므로 일반적으로 $P(n)=2^n-1$이 될 것으로 추측할 수 있습니다.

교수 : 기발한 생각인데 2^n-1이 된다는 것을 좀 더 수학적으로 증명할 수 있나요?

학생 : 제가 유도한 방법이 수학적이지 않습니까?

교수 : 그런 뜻은 아니고 처음 몇 가지 형태를 보고 유추하는 방법은 설득력이 약하다는 뜻이죠. 점화식을 이용해서 한 번 유도해 보세요.

학생 : 잘 모르겠습니다.

교수 : 수고했습니다.

■ 감상포인트

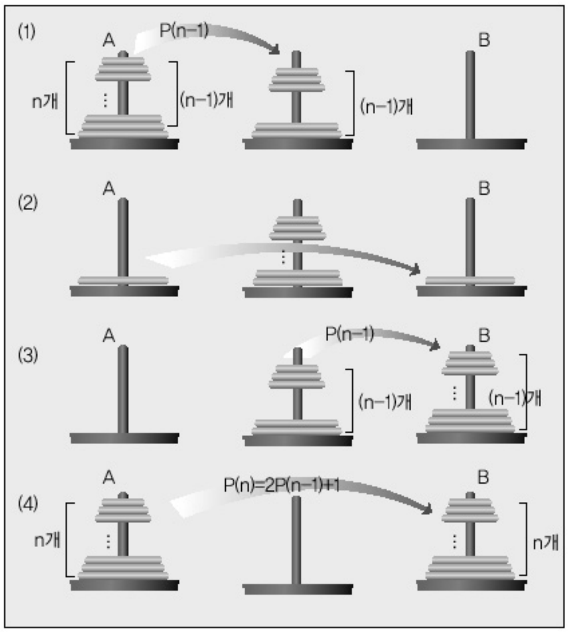
이 문제는 초창기 구술면접에서 다뤄진 것으로 수험생이라면 한 번쯤은 본 적이 있을 만큼 유명하다. '하노이 탑 문제'라고 불리는 이 문제는 흥미있는 전설을 바탕으로 하며 수학적 귀납법과 점화 알고리즘의 기본적 구조와 접근법의 원리를 제시한다.

그런데 면접 시뮬레이션에 등장하는 학생이 이동횟수 P(n)를 구하는 일반화 과정은 적절하지 않은 것처럼 보인다. 몇 가지 초기값으로 단순하게 일반식을 추리하는 것은 수학적인 것으로 보이지만 실제로 설득력이 없는 방식이다. 올바른 일반식 유도과정을 다음 팁에서 소개할 것이다. 면접 시뮬레이션에서 교수가 학생에게 '설득력이 없다'라고 말한 것이 무엇을 의미하는지 잘 생각해 보면서 다음에서 제시되는 유도과정을 따라 가보자.

▶ Tip

1. 일반적인 경우의 해법

먼저 n개의 원판이 있을 때 이것을 모두 옮기는데 필요한 원판의 이동횟수를 P(n)이라고 하자. 그러면 P(1)=1, P(2)=3, P(3)=7임을 알 수 있다. 일반적으로 P(n)은 P(n−1)로부터 유도할 수 있다. 다음의 그림을 참고해 생각해 보자.



오른쪽의 그림을 보면 모든 자연수 n에 대해 구하는 횟수 P(n)는 다음처럼 구할 수 있다.

P(n)=(A에서 C로 n−1개의 원판을 옮기는데 P(n−1))+(A에서 B로 가장 큰 원판 1개를 옮기는데 1번)+(C에서 B로 n−1개 원판을 옮기는데 P(n−1))이 된다.

이것을 정리하면 P(n)=2P(n−1)+1이다.

그리고 위 점화식에 초기값들을 차례로 대입하면

$P(1)=1$

$P(2)=2P(1)+1=2+1=3$

$P(3)=2P(2)+1=2\times3+1=4+2+1=7$

$P(4)=2P(3)+1=2\times7+1=8+4+2+1=15$

등비수열의 합공식을 이용하면 일반적으로

$P(n)=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\dfrac{2^{n-1}}{2-1}=2^{n-1}$가 된다.

물론 점화식 P(n)=2P(n−1)+1의 양변에 1을 더해서 P(n)+1=2로 바꿔 풀면 더 쉽다. 이 풀이는 교과서를 참고해서 각자 해보기 바란다.

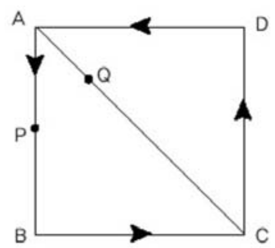
2. 하노이 탑의 전설에 대해서

하노이 탑 문제는 프랑스의 수학자 루카스가 제시했는데 대략적인 내용은 다음과 같다. 베트남 하노이시 외각의 베나레스에는 아주 큰 사원이 있다. 이 사원에는 높이 50cm정도 되는 다이아몬드 막대 3개가 있다. 그 중 한 막대는 천지 창조 때 순금으로 만들어졌으며 중간에 구멍이 뚫린 64장의 원판이 크기가 큰 것이 아래부터 차례로 쌓아져 있다. 그리고 신은 승려들에게 밤낮으로 쉬지 않고 1장씩 원판을 옮겨 빈 다이아몬드 막대 중 어느 곳으로 모두 옮겨 놓도록 명령했다. 그리고 원판을 옮길 때 다음의 규칙을 지켜야 한다 : 원판은 1번에 1개씩 옮겨야 하고 절대로 작은 원판 위에 큰 원판을 올려놓을 수 없다.

그런데 64개의 원판이 본래의 자리를 떠나 다른 한 막대로 모두 옮겨졌을 때에는 탑과 사원, 승려들은 모두 먼지가 돼 사라지면서 세상의 종말이 온다. 우리는 이미 이동횟수(이동시간)에 대한 공식을 알고 있으므로 이 공식으로 원판을 모두 옮기는데 걸리는 시간을 계산해보자. 원판을 한 번 옮기는데 1초가 걸린다고 하면 64개를 옮기는데는 $2^{64}-1$초가 걸린다. 그리고 이를 햇수로 환산하면 대략 5천8백33억년 정도 걸린다.

태양과 지구의 수명에 대한 아래와 같은 정보는 하노이 탑에 얽힌 전설의 타당성을 지지해 준다. 태양은 46억년 동안 활동해온 것으로 추측되며 50억년 동안 더 태울 연료가 남아있다. 태양 수명의 말기에는 헬륨을 더욱 무거운 원소로 융합하는 반응이 일어나면서 부풀어오르는데 지구를 삼킬 정도까지 커진다. 그후 10억년은 적색거성으로 존재하며 이내 갑자기 수축해 백색왜성이 된다. 따라서 50억년 후에 태양이 적색거성이 되면서 지구에 생명체가 살 수 없는 상태가 되므로 종말이라고 볼 수 있다. 즉 하노이 탑을 옮기는 데 5천8백33억년 정도 걸리므로 그 안에 지구에 종말이 찾아온다는 것은 과학적으로 타당하다.

[문제1] 동점 P는 정4각형 ABCD의 둘레 위를 일정한 방향으로 돌며 동점 Q는 대각선 AC 위를 왕복한다. P와 Q가 동시에 A를 출발해 같은 속력으로 움직일 때 P와 Q는 다시 만날 수 없음을 보여라.



▶ 전문가 클리닉

이 문제는 몇년 전에 유행했던 것으로 증명 자체는 매우 간결하고 쉽다. 그러나 이 문제를 처음 본 학생에게 문제풀이를 위한 실마리를 찾는 것은 쉽지 않을 것이다. 또한 이 문제는 여러 응용문제로 발전할 수 있는 가능성이 크기 때문에 입시생들은 반드시 확실히 이해하고 증명이 의미하는 것을 숙고해야 한다.

▶ 예시답안

$\overline{AB}=a\,(a>0)$라 하면 $\overline{AC}=\sqrt{2}\,a$가 된다. P와 Q가 만나는 곳은 A 또는 C일 것이며, 거기에 도착하려면 P는 2ma, Q는 $\sqrt{2}$na(m, n은 자연수)만큼 움직여야 한다.

P와 Q의 동일한 속력을 v라 하자. 출발에서 만나기까지의 시간은 같기 때문에

$$\frac{2\mathrm{ma}}{v}=\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{na}}{v} \qquad \therefore\ \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}}=\sqrt{2}\text{ 이다.}$$

이 식의 좌변은 유리수, 우변은 무리수이므로 모순이다. 따라서 P와 Q는 만나지 않는다.

[문제2] 1백50명이 투표해 4명의 대표를 뽑는 선거에 6명이 입후보했다. 그리고 득표수가 많은 사람 순으로 뽑는다. 이때 4명의 대표가 확실히 당선되기 위한 최소의 득표수를 구해라.(단 1표씩 투표하고 무효는 없다)

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 부등식을 이용해 논리적으로 상황을 분석하는 능력을 측정하고 있다. 문장으로 된 문제에서는 주어진 상황을 잘 이해하고 수식으로 정확히 표현해서 고교 교과과정의 기본적인 수학지식을 활용해 해결해야 한다. 물론 수식으로 표현하지 않고 직관적으로 알아내도 상관없다. 그러나 수식은 복잡한 상황에서 기계적이고 정교하게 문제를 해결할 수 있도록 해주는 도구와 같은 것이다.

▶ 예시답안

6명의 후보임원이 얻은 득표수 중 최고 득표수를 x_1, 제2, 제3, …, 제6 득표수를 차례로 $x_2, x_3, \cdots, x_6$이라 하자.

$$x_1, x_2, \cdots, x_6=150 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (1)$$

4등으로 당선이 확실하려면 $x_4>x_5+x_6$이어야 한다. … (2)

(1), (2)에서 $x_5+x_6=150-(x_1+x_2+x_3+x_4)$ … (3)

$x_1+x_2+x_3+x_4\geqq 4x_4$이다. ($\because$ $x_1\geqq x_2\geqq x_3\geqq x_4$)이므로 (3)에서 $x_5+x_6=150-4x_4<x_4$

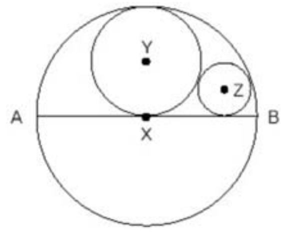
$\therefore\ 150<5x_4$

$\therefore\ 30<x_4$ 따라서 $x_4\geqq 31$이다.

▶ 별해

좀 더 직관적으로 문제에 접근해보자. 일단 6명의 후보자 중에 1명이 1표도 얻지 못하면 탈락된다. 그리고 5명이 같은 표를 획득했다면 1명당 30표씩 얻었다고 볼 수 있다. 이 상황에서는 우열을 가릴 수 없다. 즉 누구도 당선된 것이 아니고 탈락된 것도 아니다. 하지만 어떤 후보가 다른 후보의 표에서 1표라도 빼앗아 오면 그 후보는 당선된다. 그러므로 31표가 안전득표수이다.

[문제3] 원 X는 지름이 AB이다. 원 Y는 원 X와 AB의 중점에서 접하며, 원 Z는 두 원 X, Y 및 AB와도 접한다. 이때 원 X와 Z의 넓이의 비를 구하라.

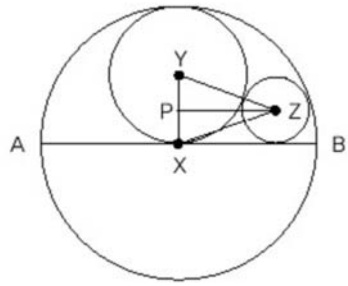


▶ 전문가 클리닉

도형문제들을 이용하면 가장 기본적인 수학적 능력을 측정할 수 있다. 여기서는 주어진 문제의 핵심용어 '접한다'의 기하학적 내용을 어떻게 수식으로 변환시키느냐가 중요하다. 어려울 수 있는 부분은 공간도형을 실제로 구성해 상상해야 하는 부분이다. 공간지각 능력이 필요하다. 그리고 도형에 관련된 내용을 수식으로 빨리 표현해 낼 수 있어야 한다. 이렇게 했을 때 공간도형의 해석의 애매함을 최대한 줄일 수 있다. 다음의 해설을 보고 정확히 이해해 두길 바란다.

▶ 예시답안

점 Z를 지나며 선분 $\overline{AB}$에 평행한 직선이 선분 $\overline{XY}$와 만나는 점을 P라 하고 원 X, Y, Z의 반지름을 각각 x, y, z라 하자.



그러면 $\overline{YZ}=\frac{x}{2}+z$, $\overline{YP}=\frac{x}{2}-z$, $\overline{XZ}=x-z$이다.

$\triangle YPZ$와 $\triangle XPZ$에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{PZ}^2=(\frac{x}{2}+z)^2-(\frac{x}{2}-z)^2$, $\overline{PZ}^2=(x-z)^2-z^2$

$\therefore\ (\frac{x}{2}+z)^2-(\frac{x}{2}-z)^2=(x-z)^2-z^2$

이것을 풀면 $x=4z$이다. 따라서 구하고자 하는 두 원의 넓이의 비는 16:1이다.

[문제4] 무한히 늘어날 수 있는 고무로 된 띠 위를 따라 개미가 분당 1/3m의 속력으로 직선위를 기어가고 있다. 처음의 띠 길이는 1m였고 1분 지날 때마다 띠의 길이가 k배씩 늘어난다고 하자. 띠의 한쪽 끝에서 출발을 한 개미가 결국 띠의 다른 쪽 끝에 도달하려면 k는 어떤 조건을 만족해야 하는가? 여기서 k는 1보다 큰 유리수다 (2003 중앙대 응용).

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 구술시험의 의도를 잘 담은 좋은 문제이다. 발상의 아이디어가 없다면 쉽게 해법을 찾기 힘들 것이다. 아래 풀이 과정을 보면서 복잡한 상황을 어떻게 단계적으로 분석하고, 수학적으로 유도해 나가는지 잘 음미해보자.

▶ 예시답안

우선 개미의 위치를 예측해 보기 위해 다음과 같은 테이블을 만들어 보자.

	개미의 위치(확대 전)	개미의 위치(확대 후)	띠의 길이(확대 후)
1분 후	$\frac{1}{3}$	$\frac{k}{3}$	k
2분 후	$\frac{k}{3}+\frac{1}{3}$	$\frac{k}{3}+\frac{k^2}{3}$	k^2
3분 후	$\frac{k}{3}+\frac{k^2}{3}+\frac{1}{3}$	$\frac{k}{3}+\frac{k^2}{3}+\frac{k^3}{3}$	k^3

결국 n분 후 개미의 위치는(확대 후) $\frac{k}{3}+\frac{k^2}{3}+\frac{k^3}{3}+\cdots+\frac{k^n}{3}$으로 주어진다. 공비 k인 등비급수를 고려해 계산하면 $\frac{k(k^n-1)}{3(k-1)}$이 된다.

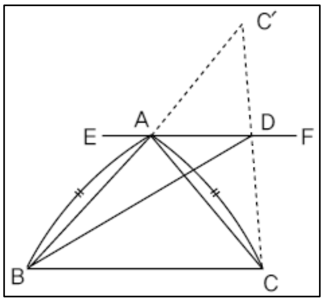
띠의 길이는 k^n으로 증가하고 있으므로 $\frac{k(k^n-1)}{3(k-1)} \geq k^n$의 조건식을 만족해야 한다. 결국 $n \to \infty$의 극한에서 개미가 다른 편 끝에 도달하기 위해서는 $\frac{k}{3(k-1)} \geq 1$를 만족해야 하므로 $1 < k \leq \frac{3}{2}$의 조건이 얻어진다. 엄밀한 의미에서 $k=\frac{3}{2}$의 경우는 $n \to \infty$ 조건에서만 다른 편 끝에 다다르게 되므로 $1 < k < \frac{3}{2}$이 정답이 된다.

[문제5] $\triangle \mathrm{ABC}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{EF}}$**는 점 A를 지나고** $\overline{\mathrm{BC}}$**와 평행이며 D는** $\overline{\mathrm{EF}}$ **위의 한 점일 때** $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}<\overline{\mathrm{DB}}+\overline{\mathrm{DC}}$**임을 증명하라.**

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 최대·최소 문제이며 증명이 간결하다. 기초적인 문제이지만 이런 문제에서 점수를 잃으면 안된다. 특히 새로운 점 C′를 이용하는 아이디어는 쉽게 떠오르는 것이 아니다.

▶ 예시 답안



$\overline{\mathrm{BA}}$를 $\overline{\mathrm{AC'}}=\overline{\mathrm{AC}}$가 되도록 C′까지 연장하고 C′과 D를 연결한다. $\mathrm{EF} /\!/ \mathrm{BC}$이므로 $\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{C'AD}$, $\angle \mathrm{ACB}=\angle \mathrm{CAD}$이다. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이므로 $\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{ACB}$, $\angle \mathrm{CAD}=\angle \mathrm{C'AD}$이다.

$\overline{\mathrm{AC'}}=\overline{\mathrm{AC}}$이고 $\overline{\mathrm{AD}}$는 공통이므로 $\triangle \mathrm{AC'D} \equiv \triangle \mathrm{ACD}$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{C'D}}=\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{BC'}}<\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{C'D}}$, $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC'}}$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}<\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{DC}}$임이 증명됐다.

2004년 08월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

■ 구술면접 현장중계

모든 실수에 대해 정의된 미분가능한 함수 f가 있고, 다음 두 조건을 만족할 때 질문에 답하라.(포스텍 2003년 응용)

(a) f'(1)=1

(b) 모든 실수 x, y에 대해 f(xy)=f(x)×f(y)가 성립한다.

1) 위의 조건을 만족할 때 f(1)을 구하라.

2) 위의 조건을 만족하는 f를 모두 구하라.

▶ 면접 시뮬레이션

교수 : 먼저 1)번부터 설명해보세요.

학생 : 주어진 조건에서 항상 $f(xy)=f(x)\times f(y)$를 만족하므로 $x=1, y=1$을 대입하면 $f(1)=\{f(1)\}^2$이 됩니다. 이것을 만족하는 것은 $f(1)=0$ 또는 $f(1)=1$인데, 만약 $f(1)=0$이면 $f(x)=f(1)\times f(x)=0$이 돼 $f(x)=0$이 됩니다. 이것은 (a)에 모순이므로 $f(1)=1$이라고 볼 수 있습니다.

교수 : 잘 했습니다. 그럼 두 번째 문제를 풀어보세요.

학생 : 위 조건을 모두 만족하는 함수는 $f(x)=x$ 뿐입니다.

교수 : 이유를 설명해보세요.

학생 : 두 번째 조건을 만족하려면 $f(x)=x^n$ 꼴이 돼야 합니다. 왜냐하면 $f(xy)=(xy)^n=x^ny^n=f(x)f(y)$로 두 번째 조건을 만족하기 때문입니다. 그런데 여기서 양변을 미분하면 $f'(x)=nx^{n-1}$이 되고, $f'(1)=n$이므로 첫 번째 조건을 만족시키려면 $n=1$이 돼야 합니다. 그러므로 구하는 함수는 $f(x)=x$가 됩니다.

교수 : 잘 했습니다. 그런데 학생은 다항함수 $f(x)=x^n$ 꼴만 생각했는데, 주어진 조건을 만족하고 모든 실수 x, y에 대해 $f(xy)=f(x)\times f(y)$를 성립하는 함수가 다항함수 외에도 존재할 수가 있습니다. 이 부분을 간과한 것 같은데 어떻게 생각합니까?

학생 : 글쎄요. 다른 함수가 존재할 수 있나요?

교수 : 가령 로그함수나 사인함수 등을 생각할 수 있고, 다른 꼴의 함수도 주어진 조건을 만족할 수 있다는 것이지요.

학생 : 글쎄요. 잘 모르겠습니다.

교수 : 수고했습니다.

■ 감상포인트

위 시뮬레이션은 실제상황인데, 이 학생의 답변에는 중대한 오류가 있다. 학생이 답변한 것을 보면 단번에 이상하다는 것을 느낄 수 있을 것이다. 면접교수가 지적했듯이 $f(xy)=f(x)\times f(y)$라는 조건을 만족하는 함수를 구하는 과정에서 다항함수만 고려한 것이 문제다. 구술면접의 가

장 큰 매력은 정답과 해법을 찾아가는 과정을 점검할 수 있다는 것이다. 해법의 과정이 너무 엉성하고 수학적이지 않다. 그냥 특수한 경우를 우연히 찾았다는 느낌이다.

정확한 해법의 과정은 문제 속에 숨겨진 경우가 많다. 이 문제도 마찬가지다. 처음조건 $f(1)=1$이라는 힌트 속에서 미분을 이용해야 한다는 것을 눈치채야 한다. 사실 이 문제는 이미 많이 알려져 있다. 다만 함수 방정식과 관련된 문제들은 특별한 해법이 없기 때문에 주먹구구식으로 푸는 경우가 많다. 미분과 관련된 해법을 따로 익혀 둔다면 기계적으로 풀 수도 있다.

정확한 해법은 다음과 같다. 미분 정의를 이용해서 도함수 꼴로 나타내고 하나씩 풀어보자.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x(1+\frac{h}{x}))-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(1+\frac{h}{x})-f(x)}{h}=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(1+\frac{h}{x})-f(1)}{h}$$

$$=\frac{f(x)}{x}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+\frac{h}{x})-f(1)}{\frac{h}{x}}=\frac{f(x)}{x}\times f'(1)=\frac{f(x)}{x}$$

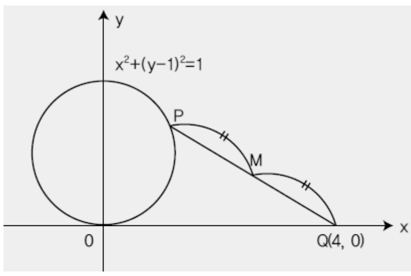
$$\therefore\ \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x}$$

이 식의 양변을 적분하면 $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{1}{x}dx$가 되고 이것을 정리하면,

$\ln|f(x)|=\ln|x|+C$ $\quad\therefore\ f(x)=kx$(k는 상수)

$f(1)=1$이므로 k는 1이다. 따라서 $f(x)=x$이다.

[문제1] 점 P가 원 $x^2+(y-1)^2=1$ 위를 돌고 있다. PQ의 중점을 M이라 할 때 M의 자취의 길이를 구하라.



▶ 전문가 클리닉

자취문제를 스스로 유도해보는 것은 수학의 각종 테크닉을 따로 익히는 것보다 효율적일 수 있다. 응용하는 내용도 다양하기 때문에 기본적인 해법은 꼭 정리해 둬야 할 것이다.

▶ 예시답안

$P(x,\ y)$라 하면 M은 $\overline{PQ}$의 중점이므로 좌표는 $M(\frac{4+x}{2},\ \frac{y}{2})$이다.

$M(\frac{4+x}{2},\ \frac{y}{2})=(\alpha,\ \beta)$라 하면, $x=2\alpha-4,\ y=2\beta$이다.

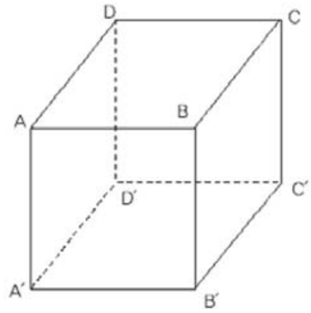
$x^2+(y-1)^2=(2\alpha-4)^2+(2\beta-1)^2=4(\alpha-2)^2+4(\beta-\frac{1}{2})^2=1$

$\therefore\ (\alpha-2)^2=(\beta-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

$\therefore$ M의 자취는 중심이 $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$이고, 반지름이 $\frac{1}{2}$인 원

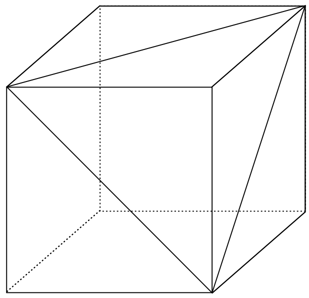
$\therefore$ M의 자취의 길이는 $2\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi$이다.

[문제2] 우측 그림처럼 정6면체의 8개의 꼭지점 중에서 임의로 세 점을 택해 3각형을 만들 때 정3각형이 될 확률을 구하라.



▶ 전문가 클리닉

확률과 기하학을 결합한 문제는 구술시험에 등장할 가능성이 높다. 이 문제는 매우 쉽고 기본적이지만 꼭 정리해 둬야 할 것이다.



▶ 예시답안

같은 모서리에 포함되는 점을 동시에 2개 택하면 다음에 어느 점을 택하든 한 각이 직각이 돼 정3각형이 될 수 없다. 그러므로 아래 그림과 같은 경우에만 정3각형이 될 수 있다. 정6면체의 꼭지점은 8개이므로 정3각형이 될 경우는 8가지이다. 그리고 이때의 확률을 구하면

$\therefore \frac{8}{{}_8C_3}=\frac{8}{\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}}=\frac{1}{7}$ 이다.

[문제3] 철수와 영희가 주사위를 각각 하나씩 들고 게임을 한다. 철수가 먼저 주사위를 던지고 다음으로 영희가 주사위를 던질 때 철수의 숫자가 영희의 숫자보다 클 확률을 구하라.

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 너무나 쉽게 보여 핵심을 놓칠 수가 있다. 즉 아주 원초적으로 접근해서 푸는 것이 결코 수학적이지 않다는 편견을 버려야 한다. 특별한 테크닉을 이용하지 않고 좀 투박하지만 나름대로 조직적으로 풀어나가는 것이 수학하는 기본자세다.

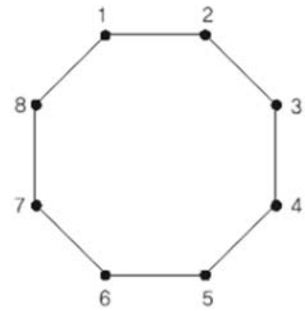
▶ 예시답안

철수의 숫자	1	2	3	4	5	6
영희가 지는 숫자의 가지수	0가지	1가지	2가지	3가지	4가지	5가지

$\therefore$ 1+2+3+4+5=15 $\therefore$ 확률$=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

그러므로 철수의 주사위 숫자가 영희보다 클 확률은 $\frac{5}{12}$이다.

[문제4] 우측 그림과 같이 1에서 8까지의 번호가 붙은 정8각형이 있다. 1개에서 8개까지 점이 각각 찍혀 있는 정8면체 모양의 주사위를 무심히 3회 던져, 각 회마다 나오는 눈의 수와 같은 번호의 꼭지점을 3개 정하기로 했다. 이렇게 해서 정해진 꼭지점을 조합하면 점, 선분, 3각형을 만들 수 있는데, 만들어진 도형이 직각3각형 또는 이등변3각형이 될 확률을 구해라.



▶ 전문가 클리닉

이것은 경우의 수를 체계적으로 구하는 것과 기하학적 직관을 결합한 문제이다. 난이도가 약간 높지만 충분히 구술문제로 등장할 수 있다. 복잡한 상황을 단계적으로 풀어나가는 것에 익숙해지도록 따로 연습을 해두자.

▶ 예시답안

정8면체 모양의 주사위를 3회 던져서 나오는 눈의 가지수는 $8\times8\times8=512$이다.

1) 우선 직각3각형이 될 경우의 수를 살펴보면 1번 점이 직각의 꼭지점이 될 경우는(1, 2, 6)(1, 3, 7)(1, 4, 8)의 3가지다. 2번 점이 직각의 꼭지점이 될 경우도(2, 3, 7)(2, 4, 8)(2, 5, 1)의 3가지다. 3, 4, 5, 6, 7, 8번 점의 경우도 마찬가지로 각각 3가지다.

$\therefore$ $3\times8=24$

이들 24짝의 각각에 대해 나오는 눈의 가지수는 6가지다.

$\therefore$ $24\times6=144$

2) 다음 이등변3각형이 될 경우의 수를 살펴보면 1번 점이 이등변3각형의 꼭지각이 될 경우는 (1, 2, 8), (1, 3, 7), (1, 4, 6)의 3가지이고, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8번 점의 경우도 1)의 풀이와 마찬가지로 각각 3가지씩이다.

$\therefore$ $3\times8=24$

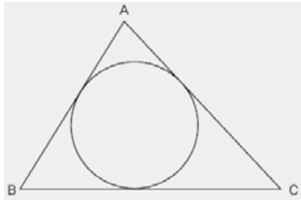
24짝의 각각에 대해서도 나오는 눈의 가지수는 6가지다.

$\therefore$ $24\times6=144$

그런데 1번 점의 경우(1, 3, 7)의 짝은 직각이등변3각형이므로 1), 2)에 두 번 중복해서 들어가 있다. 따라서 이들의 짝은 한 번씩 제외해 줘야 한다($8\times6=48$짝). 그러므로 총 경우의 수는 $144+144-48=240$

따라서 구하는 확률은 $\frac{240}{512}=\frac{15}{32}$이다.

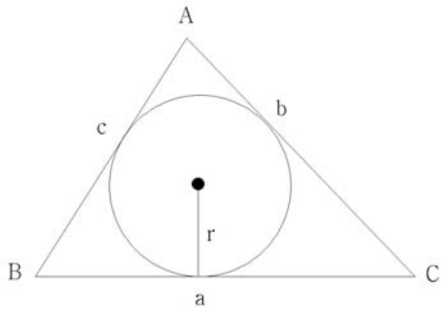
[문제4] 삼각형 ABC의 면적과 둘레의 길이가 같을 때 이 3각형의 내접원의 면적을 구하라.



▶ 전문가 클리닉

전형적인 도형 문제다. 구술문제라기 보다는 수능형 문제에 속한다고 할 수 있다. 얼마나 빨리 핵심을 찾느냐가 관건이다. 해설을 보기 전에 꼭 전략을 스스로 세워보자.

▶ 예시답안



각 A, B, C에 마주보는 변을 각각 a, b, c이라 하고, 내접하는 원의 반지름을 r이라 두면 다음과 같은 식이 성립한다(삼각형의 면적을 이용).

$a+b+c=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ ∴ $r=2$

∴ 내접원의 넓이는 4π이다.

[문제5] 한 호텔의 2층에 방이 1, 2, 3, 4호실 4개가 있고, 현재 모두 손님이 투숙 중이다. 호텔방에서 어른들의 경우 최대 2명까지 투숙이 가능하다. 다음의 사실로부터 3호실에 투숙한 어른과 아이의 수를 구하시오.(중앙대2003 응용)

(1) 모든 방마다 어른의 수가 아이의 수보다 적지 않다.
(2) 한 방을 제외하고 나머지 방의 사람 수는 모두 홀수이다.
(3) 방 번호가 짝수인 방중 하나에는 아이가 없다.
(4) 짝수 번호 방에 투숙한 사람의 총수는 4명이다.
(5) 만일 1호실에 아이가 있다면 3호실에도 아이가 있다.
(6) 어른의 총수는 아이들의 총수의 2배이다.
(7) 4호실 사람의 수가 3호실보다 많다.

▶ 전문가 클리닉

이런 문제는 기본적인 수학테크닉이나 공식의 암기를 요구하지 않는다. 최근의 구술면접의 출제 경향은 복잡한 계산과 테크닉을 요구하는 문제가 선호되는 것 같지만, 실제로는 논리와 직관을 이용한 문제도 자주 등장한다.

그러나 수능식 문제와는 경향이 다르기 때문에 학생들이 어렵게 느낄 수도 있다. 이 문제로 만족하지 말고 유사문제를 더 모아서 훈련을 하기 바란다.

▶ 예시답안

먼저 투숙한 어른은 최대 8인까지 가능하므로 조건 (6)에 의해 다음 3가지 경우가 고려된다.

어른=8인, 아이=4인----(i)

어른=6인, 아이=3인----(ii)

어른=4인, 아이=2인----(iii)

하지만 조건 (2)에 의해 투숙객 총수는 홀수이어야 하므로 (ii)만 가능하다.

이제 조건 (5)를 이용하자. 만일 1호실에 아이가 둘이라면 조건 (1)과 (4)에 의해 모순이 일어나므로, 1호실에 아이가 있다면 반드시 1명이어야 한다. 이때 조건 (7)에 의해 반드시 아이가 있어야 하는 3호실에도 아이는 1명만 있게 되고, 4호실에도 아이가 1명 있어야 한다. 따라서 3호실에 어른 1명, 4호실에 어른 2명이 있어야 하며, 조건 (4)를 고려하면 결국 표에 나타낸 대로 결정된다.

이제 만일 1호실에 아이가 없다면 조건 (4)와 (7)을 동시에 만족하기 위해서 4호실에는 어른 2명, 아이 1명이 있어야 한다. 이 경우 조건 (3)을 만족시키는 경우가 존재하지 않게 된다.

	1호실	2호실	3호실	4호실
어른 수	2	1	1	2
아이 수	1	0	1	1

따라서 표에서 보듯이 3호실에 투숙한 사람은 어른 1명, 아이 1명이 된다.

2004년 09월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

이번호에는 정수론에 관한 증명문제와 수열문제에 비중을 뒀습니다. 기출문제와 함께 잘 정리해서 공부하기 바랍니다.

■ 구술면접 현장중계

1) 양의 정수 a, b가 있다. a를 b로 나눌 때 몫을 q라 하고 나머지를 r이라 두면 a=bq+r(단 $0 \leq r < b$)로 표현된다. 이때 a와 b의 최대공약수와 b와 r의 최대공약수가 같음을 보여라.

2) n이 2이상인 자연수일 때 n^3과 n-1은 항상 서호소임을 보여라.

3) a와 b가 서로소이면 a+b와 ab도 서로소임을 증명하라.

▶ 면접 시뮬레이션

교수 : 차례대로 설명해보세요.

학생 : 먼저 a와 b의 최대공약수를 d라 하면 a=a′d, b=b′d라 둘 수 있습니다. 물론 여기서 a′과 b′는 서로소입니다. 이 식을 a=bq+r에 대입하고 정리하면 r=(a′-b′q)d가 됩니다. 따라서 r은 d의 배수가 됩니다. 여기서 d는 a와 b의 최대공약수라고 가정했으니 결국 b와 r의 공약수가 됩니다.

이제 b와 r의 최대공약수가 d임을 증명하면 됩니다. b=b′d이고 r=(a′-b′q)d이므로 만약 b′과 a′-b′q가 서로소이면 b와 r의 최대공약수는 d가 됩니다. 그런데 b′와 a′-b′q가 서로소가 아니라면 1이 아닌 공약수를 가지게 됩니다. 이를 k라 가정하겠습니다. 그러면 b′=kn, a′-b′q=km으로 쓸 수 있고, 첫 번째 식을 두 번째 식에 대입해 정리하면 a′=k(m+nq)가 됩니다. a′와 b′는 공약수 k를 가지면 이것은 a′와 b′가 서로소라는 가정에 모순입니다. 따라서 b′와 a′-b′q는 서로소이고 d는 b와 r의 최대공약수가 됩니다.

교수 : 잘 했어요. 다음 문제로 넘어가세요.

학생 : 우선 몇 개의 숫자를 대입하겠습니다. n=2를 대입하면 8과 1이 되고 이것은 당연히 서로소입니다. n=3을 대입하면 27과 2이므로 서로소이고, n=4일 때도 64와 3이므로 서로소입니다.

교수 : 그럼 일반적인 증명을 해보세요.

학생 : 1)번 문제의 결과를 이용해 증명하겠습니다. n^3을 n-1로 나눈 몫과 나머지를 구해서 표현하기 위해 인수분해 공식을 이용하면 $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$이 됩니다. 즉 $n^3=(n-1)(n^2+n+1)+1$이므로 n^3과 n-1의 최대공약수는 n-1과 1의 최대공약수와 같고, 이것은 1이 되므로 증명은 끝났습니다.

교수 : 계속해서 다음 문제에 답해보세요.

학생 : 먼저 a+b와 ab의 공약수를 d라 가정하겠습니다. d가 ab의 약수이므로 a혹은 b의 약수가 됩니다. 이것은 a와 b가 서로소라고 가정했기 때문입니다. 만약 d가 a의 약수라고 가정하면(d가 b의 약수라고 가정해도 마찬가지입니다) d는 a+b의 약수이기 때문에 b의 약수가 돼야 합니다. 그럼 d는 a의 약수이고, b의 약수이기 때문에 d=1이 됩니다. 이것은 a+b와 ab가 서로소임을 의미합니다.

교수 : 수고했습니다.

■ 감상포인트

이 면접 중계에서 강조하는 것은 정확한 증명과정의 이해와 암기다. 정수론은 교과서에서 많이 다루지 않기 때문에 구체적인 증명과정을 암기해야 할 필요는 없다. 하지만 여기서 소개된 증명은 반드시 외우기 바란다. 위 학생의 대답은 이런 암기를 바탕으로 막힘없이 진행되고 있는 것이다. 외우는 것이 부담스럽다면 증명 과정이라도 이해하기 바란다. 다른 내용을 몰라도 이 부분만 정확하게 이해한다면 구술에 필요한 정수론 기본개념과 내용을 모두 소화할 수 있을 것이다. 특히 마지막 문제는 증명뿐만 아니라 결과 그 자체도 꼭 음미해봐야 한다.

[문제1] 변의 길이가 n, n+1인 직4각형 타일이 12개 있다(단 n>2인 자연수).
1) 타일들을 서로 맞붙여 만들 수 있는 직4각형은 몇 개인가?
2) 직4각형들 둘레 길이의 최소값은 90이다. 이때 n의 값은 얼마인가?

▶ 전문가 클리닉

타일을 맞붙여서 직4각형을 만드는 문제에서 수학적인 규칙은 어떻게 알아낼까? 답은 간단하다. 몇 가지 단순한 경우를 직접 해보고 숨겨진 규칙을 찾아 이를 응용할 수 있다. 공식에 의존하지 않고 패턴을 찾아내는 문제는 구술시험에서 단골로 등장한다. 겁먹지 말고 일단 직접 해보는 것이 중요하다.

▶ 예시답안

1) 12개 타일을 이용해 직4각형을 만드는 것이므로 12의 곱셈조합을 확인한다. 즉 12=1×12=3×4=2×6이므로 주어진 규칙에 따라 타일을 붙여 만든 4각형 모양은 3가지가 나오는데, 타일을 붙일 때 긴 변과 짧은 변을 맞바꾸는 것을 고려해야 하므로 총 6가지가 나온다.

2) 둘레의 길이는 2(13n+1), 2(13n+12), 2(8n+6), 2(8n+2), 2(7n+4), 2(7n+3)이고, 최소일 때는 2(7n+3)이므로

$$\therefore 14n+6=90 \quad \therefore\ n=6$$

[문제2] n개 축구팀이 리그전을 벌였다(단 n>3이고 무승부는 없었으며 전승한 팀도 없었다). 이때 다음 조건을 만족시키는 팀 A가 반드시 존재함을 보여라.
조건 : 만일 B팀이 A팀을 이겼다면, B팀에게는 이기고 A팀에게는 진 팀 C가 있다.

▶ 전문가 클리닉

문제 자체는 매우 쉽고 간명하지만, 이를 증명하기 위한 아이디어를 생각해 내기는 쉽지 않다. 문제에서 전승한 팀이 없다고 언급했는데, 이는 각 팀들이 삼각관계를 형성한다는 뜻이다. 즉 가위바위보처럼 상대적 우위를 지닌 연결 고리가 존재한다는 것이다.

▶ 예시답안

조건을 만족시키는 팀이 없다고 가정해보자. 이제 가장 많이 우승한 팀을 A라고 하자(A가 유일하지 않을 수도 있다). 조건이 만족되지 않는다고 가정했기 때문에 어떤 팀 B가 A를 이기지만 A에게 진 모든 팀들을 B가 이겨야 한다. 이때 팀 B는 팀 A보다 더 우승을 많이 하게 돼 모순이다. 따라서 조건을 만족하는 팀은 존재한다.

[문제3] m, n을 서로소인 자연수라 할 때 좌표평면 위의 두 점 P(m, 0), Q(0, n)을 잇는 선분 PQ위에는 x좌표, y좌표가 모두 자연수인 점이 존재하지 않음을 증명하라.

▶ 전문가 클리닉

이 문제를 풀 때 서로소인 m, n(예컨대 5, 7 정도)을 잡고, 그림을 그려서 눈으로 확인한다. 그리고 여러가지 경우를 생각해 보면서 결과가 확실하다는 결론에 스스로 도달해봐야 한다. 증명은 전형적인 정수론의 기법을 이용했다. 증명과정을 이해하면서 정리하기 바란다.

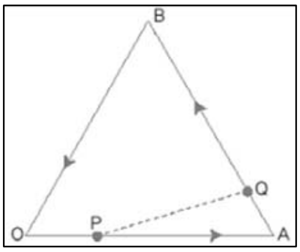
▶ 예시답안

두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은 $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$이다. 따라서 $nx+my=mn\ (0<x<m,\ 0<y<n)$을 만족하는 자연수 x, y가 존재한다고 가정하면

$$my=n(m-x)$$

좌변이 m의 배수이므로 우변도 m의 배수이다. 그런데 $my=n(m-x)$에서 m, n이 서로소이므로 m−x는 m의 배수가 된다. 이것은 0<m−x<m에 모순이다.

[문제4] 한 변의 길이가 10m인 정3각형 OAB 위를 P는 O에서 출발해 A를 향해 2m/s로 달리고, Q는 A에서 출발해 B를 향해 3m/s로 달린다. Q가 B에 도착하기 전에 △PQA 면적의 최대가 되는 순간은 출발후 몇 초인가(단 P, Q는 동시에 출발한다)?



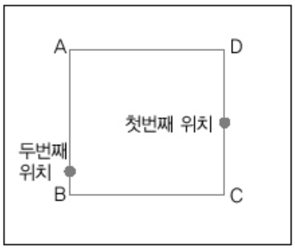
▶ 전문가 클리닉

쉬운 문제이지만 응용문제 형식으로 출제되면 핵심을 얼마나 빨리 알아내느냐가 관건이다. 최근의 구술시험에서 이런 문장형 응용문제가 자주 등장한다. 연습이라 생각하고 스스로 해보자.

▶ 예시답안

t초 후에 $\overline{PA}$는 10−2t이고, $\overline{AQ}$는 3t다. 그리고 $\triangle PQA=\frac{1}{2}\times\overline{PA}\times\overline{QA}\times\sin 60°=\frac{3\sqrt{3}}{2}(5-t)t$다. 그러므로 $t=\frac{5}{2}$초, 즉 2.5초 후에 최대가 된다.

[문제5] 둘레의 길이가 1천2백m인 정4각형 ABCD가 있다. 갑,을 두 사람이 동시에 A를 출발해 갑은 ABCD의 방향으로,을은 그 반대 방향으로 돌고 있다. 갑, 을은 변 $\overline{CD}$ 위에 C로부터 1백5m인 곳에서 최초로 만났고, 변 $\overline{AB}$ 위에 B로부터 75m인 곳에서 두 번째로 만났다. 세 번째로 만날 지점을 구하시오(단 갑, 을은 정4각형의 각 꼭지점에서 30초씩 쉰다).



▶ 전문가 클리닉

매우 어려운 문제에 속한다. 복잡한 방정식을 푸는 것은 아니지만 문제를 이해하고 전략을 세워 방정식을 구성하는 과정에서 시간이 많이 소비된다. 이 문제는 30초씩 쉰다고 하는 것이 함정이다. 여기에 현혹돼선 안된다. 직접 풀이를 해보기 바란다.

▶ 예시답안

갑, 을이 1m 이동하는데 걸리는 시간을 각각 x초, y초라 하면 정4각형의 한변의 길이가 3백m이므로 식을 세우면 다음과 같다.

$(600+105)x+30\times2=(600-105)y+30$

$(900-105-75)x+30\times2=(300+75+105)y+30\times2$

$$\therefore \begin{cases} 141x=99y-6 & \cdots ① \\ 3x=2y & \cdots ② \end{cases}$$

①-②×47하면 $y=\frac{6}{5}$초가 구해진다. 이를 다시 대입하면 $x=\frac{4}{5}$초이다.

$\therefore\ x+y=2\ \cdots$ ③

두 번째 만난 곳에서 갑이 점 D에 도달하기까지 걸리는 시간은 $675\times\frac{4}{5}+60=600$(초)가 된다.

그리고 을이 점 D에 도달하기까지 걸리는 시간은 $525\times\frac{6}{5}+30=660$(초)가 되는데, 을의 시간은 갑의 시간에 점 D에서 쉬는 시간 30초를 더해도 더 길기 때문에 두 사람이 만난 지점은 선분 $\overline{DA}$ 위에 있다.

세 번째 만날 지점을 점 D에서 l(m) 떨어진 곳이라 하면

$(75+600+l)x+60=225+300-l)y+30$이다.

$\therefore\ l(x+y)=630-540-30,\ 2l=60\ \therefore\ l=30(m)$

즉 변 DA 위의 점 D로부터 30m인 지점에서 세 번째로 만난다.

[문제6] 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대해 $a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots 2^{n-1}a_n=8-5n$을 만족한다. 다음 물음에 답하시오.

1) a_1과 $a_n(n>2)$을 구하시오.

2) 무한급수의 합 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$을 구하시오.

3) 무한급수의 합 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{2}$을 구하시오.

▶ 전문가 클리닉

수열 문제는 자주 출제되고 중요하기 때문에 아무리 강조해도 지나침이 없다. 이 문제는 다단계 형식의 전형적인 문제다. 기초가 잘 갖춰진 학생이라면 무리없이 해결할 수 있다. 특히 사인이 포함된 문제를 푸는 기술을 잘 정리해보자.

▶ 예시답안

1) 수열 $a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots 2^{n-1}a_n$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합을 Sn이라 하면 Sn=8−5n 이고, $a_1=S_1=8-5=3$이다. $n \geqq 2$일 때 $2^{n-1}a_n=S_n-S_{n-1}=-5$이므로 $a_n=-\frac{5}{2^{n-1}}$이다.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n = 3+\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{5}{2^{n-1}}\right)$

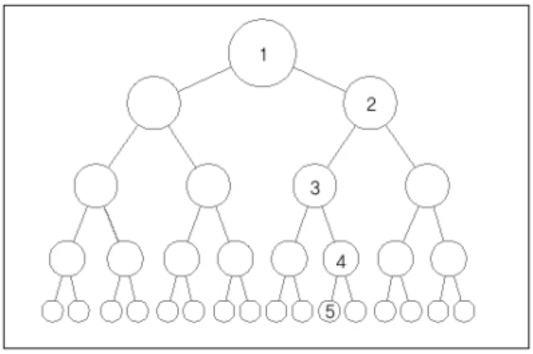
$$=3-\frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{2}}=-2$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}\sin\frac{2k-1}{2}\pi \left(\because \sin\frac{2k}{2}\pi=0\right)$

$$=3+\sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{5}{2^{2k-2}}\right)(-1)^{k-1}$$

$$=3-5\sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}=4$$

[문제7] 한 가지에서 두 가지가 계속 분지되는 도형이 있다. 자연수를 그림처럼 이 도형에 적어 나간다. 짝수는 그림처럼 오른쪽에 적고 홀수는 왼쪽으로 적어 나간다. 즉 좌우로 한 번씩 이동하면서 밑으로 계속 이어서 적어 나갈 때 10은 왼쪽에서 몇 번째에 있을까 (예를 들면 3은 왼쪽에서 3번째이고 4는 왼쪽에서 6번째에 위치한다)?



▶ 전문가 클리닉

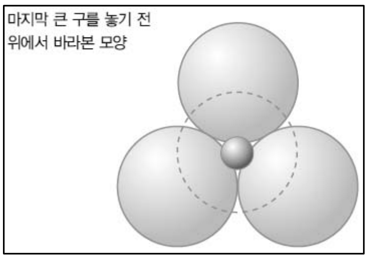
규칙적으로 변하는 시스템은 수열을 이용해서 쉽게 표현할 수 있다. 즉 변화의 패턴을 수식 하나에 담을 수 있다. 이 문제는 홀수, 짝수를 구별해서 점화식으로 표현한다면 쉽게 풀 수 있다. 점화식 문제를 푸는 방식을 꼭 익혀두자.

▶ 예시답안

자연수 n이 왼쪽에서 a_n번째에 있다고 하자. $a_1=1$이고 n이 짝수이면 $a_n=2(a_{n-1}-1)+2=2a_{n-1}$이다. n이 홀수이면 $a_n=2(a_{n-1}-1)+1=2a_{n-1}-1$이다.

$a_2=2a_1=2$, $a_3=2a_2-1=3$, $a_4=2a_3=6$, $a_5=2a_4-1=11$, $a_6=2a_5=22$, $a_7=2a_6-1=43$, $a_8=2a_7=86$, $a_9=2a_8-1=171$, $a_{10}=2a_9=342$이고, 그러므로 10은 왼쪽에서 3백42번째에 있다.

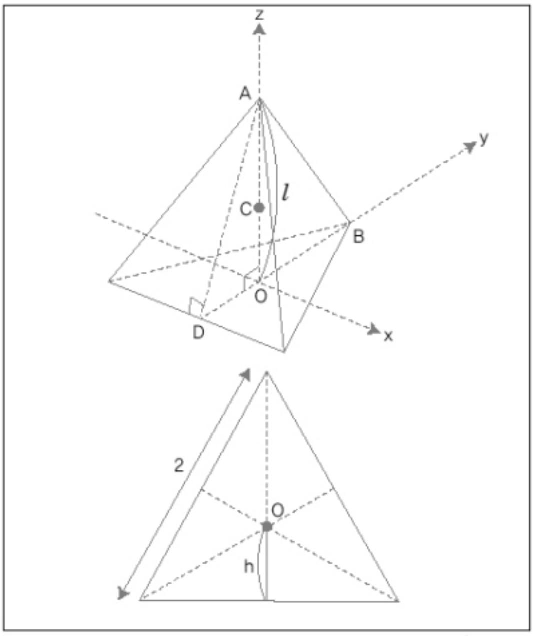
[문제 8] 그림과 같이 반지름이 1인 4개의 동일한 구가 서로 접하면서 밑바닥에 3개, 그 위에 1개가 올려져 있다. 만일 4개의 구들 사이에 반지름 r인 작은 구를 원래 모양의 변화 없이 모든 구와 접하게 위치시킬 수 있다면 반지름 r은 얼마인가?(2003학년도 중앙대)



▶ 전문가 클리닉

이 문제가 출제됐을 때 많은 학생들이 당황했다고 한다. 단순한 공간도형 문제지만 공간적으로 정확하게 이해해서 리모델링을 할 수 없다면 풀기가 쉽지 않을 것이다. 공간도형에 관련된 문제는 여러차례 출제됐고, 또 출제될 가능성이 높다. 교과서와 참고서에 나오는 모든 문제를 풀어보고 정리해두자. 특히 정4면체에 관련된 공간적 특성은 암기해 두는 것도 좋을 것이다.

▶ 예시답안



반지름이 1인 구 4개의 중심을 서로 연결하면 한 변의 길이가 2인 정4면체가 된다. 대칭성에 의해 작은 구의 중심은 정4면체의 중심과 일치한다. 정4면체의 각 면은 정3각형이다. 그림에서 h와 정4면체의 꼭지점 A에서 밑변에 내린 수선의 길이 l을 구해보자.

두 번째 그림에서 정3각형 면적공식을 적용하면 $\frac{1}{2}\times 2\times 3=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\times 2\times h\right)$이므로 $h=\frac{1}{\sqrt{3}}$이다. 수선의 길이 l은 $l^2=(\sqrt{3})^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$으로부터(직각3각형ADO를 고려) $l=\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$임을 알 수 있다.

정4면체의 중심C에서 두 꼭지점 A와 B에 이르는 거리가 같으므로(∴ $\overline{CA}=\overline{CB}$) 좌표 C(0, 0, z), A(0, 0, l), B(0, 3−h, 0)로부터 $(z-l)^2=(\sqrt{3}-h)^2+(z-0)^2$라는 식을 얻고, 정리하면 $z=\frac{1}{\sqrt{6}}$을 얻는다. 작은 구의 반지름이 r일 때 $\overline{CA}=1+r=l-z$이므로 $r=l-1-z=\frac{\sqrt{6}}{2}-1$을 얻게 된다. 결국 $r=\frac{\sqrt{6}}{2}-1=\frac{\sqrt{6}-2}{2}$이다.

2004년 10월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

이번호에서는 전체적으로 단순기술을 요구하는 문제보다는 구술시험에 나올 수 있는 문제들을 다뤘습니다. 가벼운 마음으로 정리를 하면서 수능 마무리에 전념하시길 바랍니다.

■ 구술면접 현장중계

1) 3^{2004}을 계산했을 때 1의 자리수를 구해라.
2) n, m를 임의의 자연수라 할 때, n^m과 n^{m+4}의 1의 자리수가 일치함을 보여라.

▶ 면접 시뮬레이션

교수 : 차례대로 설명해보세요.

학생 : 3^{2005}을 직접 계산하는 것은 거의 불가능합니다. 그러므로 우선 3의 거듭제곱에서 1의 자리가 어떻게 바뀌는지를 살펴보면 다음과 같습니다.

$3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$ …

1의 자리수는 3, 9, 7, 1을 반복됩니다. 즉 3^n의 1의 자리수는 n=1, 2, 3…으로 변할 때 4를 주기로 3, 9, 7, 1이 반복됩니다. 결국 3^{2005}에서 2천5를 4로 나누면 나머지가 1이므로 1의 자리수는 3입니다.

교수 : 잘 했습니다. 이제 2)번 문제를 증명하세요.

학생 : 주어진 문제는 임의의 자연수를 거듭제곱했을 때 1의 자리수가 항상 주기 4로 반복되는지를 증명하라는 것입니다. 1)번 문제처럼 2에서 9까지의 자연수를 모두 조사해서 1의 자리수 주기가 4라는 것을 증명하면 됩니다.

2부터 해보면 1의 자리수는 2, 4, 8, 6로 반복하고, 3은 3, 9, 7, 1로 반복하고, 4는 4, 6으로 반복하고, 5는 계속 5가 나오고, 6은 6이 계속 반복되고, 7은 7, 9, 3, 1로 반복하고…

교수 : 잘 했습니다. 그만하고 정리해보세요.

학생 : 결국 모든 수를 체크해보면 주기4의 성질을 만족한다는 것을 알 수 있습니다.

교수 : 좀더 일반적으로 증명을 해보세요.

학생 : 글쎄요, 일반적인 증명은 잘 모르겠습니다.

교수 : 수고했습니다.

■ 감상포인트

이번호 면접현장중계에서는 어떤 특별한 공식이나 이론에 의존하지 않고 단순한 시범을 통해 규칙을 알아낼 수 있는 능력을 평가한다. 특히 수학의 원초적 기법인 시행착오를 통한 패턴유도법이 어떻게 적용되는지 살펴볼 수 있다.

주어진 문제에서는 모든 수를 거듭제곱을 했을 때 주기가 4로 반복된다는 것을 직접 수를 대입해 알 수 있었다. 물론 이 결과뿐만 아니라 그것이 의미하는 것이 무엇인가를 생각해보는 것도 중요하다. 왜 모든 수의 거듭제곱에서 1의 자리수 주기가 4인가? 표면적으로 이런 질문은 중요치 않은 것처럼 여겨진다. 그러나 만약 여러분들이 창의적인 수학자가 되길 원한다면 무작

위적으로 보이는 숫자들 속에서 질서 혹은 규칙성을 찾아내고 그것의 원리를 밝혀내려는 노력이 필요하다.

다시 구술면접 문제를 검토해보자. 학생은 멋지게 일반적인 패턴을 유도하고, 증명도 쉽게 한 것 같다. 하지만 무언가 빠진 것이 있다. 실제로 좀더 일반적인 증명이 필요하다. 이어 소개할 일반적인 증명과 앞서 학생이 증명하는 과정의 차이점을 잘 관찰하기 바란다.

일반적인 증명을 위해 식들은 적절히 조작해 인수분해하면 다음과 같다.

$$n^{p+4}-n^{p}=n^{p-1}\cdot n(n^{4}-1)$$

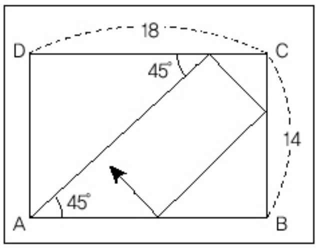
$$n(n^{4}-1)=(n-1)n(n+1)(n^{2}+1)$$

$$=(n-1)n(n+1)$$

$$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5(n-1)n(n+1)$$

연속한 5개의 정수의 곱은 5의 배수이므로 위의 수는 5의 배수다. 또 $(n-1)n$은 2의 배수이므로 $n(n^{4}-1)$은 10의 배수가 된다. 따라서 n^{p}과 n^{p+4}의 1의 자리수는 일치한다.

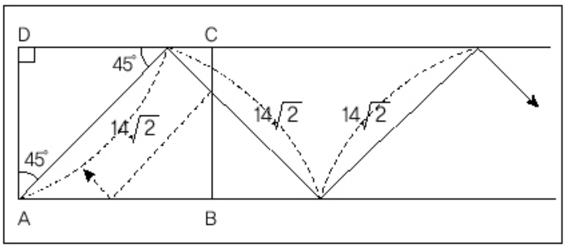
[문제1] 가로, 세로가 각각 18, 14인 직4각형 ABCD의 한 꼭지점 A에서 45°각도로 빛을 내보냈다. 4각형의 변이 모두 거울이라면 빛의 이동거리는?(단 빛은 꼭지점에 도달하면 소멸한다)



▶ 전문가 클리닉

이같은 유형의 문제는 한때 유행처럼 거의 모든 시험에 출제된 적이 있다. 너무 많이 알려져 좀 진부하지만 문제에 응용된 반사의 아이디어가 기발하고 교육적이기 때문에 중요하다.

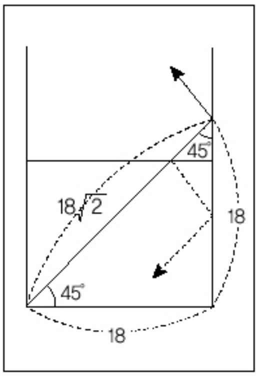
반사 원리를 이용한 문제는 최단거리 문제가 가장 유명한데, 목동이 강에서 물을 길러오는 문제, 빛의 반사 문제 등이 많이 출제됐다. 특히 이 문제는 정수론 기법이 추가된 응용문제이므로 풀이과정을 꼼꼼히 짚어보기 바란다.



▶ 예시답안

빛이 윗변DC와 밑변AB를 한 번 횡단할 때 이동거리는 $14\sqrt{2}$다.

변 DC와 변 AB를 n번 횡단한 후에 꼭지점에 도달했다고 가정하면 이동거리는 $14\sqrt{2}\,n$ ··············· ㉠



한편 빛이 좌변 DA와 우변 BC를 한 번 횡단할 때에 이동거리는 $18\sqrt{2}$다. 변 DA와 변 BC를 m번 횡단한 후에 꼭지점에 도달했다고 가정하면 이동거리는 $18\sqrt{2}\,m$ ·················· ㉡

㉠=㉡에서 $14\sqrt{2}\,n=18\sqrt{2}\,m$

$\therefore\ 7n=9m$

그리고 이 식을 만족시키는 최소의 자연수 n, m은 $n=9$, $m=7$이다. 이때

이동거리는 $14\sqrt{2} \cdot 9 = 126\sqrt{2}$ 다.

[문제2] 어떤 학급에 1번에서 50번까지의 학생 50명이 운동장에서 1번부터 일렬로 줄을 섰다. 이 줄에서 임의로 2명을 뽑아 서로의 위치를 바꾸는 시행을 한다. n회 반복할 때 1번이 제일 선두에 서있을 확률을 점화식으로 표현하라.

▶ 전문가 클리닉

일반적으로 확률을 구한다는 것은 곧 경우의 수를 구하는 것이다. 그러나 상황이 복잡하고 반복될 때는 직접 경우의 수를 구하기보다는 확률의 점화식을 유도하고, 이것의 해를 구함으로써 쉽게 해결할 수 있다. 이런 식의 점화식 유도법은 이미 구술시험에 여러 번 출제됐고 앞으로도 출제될 가능성이 많다.

▶ 예시답안

(n+1)번째 시행 후에 1번이 제일 앞에 있을 확률 P_{n+1}은

i) n번째 시행 후에 1번이 제일 앞에 있고, n+1번째 시행에서는 1번이 선택되지 않을 확률은

$$P_n \times \frac{{}_{49}C_2}{{}_{50}C_2} = \frac{24}{25} \times P_n$$

ii) n번째 시행 후에 1번이 제일 앞에 있지 않고, n+1번째 시행에서 1번과 제일 앞의 학생이 선택 될 확률은

$$(1-P_n) \times \frac{1}{{}_{50}C_2} = (1-P_n) \times \frac{1}{1225}$$

i)과 ii)의 경우는 배반이므로 구하는 확률은 앞의 두 가지 경우의 확률 합으로 표시할 수 있다.

$$\therefore\ P_{n+1} = \frac{24}{25} \times P_n + \frac{1}{1225} \times (1-P_n) = \frac{29399}{30625} P_n + \frac{1}{1225}$$

[문제3] 갑은 x일간의 여름휴가 중 날씨를 관찰해 다음과 같은 결과를 얻었다. (가) 비가 오지 않은 오전은 6번 있었다. (나) 비가 오지 않은 오후는 5번 있었다. (다) 오후에 비가 온 날은 오전에는 비가 오지 않았다. (라) 오전 또는 오후에 비가 온 경우는 7번 있었다. 위의 사실로부터 갑의 휴가기간 x의 값을 구하라.

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 아주 단순한 문제로 초등학생 수준의 수학적 기술만을 요한다. 다만 얼마나 조직적으로 빨리 푸느냐가 관건이다.

이런 종류의 문제는 '거짓말을 누가 했을까' 같은 논리문제를 풀 때 사용되는 표작성기법을 이용하면 아주 체계적으로 해결된다. 이 문제를 통해 무질서하게 보이는 정보를 깔끔하게 정리해 수학적인 언어로 바꿀 수 있는 능력을 키우기 바란다.

▶ 예시답안

아래와 같은 표를 작성한다.

	비가 온 오전	비가 오지 않은 오전
비가 온 오후	a	b
비가 오지 않은 오후	c	d

주어진 조건으로 a+b+c+d=x, b+d=6, c+d=5, a+b+c=7

(다)에서 오후에 비가 온 날은 오전에는 비가 오지 않았으므로 a=0이다.

$\therefore$ b+d=6, b+c=7에서 c−d=1

또한 c+d=5이므로 c=3, d=2, b=4

$\therefore$ x=0+4+3+2=9(일)

[문제4] 현의 길이를 반으로 하면 진동수는 2배가 되고 1옥타브(8도) 높은 음이 나온다. 따라서 현의 길이를 2배로 하면 진동수가 반이 되고 1옥타브 낮은 음이 된다.

한편 길이를 $\frac{2}{3}$배로 하면 진동수는 $\frac{3}{2}$배가 돼 5도 높은 음이 나온다. 피타고라스는 이 2개의 원리만을 사용해 여러가지 음계를 만들었다. 예를 들면 4도 높은 음은 1옥타브(8도) 높은 음에서 5도 내리면 되므로 현의 길이를 반으로 하고, 그 현을 $\frac{3}{2}$배 하면 된다. 즉 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$이므로 현의 길이를 $\frac{3}{4}$배하면 된다. 그러면 1도 높은 음을 만들려면 현의 길이를 얼마로 하면 되는가?

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 두 가지 기본원리만으로 여러가지 가능한 음을 만들라는 문제다. 이런 형식의 문제를 처음 접하는 학생은 문제핵심을 이해하지 못할 수도 있다. 만약 문제의 내용을 잘 이해하지 못했다면 해설을 먼저 대충 읽어 보고 다시 도전해보기 바란다.

이 문제는 그 자체로 중요하지 않지만, 피타고라스와 관련된 역사적 의미를 가지며 음악을 수학으로 이해할 수 있다는 중요한 교훈을 준다.

▶ 예시답안

두 가지 기본원리의 의미를 간파했다면 아주 간단하게 풀 수 있다. 먼저 1옥타브 내린 후 5도 올리는 조작을 2회 반복하면 된다. 따라서 현의 길이는 $2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$배가 된다. 여기서는 직관적으로 문제를 풀었지만 주어진 원리 안에 답이 나와 있다.

좀더 체계적이고 논리적으로 다시 유도하면 다음과 같다. 1도의 음계에서 출발해 8도 올리는 조작을 x회, 5도 올리는 조작을 y회 반복하면 7x+4y+1도의 음계로 바뀐다. 그때 현의 길이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^y$배가 된다. 단 여기서 음을 내릴 때 x나 y 값은 음수다.

1도에서 2도로 음을 높이려면 7x+4y+1=2를 만족하는 정수 x, y를 구하면 된다.

일반적인 경우는 다음처럼 위 식을 조금 조작하면 구할 수 있다. 조작한 식은 7(x+1)+4(y−1)=0이므로 x=4n−1, y=7n+2가 된다(n은 정수).

이 일반해에서 간단한 한 해를 구하면(n=0인 경우) x=−1이고 y=2이다. 이는 음을 8도 내리고 5도를 2회 올리는 조작을 의미한다.

이 수학적 기법을 이용해 장음계 표를 만들 수 있다.

도	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
음명	다	라	마	바	사	가	나	다
현길이	1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	1/2

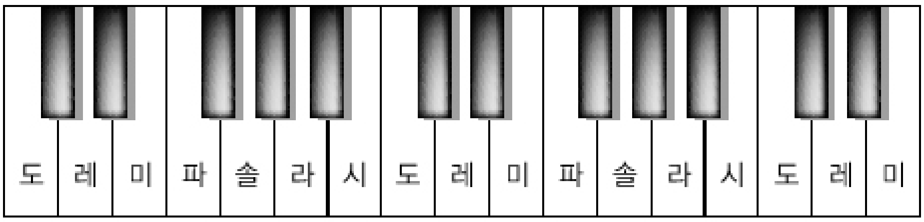
▶ **Tip**

1. 피타고라스와 음악

음악에서도 아름다운 음은 일정한 비율을 지닌다. 세종대왕이 우리나라 옛음악을 정비할 때 '황종률'이라는 기본 음계를 지닌 피리의 길이를 근거로 이것과의 비율에서 다른 음계를 정했다는 이야기는 너무도 유명하다.

"모든 것의 근원은 수"라고 주장한 철학자답게 피타고라스는 수를 바탕으로 음악이론을 세웠다. 어느날 그가 대장간 앞을 지나고 있을 때 쇠를 치는 소리가 들려왔다. 소리는 공기의 진동에서 생기는 것이므로 그는 소리와 공기의 진동수와의 사이에 깊은 연관이 있음을 문득 깨닫고 '음과 수'의 관계를 연구했다. 그는 하프의 줄을 처음 튕겼을 때의 소리와 그 줄을 2/3로 줄이고 튕겼을 때의 소리를 비교해 보고, 나중 음이 처음의 경우보다 4도 높은 소리가 나며 이 2개의 음이 서로 조화를 잘 이룬다는 사실을 알아냈다. 처음의 소리(음계)가 '도'라고 한다면 길이를 2/3로 줄였을 때는 '도'보다 4도 높은 '솔'의 소리가 나오고, 그 '도'와 '솔'은 조화를 잘 이룬다는 것, 즉 조화음임을 발견했다. 또 그는 처음 음이 '도'라면 줄을 1/2로 줄였을 때는 '도'보다 8도가 높은, 즉 한 옥타브 위인 '도'의 소리이며 처음의 '도'와 잘 어울린다는 사실도 발견했다. 요컨대 하프줄의 비가 1, 2/3, 1/2이 된다면 음의 진동수 비는 이 수들의 역수, 즉 1, 3/2, 2가 된다는 것이다.

위와 같은 사실을 건반에 나타내면 다음과 같다.



위에서 살펴봤듯이 수의 비를 이용한 기법은 이미 피타고라스 시대 음악에 응용될 정도로 보편화됐다.

그리스 사람들은 특히 수에서의 비율을 이성을 뜻하는 '로고스'라는 이름으로 불렀는데, 그 이유는 그들이 이것을 이성처럼 세상에서 가장 확고하고 아름다운 법을 상징하는 것으로 믿었기 때문이다.

2. 장음계표의 원리

통약가능한 기본단위를 찾는 절차는 다음과 같다.

임의의 크기, 예컨대 1cm를 기본 단위길이라 하자. 그렇다면 모든 길이는 이것의 정수배로 나타낼 수 있어야 한다. 그러나 실제로는 그렇지 않다. 예를 들어 1.5cm(3/2cm)가 있을 수 있기 때문이다.

1) 단위길이	---------	(1배)
	--------------	(3/2배)
	----	(1배)
1) 단위길이	---------	(2배)
	--------------	(3배)
	----------------	(7/2배)
	--	(1배)
	----	(2배)
1) 단위길이	---------	(4배)
	--------------	(6배)
	----------------	(7배)
	-----------------	(15/2배)

이런 과정을 무한히 되풀이해 나가면 모든 크기에 대해 모든 길이가 그것의 정수배가 되는 궁극적 단위크기에 도달할지 모른다. 이것을 1이라고 한다면 모든 길이는 그것의 정수배 즉 자연수로 나타낼 수 있을 것이다. 이것이 피타고라스가 만물은 수라고 했을 때의 의미다.

피타고라스는 음악연구를 통해서 이런 관점에 획득했다. 피타고라스는 하프의 현을 1/2로 줄였을 때 한 옥타브 높은 음이 나오고, 2/3으로 줄였을 때 4도 높은 음이 나온다는 것을 발견했다.

음은 줄을 튕겼을 때 생기는 공기진동수에 의해서 결정되며, 줄이 짧아지면 그만큼 진동수는 많아지고 높은 음이 나온다. 예컨대 현의 길이가 1, 2/3, 1/2로 짧아지며 음의 진동수는 그것의 역수 즉 1, 2/3, 2…로 늘어난다.

이것을 수학에서 '조화수열'이라고 하는데 이것은 피타고라스에서 비롯된 용어다. 즉 어떤 수열의 역수가 '등차수열'을 이루면 그것은 조화수열이다. 이것의 전형적인 예가 음계 높이와 현의 길이 사이의 관계이며, 여기서 정상파라는 듣기 좋은 음이 나온다.

1, 2/3, 1/2, 2/5, …

이 수열의 역수를 취하면 1, 3/2, 2, 5/2, …

이것은 초항이 1이고 공차가 1/2인 등차수열이다. 일반항은 (n+1)/2이므로 피타고라스의 수열은 그 역수인 2/(n+1)로 된 수열이다. 이렇게 해서 피타고라스의 음계를 구성하면 다음과 같다. 도1에서 시작하자.

도2 : 도1의 진동수를 2배로 해서 7도 높은 음을 얻는다. (진동수=1×2)

시 : 미의 진동수를 3/2배하면 미보다 4도 높은 음을 얻는다. (진동수=3/2×3/4×3/2×3/4×3/2=243/128)

라 : 레의 진동수를 3/2배하면 레보다 4도 높은 음을 얻는다. (진동수=3/2×3/4×3/2=27/16)

솔 : 도1의 진동수를 3/2배해서 도1에서 4도 높은 음을 얻는다. (진동수=1×3/2=3/2)

파 : 도2의 진동수를 2/3배해서 도2에서 4도 낮은 음을 얻는다. (진동수=2×2/3=4/3)

미 : 라의 진동수를 3/4배해서 라보다 3도 낮은 음을 얻는다. (진동수=3/2×3/4×3/2×3/4=81/64)

레 : 솔의 진동수를 3/4배해서 솔보다 3도 낮은 음을 얻는다. (진동수=3/2×3/4=9/8)

더 분해할 수 없는 기본진동수와 기본길이가 있을까? 피타고라스의 추론을 좀더 진행시켜 보

자. 우선 위에서 구한 진동수를 현의 길이로 환산해보자.

도1(1/1), 레(8/9), 미(64/81), 파(3/4), 솔(2/3), 라(16/27), 시(128/243), 도2(1/2)

도	1	2	3	4	5	6	7	8
음명	다	라	마	바	사	가	나	다
현길이	1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	1/2

현의 길이는 진동수의 력이므로 진동수의 역수값을 구하고, 그 분모의 최소공배수를 구한다면 길이의 최소단위를 구할 수 있을 것이다.

2004년 11월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

이번호에는 다양한 영역에 걸친 문제들을 출제했다. 우선 현장중계에서 미분응용문제를 출제했는데 기본 정의를 넘어서 수학적 테크닉을 도입해 풀이하는 것이 요구된다. 그외에는 번분수, 알고리즘, 군수열, 기하학에 관련된 문제를 준비했다. 마지막으로 구술면접에서 출제될만한 새로운 유형의 문제를 제시했는데, 학생이 직접 수리모형을 설계해 풀어야 한다.

■ 구술면접 현장중계

미분가능한 함수의 그래프 위를 움직이는 점 P가 있다. 이 그래프에 있지 않은 정점 A에 대해 선분 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이가 최소가 되는 점 P를 구할 때 다음 물음에 답하라.

1) 선분 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이를 최소로 하는 점 P를 구하는 방법을 하나 제시하라.

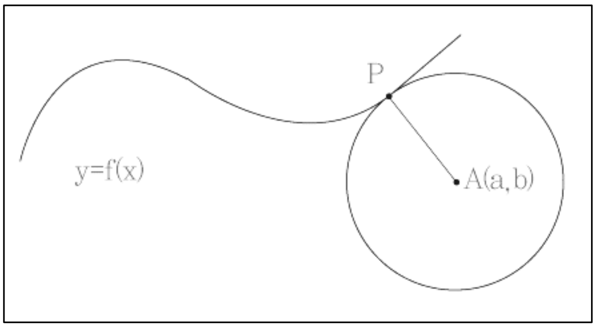
2) 이때 직선 AP는 $y=f(x)$에 수직임을 증명하라.

▶ 면접시뮬레이션

교수 : 자 순서대로 답하세요.

학생 : 어떤 곡선밖에 주어진 점과 곡선 사이의 거리를 최소로 하는 점을 구하는 문제입니다. 그 점을 구하는 방법은 다음과 같습니다.

먼저 주어진 점A를 중심으로 하는 원을 만들어 반지름을 조금씩 키워갑니다. 그럼 언젠가는 이 원이 곡선과 접하는데 그 접점이 바로 최단거리가 되는 점 P가 됩니다.



교수 : 다음 문제를 증명하세요.

학생 : 위에서 구한 점은 원의 접점이고 선분AP는 이 원의 반지름이므로 직선AP는 y=f(x)에 수직임이 증명됩니다.

교수 : 아이디어는 좋습니다. 그런데 문제에서 주어진 미분가능한 곡선이라는 조건이 필요합니까?

학생 : 미분가능하지 않으면 원과 접하는 점을 구할 수 없습니다.

교수 : 그렇게 해석한다면 좀더 엄밀하게 증명을 해보세요.

학생 : 처음에 제시한 방법을 수식으로 표현하면서 다시 하겠습니다.

먼저 구하는 점을 $P(t,\ f(t))$, 곡선 위의 임의의 점을 $Q(x,\ f(x))$라 두고 $\overline{AQ}^2=(x-a)^2+(f(x)-b)^2$의 최소값을 구하면 됩니다.

즉 $g(x)=(x-a)^2+(f(x)-b)^2$이라 두면 $x=t$에서 $g(x)$는 최소가 됩니다. $f(x)$는 미분가능하므로 $g(x)$도 미분가능하고 $g'(t)=0$이 돼야 합니다.

$g'(t)=2(t-a)+2(f(t)-b)f'(t)=0$이므로 다시 정리하면 $f'(t)=\dfrac{-(t-a)}{f(t)-b}$가 됩니다.

여기서 선분 $\overline{AP}$의 기울기를 m이라 하면 $m=\dfrac{f(t)-b}{t-a}$이므로 $f'(t)\times m=-1$입니다. 그러므로 선분 $\overline{AP}$는 $y=f(x)$에 수직입니다.

교수 : 수고했습니다.

■ 감상포인트

이 문제는 미분개념과 접선의 성질을 이해하면 쉽게 풀 수 있습니다. 미분에 관련된 문제들은 크게 두 가지로 나눠 볼 수 있습니다. 첫 번째 나주 기본적인 개념들 즉 미분정의, 연속성, 미분가능성, 평균변화율에 관한 것과 두 번째 최대·최소나 속도·가속도 같은 미분의 응용과 테크닉에 관한 것입니다.

초기 구술면접에서는 단순한 문제가 주로 출제됐는데 최근에는 복잡한 테크닉을 요구하는 문제가 종종 등장합니다. 그런데 이 문제는 앞서 언급한 두 가지 특징을 모두 포함하므로 학생의 단순한 수학실력 뿐 아니라 창의성까지도 알아 볼 수도 있습니다.

학생의 첫 번째 답의 전략은 원을 조금씩 키워서 접점을 찾아간다는 것으로 아주 간단하면서도 설득력이 있습니다.

그러나 이를 수식을 이용해 엄밀하게 증명하는 것은 쉽지 않습니다. 교과서에 나온 간단한 개념과 정의만으로 복잡해 보이는 문제를 증명하는 과정을 잘 살펴보고 이외의 미분응용문제들을 정리해 두기 바랍니다.

[문제1] 피타고라스는 '만물은 수', 즉 모든 것을 정수의 비(유리수)로 나타낼 수 있다고 주장했다. 그는 "직각3각형에서 빗변의 제곱은 다른 두 변의 제곱의 합과 같다"라는 정리를 발견하고 감사의 뜻으로 합예의 신에게 황소 백 마리를 바쳤다. 그러나 기쁨이 채 가시기도 전에 정4각형의 대각선에서 분수로 나타낼 수 없는 이상한 수, 즉 $\sqrt{2}$가 튀어나와 제자들에게 이를 비밀로 지키기를 엄명했다고 한다. 그러나 무리수도 유리수처럼 보이는 연분수(번분수)로 나타낼 수 있다. 다음 물음에 차례로 답하라.

1) 자연수로 이뤄진 수열 $\{a_n\}$에 대한 번분수식

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cdots}}}$$

순서쌍 $(a1,\ a2,\ a3,\ \cdots\ a_{n)}$으로 나타낼 때 $\frac{61}{23}$의 순서쌍을 구하라.

2) 다음의 무한 번분수식으로 나타내어진 x는 유리수인가?

$$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

3) $\sqrt{2}$를 무한 번분수식으로 어떻게 표현할 수 있는가?

▶ 예시답안

1) $\frac{61}{23}=2+\frac{15}{23}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{8}{15}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{15}{8}}}$

$$=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{7}{8}}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7}}}}$$

따라서 구하는 순서쌍은 (2, 1, 1, 1, 7)이 된다.

2) 주어진 식을 x라 하면 우측 그림에서 동그라미 친 부분도 x와 같으므로 $x=\frac{x+1}{x}$이다. 이 식을 정리해 $x^2-x-1=0$에서 $x=\frac{(1\pm\sqrt{5})}{2}$를 얻는다. $x>0$이므로 $x=\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$이다.

그러므로 이 번분수는 무리수다.

$$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

3) $\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$ … ①

즉 $\sqrt{2}-1=\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$ … ②

②를 ①에 차례로 대입하면 다음처럼 무한히 연결되는 무한 번분수를 만들 수 있다.

$$\therefore\ \sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$$

[문제2] 좌표평면 위 점의 집합 T를 다음과 같이 정의한다.

$$\left\{T=(x,\ y)|x,\ y\text{는정수},\ 0\le x\le 9,\ 0\le y\le \frac{x}{3}\right\}$$

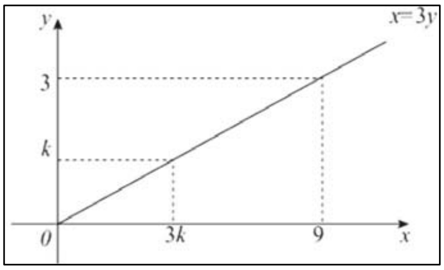
다음 물음에 답하시오.

1) T의 원소의 개수는?

2) T의 각 원소 $(x,\ y)$에 대해 두 좌표의 합 $x+y$의 총합은?

▶ 전문가 클리닉

이 문제를 간단하게 풀 수 있을 것이라고 자만하면 안 된다. 무턱대고 계산하는 것은 수학이 아니다. 합기호 $\sum$를 이용해 조직적이고 기계적으로 계산할 수 있는 알고리즘을 만들어내는 것이 중요하다. 물론 예시답안보다 멋진 계산법을 고안할 수도 있다. 풀이를 참고해 우리가 기본적으로 배운 몇 가지 개념만으로 어떻게 응용문제를 풀어나가는지 주목해서 풀어보기 바란다.



▶ **예시답안**

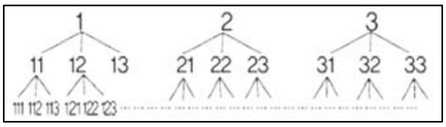
1) $y=k$인 점 $(x,\ y)$의 개수는 $10-3k(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$이므로 집합 T 원소의 개수는 $\sum_{k=0}^{3}(10-3k)=22$이다.

2) $y=k$인 점 $(x,\ y)$에 대하여 $x+y$의 합은

$$(k+3k)+(k+3k+1)+(k+3k+2)+\cdots(k+9)=\frac{1}{2}(10-3k)(5k+9)$$

따라서 $x+y$의 총합은 $\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{2}(10-3k)(5k+9)=144$

[문제3] 그림에 나차나는 수를 크기 순으로 나열해 다음과 같은 수열을 만들었다.



1, 2, 3, 11, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33, 111, 112, 113, 121, 122, ⋯

이 수열의 제 200항은?

▶ **전문가 클리닉**

이 문제는 몇 해 전에 수능에서 출제됐던 문제다. 여기서 다시 소개하는 이유는 여러 가지 논리적 전략을 이 문제 속에서 얻을 수 있기 때문이다. 군수열 관련 문제는 구술시험과 상관없이 반드시 알아야 한다. 이런 종류의 문제들은 조직적으로 푸는 방법을 익히지 못하면 수학실력을 쌓기 힘들다. 풀이를 보기 전에 직접 해보길 바란다.

▶ **예시답안**

규칙대로 수를 세 면 다음과 같다.

한 자리 수의 개수 ⋯⋯⋯⋯3 개

두 자리 수의 개수 ⋯⋯⋯⋯3^2 개

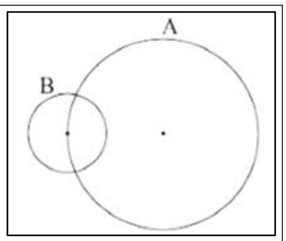
세 자리 수의 개수 ⋯⋯⋯⋯3^3 개

⋮

n 자리 수의 개수 ⋯⋯⋯⋯3^n 개

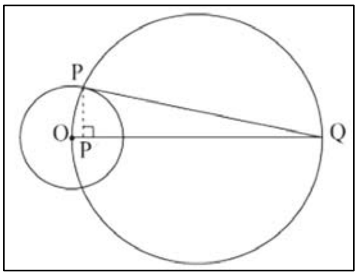
3+9+27+81<200<3+9+27+81+234이므로 2백은 5자리수 중 80번째 수다. 13333이 81번째 수이므로 2백항의 수는 13332이다.

[문제4] 한 꼬마가 비누방울 놀이를 한다. 반지름이 3인 비누방울 A를 만들고 연달아 반지름이 1인 비누방울 B를 만든 후 가만히 바라보니 오른쪽 그림처럼 비누방울 A가 비누방울 B의 중심을 지나고 있었다. 이때 두 비누방울이 공유하는 부분의 부피를 구하라.



▶ **전문가 클리닉**

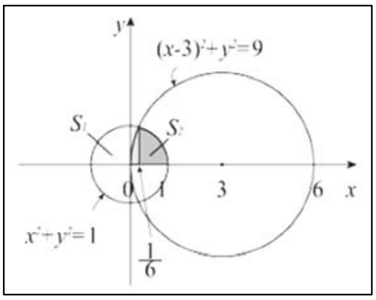
간단한 문제지만 첫 단추를 끼울 때 조심해야 한다. 일단 적분을 해야 한다는 것을 눈치 챘다면 반은 성공한 것이다. 그런데 적분구간을 어떻게 알아낼 것인가?



주어진 조건에서 이를 알아내야 한다. 중요한 것은 미분이건 적분이건 항상 기하학적 아이디어가 적용될 수 있다는 것이다. 미분·적분의 응용과 함께 기하학적 기술들을 한 번 더 정리해보기 바란다.

▶ 예시답안

두 비누방울의 교점 중 하나를 P, 반지름이 1인 비누방울의 중심을 O, 반지름 3인 비누방울의 지름을 $\overline{OQ}$라 하고 P에서 $\overline{OQ}$에 내린 수선의 발을 P′라 하면 △POP′과 △QOP는 서로 닮은 꼴이므로 $\overline{OQ}:\overline{OP}=\overline{OP}:\overline{OP'}$이다.



$$\therefore\ 6:1=1:\overline{OP'} \qquad \therefore\ \overline{OP'}=\frac{1}{6}$$

이 정보를 가지고 적분을 다음처럼 해보자.

O를 원점으로 하는 좌표축을 잡고 오른쪽 그림처럼 빗금친 S_1, S_2의 부분을 x축으로 회전시켜 생긴 회전체의 부피를 각각 구해 더하면

$$\pi\int_0^{\frac{1}{6}}(6x-x^2)\,dx+\pi\int_{\frac{1}{6}}^{1}(1-x^2)\,dx=\pi\left[3x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{6}}+\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{6}}^{1}=\frac{7}{12}\pi$$

[문제5] 다음 질문에 답하라.(2003년 중앙대 응용)

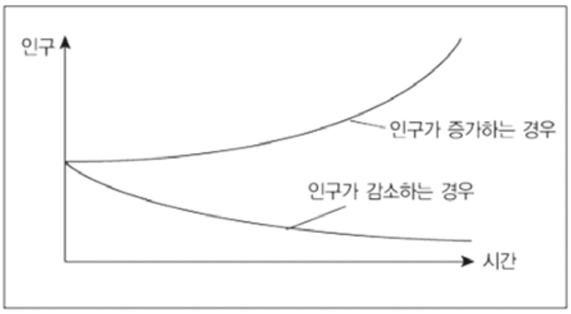
1) **미래인구를 예측하는 것은 합리적인 도시계획을 위해 필수적이다. 시간에 따른 도시인구의 변화율이 인구수에 비례하는 경우 미래 도시인구를 예측할 수 있는 논리적인 모형을 설정해 제시하고, 그 모형에 따른 미래 인구수 변화를 그래프로 그리시오.**

2) **시간에 따른 도시인구의 변화율이 인구수와 전출입 인구의 영향을 동시에 받는다고 하자. 이때 문제1)에서 제시한 모형에 전출입 인구의 영향을 추가적으로 고려해 미래 도시인구를 예측하는 논리적인 방안을 제시하시오.**

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 구술면접 시험에 출제될 수 있는 유형이다. 기존의 구술면접 시험에서 출제되던 문제는 개념을 묻거나 고난도 테크닉을 요구했는데 이 문제는 수리모형을 스스로 설정해 논리적으로 해석하는 능력을 측정함을 목적으로 한다. 수학적인 테크닉이나 개념은 간단하지만 전체적인 개념을 이해하고 모형을 설계하는 것은 쉽지 않다. 여기서는 대학교에서 제시한 모범답안을 그대로 소개했다. 전체적인 흐름을 이해하고 이런 유형의 문제를 어떻게 풀어야 할지 각자 고민해보자.

▶ 예시답안



1) 시간에 따른 도시인구의 변화율이 인구수에 비례하는 경우를 수리 모델로 표현하면 우측과 같다.

$$\frac{dP(t)}{dt}=aP(t)\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ i })$$

여기서 현재의 도시인구수는 시간에 대한 도시인구의 변화율이다. a는 도시와 사회에 따라 결정되는 상수이며 이 상수가 양수이면 인구가 증가하고 상수가 음수이면 인구가 감소한다. 예시된 관계식을 적분하면 미래 인구를 표현하는 수식에 대한 해를 구할 수 있다.

$$\frac{dP(t)}{dt}=adt,\ \int\frac{dP(t)}{P(t)}=\int adt \ \cdots\cdots\cdots\cdots \ (\text{i})$$

$$\ln P(t)=at+C,\ P(t)-e^{at+C}=P_c e^{at} \ \cdots\cdots \ (\text{ii})$$

따라서 미래의 인구는 지수함수의 형태로 표현된다.

식 (i)로 주어진 수리 모델 이외에도 시간에 대한 미래인구의 변화를 현재 인구수에 비례하는 식으로 표현하는 경우 부분 정답으로 인정할 수 있다,

인구의 변화를 그래프로 도시하는 경우 식 (ii)에 유도된 미래인구에 대한 수식을 사용하면 정확한 그래프를 그릴 수 있다. 식 (ii)를 유도하지 못한 학생의 경우에도 식 (i)만을 사용해 그래프의 형태를 찾을 수 있다. 이 경우는 인구의 증·감 여부, 위·아래 볼록 여부, 특정 인구로의 수렴성이 있는지 여부 등을 점검해야 한다. 예시된 답안에 대한 그래프는 앞에서 예시했다.

2) 문제1)에서 제시한 모형에 전출입 인구의 영향을 추가적으로 고려하고자 하는 경우는 문제 1)의 예시답안에 주어진 식 (i)에 전출입 인구의 영향을 추가하면 된다.

$$\frac{dP(t)}{dt}=aP(t)+Q_i-Q_o \ \cdots\cdots\cdots \ (\text{iii})$$

여기서 Q_i는 전입율, Q_o는 전출율이다.

전입·전출을 통합해 유동인구에 따른 도시인구의 변화율을 반영할 수도 있다. 이 경우는 다음과 같은 수식으로 표현될 것이다.

$$\frac{dP(t)}{dt}=aP(t)+Q_{io} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (\text{iv})$$

전입율은 도시의 규모, 문화환경, 교육환경 등 복잡한 환경의 영향을 받는다. 가장 간단한 경우는 전입율은 상수로 가정하는 것이다. 전출율도 도시환경에 영향을 받지만 현재의 인구수에 가장 큰 영향을 받을 것이다. 따라서 가장 간단한 도시인구의 예측 모델은 다음과 같다.

$$\frac{dP(t)}{dt}=aP(t)+C-bP(t)=cP(t)+C \ \cdots\cdots\cdots \ (\text{v})$$

여기서 $c\equiv a-b$이다.

전입·전출에 영향을 미치는 요인을 적절하게 설명하고 이를 반영한 수식화를 시도하면 정답으로 인정할 수 있다. 예시된 관계식을 사용하는 경우에는 적분으로 정해를 구하는 것이 가능하다.

$$\frac{dP(t)}{dt}=cP+C,\qquad \frac{dP}{P+\frac{C}{c}}=cdt$$

$$\int\frac{dP}{P+\frac{C}{c}}=\int cdt,\qquad \ln\left(P+\frac{C}{c}\right)=ct+B$$

$$P+\frac{C}{c}=e^{ct+B},\qquad P=Ke^{ct}-D$$

이 문제는 전입율 Q_i, 전출율 Q_o를 어떤 모양의 수식으로 모델링 하느냐에 따라 수리 모델이 다양하게 구성될 수 있다.

2004년 12월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

■ 이번 호는 지난 호와 마찬가지로 실전에 대비할 수 있는 문제를 다뤘습니다. 변화율에 관련된 문제부터 확률 모델까지 다양한 소재를 통해 면접구술고사 형식에 익숙해지기 바랍니다.

■ 구술면접 현장중계

2개의 반응물질 A와 B가 화학반응해 새로운 생성물 W를 만들면 반응식은 A+B→W로 표현된다. A, B, W의 농도 [A]. [B], [W]를 시간 (t)의 미분가능한 함수라 하자.

시간에 대한 [W]의 반응률을 다음과 같이 정의할 때

$$[W]\text{의 반응률} = \frac{d[W]}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{[W](t+h) - [W](t)}{h}$$

다음 물음에 답하라.(2003년 포스텍)

1) 명제 "[W]가 증가함수이면 $\frac{d[W]}{dt} > 0$이다."의 '이'를 구하라.

2) 명제 "$\frac{d[W]}{dt} \le 0$이면 [W]는 증가하지 않는 함수다"를 증명하라.

3) A와 B의 초기농도가 $[A]_0 = [B]_0 = C$, $[W]_0 = 0$이고 $[W](t) = C(1 - e^{-kt})$일 때 [W]의 반응률을 시간의 함수로 구하고 $\frac{d[W]}{dt} = k(C - [W])$임을 증명하라.

▶ 면접 시뮬레이션

교수 : 질문에 차례대로 답하세요.

학생 : 처음 문제는 주어진 명제의 이를 구하는 것입니다. 명제 p→q의 이는 ~p→~q이므로 "[W]가 증가하지 않는 함수이면 $\frac{d[W]}{dt} \le 0$이다"가 바로 구하는 답입니다.

교수 : 잘 했습니다. 다음 문제에 답하세요.

학생 : 증가율이 0보다 작거나 같은 경우 즉 $\frac{d[W]}{dt} \le 0$을 가정했으므로 당연히 $[W]$는 증가하지 않는 함수입니다.

교수 : 당연한 이야기입니다만 좀더 수학적으로 설명해 보세요.

학생 : 그럼 이 명제의 대우를 고려해 $[W]$를 증가함수라고 가정하고 다음과 같은 두 가지 경우를 살펴보겠습니다.

i) $h > 0$일 때 증가함수라 가정했으므로 $[W](t+h) > [W](t)$이고 당연히 $\frac{[W](t+h) - [W](t)}{h} > 0$입니다. 그러므로 $\lim_{h \to 0} \frac{[W](t+h) - [W](t)}{h} > 0$가 됩니다.

ii) $h < 0$일 때 $[W](t+h) < [W](t)$이고 $\frac{[W](t+h) - [W](t)}{h} > 0$이므로

$\lim_{h \to 0} \frac{[W](t+h)-[W](t)}{h} > 0$가 됩니다.

ⅰ), ⅱ)로부터 p→q의 진리값은 대우를 취한 ~p→~q의 진리값과 같으므로 "$\frac{d[W]}{dt} \leq 0$이면 [W]는 증가하지 않는 함수다"라는 명제를 증명한 것입니다.

교수 : 훌륭합니다. 마지막 것을 설명해 보세요.

학생 : 주어진 조건을 이용해서 미분하면 $[W]$의 반응률은 $\frac{d[W]}{dt} = kCe^{-kt}$가 됩니다. 그리고 이를 다음과 같이 적당하게 잘 조작하면 $kC\{1-(1-e^{-kt})\} = k\{C-C(1-e^{-kt})\} = k(C-[W])$라 할 수 있습니다.

교수 : 수고했습니다.

■ 감상포인트

이 문제는 수학과 화학을 결합시킨 고급 응용문제다. 화학에서의 반응속도론을 모르면 접근하기 힘들 수도 있다. 그러나 문제에서 그 개념을 자세히 설명하고 있기 때문에 미분에 대한 내용만 분명히 이해하고 있다면 해법을 발견할 수 있다. 이 문제는 전형적인 구술 문제로 테크닉을 이용해 단순 방정식을 푸는 문제와는 다른 각도에서 접근해야 한다. 즉 수학적 개념을 정확하게 이해해 과학에 적용시키는 능력이 필요하다. 학생의 답변을 잘 살펴보면 과학 지식을 바탕으로 접근하기보다는 수학적 개념을 단순히 이용하고 있다는 것을 알 수 있다.

한편 변화율은 변하는 절대적인 양의 대비가 아니라 시간에 대한 상대적인 값이라는 것을 직관적으로 이해하는 것이 중요하다. 문제풀이 기술은 다단계 문제 중 첫 번째 질문에 숨겨져 있는 경우가 많다. 즉 주어진 명제의 '이'를 물음으로써 대우를 이용해서 증명하라는 힌트를 준 것이다.

▶ Tip 증가와 감소에 대한 수학적 고찰

▶ 함수의 증가와 감소에 대한 기본개념

(1) 단조증가·단조감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 그 구간에 속하는 임의의 값 x_1, x_2에 대해 $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) < f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 "단조증가 또는 증가한다"라고 한다.

또 $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) > f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 "단조감소 또는 감소한다"라고 한다.

(2) 증가상태·감소상태

충분히 작은 모든 양수 h에 대해 $f(x_1-h) < f(x_1) < f(x_1+h)$가 성립하면 함수 $f(x)$는 $x=x_1$에서 "증가상태에 있다"라고 한다. 충분히 작은 모든 양수 h에 대해 $f(x_1-h) > f(x_1) > f(x_1+h)$가 성립하면 함수 $f(x)$는 $x=x_1$에서 "감소상태에 있다"라고 한다.

(3) $f'(x)$의 양·음과 $f(x)$의 증감

① 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고 그 구간에서 항상 $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 그구간에서 단조증가한다. 항상 $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 그구간에서 단조감소한다. 항상 $f'(x) = 0$이면 $f(x)$는 상수함수이다.

② 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 증가상태에 있다. $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 감소상태에 있다.

▶ 평균값 정리를 이용한 증가·감소의 고찰

(1) 주어진 구간의 임의의 두 점 x_1, x_2에 대해 $x_1<x_2$라고 하면 폐구간 $[x_1,\ x_2]$에서 평균값 정리에 의해서 다음이 성립한다.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

즉 $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$인 c가 $x_1<c<x_2$구간에서 존재한다.

이 구간에서 항상 $f'(x)>0$이면 $f'(c)>0$이므로

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)>0 \qquad \therefore\ f(x_1)<f(x_2)$$

따라서 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

같은 방법으로 항상 $f'(x)<0$인 $f(x)$는 그 구간에서 단조감소한다.

(2) $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로

$f'(a)=\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{f(a+\triangle x)-f(a)}{\triangle x}$가 존재한다.

$f'(a)>0$이면 충분히 작은 임의의 $|\triangle x|$에 대해 $\dfrac{f(a+\triangle x)-f(a)}{\triangle x}>0$이다.

$\therefore\ \triangle x>0$이면 $f(a)<f(a+\triangle x)$, $\triangle x<0$이면 $f(a)>f(a+\triangle x)$

따라서 $f(x)$는 $x=a$에서 증가상태에 있다.

같은 방법으로 $f'(a)<0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 감소상태에 있다.

[주의] 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고 그 구간에서

① $f(x)$가 단조증가하면 그 구간에서 $f'(x)\ge 0$

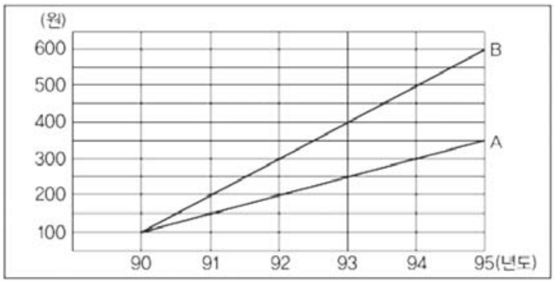
② $f(x)$가 단조감소하면 그 구간에서 $f'(x)\le 0$

[문제1] 오른쪽 표는 A, B 두 상품의 소비자 가격의 변동을 그래프로 나타낸 것이다.

$(\text{금년 가격 인상률})=\dfrac{(\text{금년 가격})-(\text{작년 가격})}{(\text{작년 가격})}\times 100(\%)$으로 정의할 때 91년도부터 95년도까지의 두 상품 A, B의 전년도 대비 가격 인상률에 대한 해석이 다음과 같다.

"최근 몇년간 우리나라 경제성장률은 감소하고 있지만 A와 B의 가격 인상률은 매년 증가하고 있다."

이 해석에는 우리나라 경제성장률에 상관없이 큰 오류가 존재한다. 그 오류가 무엇인지 지적하라.



▶ 전문가 클리닉

이 문제는 구술면접 현장중계에서 소개한 변화율과 인문학적 관점에서 살펴본 증가·감소에 대

한 것이다. 가격과 같은 경제지표가 증가 혹은 인상되는 상황을 좀더 구체적인 수치로 파악할 때 생기는 착시와 착각에 관한 문제다. 일상생활에서 우리가 범하기 쉬운 오류 중 하나가 통계와 변화율에 대한 것이다.

가격 인상과 가격 인상률은 완전히 다른 것으로 가격 인상률이 둔화 혹은 감소돼도 가격은 여전히 상승한다는 사실을 이해하는 것이 중요하다. 이는 물리학에서 가속도가 줄어도 속도는 여전히 증가한다는 이치와 같은 것으로 일상생활에서 수없이 경험하는 오류 중 하나다.

▶ 예시답안

단순한 수치 비교를 통해서는 변화율을 파악할 수 없다. 연도별 가격과 변화를 도표로 정리하면 좀더 쉽게 접근할 수 있다.

	91년	92년	93년	94년	95년
A가격	150	200	250	300	350
A인상률(%)	50	33.3	25	20	16.7
B가격	200	300	400	500	600
B인상률(%)	100	50	33.3	25	20

위 도표는 두 제품의 가격 변동을 연도별로 살펴보고 전년도 대비 가격 인상률을 계산한 것이다. 두 제품의 가격은 계속 인상되지만 인상률은 매년 증가하는 것이 아니라 감소하고 있음을 알 수 있다.

[문제2] 데이터 통신할 때 일반적으로 0과 1로 조합된 이진법의 수를 사용한다. 데이터 통신에서는 여러가지 현상에 의해 처음 데이터와 다른 데이터가 도착할 수 있다. 원본 데이터와 동일한지를 판단해 다시 원래의 데이터로 고치기 위한 방법으로 해밍코드(Hamming Code)라는 것이 있다. 이를 사용하면 7자리의 데이터 중 1자리의 데이터가 다르면 수정해서 원래 데이터로 복원가능하다. 예를 들어 원래의 데이터가 1110000일 때 1110001은 복원 가능하고 1110011처럼 2자리가 다른것은 복원 불가능하다. 어떤 통신에서 1을 1로 보내는 확률은 0.9이고 0을 0으로 보내는 확률은 0.8이라 한다. 해밍코드 방식을 사용해서 7자리 데이터를 보낸다고 할 때 다음 질문에 답하라.

1) 데이터 1111111 보낼 때 원래 데이터와 같은 데이터가 나올 확률은?

2) 임의의 7자리 데이터를 보낼 때 원래의 데이터와 같을 확률은?

▶ 전문가 클리닉

문제 자체는 일상 언어로 표현되고 상식적이지만 기본 원리를 파악하기는 쉽지 않다. 앞으로 구술면접이 심화된다면 이런 형식의 문제가 자주 등장할 것이다. 복잡한 지문을 이해해서 수학적인 개념을 적용시키는 문제는 수능시험에서 평가할 수 없는 부분이기 때문이다. 즉 스스로 전략을 세워서 해결해야 하는 전략적인 접근이 필요하다.

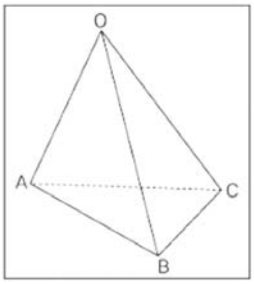
▶ 예시답안

1) 1을 1로 보내는 확률은 0.9이고, 해밍코드에서는 한 개의 데이터 오류는 수정 가능하므로

구하는 확률은 ${}_7C_0(0.9)^7 + {}_7C_1(0.9)^6(0.1)^1$이 된다.

2) 임의의 데이터는 각 자릿수에 1 혹은 0일 가능성이 동일하므로 데이터가 정확하게 전송될 확률은 평균을 구해서 계산해야 한다. 그러므로 데이터가 올바르게 갈 확률은 1을 1로 보내는 경우 $\frac{1}{2}\times 0.8 = 0.4$를 고려해 한 자리의 데이터가 올바르게 도착할 확률은 0.85이다. 그리고 다른 데이터가 도착할 확률은 0.15이다.
이때 해밍코드 방식이라면 모두 올바르게 도착하거나 한 자리가 다른 경우에도 올바른 데이터를 받을 수 있으므로 구하는 확률은 ${}_7C_0(0.85)^7 + {}_7C_1(0.85)^6(0.15)^1$이다.

[문제3] 모서리의 길이가 1인 정4면체 OABC에서 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$의 크기는?



▶ 전문가 클리닉

이 문제는 평이하므로 빠른 시간 안에 풀 수 있어야 한다. 이 문제는 수능 수준의 단순한 문제이지만 구술면접시험에서 3차원 기하 문제가 출제될 때 필요한 기본적인 벡터 이론을 여러분들이 익힐 수 있도록 출제했다. 풀이는 두 가지로 소개했는데 각 방식의 근본적 차이점을 꼭 숙지하기 바란다.

▶ 예시답안

$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c}$라 하자.

$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|^2$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=\frac{1}{2}|\vec{a}|^2$

$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2$

$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=3|\vec{a}|^2+3|\vec{a}|^2=6|\vec{a}|^2$

$\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{6}|\vec{a}|=\sqrt{6}$

★ 별해

$\triangle$ABC의 무게중심을 G라 하면

$\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OG}$

$\therefore\ |(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})|=3|\overrightarrow{OG}|$

$=3\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}|\overrightarrow{OA}|$

$=\sqrt{6}|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{6}$

[문제4] 멱집합 $2^M = \{X | X \subset M\}$의 원소의 개수는 M의 원소의 개수가 m개일 때 2^m개다. 예를 들면 $M = \{a, b, c\}$일 때 $2^M = \{\varnothing, \{a\}, \cdots \{a, b, c\}\}$이므로 $n(2^M) = 8$이다. 다음 물음에 답하시오.

1) M={1, 2, 3}일 때 2^M의 부분집합의 개수는?

2) P(M)을 $2^M = P(M) = \{X | X \subset M\}$이라 할 때

① P(P(∅))=?

② P(P([1]))=?

▶ 전문가 클리닉

집합에 관련된 간단한 문제로 별 어려움 없이 풀 수 있을 것이다. 이 문제에서는 부분집합 혹은 교집합 등을 일상 언어가 아닌 수학적 언어 혹은 기호로 정의할 수 있다는 것을 알 수 있다. 집합뿐 아니라 수학에서 사용되는 대부분의 정의와 성질을 기호로 엄밀하게 정의할 수 있다. 이런 정의를 통해 일상 언어의 모호성을 완전히 제거할 수 있다. 여기서는 이 문제를 풀어보면서 여러가지 정의를 수학적 언어로 표현하는 과정을 잘 이해하기 바란다.

▶ 예시답안

1) 2^M의 원소의 개수가 8개이므로 부분집합의 개수는 $2^8 = 256$(개)다.

2) ① $P(\varnothing) = \{X | X \subset \varnothing\} = \{\varnothing\}$ 그리고 $P(\varnothing)$의 부분집합은 $\varnothing$, $\{\varnothing\}$이다.

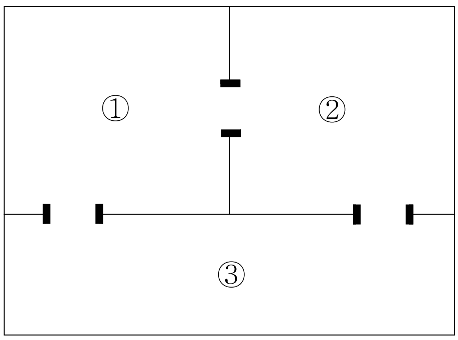
$\therefore\ P(P(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

② $P\{\{1\}\} = \{X | X \subset \{1\}\} = \{\varnothing, \{1\}\}$

$P\{\{1\}\}$의 부분집합은 $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{1\}\}$, $\{\varnothing, \{1\}\}$이다.

$\therefore\ P(P(\{1\})) = \{\varnothing, \{\varnothing, \{\{1\}\}, \varnothing, \{1\}\}\}$

[문제5] 오른쪽 그림처럼 어떤 집에 3개의 방이 위치하고 각 방에는 문이 달려있다. 방에 있는 날파리는 한 방에서 다른 방으로 문을 통해서 마음대로 움직인다. 1초에 1번씩 문을 통해 다른 방으로 움직일 때 날파리가 ⓘ방에서 ⓙ방으로 문 하나만 통과해 들어갈 확률 a_{ij}를 (i, j)성분으로 하는 행렬 $A = (a_{ij})(i = 1, 2, 3\ ;\ j = 1, 2, 3)$으로 생각할 수 있다. 이때 다음 물음에 답하라(단 파리가 방에 머물 확률은 0이고 각 방에서 어느 한 문을 통과할 확률은 $\frac{1}{2}$이다.).



1) 행렬 A와 A^2을 구하고 이 행렬의 의미를 각각 설명하라.

2) ①번 방에 날파리가 100마리 있었다면 2초 후에 날파리는 어떻게 존재할까(날파리의 행동은 모두 독립적이라 가정한다)?

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 확률론에서 중요하게 다뤄지는 시간 혹은 단계 변이에 대한 확률모형에 관한 것이

다. 고교 수학에서는 잘 다뤄지지 않지만 수열 등에 응용돼 등장하는 경우가 있다. 문제에서 요구하는 행렬을 신속하게 구하기는 쉽지 않지만 해설을 따라 가면서 확률 행렬과 그 곱의 의미를 파악하기 바란다. 행렬로 표현하면 날파리가 몇초 후에 각방에 존재할 확률은 한 번에 파악할 수 있다.

▶ 예시답안

1) $a_{11}=a_{22}=a_{33}=0,\ a_{12}=a_{13}=\dfrac{1}{2},\ a_{21}=a_{23}=\dfrac{1}{2},\ a_{31}=a_{32}=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore\ A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A^2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

행렬 A는 1초 후에 날파리가 다른 방으로 이동할 확률을 의미한다. ①, ②, ③번 방에 날파리가 존재할 확률을 각각 x, y, z라면 확률벡터 P=(x, y, z)를 만들 수 있다. 이것을 행렬 A에 곱해 AP를 계산하면 1초 후에 날파리가 각 방에 존재할 확률을 구할 수 있다.

만약 처음에 파리가 ①번 방에 있었다면 P=(1, 0, 0)가 되고 이것을 A에 곱하면(0, 1/2, 1/2)가 구해지는데 그 파리가 ①, ②, ③번 방에 존재할 확률이 각각 0, 1/2, 1/2임을 의미한다.

A^2은 2초 후에 날파리가 각 방으로 이동할 확률을 의미한다.

2) 처음 날파리 1마리가 ①번 방에 있다고 가정하면 P=(1, 0, 0)가 된다. 이것을 A^2에 곱해서 나온 값을 보면 2초 후에 날파리가 ①, ②, ③번 방에 존재할 확률은 순서대로 1/2, 1/4, 1/4가 됨을 쉽게 알 수 있다.

①번 방에는 50마리, ②, ③번 방에는 각각 25마리씩 존재할 것이다.

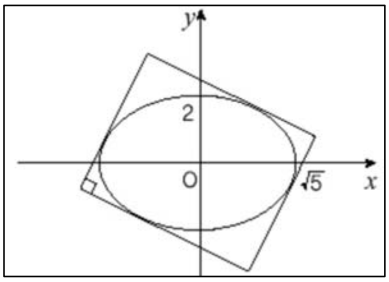
2005년 01월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

이번 호에서는 서울대 구술시험과 관련해 이차곡선과 공간도형, 그리고 벡터를 중심으로 다루고자 합니다. 서울대 구술고사는 오전에 한 문제, 오후에 한 문제로 치러지기 때문에 자연대나 공대에 지원한 학생들은 20분 동안에 한 문제(작은 문제로 2~3문제)를 풀게 됩니다.

지금까지 서울대에서 출제된 문제들의 공통점은 그래프 해석이 가능한 공간도형이나 벡터에서 주로 출제됐으며, 실제로 그래프를 통해서 답을 예측할 수 있습니다. 따라서 그래프를 그리거나 또는 문제를 충분히 생각한 다음 답을 짐작해 보고 답안을 작성하는 것이 순서 같습니다. 그래프를 이용해서 답을 찾았다 하더라도 정확한 수학적 논리나 계산에 의해서 그 답을 뒷받침하는 표현이 뒤따라야 함은 물론입니다. 또한 중간계산이나 적용된 공식 또는 정리에 대한 교수의 질문에 답변할 수 있어야 합니다. 특히 각각의 정리의 조건들도 유심히 봐둬야 합니다.

▶ 면접 시뮬레이션

타원 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$에 외접하는 직사각형 넓이의 최대값을 구하시오.



교수 : 최대값을 구했습니까?

학생 : 네, 18입니다.

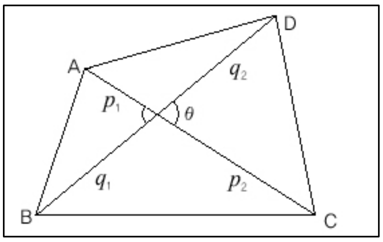
교수 : 음, 그 이유를 간략히 설명해 보세요.

학생 : 외접하는 직사각형의 꼭지점들은 반지름의 길이가 $\sqrt{5+4}=3$인 원 위에 있어야 합니다. 이때, 직사각형의 두 대각선이 이루는 각을 θ라 두면 직사각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 6\times \sin\theta$인데, 대각선의 사이각이 90°일 때 최대값 18을 갖습니다.

교수 : 직사각형의 꼭지점이 원 위에 있어야 되는 이유를 좀 더 구체적으로 설명해 보세요.

학생 : 대기실에서 많이 생각해 봤는데 그래프에서 볼 때 맞는 것 같은데 증명하지는 못했습니다.

교수 : 그럼 학생, 대각선의 길이가 p, q이고 사이각이 θ인 사각형의 넓이 공식이 $\frac{1}{2}pq\sin\theta$인 것을 증명해 보세요.



학생 : 네. 그것은 대각선의 교점을 기준으로 각각 p_1, p_2와 q_1, q_2로 나눠, 대각선에 의해 나뉘어진 네 삼각형 각각에 삼각형의 넓이 공식을 적용해 그 합을 인수분해하면 $\frac{1}{2}(p_1+p_2)(q_1+q_2)\sin\theta$가 됩니다. 칠판에 그림을 그리면서 수식으로 증명해 보겠습니다.

교수 : 아, 학생 됐습니다. 잘 이해하고 있는 것 같네요. 원래 문제로 돌아가서, 타원에 그은 기울기 m인 두 접선 사이의 거리를 m으로 표현해 보세요.

학생 : 예. 그건 어렵지 않습니다. 기울기 m인 타원의 접선의 방정식이 $y=mx\pm\sqrt{5m^2+4}$이므로 두 직선 사이의 거리는 $2\sqrt{5m^2+4}$입니다.

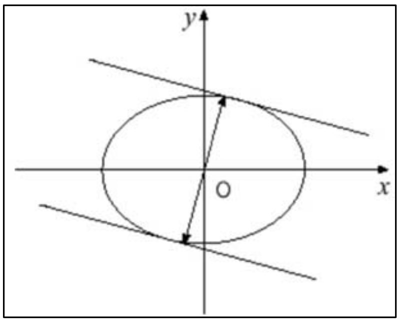
교수 : 학생, 너무 서두르는 것 같은데...

학생 : 아, 네. 잘못됐습니다. 그건 y절편의 차이이므로 두 직선 사이의 기울기가 m인 것을 고려하면 $\dfrac{2\sqrt{5m^2+4}}{\sqrt{1+m^2}}$입니다. 감사합니다.

교수 : 그래 잘 했어요. 그럼 원래 문제는 그 사실을 이용하면 나올 것 같은데…. 학생! 수고했어요.

■ 감상포인트

타원 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$에 그은 기울기 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{5m^2+4}$이고 이 두 접선 사이의 거리는 원점으로부터 두 직선까지의 거리의 합이므로 $\dfrac{2\sqrt{5m^2+4}}{\sqrt{m^2+1}}$이다.



따라서, 외접하는 직사각형의 가로, 세로의 길이가 위에서 구한 두 접선 사이의 거리이므로, $t=\dfrac{1}{m^2+1}$이라 두면 $0<t<1$이고 또한 직사각형의 넓이는

$$\frac{4\sqrt{(5m^2+4)(5+4m^2)}}{1+m^2}=4\sqrt{(5-t)(4+t)}=4\sqrt{-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{81}{4}}\leqq 18$$

결국, 구하는 직사각형의 넓이의 최대값은 18이다.

[문제1]

1) $|a|=|b|$를 만족하는 점 $(a,\ b)$에서 쌍곡선 $y^2-x^2=1$에 몇 개의 접선을 그을 수 있는가? (주의 : 쌍곡선은 두 부분으로 구성돼 있다.)

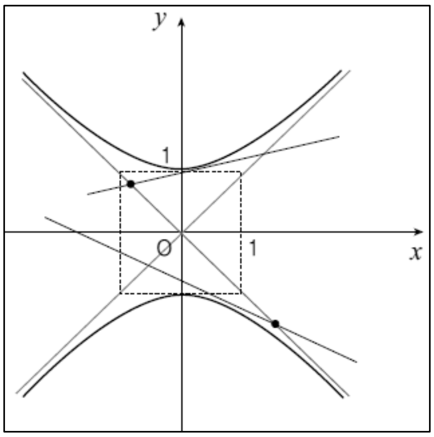
2) 평면 위의 한 점에서 쌍곡선 $y^2-x^2=1$에 접선을 그을 때, 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있는 점 $(a,\ b)$을 구하시오.

3) 2번 문제에서 구한 집합에 속하는 점 중에서 쌍곡선에 그은 접선의 기울기의 곱이 상수 k가 되는 점의 자취를 k에 따라 구하고, $k=\dfrac{1}{2}$, $k=-\dfrac{1}{2}$일 때의 자취를 각각 좌표평면에 도시하시오.(2004년 서울대 정시)

▶ 예시답안

많은 학생들이 상당히 당황했던 것으로 기억한다. 쌍곡선을 포물선처럼 생각해 항상 2개, 3개 또는 4개가 가능할 것으로 알고 있었는데, 실제로는 점근선과의 관계 때문에 없거나 한 개 또는 두 개만 가능하기 때문이다. 이 문제는 점근선을 정확히 이해하고 있는 지를 묻는 문제다.

쌍곡선은 점근선 때문에 포물선과는 전혀 다른 성질을 가지는 곡선이다.



1) 점 (a, b)(|a|=|b|)에서 그은 기울기 m인 접선의 방정식은 y=m(x−a)+b이 된다. 이때, 쌍곡선의 방정식과 접해야 하므로 연립해 풀면 $2-x^2=1$

$(m^2-1)x^2-2m(ma-b)x+(ma-b)x+(ma-b)^2-1=0\cdots$ ㉠

$m^2-1\neq 0$이고,

$\dfrac{D}{4}=m^2(ma-b)^2-(m^2-l)\{(ma-b)^2-1\}=0$ ··············· ㉡

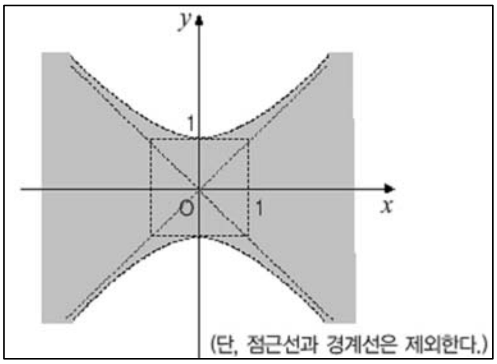
$(1+a^2)m^2-2abm+b^2-1=0$ ·· ㉢

위의 방정식 ㉢을 $g(m)$이라 두면

$\dfrac{D}{4}=(ab)^2-(1+a^2)(b^2-1)=1>0$이지만,

$g(1)g(-1)=(a-b)^2(a+b)^2=(a^2-b^2)^2=0$이 돼 $m=1$ 또는 $m=-1$이 ㉡식을 만족한다. 그런데 방정식 ㉡이 중근을 가지기 위해서는 $m^2\neq 1$이므로 $m=\pm 1$은 무연근이고, 결국 방정식 ㉡은 하나의 실근을 가진다. 여기서, $m=\pm 1$이 모두 근이 되는 경우는 $ab=0$이고, 이때 의미있는 해가 없게 된다. 따라서, 구하는 접선의 개수는 $|a|=|b|=0$이면 0개, $|a|=|b|\neq 0$이면 1개이다.

2) 1)번에서 구한 ㉡을 생각하면, $m^2\neq 1$이고 즉, ㉢식에서 $|a|\neq|b|$이면서 동시에 다음 판별식을 만족하면 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있다.



(단, 점근선과 경계선은 제외한다.)

$\dfrac{D}{4}=(ab)^2-(1+a^2)(b^2-1)=1+a^2-b^2>0$

따라서, 서로 다른 두 개의 접선을 드을 수 있는 점 $(a,\ b)$들의 집합은

$\{(a,\ b)\,|\,b^2-a^2<1,\ |a|\neq|b|\}$

3) 1번의 ㉢식에서 근과 계수와의 관계로부터

$\dfrac{b^2-1}{1+a^2}=k;b^2-ka^2=1+k$ ··············· ㉣

ⅰ) $k<-1$이면 ㉣에서 기울기의 곱이 k가 되는 점 $(a,\ b)$는 존재하지 않는다.

ⅱ) $k=-1$인 경우는 원점 $(a,\ b)=(0,\ 0)$뿐인데, 원점에서 접선을 그을 수 없으므로 $k=-1$이 되는 점 $(a,\ b)$는 존재하지 않는다.

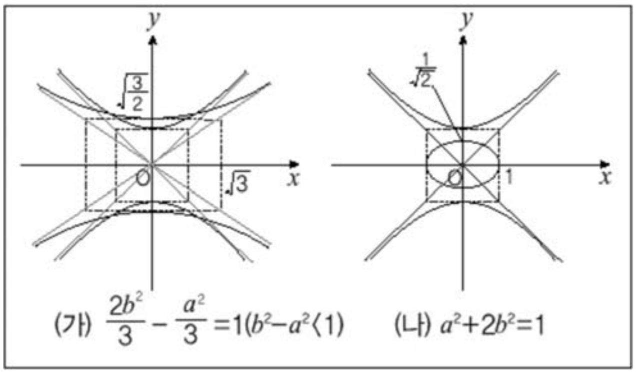
ⅲ) $-1<k<0$인 경우는 타원 $b^2-ka^2=1+k(|a|=|b|)$ 위에 있는 점 $(a,\ b)$들이다.

ⅳ) $k=0$이면 직선 $b=\pm 1(a\neq 0,\ a\neq\pm 1)$ 위에 있는 점 $(a,\ b)$들이다.

ⅴ) $0<k<1$이면 쌍곡선 $b^2-ka^2=1+k(b^2-a^2<1)$ 위에 있는 점 $(a,\ b)$들이다.

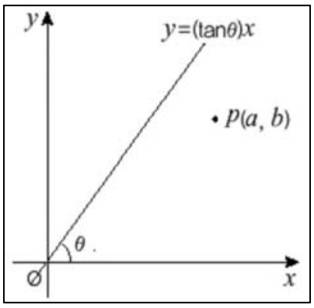
ⅵ) $k\geq 1$이면 ㉣로부터 $b^2-a^2=(k-1)a^2+1+k>1$이 되어 $b^2-a^2<1$인 점이 존재하지 않

는다. 즉, 두 접선을 가지는 점 $(a,\ b)$가 존재하지 않으므로 기울기의 곱이 $k(k \geq 1)$이 되는 점 $(a,\ b)$는 존재하지 않는다.



한편, $k=\frac{1}{2}$인 경우 쌍곡선 $\frac{2b^2}{3}-\frac{a^2}{3}=1\ (b^2-a^2<1,\ |a| \neq |b|)$의 그래프와 $k=-\frac{1}{2}$인 경우 차원 $a^2+2b^2=1(|a| \neq |b|)$의 그래프는 우측 그림과 같다.

[문제2] 좌표평면에서 점 $P(a,\ b)$와 직선 $y=(\tan\theta)x$가 있다.



1) 점 (1, 0)과 점 (0, 1)을 $y=(\tan\theta)x$에 대해 대칭이동한 점의 좌표를 각각 구하시오.

2) 좌표평면에서 임의의 점 $P(a,\ b)$를 직선 $y=(\tan\theta)x$에 대해 대칭이동시킨 점의 좌표를 구하시오.

3) 좌표평면에서 고정된 점 $P(a,\ b)$와 직선 $y=(\tan\theta)x$에 대칭점을 Q라고 하고, 선분 PQ와 직선 $y=(\tan\theta)x$의 교점을 R이라고 한다. 각 θ가 $-\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{2}$까지 변할 때 움직이는 점 Q의 자취로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_Q라고 하고, 움직이는 점 R의 자취로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_R이라고 한다. 이때 S_Q와 S_R의 비율을 구하시오.

▶ 예시답안

이 문제 역시 앞서 지적한 것처럼 그래프를 통한 충분한 이해가 필요한 문제이다. 계산에만 치중하다 보면 전체 그림이 잘 보이지 않는 수가 있다. 그래픽화 한다면 평면적이지 않아서 단조롭지 않고 뭔가 있어 보일뿐더러 수학이 재미있게 느껴진다.

기울기를 결정하는 θ값을 움직이면서 전체를 예측해 보면, 점 P와 점 $P'(-a,\ -b)$를 이은 선분을 지름으로 하는 원의 넓이가 S_Q이고, 점 P와 원점 O를 이은 선분을 지름으로 하는 원의 넓이가 S_R임을 짐작할 수 있다.

1) 점 $A(1,0)$의 직선 $y=(\tan\theta)x$에 대한 대칭점을 $A'(a,\ b)$라 두면, 수직선과 중점의 좌표를 이용해서 풀 수 있다.

$$\frac{b-0}{a-1}=-\cot\theta,\ \frac{b}{2}=\tan\theta\times\frac{1+a}{2}$$

$\therefore\ a=\cos2\theta,\ b=\sin2\theta\ ;\ A'(\cos2\theta,\ \sin2\theta)$

마찬가지 방법으로, 점 $B(0,\ 1)$의 대칭이동한 점 $B'(\sin2\theta,\ -\cos2\theta)$을 구할 수 있다.

2) 점 $P(a,\ b)$와 직선 $y=(\tan\theta)x$에 대한 대칭점을 $Q(p,\ q)$라 두고서 직선의 기울기와 중점을 활용해 풀면 1)과 유사한 방법으로 $Q(a\cos2\theta+b\sin2\theta, a\sin2\theta-b\cos2\theta)$를 얻는다. 실제로 벡터의 합 $(a,\ b)=a(1,\ 0)+b(0,\ 1)$에서(1)번 결과를 이용할 수도 있다.

3) 점 $P(a,\ b)$가 원점이면 $S_Q=S_R=0$이 되므로 점 P는 원점이 아니라고 가정하자. 이때, 점

Q의 자취의 방정식을 구하기 위해

$x=a\cos2\theta+b\sin2\theta,\ y=a\sin2\theta-b\cos2\theta$라 두면

$$x^2+y^2=a^2+b^2,\ 즉\ S_Q=\pi(a^2+b^2)$$

(실제로, $x=\sqrt{a^2+b^2}\,sin(2\theta+\alpha),\ y=\sqrt{a^2+b^2}\,sin(2\theta-\beta)$가 돼 원 전체를 움직임을 알 수 있다.

한편, 점 R은 선분 PQ의 중점이므로

$$R'(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos2\theta+\frac{b}{2}\sin2\theta,\ \frac{b}{2}+\frac{b}{2}\sin2\theta+\frac{b}{2}\cos2\theta),$$

$$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos2\theta+\frac{b}{2}\sin2\theta,\ y=\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\sin2\theta+\frac{b}{2}\cos2\theta$$

라 두면 점 R의 자취의 방정식은

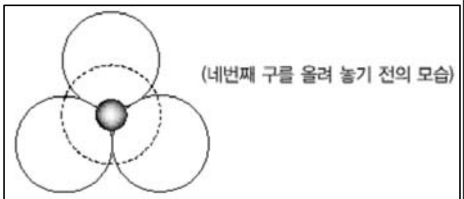
$$\therefore\ \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}$$

(마찬가지로, 원 전체를 움직인다.)

$$S_R=\pi\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)=\frac{\pi}{4}(a^2+b^2)$$

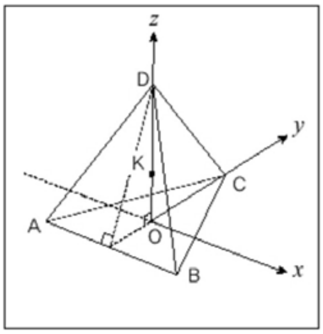
결국, 구하는 비는 $S_Q:S_R=4:1$이다.

[문제3] 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 4개의 동일한 구가 서로 접하면서 밑바닥에 3개, 그 위에 1개가 올려져 있다. 만일 이 4개의 구들 사이에 반지름 r인 작은 구를 원래 모양의 변화없이 모든 구와 접하게 위치시킬 수 있다면 반지름 r은 얼마인가?(2002년 중앙대)



▶ 예시답안

반지름이 1인 네 구의 중심을 모두 연결하면 한 변의 길이가 2인 정사면체를 얻는다. 작은 구가 네 개의 구에 의해 공중에 떠받혀져 있고, 정사면체의 무게중심에 놓여 있다.



밑면의 무게중심을 원점으로, 점 C를 지나는 y축과 그와 수직인 x축을 잡고, 밑면에 수직한 z축을 가지는 직교좌표계를 생각하면 각 꼭지점의 좌표는

$$A(-1,\ -\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0),\ B(1,\ -\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0),\ C(0,\ \frac{2\sqrt{3}}{3},\ 0),\ D(0,\ 0,\ \frac{2\sqrt{6}}{3})$$

이다.

이때, 반지름이 r인 작은 원의 중심 $K(0,\ 0,\ t)$에서 정사면체의 각 꼭지점에 이르는 거리가 반지름의 길이의 합 $1+r$과 같으므로 $\overline{DK}=\overline{CK}=1+r$을 이용하면

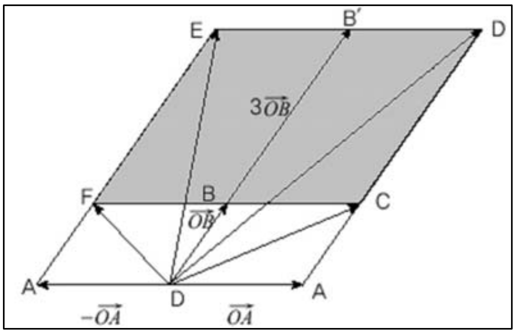
$$\frac{2\sqrt{6}}{3}-t=\sqrt{0+(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2+t^2}=r+1$$

$\therefore\ t=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

결국, 구하는 작은 원의 반지름의 길이는 $r=\dfrac{\sqrt{6}}{2}-1$이다.

[문제4] ξEABC에 대해 점 P는 $3\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=k\overrightarrow{BC}$를 만족한다. 이때 점 P가 △ABC의 내부에 있도록 실수 k의 범위를 정하시오.

▶ 예시답안



주어진 식을 점 B를 시작점으로 하고 벡터식으로 고치면

$3(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BP})-2\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BP}=\dfrac{3\overrightarrow{BA}+(1-k)\overrightarrow{BC}}{6}$

$1-k>0,\ 0<\dfrac{3+(1-k)}{6}<1$

$\therefore\ -2<k<1$

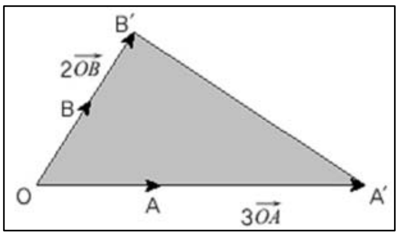
▶ Tip

벡터방정식에서 해석을 필요로 하는 경우에 자주 이용되는 것이 내분점 공식이므로 잘 정리해 둘 필요성이 있다. 다음 각각의 경우에 대하여 $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$로 정의되는 점 P의 자취의 영역을 알아보자.

1) $-1\le s\le 1,\ 1\le t\le 3$인 경우 :

두 벡터 $s\overrightarrow{OA}$와 $t\overrightarrow{OB}$를 평행사변형법에 의하여 s와 t를 움직이면서 두 벡터의 합을 구해보면, 결국 점 P의 자취의 영역은 벡터 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$의 끝점 C, $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$의 끝점 D, $-\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$의 끝점 E, 그리고 $-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$의 끝점 F를 차례로 이어 만들어지는 평행사변형의 둘레 및 내부임을 확인할 수 있다.

2) $t\ge 0,\ s\ge 0,\ 2s+3t\le 6$인 경우 : 주어진 식을 변형하면



$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\dfrac{s}{3}(3\overrightarrow{OA})+\dfrac{t}{2}(2\overrightarrow{OB})$

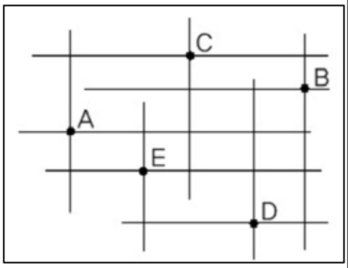
$(t\ge 0,\ s\ge 0,\ \dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{2}\le 1)$

따라서, 점 P가 움직이는 영역은 전 O와 벡터 $3\overrightarrow{OA}$의 끝점, 그리고 $2\overrightarrow{OB}$의 끝점을 연결해 만들어지는 삼각형의 둘레 및 내부임을 알 수 있다.

2005년 02월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

이번 호에서도 구술면접에 자주 출제되는 몇 가지 유형과 기본개념을 정리했다. 또 심층면접에 대비해 출제 빈도가 높거나 기본 개념의 이해 정도를 측정하는 문제를 중심으로 구성했다. 특히 확률과 집합, 공간도형, 벡터의 기본 개념을 정확히 이해하고 풀이의 실마리를 찾는 방법을 중점적으로 살펴볼 예정이다. 교과서에서 볼 수는 없지만 구술시험에서 단골로 출제되는 문제에 대해서도 언급했다. 답을 먼저 보지 말고 전문가 클리닉에서 제시한 풀이방법과 힌트를 활용해 문제를 해결하기 바란다. 이번 기회에 몇 가지 주요 개념을 완벽하게 정리해두자.

[문제1] 다음 그림처럼 A, B, C, D, E라고 이름 붙인 다섯 지점에 먹이를 한 개씩 놓아두고 생쥐로봇이 먹이를 물어 출발점으로 가져오게 하는 시합을 벌였다. 어떤 지점에서 출발한 생쥐로봇이 다섯 개의 먹이를 가장 빨리 가져올 수 있을까. 단, 생쥐로봇은 길(그림의 실선)을 따라 움직이고 한 번에 먹이 한 개만 물어올 수 있다.



▶ 전문가클리닉

문제해결의 실마리를 찾는 것이 중요하다. 절대값 함수와 그 최대·최소를 구하는 방법을 이해한다면 쉽게 풀 수 있다.

▶ 예시답안

가로로 가는 경로를 x축, 세로로 움직이는 경로를 y축으로 하는 좌표평면을 생각하자, $A(a_1,\ a_2)$, $B(b_1,\ b_2)$, $C(c_1,\ c_2)$, $D(d_1,\ d_2)$, $E(e_1,\ e_2)$로 각 점의 좌표를 잡고 출발점을 $p(x,\ y)$라 하면, 움직인 거리는

(움직인 거리)$=2(|x-a_1|+|x-a_2|+|x-b_1|+|x-b_2|+|x-c_1|+|x-c_2|+|x-d_1|+|x-d_2|+|x-e_1|+|x-e_2|)$

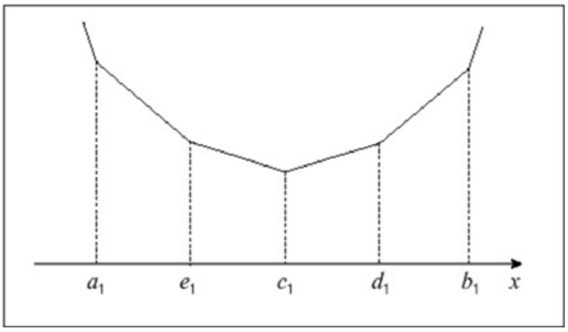
$f(x)=|x-a_1|+|x-b_1|+|x-c_1|+|x-d_1|+|x-e_1|$

$g(y)=|x-a_2|+|x-b_2|+|x-c_2|+|x-d_2|+|x-e_2|$로 놓으면

(움직인 거리)$=2\{f(x)+g(y)\}$가 된다.

따라서, $f(x)$, $g(y)$가 최소가 되는 경우를 찾으면 된다.

$a_1 < e_1 < c_1 < d_1 < b_1$이므로 오른쪽 그림에서 $f(x)$는 $x=c_1$에서 최소값을 갖는다.



같은 방식으로 $g(y)$는 $y=a_2$에서 최소값이 된다.

$\therefore (c_1,\ a_2)$ $(\because d_2 < e_2 < a_2 < b_2 < c_2)$

따라서 A에서 가로로 뻗은 길과 C에서 세로로 내려온 길이 만나는 교점에서 출발해야 가장 먼저 먹이를 가져올 수 있다.

[문제2] 집합 X의 부분집합들로 이뤄진 집합을 P(X)라고 하자. 임의의 집합 A∈P(X), B∈P(X) 라 하고 연산 A⊙B=(A−B)∪(B−A)로 정의할 때, 이 연산 ⊙의 항등원을 구하라.

▶ 전문가클리닉

이항연산에 관한 몇 가지 개념과 응용 방법을 정확하게 숙지하고 있는지 묻고 있다. 집합의 연산에 관한 문제로 이항연산을 어떻게 응용하는지 음미해보자.

▶ 예시답안

집합 $X=\{a,\ b\}$라고 가정한다면 $P(X)=\{\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a,\ b\}\}$, $A=\{a\}$, $B=\{a,\ b\}$라고 한다면 $A\odot B=\varnothing\cup\{b\}=\{b\}$로 나타낼 수 있다.

연산 ⊙의 항등원을 E라 하면 $A\odot E=A$, $B\odot E=B$를 만족하므로

i) $\{a\}\odot E=[\{a\}-E]\cup[E-\{a\}]=\{a\}$ $\quad\therefore\ E=\varnothing$

ii) $\{a,\ b\}\odot E=[\{a,\ b\}-E]\cup[E-\{a,\ b\}]=\{a,\ b\}$ $\quad\therefore\ E=\varnothing$

따라서 i), ii)에서 $E=\varnothing$

[문제3] 서로 경쟁관계에 있는 회사A와 회사B가 있다. 각자 '갑'지역과 '을'지역 중 어느 한 군데에서 매일 꼭 한 번씩 제품을 출하한다. 회사A가 '갑'지역에 제품을 출하할 확률을 x, 회사 B가 같은 '갑'지역에 제품을 출하할 확률을 y라 한다. 한 컨설팅 업체의 조사에 따르면 회사 A와 B가 각각 하루에 얻는 이익은 아래표와 같다.

회사 A의 하루 이익

	B(갑에 출하)	B(을에 출하)
A(갑에 출하)	3	4
A(을에 출하)	5	2

회사 B의 하루 이익

	B(갑에 출하)	B(을에 출하)
A(갑에 출하)	1	4
A(을에 출하)	3	2

회사A의 하루 이익의 기대값을 p, 회사B의 기대값을 q라 할 때, 다음 물음에 답하라.

1) 회사A와 회사B가 독자적으로 출하지역을 결정할 때 p, q를 각기 x, y로 나타내라.

2) 컨설팅 회사의 조사에 따르면 x=y라고 한다. 컨설팅회사가 p+q가 최대가 되도록 회사A에 x값을 제공할 때 x값을 구하라. 또한 그때 p+q값을 구하라(단 회사 A와 B는 서로 독자적으로 출하를 결정한다).

3) 회사A와 B가 서로 담합해 p+q값을 최대로 하려면 x와 y의 값을 각각 어떻게 매기면 좋을까. 그 때 p+q 값을 구하라.

4) 회사A와 B는 각기 서로 독자적으로 의사를 결정한다. 일정 기간 동안 회사B가 회사A에게 가장 불리하도록 y를 결정해도, 회사A가 자사의 기대값 p를 최대가 되도록 할 때 x와 p값을 구하라.

▶ 전문가클리닉

복잡한 문제처럼 보이지만 아주 어려운 테크닉이 필요한 것은 아니다. 하지만 학교 수업에서

이런 유형의 문제는 쉽게 보기 힘들다. 구술 면접에 대비하려면 이런 문제에 익숙해져야 한다. 상황을 어떻게 논리정연하게 정리해서 풀어나가는지 잘 살펴보자.

▶ 예시답안

	B(갑에 출하)	B(을에 출하)
A(갑에 출하)	xy	$x(1-y)$
A(을에 출하)	$(1-x)y$	$(1-x)(1-y)$

1) 표를 만들어 기대값을 구해보면 다음과 같다.

$$p=3xy+4x(1-y)+5(1-x)y+2(1-x)(1-y)$$
$$=-4xy+2x+3y+2$$
$$q=xy+4x(1-y)+3(1-x)y+2(1-x)(1-y)$$
$$=-4xy+2x+y+2$$

2) $p+q=-8xy+4x+4y+4$

$x=y$일 때

$$p+q=-8x^2+8x+4=-8(x-\frac{1}{2})^2+6$$

즉 $x=\frac{1}{2}$일 때, $p+q$는 최대값 6을 갖는다.

3) $p+q=-2(2x-1)(2y-1)+6$

이때 x, y는 확률이므로

$0\le x\le 1 \quad 0\le y\le 1$이고 $-1\le 2x-1\le 1$

$-1\le 2y-1\le 1$

$-1\le (2x-1)(2y-1)\le 1$

$\therefore\ 4\le p+q\le 8$

따라서 $p+q$는 $(2x-1,\ 2y-1)=(1,-1)$

$(x,\ y)=(1,\ 0)$ 또는 $(0,\ 1)$일 때 최대값 8을 갖는다.

4) $p=(3-4x)y+2x+2$

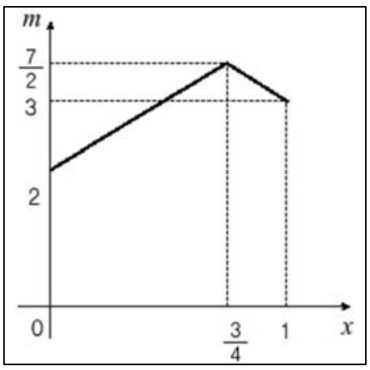
x를 바꿔서 y값을 바꿀 때 p의 최소값을 m이라고 하면

$0\le x\le \frac{3}{4}$에서 $y=0$일 때 p는 최소.

즉, $m=2x+2$

$\frac{3}{4}\le x\le 1$이고 $y=1$일 때 p는 최소.

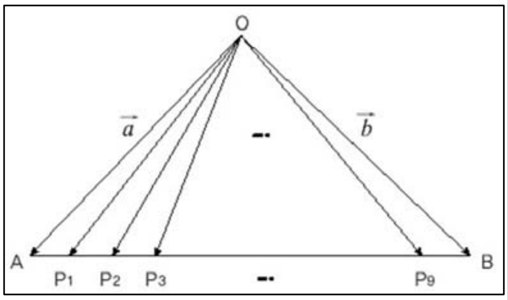
즉, $m=5-2x$



x와 m의 관계를 그래프로 그리면 우측 그림과 같고, 이때 $x=\frac{3}{4}$이고 $p=\frac{2}{9}$이다.

[문제4] 삼각형 OAB의 변 AB를 10등분한 점을 P_1, P_2, P_3,, P_9라 하고 OA=a, OB=b라 하자.

$\sum$OPk=ma+nb일 때, 두 실수 m, n의 합 m+n의 값은?



▶ 전문가클리닉

벡터는 수학에서 가장 중요한 영역을 차지한다. 잘 이해하고 능숙하게 푸는 감각을 익혀야 한다. 이 문제는 간단하지만 교훈적이다. 무엇이 교훈적인지 혼자 힘으로 한 번 음미해보자.

▶ 예시답안

$\overrightarrow{OP_1}=\dfrac{9\vec{a}+\vec{b}}{10}$, $\overrightarrow{OP_2}=\dfrac{8\vec{a}+2\vec{b}}{10}$, $\overrightarrow{OP_3}=\dfrac{7\vec{a}+3\vec{b}}{10}$, …

$\overrightarrow{OP_k}=\dfrac{(10-k)\vec{a}+k\vec{b}}{10}\,(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$

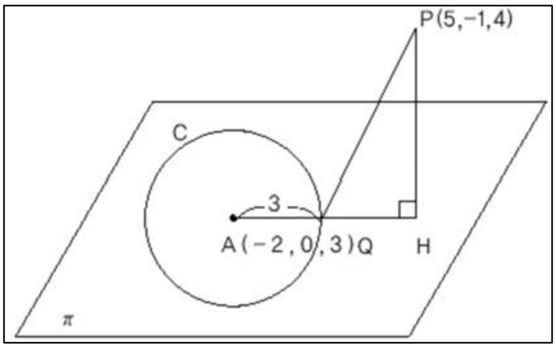
$$\sum_{k=1}^{9}\overrightarrow{OP_k}=\frac{1}{10}\left\{\sum_{k=1}^{9}(10-k)\vec{a}+\sum_{k=1}^{9}k\vec{b}\right\}$$

$$=\frac{1}{10}(45\vec{a}+45\vec{b})$$

$$=\frac{9}{2}\vec{a}+\frac{9}{2}\vec{b}$$

$$\therefore m+n=\frac{9}{2}+\frac{9}{2}=9$$

[문제5] 평면 π : 3x−y+4z=6위에 점A(−2, 0, 3)을 중심으로 반지름의 길이가 3인 원 C가 있다. 점P(5,−1, 4)에서 원C까지의 최단거리를 구하시오.



▶ 전문가클리닉

공간도형에서 최단 거리를 구하는 문제는 단골로 출제된다. 따라서 풀이방법도 각양각색이다. 이 문제를 통해 기본적인 개념을 정리하기 바란다.

▶ 예시답안

점 $P(5,\ -1,\ 4)$에서 평면 π에 내린 수선의 발을 $H(a,\ b,\ c)$라 하자.

$\overrightarrow{PH}=(a-5,\ b+1,\ c-4)$

또, 평면 π의 법선 벡터를 $\vec{n}$이라고 하면 $\vec{n}=(3,\ -1,\ 4)$

이때 $\overrightarrow{PH}/\!/\vec{n}$이므로

$\frac{q-5}{3}=\frac{b+1}{-1}=\frac{c-4}{4}=t$

$\therefore a=3t+5,\ b=-t-1,\ c=4t+4$

평면 π의 방정식에 대입하면

$$3(3t+5)-(-t-1)+4(4t+4)=6$$

$\therefore\ t=-1$ $\qquad\qquad\qquad \therefore\ H(2,\ 0,\ 0)$

선분 $\overline{AH}$와 원 C와의 교점을 Q라 하면 선분 $\overline{PQ}$의 길이가 구하고자 하는 최소값이다.

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PH}^2+\overline{QH}^2}=\sqrt{26+4}=\sqrt{30}$

[문제6] 자연수 $n=p_1^{e1}\ p_2^{e2}....\ p_t^{et}$에 관해 다음을 구하여라(단 pi는 각각 서로 다른 소수이고 ei는 자연수다).

1) n을 두 자연수의 곱으로 표시하는 경우의 수

2) n을 서로소인 두 자연수의 곱으로 표시하는 경우의 수(단 순서만 바꿔서 곱한 것은 같은 방법으로 간주한다,)

▶ 전문가클리닉

여러번 출제된 적이 있는 문제로 정수론에서 중요한 풀이방법과 개념을 제공한다. 몇번의 시행착오를 거치면서 이해해보기를 바란다. 먼저 풀이를 보지 말고 스스로 답을 구하기 바란다.

▶ 예시답안

1) n의 양의 약수의 개수는 $(e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_i+1)$이다.

따라서 $n=ab(a\neq b)$라면 a의 경우의 수는 n의 약수의 경우의 수와 같다.

따라서 n을 서로 다른 두 자연수의 곱으로 나타내는 경우의 수는 양의 약수의 개수의 반인 $\frac{(e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_i+1)}{2}$이다. 단 완전제곱수인 경우에는 $\frac{(e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_i+1)+1}{2}$이다. 따라서 구하려는 경우의 수는 $\left[\frac{(e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_i+1)+1}{2}\right]$이다.

2) $n=p_1^{e1}p_2^{e2}\cdots p_i^{ei}$에서 서로소인 두 수의 곱은 p_1의 경우의 수인 2가지, p_2의 경우의 수 2가지, …, p_i의 경우의 수 2가지이다. 그런데 순서와는 상관없이 2로 나눠야 한다. 따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $\frac{2^i}{2}=2^{i-1}$이다.

2005년 03월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

이번 호에는 증명에서 기본 토대가 되는 문제들과 실생활에 실제 응용할 수 있는 문제를 주로 다뤄 봤습니다. 상큼한 봄의 이미지처럼 조금은 즐기면서 풀어볼 수 있는 문제들로 선정했습니다. 결코 가볍지 않는 중요한 주제이므로 잘 정리해 두기를 바랍니다.

[문제1] 어느 고등학교 수학시험에서 30문제가 출제됐으며 채점 기준은 다음과 같다고 한다. 누구나 다 받는 기본 점수는 15점, 문제 하나를 맞추면 5점, 문제 하나를 답하지 않으면 1점, 문제 하나를 틀리면-1점을 준다. 만일 2005명이 시험에 응시했다면 이들 학생들이 받은 총점은 홀수일까 아니면 짝수일까?

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 일반적인 수학 문제와 약간 다른 형식을 보인다. 보통은 식을 세우고 기술적으로 풀어 해를 구하는 과정을 통해 결론을 예측하고 증명한다. 하지만 수학에서 대부분의 경우 이 문제처럼 복잡한 수식을 이용하지 않고도 간단하게 어떤 결론을 도출할 수가 있다. 간단하긴 하지만 증명하는 형식을 이해하지 못하면 매끄럽게 논리를 전개하기 어렵다. 홀짝수의 성질을 잘 고민해보고 정리하기 바란다.

▶ 예시답안

수학시험에 응시한 한 학생이 모든 문제를 다 맞췄다면 165점, 즉 홀수 점수를 얻을 것이다. 만일 문제 하나를 틀렸다면 165점에서 5+1=6점을 빼야 하므로 몇 문제를 틀리게 답하였는지에 상관없이 165점에서 항상 6의 배수를 뺀다. 따라서 정답 외에 틀린 답만을 했다면 홀수를 얻는다. 또 만일 문제 하나를 답하지 않았다면 5-1=4점을 빼야 하므로 몇 문제를 답하지 않았는가에 상관없이 항상 165점에서 4의 배수를 빼게 된다. 대답하지 않는 경우에도 여전히 홀수를 얻는 것이다. 종합해 보면 시험에 응한 개별 학생의 점수는 결국 어떻게 답했는가와 관계없이 홀수임을 알 수 있다. 따라서 시험을 친 전체 학생은 2005명(홀수)이고, (홀수)×(홀수)=(홀수)이므로 전체 총점은 항상 홀수다.

[문제2] 29개의 탁구팀이 리그전을 벌이게 된다. 모든 팀이 모두 홀수 번 시합을 할 수 있게 경기일정을 짤 수 있을까. 만일 할 수 있다면 왜 그런지 이유를 밝혀라.

▶ 전문가 클리닉

이번 문제도 1번 문제와 유사한 형식을 가진다. 1번 문제를 통해 충분히 이런 형식을 이해했다면 답을 보지 말고 꼭 혼자 힘으로 증명해보길 바란다. 수학의 참맛을 느낄 수 있을 것이다.

▶ 예시답안

문제에서의 요구대로 시합을 짤 수 없다. 만일 전체 경기 횟수를 n이라고 하면 모든 경기가 두 팀 사이에서 벌어지므로 리그에 참가한 모든 팀의 경기 횟수는 2n이 된다. 그런데 모든 팀이 홀수 번만 시합해야 하기 때문에 29개 홀수의 합은 홀수가 된다. 이는 시합한 팀의 경기 횟수

가 홀수여야 함을 뜻한다. 하지만 홀수가 짝수 2n과 같지 않기 때문에 모순이다.

▶ Tip

정수 가운데 2로 나눠 떨어지는 수를 짝수, 2로 나눠 떨어지지 않는 수를 홀수라 한다. 따라서 정수는 2로 나눠 떨어지느냐에 따라 홀수와 짝수, 두 가지 유형으로 나뉜다. 짝수는 보통 2k(k는 정수)로 표시하지만 $2k+2$, $2k$, $2k-2$로도 표시할 수 있다. 한편 홀수는 $2k+1$ 또는 $2k-1$ (k는 정수)로 표시하며 $2k-3$, $2k-5$ 등으로 표시할 수도 있다. 연산 과정에서 홀수와 짝수의 성질을 요약하면 다음과 같다.

1. 홀수±홀수=짝수
2. 짝수±짝수=짝수
3. 홀수±짝수=홀수
4. 홀수×홀수=홀수
5. 짝수×짝수=짝수
6. 홀수×짝수=짝수
7. 임의의 정수 m과 홀수 a의 대수의 합 $m \pm a$의 홀짝성은 m과 반대이고, 임의의 정수 m과 짝수 b의 대수적인 합 $m+b$의 홀짝성은 m과 같다.
8. 임의의 정수 m과 홀수 a의 곱 am의 홀짝성 m과 같고, 임의의 정수 m과 짝수 b의 곱 bm은 항상 짝수다.

[문제3] 0과 자연수 전체 집합을 X라 한다. 함수 f : X→X는 임의의 n∈X에 대해 다음을 만족한다.

$$f(n)=f\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)+\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$$

이때 $f(1998)-f(1)$의 값을 구하라.([x]는 x보다 크지 않은 최대 정수다.)

▶ 전문가 클리닉

앞 문제와 이어지는 홀짝 성질에 관한 문제다. 가우스 함수로 표현되는 여러가지 수식을 자유자재로 다룰 수 있는 연습을 하다 보면 가우스 함수가 가진 홀짝 성질을 자연스럽게 이해할 수 있다. 가우스 함수에 대해 잘 모르면 교과서나 참고서를 통해서 충분히 익힌 다음 이 문제를 풀어 보기 바란다.

▶ 예시답안

① $n=2m$(짝수)일 때, $[\frac{n}{2}]=[m]=m$

$$\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}=\frac{1-1}{2}=0,\ \text{따라서}\ f(n)=f(2m)=f(m)+0=f(m)$$

② $n=2m+1$(홀수)일 때, $[\frac{n}{2}]=[\frac{2m+1}{2}]=[m+\frac{n}{2}]=m$

$$\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}=\frac{1+1}{2}=1,\ \text{따라서}\ f(n)=f(2m+1)=f(m)+1$$

①, ②에서 $f(1988)-f(1)$을 계산할 수 있다.

즉 $f(1998)=f(999)=f(499)+1=f(249)+1+1$

$=f(124)+1+2=f(62)+3=f(31)+3$

$=f(15)+1+3=f(7)+1+4=f(3)+1+5$

$=f(1)+1+6=f(1)+7$

$\therefore\ f(1998)-f(1)=f(1)+7-f(1)=7$

[문제4] 방정식 $xy+yz+zx=xyz$의 양의 정수해를 구하라.

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 부정방정식의 기술을 익힐 수 있는 표준 문제다. 풀이 과정에서 대칭의 의미를 이해하기 바란다. 대칭성이 있는 경우 그것을 수학적으로 표현하는 방법을 익혀둔다면 좀 더 수준 높은 수학 실력을 갖게 될 것이다.

▶ 예시답안

주어진 방정식의 양변을 x, y, z로 나누면 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$

여기에서 x, y, z는 모두 1보다 커야 하며, 이 가운데 적어도 하나는 4보다 작다.

그렇지 않고 모두 4보다 크거나 같으면

$\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{y}\le\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{z}\le\dfrac{1}{4}\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\le\dfrac{3}{4}=1$

이 되어 방정식을 만족시키지 못한다.

x, y, z의 차수가 같으므로 먼저 $x\leqq y\leqq z$라고 가정하자.

이들은 모두 1보다 크며 그 중 적어도 하나는 4보다 작으므로 $1<x<4$다.

$x=2$이면 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1,\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$(y-2)(z-2)=4(1\times4$ 또는 $2\times2)$ 양변의 인수를 비교하되 $y<z$임을 고려하면

$\begin{cases}y-2=1\\z-2=4\end{cases},\ \begin{cases}y-2=2\\z-2=2\end{cases}$ 즉, $\begin{cases}y-2=2\\z-2=2\end{cases},\ \begin{cases}y-2=2\\z-2=2\end{cases}$

$x=3$이면 $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$

$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ $\qquad (2y-3)(2z-3)=9(3\times3)$

위와 같은 이유에서 $\begin{cases}y=3\\z=3\end{cases}$

그러므로 $x<y<z$를 만족시키는 해는(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)

대칭성에 의해 x, y, z는 서로 다르므로 다음과 같은 해를 더 가진다.

$x\le z\le y$일 때(2, 6, 3)

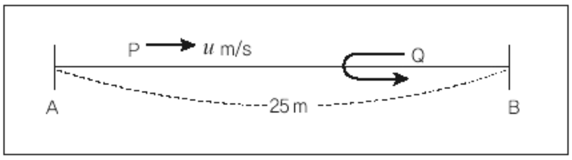
$y\le x\le z$일 때(3, 2, 6), (4, 2, 4)

y≤z≤x일 때(6, 2, 3)

z≤y≤x일 때(6, 3, 2), (4, 4, 2)

z≤x≤y일 때(3, 6, 2) 따라서, 해는 모두 10쌍이다.

[문제5] 길이가 25m인 선분 AB가 있고 그 위에 점 P와 Q가 있다. 점 P는 점 A를 출발하여 점 B를 향해서 u m/초의 등속도 운동을 하며 점 Q는 같은 시각에 점 B를 출발한 뒤 $v=\frac{3}{4}t^2-3t$(m/초)의 속도로 맞은편 점 A를 향해 움직이다가 도중에서 다시 점 B로 되돌아가는 왕복운동을 한다.



1) 점 Q가 점 A에 가장 가까이 접근할 때까지 몇 초 걸릴까?

2) 점 Q가 다시 점 B로 되돌아 갈 때까지 몇 초 걸릴까?

3) 점 Q가 한 번 왕복운동하는 동안 점 P와 점 Q가 적어도 한 번 겹칠 때 u의 최소값은 얼마일까?

▶ 전문가 클리닉

최근 들어 실생활과 관련된 과학과 연계된 문제가 많이 출제되고 있다. 물리학에 관한 여러가지 개념과 수식 처리 방법은 꼭 한 번 잘 정리해 둬야 한다. 속도와 가속도, 거리를 구하는 미적분 테크닉은 구술에서 단골 출제되므로 반드시 따로 공부하기 바란다.

▶ 예시답안

$$x_2=\int\left(\frac{3}{4}t^2-3t\right)dt=\frac{t^3}{4}-\frac{3}{2}t^2+C$$

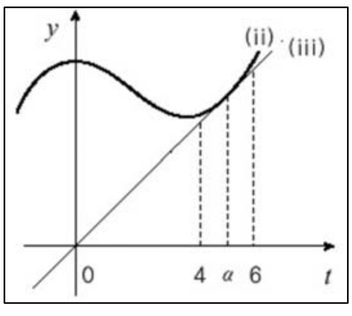
$t=0$일 때 $x_2=25$이므로 $C=25$

$$\therefore\ x_2=\frac{t^3}{4}-\frac{3}{2}t^2+25$$

t	0	…	4	…
x'_2		$-$	0	$+$
x_2	25	↘	17	↗

∴ 따라서 4(초)일 때 Q는 A에 가장 가까워진다.

2) $x_2=25$에서 $\frac{t^3}{4}-\frac{3}{2}t^2=0$ ∴ $t=6$(초)



3) $x_1=ut,\ x_1=x_2$에서 $\frac{t^3}{4}-\frac{3}{2}t^2+25=ut$………(i)

$f(t)=\frac{t^3}{4}-\frac{3}{2}t^2+25$…………………………(ii)

$g(t)=ut$…………………………(iii)

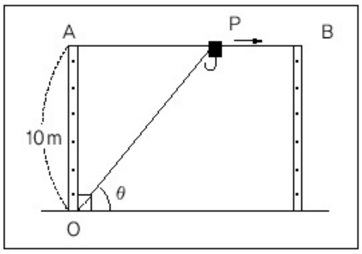
(ii)와 (iii)이 접하려면 $f(g)=g(\alpha)\quad f(\alpha)=g'(\alpha)$이어야 하므로

$$u=\frac{\frac{\alpha^3}{4}-\frac{3}{4}\alpha^2+25}{\alpha}=\frac{3}{4}\alpha^2-3\alpha\text{에서 } \alpha=5 \qquad \therefore\ u=\frac{15}{4}$$

(i)이 양근 t를 가지면 $u\geq\frac{15}{4}$여야 하므로

$\therefore$ 최소값은 $\frac{15}{4}$

[문제6] 다음 그림은 콘테이너 야적장에 있는 높이가 10m인 기중기를 그린 것이다. 기중기는 A지점을 출발하여 매초 2m씩 B쪽으로 움직인다. 기중기 위치를 P, O지점에서 P를 올려다 본 각의 크기를 θ라 할 때 $\overline{\mathrm{AP}}$=20m인 순간에서 θ의 시간에 대한 순간변화율은 얼마일까?

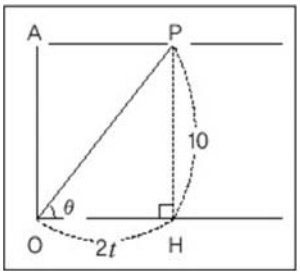


▶ 전문가 클리닉

5번 문제와 유사한 형태지만 식을 어떻게 세우는지가 이번 문제의 핵심이다. 각도와 길이의 관계를 찾기만 하면 순간변화율의 정의에 따라 쉽게 정답을 얻을 수 있다. 일상에 적용할 수 있는 순간변화율(미분) 문제들을 따로 모아서 정리해두기 바란다. 이 문제와 유사한 문제는 수능시험에서 이미 여러 번 출제된 적이 있고 미적분의 응용에서 중요한 위치를 차지하므로 꼭 터득하기 바란다.

▶ 예시답안

t초 후 선분 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이는 $2t$이므로 오른쪽 그림에서



$$\tan\theta=\frac{10}{2t}=\frac{5}{t}$$

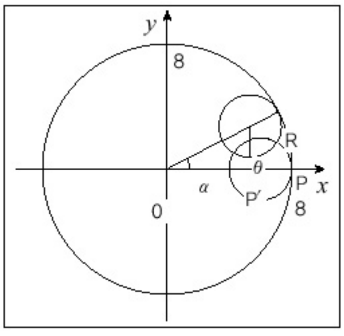
$\overline{\mathrm{AP}}=20$인 순간 $2t=20$에서 $t=10$이고, 이때 $\tan\theta=\frac{1}{2}$

(i)의 양변을 t에 대해 미분하면

$$\sec^2\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{-5}{t^2} \qquad \therefore\ (1+\tan^2\theta)\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{-5}{t^2}$$

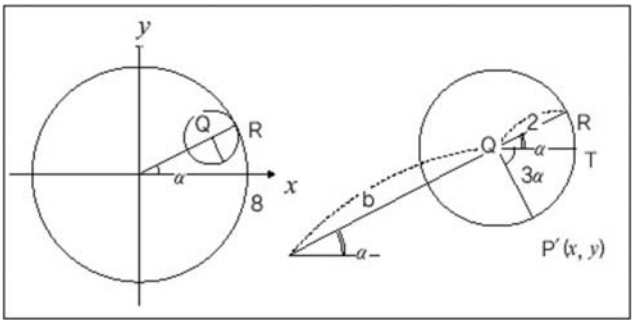
$$\left[\frac{d\theta}{dt}\right]_{t=10}=\frac{-5}{10^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=-\frac{1}{25}\text{ 라디안/초}$$

[문제7] 원점을 중심으로 반지름 8인 원주 내부를 따라서 반지름 2인 작은 원을 굴린다. 작은 원 위의 한 고정점 P(8, 0)이 움직여서 P′로 될 때, 이 점의 자취를 구하여라.(단, 작은 원을 반시계 방향으로 굴린다.)



▶ 전문가 클리닉

변수를 어떻게 설정할지 결정한 뒤 수식을 조금 조작하면 쉽게 방정식을 구할 수 있다. 정확한 해를 구하기 전 미리 한 고정점이 어떻게 움직일지 예측하면서 머릿속에 자취를 떠올리는 훈련도 병행해보기 바란다.



▶ 예시답안

작은 원이 굴러간 길이는 $\widehat{P'R}=\widehat{PR}$이므로

$\theta=4\alpha$

Q에서 x축에 평행한 직선을 그어 $\widehat{P'R}$과 만나는 점을 T라고 하면 $\angle P'QT=3\alpha$

$\therefore\ \overrightarrow{QP}=(2\cos3\alpha,\ -2\sin3\alpha),\ \overrightarrow{OQ}=(6\cos\alpha,\ 6\sin\alpha)$

$\therefore\ \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}=(6\sin\alpha+2\sin3\alpha,\ 6\sin\alpha-2\sin3\alpha)$

$x=6\cos\alpha+2\cos3\alpha=8\cos^3\alpha \qquad y=6\cos\alpha-2\cos3\alpha=8\sin^3\alpha$

$\therefore\ P'$의 자취의 방정식은 $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=4$

[문제8] 공간 xy평면 위의 원 S=$\{(x,y,z): x^2+y^2=1,\ z=0\}$가 존재한다. 다음 질문에 답하여라.(2003 서울대 응용)

1) 공간의 한 점 P(a, b, c)에서 S까지 최단거리를 구하는 방법을 설명하라.

2) xz 평면 위의 원 T=$\{(x,y,z): x^2+(z-1)^2=1,\ y=0\}$에서 S까지 최단거리를 구하시오.

3) xz 평면 위의 타원 E=$\left\{(x,y,z): \dfrac{x^2}{2}+z^2=1,\ y=0\right\}$에서 S까지 최단거리를 계산하라.

4) xz 평면 위에 있는 임의의 곡선과 원 S 사이의 거리를 구하는 방법을 설명하라.

▶ 전문가 클리닉

공간도형에 관한 문제들이 요즘 구술시험에서 점점 더 중요시되는 추세다. 전통적으로 수학적 재능을 알아 볼 때 기하학 문제를 출제하는데 이는 공간지각 능력을 가늠해보기 위해서다. 공간지각 능력은 공학이나 과학을 공부하는데 꼭 필요하기 때문에 학생들은 공간도형 문제에 좀 더 신경을 써야 한다. 특히 이번 문제는 최대·최소를 구해야 하기 때문에 수식을 능숙하게 조작하는 능력도 필요하다. 한 번 해설을 보지 말고 혼자 힘으로 풀어보자.

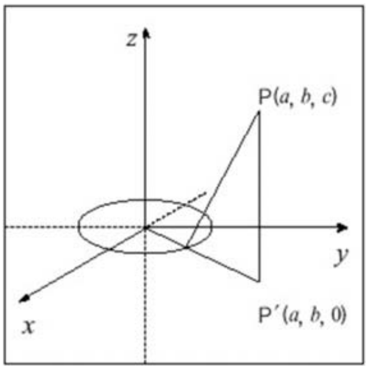
▶ 예시답안

1) 우측 그림처럼 $P(a,\ b,\ c)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 $P'(a,\ b,\ c)$이라 하면 $\overline{PP'}=|c|$이므로 $P(a,\ b,\ c)$에서 S까지 최소값은 $\sqrt{c^2+k^2}$이다. 여기서 k는 P'에서 S까지 최소거리다.

한편 $k=|1-\sqrt{a^2+b^2}|$이므로 $\sqrt{a^2+b^2+c^2+1-2\sqrt{a^2+b^2}}$ 이 구하려는 최소값이다.

2) T위의 임의의 점을 (a, 0, b)라 하자. 원은 대칭성을 갖기 때문에 $a\geq0,\ 0\leq b\leq1$이라 하고 최단거리를 구해도 된다. T를 xz평면 위에서만 생각하면 2차원 원이고 원의 방정식은

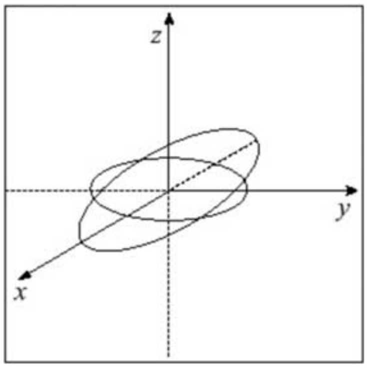
$a^2+(b-1)^2=1$이다. 문제1)에 의해 (a, 0, b)에서 S까지 최단거리는 $\sqrt{a^2+b^2+1-2a}=\sqrt{(a-1)^2+b^2}$이므로 구하려는 최소값은 평면에서(1, 0)과 (a, b)사이 거리이고 $a^2+(b-1)^2=1$을 만족한다. (a, b)는 중심이(0, 1)이고 반지름이 1인 원 위의 점이므로 두 점 (0, 1)과 (1, 0) 사이 거리에서 반지름 1을 뺀 값이 최소값이다. 따라서 답은 $\sqrt{2}-1$이다.



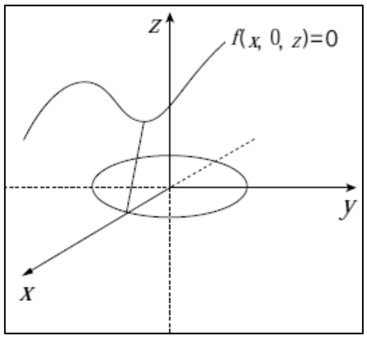
3) E 위에 있는 임의의 점을 $(a,\ 0,\ b)$라 하면 원과 타원의 대칭성에 따라 $0 \le a \le 2,\ 0 \le b \le 1$로 놓고 최단 거리를 구해도 된다.

문제1)에 따라 $(a,\ 0,\ b)$에서 S까지 최단거리는 $\sqrt{a^2+b^2+1-2a}$이고 $(a,\ 0,\ b)$는 T 위의 점이므로 $\frac{a^2}{4}+b^2=1$에서 $b^2=1-\frac{a^2}{4}$이므로 최소값은 $\sqrt{a^2+(1-\frac{a^2}{4})+1-2a}=\sqrt{\frac{3}{4}(a-\frac{4}{3})^2+\frac{2}{3}}$이다.

따라서 $a=\frac{4}{3}$일 때 최소값은 $\sqrt{\frac{2}{3}}$가 된다.



4) xz 평면 위에 임의로 주어진 곡선과 원 사이 최단거리를 구하는 문제 풀이에는 2)와 3)에서 얻은 아이디어를 그대로 적용하면 된다. 즉, 곡선 위 임의의 점을 $(a, 0, b)$라 하고 S까지 최단거리를 구하면 $\sqrt{a^2+b^2+1-2a}$ $=\sqrt{(a-1)^2+b^2}$이다. xz 평면에서 곡선의 방정식을 $f(x, y, z)=0$이라 하면 결국 a, b에 관한 식을 얻을 수 있기 때문에 직교좌표 평면의 방정식을 해석해 (1, 0)과 곡선 사이 거리의 최소값을 구한다.



2005년 04월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

이번 호에서는 기본적인 증명 기법에 대해 살펴보고 연속과 미분에 대한 개념을 실전 문제를 통해 자세히 알아보겠습니다.

수리 논술에 출제된 기출문제를 통해 좀더 다양한 구술 대비법을 익혀보기 바랍니다. 특히 정보통신산업에서 실제 분석자료로 쓰고 있는 사이트 접속 누계표를 분석해봄으로써 응용 범위가 넓은 수학의 참 묘미를 한 번 느껴보십시오.

[문제1] n+1개의 원소를 n개의 집합으로 나누면 2개 이상의 원소를 갖는 집합이 적어도 1개 존재한다. 이를 증명하라.

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 너무나 쉽고 뻔한 결론이 나오는 문제이지만 이를 논리적으로 명쾌하게 설명하는 것은 쉽지 않다. 일반적으로 n+1인 경우 n대신 몇 가지 값을 대입해보거나 사고실험을 해보면 문제 의미를 정확히 알 수 있다.

증명 형식은 보통 귀류법을 사용하는데 그 유용함을 완전히 이해했다면 이미 수학의 고수가 된 것이나 마찬가지다. 증명 형식 그 자체는 아무런 의미가 없는 것처럼 보이지만 형식을 제대로 이해하지 못하면 생각을 논리적으로 전개하기 어렵다.

▶ 예시답안

n개의 집합을 나눠 각각 $A_1, A_2, \cdots, A_n$으로 하고 A_i에 포함되는 원소의 개수를 $a_n(i=1, 2, \cdots, n)$이라 하면 $a_1+a_2+a_3\cdots+a_n=n+1$ ⋯ (i)

여기서 귀류법을 이용해보자. 결론이 성립하지 않는다고 가정하면 모든 집합은 단 1개의 원소를 갖던가 아니면 전혀 원소를 갖지 않는다.

즉 $0 \leqq a_n \leqq 1\ (i=1, 2, \cdots, n)$이고

$a_1+a_2+\cdots+a_n \leqq 1+1+\cdots+1=n$

이것과 (i)식은 서로 모순이다. 따라서 적어도 하나의 (i)에 관해 $a_i \geqq 2$이다. 즉 2개 이상의 원소를 갖는 집합이 적어도 하나 존재한다.

[문제2] '임의의 실수 $x=0.a_1a_2a_3\cdots$에 대해 $f(x)=0.a_2a_3a_4\cdots$'로 정의된 함수 f :(0,1]→(0,1]가 있다. (단, 구간(0,1]에 있는 모든 실수는 0이 계속해서 나타나지 않는 무한소수로 생각한다. 예를 들어 0.1=0.0999⋯, 1=0.999⋯) 이때 다음 물음에 답하라.

1) 부등식 f(x)<x를 만족하는 x가 있음을 보여라.

2) $(f \cdot f)(\frac{1}{4})$를 구하라.

3) f(x)=x인 x를 모두 구하라

▶ 전문가 클리닉

함수 문제는 주어진 함수의 정의에 따라 특성을 파악하는 것이 중요하다. 평소에 익숙한 함수가 아닌 경우 일반적 해법보다 여러 차례 시행착오를 겪으면서 답을 얻을 수밖에 없다. 먼저 문제를 풀기 전에 함수가 무엇을 의미하는지 직관적 느낌을 갖도록 자주 연습해보자.

▶ 예시답안

1) x=0.43333…이면 f(x)=0.333…

$\therefore\ f(0.4\dot{3}) = 0.\dot{3} < 0.4\dot{3} = x$

2) $\frac{1}{4} = 0.24999\cdots$이면 $f\left(\frac{1}{4}\right) = 0.4999\cdots$

$\therefore\ f\left(f\left(\frac{1}{4}\right)\right) = 0.999\cdots = 1$

3) $x = 0.a_1a_2a_3\cdots$이면 $f(x) = 0.a_2a_3a_4\cdots$이므로

$f(x) = x$일 때 $0.a_1a_2a_3\cdots = 0.a_2a_3a_4\cdots$

$\therefore\ a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \cdots$

따라서 $f(x) = x$인 x'는 $0.\dot{1}, 0.\dot{2}, 0.\dot{3}, \cdots, 0.\dot{9}$

[문제3] 문자 a, b, c를 가로로 n개 이어서 쓴 것을 길이 n인 단어라고 부르자. 예를 들어 aba, aaa, abc는 모두 길이 3인 단어이며 ab는 길이 2인 단어다.

1) 길이 3인 단어는 모두 몇 개인가?

2) 길이 3인 단어 중에서 aaa, abb, cab와 같은 단어는 a를 홀수개 갖고 있다. a가 홀수개인 길이 3인 단어는 모두 몇 개인가?

3) 길이 n인 단어 중 a가 홀수개인 단어의 총수를 f(n)으로, 나머지수를 g(n)으로 나타낼 때 f(n+1)=2f(n)+g(n)가 성립함을 증명하라.

4) f(n)을 구하라.

▶ 전문가 클리닉

문제의 핵심은 일반화한 식을 만드는 것이다. 이런 문제는 거의 대부분 점화식으로 표현하면 쉽게 풀린다. 어떤 단계 n과 다음 단계 n+1의 관계를 주어진 조건에 따라 수식으로 표현하는 데 집중해야 한다. 해설을 보기 전에 혼자 힘으로 풀어봐야 학습 효과가 나타난다. 수열과 점화식을 배운 뒤엔 응용문제를 풀어보면서 전체 개념을 잘 정리해두면 좋다.

▶ 예시답안

1) 길이 3인 단어는 $3^3 = 27$개다.

2) 모두 13개(aaa, abb, acc, bca, bab, cac, bac, bba, cca, cab, abc, acb, bac).

3) 길이 n인 단어의 오른쪽 끝에 문자 t(t는 a, b, c 중 하나)를 덧붙여 길이 n+1인 단어를 만든다. 이 같은 방법으로 길이 n+1인 단어를 얼마든지 만들어낼 수 있다.

따라서 a가 홀수개인 길이 n인 단어에 문자 t로 b 또는 c를 고르면 a를 홀수개 가진 길이 n+1인 단어의 조합이 가능하다. 또 a를 짝수개 가진 길이 n인 단어에 문자 t로 a를 고르면 a를 홀수개 가진 길이 n+1인 단어가 나온다.

따라서 $f(n+1)=2f(n)+g(n)$ ·········(i)

4) 3)과 비슷한 방식으로 $g(n+1)=f(n)+2g(n)$ ·········(ii)

위 두 식의 변과 변을 더하거나 빼면

$f(n+1)+g(n+1)=3(f(n)+g(n))$

$f(n+1)-g(n+1)=f(n)-g(n)$을 얻는다.

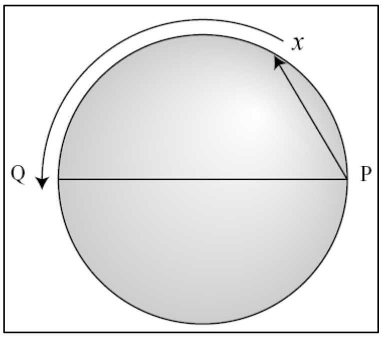
그러므로 $f(n)+g(n)=3^{n+1}(f(1)+g(1))$ ·········(iii)

$f(n)-g(n)=f(1)-g(1)$ ·········(iv)

$f(1)=1,\ g(1)=2$

(iii) 식과 (iv)식의 변과 변을 더한 뒤 정리하면 $f(n)=\dfrac{3^{n-1}-1}{2}$이 나온다.

[문제4] PQ=2를 지름으로 하는 원형 연못이 있다. P에서 Q까지 가는데 그림과 같이 연못가의 한 점 x까지 수영으로 이동하고 x에서 Q까지 연못가의 길을 따라 걸어가기로 했다. 수영으로는 시속 2로, 걸어서는 시속 4로 이동한다. P에서 Q까지 가는데 걸리는 시간은 적어도 $\dfrac{\pi}{4}$가 소요됨을 보여라.



▶ 전문가 클리닉

다른 과학과 관련된 수학문제는 한결같이 모두 중요하고 반드시 그때그때 따로 정리해둬야 한다. 이 문제는 기존 물리문제와는 다르게 좀더 수학적인 의미를 강조하고 있다. 목적지까지 걸린 시간을 바로 구하는 것이 아니라 최대·최소값의 개념을 파악하는 문제로 봐야 한다.

▶ 예시답안

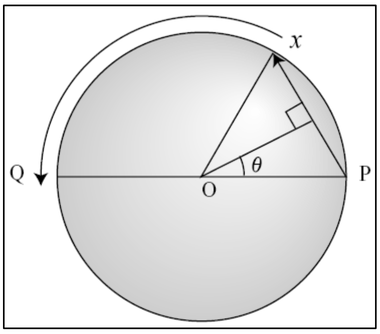
$\overline{PQ}$의 중점을 O라 하고 $\angle POX=2\theta$라 하면 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$,

$\overline{PQ}=2\sin\theta$, $\angle XOQ=\pi-2\theta$, P에서 Q까지 가는데 소요되는 시간을 $f(\theta)$라 하면

$$f(\theta)=\frac{2\sin\theta}{2}+\frac{\pi-2\theta}{4}=\frac{\pi}{4}+\sin\theta-\frac{\theta}{2}$$

i) $\theta=0$이면 $f(\theta)=\dfrac{\pi}{4}$

ii) $0<\theta\le\dfrac{\pi}{2}$이면



우측 그림에서 $\overline{PX} < \overset{\frown}{XQ} < 2\overline{PX}$ 이므로 $\sin\theta > \frac{\theta}{2}$

$\therefore\ f(\theta) > \frac{\pi}{4}$

ⅰ)과 ⅱ)에서 $f(\theta) \geq \frac{\pi}{4}$

▶ 별해

$f(\theta) = \frac{\pi}{4} + \sin\theta$에서 $f'(\theta) = \cos\theta - \frac{1}{2}$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{3}$에서 극대값을 갖는다.

또한 정의역 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$에서 극대값을 하나만 가지므로 $f(0)$ 또는 $f(\frac{\pi}{2})$일 때 최소값을 갖는다.

$\therefore\ f(0) = \frac{\pi}{4} \qquad f(\frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ P에서 Q까지 가는데 걸리는 시간은 최소한 $\frac{\pi}{4}$ 이상이다.

[문제5] **다음 질문에 답하라.**

2) **함수** $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ 유리수}) \\ 1 & (x \text{ 무리수}) \end{cases}$**로 정의했을 때 함수의 연속성을 설명하라.**

3) **함수** $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ 유리수}) \\ \frac{1}{q} & (x = \frac{p}{q} \quad p, q\text{는 서로소인 정수}) \end{cases}$**로 정의했을 때 함수의 연속성을 설명하라.**

▶ 전문가 클리닉

함수의 연속성에 관한 문제는 이미 여러 번 소개된 적이 있다. 연속의 정의를 꼭 암기해 기계적으로 증명할 수 있어야 한다. 문제를 보고 직관적인 느낌을 가질 수만 있다면 결론을 미리 예측하겠지만 이는 부단한 훈련을 통해서만 가능하기 때문에 처음부터 너무 욕심을 부리지는 않기를 바란다. 반복 풀이를 통해 기계적인 훈련을 해야 오히려 효율적이다.

▶ 예시답안

1) 함수 $y = f(x)$가 $x = a$에서 연속일 조건은 다음과 같다.

㈀ $x = a$에서 함수값은 $f(a)$로 정의된다.

㈁ 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

㈂ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$가 성립한다.

위의 세 가지 조건 중 어느 하나를 만족시키지 못하면 불연속이라고 한다. 직관적으로는

끊어지는 점이 없이 모두 연결된 상태라고 이해하면 쉽다. 수학적으로 엄밀하게 표현하려면 위의 세 조건이 모두 필요하다. 당연한 듯 들리겠지만 '왜 세 가지인가'는 한 번쯤 생각해보길 바란다. 어떤 점에서 연속은 위 정의에 따라 결정되며 어떤 구간이 연속이라는 것은 해당 구간 내 모든 점이 연속임을 뜻한다.

2) 일단 임의의 점 $x=a$에서 연속이면 극한값 $\lim f(x)$가 존재해야 한다. 이것은 x가 a로 접근할 때 극한값이 존재한다는 뜻이므로 a에 수렴하는 수열에 대해서도 성립해야 한다. a에 수렴하는 두 개의 수열 $\{x_n\}$과 $\{y_n\}$을 생각하자.

여기서 항상 x_n는 유리수이고 y_n는 무리수 수열로 가정한다. 따라서 $\lim f(x_n)=0$이고 $\lim f(y_n)=1$이다. 이는 x가 a에 접근하면서 유리수로 접근할 때와 무리수로 접근할 때 극한값이 제각각 달라진다는 뜻이므로 $x=a$는 불연속이다.

예를 들어 $x=3$에서 극한값을 구하는 과정에서 $x_n=3+\dfrac{1}{n}$, $y_n=3+\dfrac{\sqrt{2}}{n}$라고 놓고 접근시키면 극한값이 각각 0, 1이 나오므로 불연속임을 알 수 있다.

3) $\lim\limits_{x\to a} h(x)=0$

x가 유리수일 때 $a=0$이면 $\lim\limits_{x\to a} h(x)=\lim\limits_{q\to\infty}\dfrac{1}{q}=0$

$a\neq 0$이면 $\lim\limits_{x\to a} h(x)$는 수렴하지 않는다. 그러므로 $x=0$에서 연속이고 $x\neq 0$이면 불연속이다.

[문제6] 다음 질문에 답하라.

1) 미분가능하면 연속인가?

2) 연속이면 미분가능한가?

3) 2 이상의 자연수 n에 대해 이 함수의 $x=0$과 $x=1$에서 미분가능성을 판별하라.

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ x^n & (0\le x\le 1)\\ 1 & (x>1)\end{cases}$$ **일 때,**

▶ 전문가 클리닉

연속과 미분가능성의 상호관계를 묻는 문제다. 5번 문제에서 언급했듯이 미분가능성에 관한 문제들도 기계적으로 증명할 수 있어야 한다. 미분가능성은 좀더 직관적이기 때문에 이해하기 쉽지만 단순히 '곡선이 매끄럽다' 정도의 느낌만으론 풀지 못하는 경우도 많다는 사실을 명심해야 한다.

▶ 예시답안

1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 연속이다. x≠a이면

$$f(x)=f(a)+\{f(x)-f(a)\}=f(a)+\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$$이고,

$$\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right\}=f'(a)\cdot 0=0$$이므로 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

가 된다. 이것은 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속임을 나타낸다.

2) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이라도 반드시 미분가능한 것은 아니다. 그 일례로 함수 $f(x)=x$를 생각해 보자. 이 함수는 $x=0$에서 분명히 연속이다.

그러나 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{|x|}{x}$가 $x>0$일 때는 1, $x<0$일 때는 -1이므로

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$, $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1$이 되므로 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$은 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)=|x|$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다. 단, 앞서 본 바와 같이 함수 $f(x)=|x|$에 대해서는 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$에서 $x\to+0$일 때와 $x\to-0$일 때 극한값이 모두 존재한다.

일반적으로 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 한 점 a에서 유한한 극한값 $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$가 존재할 때 $f(x)$는 $x=a$에서 '우측 미분가능하다'라고 하고 이때 극한값을 $x=a$에서의 우측미분계수라고 한다.

좌측 미분가능과 좌측미분계수의 개념도 똑같이 정의된다. 함수 $f(x)=|x|$는 $x=a$에서 미분가능하지는 않지만 각각 우측과 좌측으로 부터는 미분가능하며, 이때 우측미분계수는 1이고 좌측미분계수는 -1이다.

일반적으로 함수 $f(x)$가 a점의 양쪽에서 정의될 때 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다는 것은 양쪽에서 미분가능하며, 우측미분계수와 좌측미분계수가 일치한다는 것을 뜻한다.

3) (i) $x=0$일 때,

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h^n-0}{h}=\lim_{h\to+0}h^{n-1}=0$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{0-0}{h}=0$$

따라서, $x=0$에서 미분가능하다.

(ii) $x=1$에서

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{(1+h)^n-1}{h}=n$$

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{1-1}{h}=0$$

따라서, $x=1$에서 미분가능하지 않다.

▶ 별해

$$f'(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ nx^{n-1} & (0<x<1)\\ 0 & (x>1)\end{cases}$$ 이므로

$$\lim_{x\to+0}f'(x)=0=\lim_{x\to-0}f'(x)=0$$

$$\lim_{x \to 1+0} f'(x) = 0 \neq \lim_{x \to 1-0} f'(x) = n(n \geq 2)$$

따라서 $x=0$에서 미분가능하고 $x=1$에서는 미분가능하지 않다.

[문제7] 인터넷 포털사이트 A와 B가 개설된 뒤 총 누적 접속건수를 약 5개월에 걸쳐 매달 1일 집계해 오른쪽과 같은 표를 작성했다. 이 표를 이용해 두 사이트의 매월 접속건수와 월간 접속건수가 변화한 추이를 비교하고 이를 토대로 누적접속건수에 대한 앞으로의 전망을 비교 설명해보시오.(고려대 예시논술)

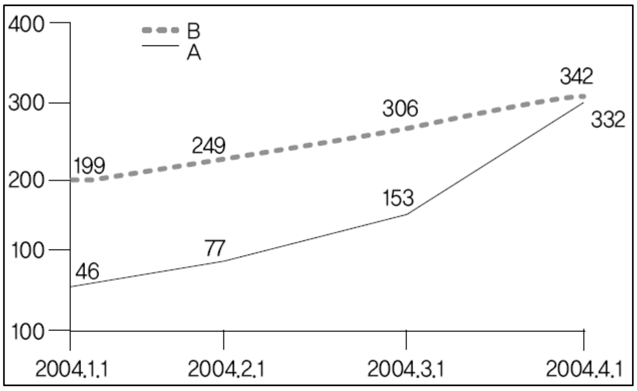
대상 사이트 / 집계 시기	A	B
2003년 12월 1일	349	2051
2004년 1월 1일	395	2250
2004년 2월 1일	472	2449
2004년 3월 1일	625	2805
2004년 4월 1일	957	3147

(단위 : 천건)

▶ 전문가 클리닉

수리논술을 대비하기 위해 출제된 수리논술 예시문제 중 하나를 그대로 옮겼다. 문제의 접근법이 기존 문제와는 약간 다르다. 말 그대로 논술문제다. 핵심은 출제 의도에 맞게 논리적으로 자신의 의견을 전개하는 것이다. 수학실력과 논술실력이 동시에 강조되지만 본질적으로는 수학적 상상력이 필요하다. 도표로 설득력을 한층 높인 묘미를 감상하면서 수리논술을 대비하자.

▶ 예시답안



2004년 1월 1일 이후 월간 접속건수의 추이(단원:천건)

절대적 수치로 사이트 A의 누적접속건수는 사이트 B의 누적접속건수에 비해 적으나 우측 그래프에서는 사이트 A의 월간 접속건수가 꾸준히 증가해 2004년 3월 한 달간 접속건수만 비교했을 때는 이미 사이트 B의 접속건수에 비해 1만5000건 정도 밖에 뒤지지 않는 것으로 조사했다. 전월대비 월간 접속건수의 증가율을 보면 사이트 B의 경우 5만건 정도로 일정한 반면 사이트 A는 전월대비 거의 2배 이상 증가해 전체 월간접속건수가 기하급수적으로 증가하고 있는 것으로 조사됐다. 따라서 2004년 4월 이후 사이트 A의 접속건수는 급격하게 증가해 절대적 수치로도 사이트 A의 총 누적접속건수가 사이트 B를 누를 것으로 예상된다.

2005년 05월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

이번 호는 논리 문제와 기하 문제를 중심으로 엮었습니다.

[문제1] 1부터 8까지 번호가 있는 8개의 구슬의 무게를 각각 $a_1, a_2, \cdots, a_8$이라 하자. 이 8개의 구슬 중 7개는 무게가 같고 나머지 하나만 다르다고 한다.

다음의 두 조건

1) $a_1+a_2+a_3 < a_4+a_5+a_6$

2) $a_3+a_4+a_5 < a_1+a_7+a_8$

이 성립할 때, 무게가 다르다고 주장할 수 있는 구슬을 찾고 그 이유를 논리적으로 설명하라.

▶ 전문가 클리닉

이런 유형의 문제에서는 간단한 논리만으로 무게가 다른 구슬을 알 수 있다. 수식으로 표현돼 있기 때문에 혼란스러울 수도 있지만 직접 공을 그려서 생각해보면 쉽게 풀린다. 이 문제를 다양한 형태로 바꾼 문제들이 다음에 등장한다. 비교해보면서 논리 훈련을 해보자.

▶ 예시답안

1)식을 잘 보면 1~6번 구슬 중에서 무게가 다른 것이 있으므로 7, 8번 구슬은 무게가 같다는 것을 알 수 있다. 마찬가지로 2)식에서 2, 6번 구슬은 무게가 같다. 만약 1번 구슬이 무게가 다르다면 1)에서는 1번 구슬이 다른 구슬보다 가볍다는 뜻이고 2)에서는 1번 구슬이 다른 구슬보다 무겁다는 뜻이므로 모순이다. 4, 5번 구슬도 마찬가지다. 그러므로 무게가 다른 것은 3번 구슬이고 이 구슬은 다른 7개의 구슬보다 가볍다.

[문제2]

1) 모양과 크기가 같은 3개의 공이 있다. 이 중에 무게가 다른 불량품 공이 하나 있다. 양팔저울을 이용해서 이 불량품을 찾아내려고 한다. 양팔저울을 단 한 번만 사용해 불량품을 알아내는 방법을 간단히 설명하라.

2) 모양과 크기가 같은 8개의 공이 있다. 8개의 공 중 1개의 공은 다른 공보다 무게가 가벼운 불량품이라고 하자. 양팔저울을 단 2번만 사용해 불량품을 찾아내라.

3) 모양과 크기가 같은 9개의 공 중 8개의 공은 무게가 같고, 나머지 1개는 무게가 다른 불량품이라고 한다. 단, 불량품인 공은 나머지 공들보다 무거운지 가벼운지는 알 수 없다. 양팔저울을 3번 사용하여 불량품을 찾아내라.

▶ 전문가 클리닉

양팔저울 문제는 누구나 한 번쯤 풀어봤을 것이다. 이런 문제들을 통해 효과적으로 논리력을 기를 수 있다. 모든 저울 문제에 적용되는 고정된 풀이법은 없다. 그때그때 전략을 만들어보고 시행착오를 거쳐봐야 한다. 특별한 공식이 없고 단순 논리로 진행되기 때문에 초등학생도 즐길 수 있다. 사전 지식 없이 지적 능력과 논리력을 파악할 수 있기 때문에 구술시험에 등장할 가

능성이 높다. 양팔저울 문제는 간단한 경우부터 시작해서(공이 3개인 경우) 계속 확장해가며 풀 수 있다. 간단한 논리를 반복적으로 사용하기 때문에 논리 점화식이 발생한다. 이 점화식의 논리를 파악하면 순식간에 복잡한 상황을 풀 수 있다. 특별한 풀이 기술은 없지만 그룹으로 나눠 추리하는 것이 중요하다. 해설을 보기 전에 스스로 풀어보자.

▶ 예시답안

1) 불량품의 무게가 가볍다고 가정하자. 우선 2개의 공을 임의로 선택해 양팔저울에 올린다. 이때 만일 한쪽으로 기울면 가벼운 쪽이 불량이고 양팔저울이 균형을 이룬다면 저울에 올린 두 공은 정상이다.

   즉, 남은 1개의 공이 불량품이다. 불량품의 무게가 무거운 경우에도 같은 상황이 발생한다. 따라서 불량품의 무게가 가벼운지 무거운지를 모른다면 양팔저울을 단 한 번 사용해서는 어떤 것이 불량품인지 알아낼 수 없다.

2) 일단 8개의 공을 세 그룹(A그룹 3개, B그룹 3개, C그룹 2개)으로 나눈 뒤 공의 개수가 3개씩인 두 그룹(A그룹, B그룹)을 양팔저울에 올려 보자. 이때 가능한 상황은 저울이 수평이거나 기울어진 경우 중 하나일 것이다.

   만일 수평 상황이라면 수평을 이룬 6개의 공은 정상이라는 것을 알 수 있으며 C그룹에 무게가 가벼운 불량품이 있음을 알 수 있다. 따라서 C그룹에 있는 2개의 공을 각각 1개씩 양팔저울에 올려서 가벼운 불량품을 골라내면 된다.

   만약 기운 경우라면 두 그룹 중 가벼운 쪽에 불량품인 공이 있다는 것을 알 수 있다. 즉 가벼운 그룹의 세 공 중에 불량품인 공이 있고 불량품이 가볍다는 것을 알고 있기 때문에 문제1)의 원리에 따라 저울을 한 번 더 사용하면 불량품을 찾을 수 있다(최종적으로 저울을 두 번 사용했다).

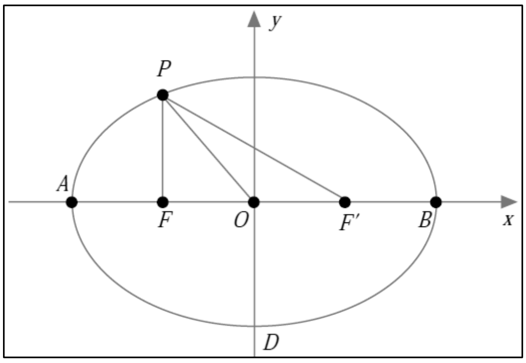
3) 이 문제의 경우는 양팔 저울이 수평을 이루지 않으면 불량품이 어느 쪽에 속하는지를 알 수 없다(불량품이 무거운지 가벼운지 모르기 때문이다).

   일단 문제2)처럼 9개의 공을 3개씩의 세 그룹(A그룹, B그룹, C그룹)으로 구분하고 두 그룹(A그룹, B그룹)을 양팔 저울에 올리면 수평이 되거나 한 쪽으로 기우는 두 상황 중 하나일 것이다.

   먼저 양팔저울이 수평을 이루는 경우를 생각해 보자. 그런 경우 수평을 만든 6개의 공은 정상이라는 정보를 얻을 수 있다. 따라서 C그룹에 불량품이 있음을 알 수 있다. 양팔저울의 양쪽에 A그룹과 C그룹을 다시 달아보면 수평을 이루지 않을 것이다. 왜냐하면 정상품만 있는 A그룹과 불량품이 들어있는 C그룹의 무게가 다를 것이기 때문이다. 결론적으로 저울을 두 번 사용해서 다음 두 가지 정보를 얻을 수 있다. C그룹에 불량품이 존재한다는 것과 그것이 무거운지 가벼운지에 대한 정보다. 이제 문제1)과 같은 상황이 되므로 저울을 한 번 더 사용하면 C그룹의 세 공 중에서 불량품을 찾아낼 수 있다.

   다음으로 A그룹과 B그룹을 올린 양팔저울이 기우는 경우를 살펴보자. 일단 C그룹에 속하는 공들은 정상이다. 만약 A그룹 쪽이 무거웠다면 A그룹과 C그룹을 저울에 달고 두 가지 가능한 상황을 따져보자(이때까지 저울을 2번 사용했다). A그룹과 C그룹이 수평을 이뤘다면 불량품은 가벼운 것이 되며 B그룹의 세 공 중에 있다. 이제 다시 문제1)과 같은 방식으로 불량품을 찾을 수 있다. A그룹과 C그룹의 무게가 다르면 이때 A그룹에 불량품이 있고 그것이 무겁다는 것을 알 수 있다. 이제 문제1)의 방법으로 불량품을 찾아 낼 수 있다.

[문제3] 우측 타원에서 두 초점을 F와 F′, 장축의 양 끝 점을 A와 B, 단축의 양 끝점을 C와 D라 한다. 이 타원 위의 동점 P에 대해 $\overline{FP}+\overline{F'P}-2\overline{OP} \leq k\overline{AF}$를 항상 만족하는 양수 의 최소값을 구하라.($\overline{OC}=\overline{OF}$)



▶ 전문가 클리닉

타원의 성질을 이용한 문제들이 구술에 자주 등장했다. 2차 곡선에 관련된 문제들은 모두 정리해둬야 한다. 2차 곡선의 기하학적 성질과 대수적 성질을 결합하면 재밌는 결과들이 많이 나오기 때문이다. 이 문제도 복잡해 보이지만 타원의 정의와 기본적인 성질을 이해하고 있다면 쉽게 해결할 수 있다.

▶ 예시답안

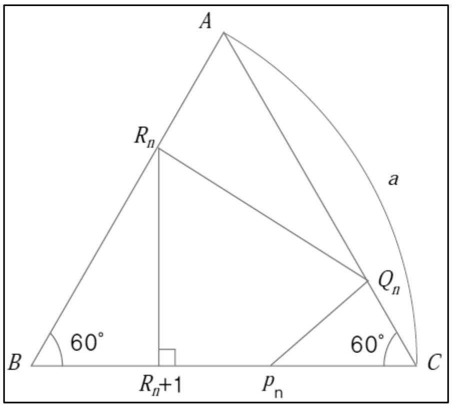
타원이기 때문에 $\overline{FP}+\overline{F'P}=\overline{AB}$라는 사실을 쉽게 알 수 있다.

이것은 $\overline{FP}+\overline{F'P}-2\overline{OP}=\overline{AB}-2\overline{OP}$와 같이 표현할 수 있으므로 좌변이 최대가 되는 것은 $\overline{OP}$가 최소가 될 때다. 즉 점 P가 단축의 양 끝에 올 때다.

$$\begin{aligned}\overline{FP}+\overline{F'P}-2\overline{OP} &= \overline{AB}-2\overline{OP}\\ &\leq \overline{AB}-2\overline{OC}\\ &= \overline{AB}-2\overline{OF}\\ &= \overline{AB}-\overline{FF'}\\ &= 2\overline{AF}\end{aligned}$$

따라서, k의 최소값은 2다.

[문제4] 한 변의 길이가 a인 정삼각형 ABC의 변 BC 위의 한 점을 P_1이라 하자. 점 P_1에서 변 AC에 내린 수선의 발을 Q_1, 점 Q_1에서 변 AB에 내린 수선의 발을 R_1, 점 R_1에서 변 BC에 내린 수선의 발을 P_2라 고 하자. 이와 같은 방법으로 점 P_1, P_2, ……, P_n, ……을 잡아 나갈 때, 점 P_n의 극한의 위치는 P_1의 위치에 관계없이 일정함을 증명하라.



▶ 전문가 클리닉

극한문제는 점화식을 유도하면 쉽게 풀린다. 보통은 첫 두 항을 계산한 후 등비를 구하면 풀리지만 등비수열이 아닌 경우는 이 전략을 사용할 경우 미궁에 빠진다. 그러므로 좀더 일반적인

전략을 세워야 하는데 이것이 바로 점화식 전략이다. 등비수열인 경우는 점화식 전략이 더 불편하지만 이 문제처럼 등비수열이 아닌 경우에는 특효약이다. 이 문제를 통해 점화식 전략을 익혀보자.

▶ 예시답안

$\overline{CP_n} = x_n$이라 하면

$$\overline{CQ_n} = x_n \cos 60^\circ = \frac{1}{2}x_n$$

$$\overline{AQ} = a - \frac{1}{2}x_n$$

$$\overline{AR_n} = \overline{AQ_n}\cos 60^\circ = \frac{a}{2} + \frac{1}{4}x_n$$

$$\overline{BP_{n+1}} = \overline{BR_n}\cos 60^\circ = \frac{a}{4} + \frac{1}{8}x_n$$

$$\therefore\ x_{n+1} = \overline{CP_{n+1}} = \frac{3}{4}a - \frac{1}{8}x_n$$

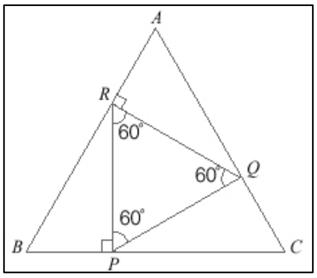
$$\therefore\ x_{n+1} - \frac{2}{3}a = -\frac{1}{8}\left(x_n - \frac{2}{3}a\right)$$

$$\therefore\ x_n - \frac{2}{3}a = \left(-\frac{1}{8}x_n\right)^{n-1}\left(x_1 - \frac{2}{3}a\right)$$

$$\therefore\ x_n = \frac{2}{3}a + \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}\left(x_1 - \frac{2}{3}a\right)$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} = 0$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = \frac{2}{3}a$

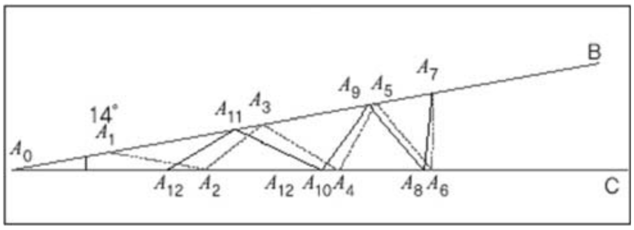
즉 P_n은 P_1에 관계없이 변 BC의 3등분점 중 B에 가까운 쪽의 점에 가까워진다.



▶ 참고

구한 극한점을 P라 하고 점 P에서 변 AC에 내린 수선의 발을 Q라 하고 점 Q에서 변 AB에 내린 수선의 발을 R이라 하자. 이때 점 R에서 변 BC에 내린 수선의 발이 곧 P가 되고 △PQR은 정삼각형이 된다.

[문제5] $\angle BA_0C = 14^\circ$인 두 반직선 A_0B, A_0C 위에 다음과 같이 점 A_1, A_2, $\cdots$를 찍는다.



1) 먼저 점 A_1을 반직선 A_0B 위에 임의로 찍는다. 단, $A_0 \neq A_1$

2) $n \geq 2$에 대해 점 A_{n-1}이 반직선 A_0B 위에 있으면 점 A_n을 반직선 A_0C 위에, 그리고 점 A_{n-1}이 반직선 A_0C 위에 있으면 점 A_n을 반직선 A_0B 위에 $A_{n-2}A_{n-1} = A_{n-1}A_n$이 되도록 찍는다.

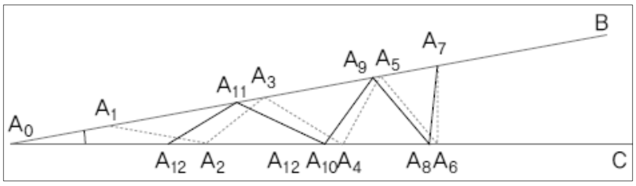
A_0, A_1, A_2, $\cdots$, A_n이 모두 서로 다르다고 할 때, 점 A_n을 찍을 수 있는 n의 최대값을 구하라.

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 같은 풀이 과정을 몇 번 반복해서 쉽게 풀 수 있다. 그림을 그려보며 규칙을 빨리

발견하는 것이 포인트다. 단순한 문제지만 교과서에 나오는 일반적인 수열 문제와는 다르다. 경시대회에 출제된 문제인데 생각하는 힘을 기르는 훌륭한 문제다.

▶ 예시답안



$\angle A_0A_2A_1 = 14^\circ$

$\angle A_0A_3A_2 = 14^\circ \times 2$

$\angle A_0A_4A_3 = (14^\circ \times 2) \times 2 - 14^\circ = 14^\circ \times 3$

$\angle A_0A_5A_4 = (14^\circ \times 3) \times 2 - 14^\circ \times 2 = 14^\circ \times 4$

따라서 14°씩 증가한다.

$\angle A_0A_7A_6 = 14^\circ \times 6 = 84^\circ$

$\angle A_0A_8A_7 = 14^\circ \times 7 = 98^\circ$ 이므로 A_8은 A_6를 중심으로 A_0쪽에 있어야 한다.

$\therefore$ $\angle A_0A_7A_8 = 180^\circ - 14^\circ - 98^\circ = 68^\circ$

$\angle A_0A_8A_9 = 54^\circ$

$\angle A_0A_9A_{10} = 40^\circ$

따라서 14°씩 감소한다.

$\angle A_0A_{11}A_{12} = 12^\circ < 14^\circ$

$\angle A_0A_{11}A_{12} = \angle A_{13}A_{11}A_{12} = 12^\circ$ 이고 A_{13}은 $\overrightarrow{A_0B}$ 위에 있어야 하는데 $\angle A_{13}A_{11}A_{12} = 12^\circ < 14^\circ$ 이므로 A_{13}은 $\overrightarrow{A_0B}$ 밖에 있을 수밖에 없다.

$\therefore$ N의 최대값은 12

[문제6] 다음 문제를 풀어라.

1) X, Y, Z가 양의 정수일 때, $\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{Y}+\dfrac{1}{Z}=1$을 만족하는 X, Y, Z의 값을 모두 구하시오.

2) $x \geq 3$, $y \geq 3$, $z \geq 3$일 때, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2}$의 정수 해를 모두 구하시오.

▶ 전문가 클리닉

정수 문제와 부정방정식 문제는 여러 번 소개했다. 두 문제는 매우 유명한 부정방정식 문제로 일반적인 방정식으로 풀지 않고 부등식을 사용해 푸는 것이 좋다. 이 부등식 기술을 익혀두면 유사한 부정방정식을 쉽게 풀 수 있을 것이다. 두 문제를 비교하면서 이런 문제 유형을 완전히 정리해두기 바란다.

▶ 예시답안

1) X, Y, Z의 자리를 서로 바꿔도 같은 식이 되므로 $X \geq Y \geq Z$라 가정해도 무관하다. 이 가정에 따라 먼저 X의 범위를 구하고 X의 값에 따른 Y, Z의 값을 구한다.

우선 주어진 식이 $X=Y=Z=3$일 때 성립한다는 것을 알 수 있다. 세워놓은 가정에 따르면 $\frac{1}{X}$, $\frac{1}{Y}$, $\frac{1}{Z}$ 중에서 가장 큰 값이 $\frac{1}{X}$이므로 $X \le 3$이다.

$\therefore$ X의 값은 2 또는 3일 수밖에 없다.

ⅰ) $X=3$일 때 문제에서 주어진 식에 $X=3$을 대입하면 $\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z}=\frac{2}{3}$에서 $Y \ge 3$이므로

$Y=3$일 때 $Z=3$

또 $Z \ge Y$이므로 $Y \le 6$ $\therefore$ $Y=4,\ 5,\ 6$을 취할 수 있다.

$Y=4$일 때 $Z=\frac{12}{5}$이므로 적합하지 않다.

$Y=5$일 때 $Z=\frac{15}{7}$이므로 적합하지 않다.

$Y=6$일 때 $Z=2$이므로 이것도 적합하지 않다. ($Z \ge Y \ge X$라 가정했으므로)

ⅱ) $X=2$일 때 $\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z}=\frac{1}{2}$에서 $3 \le Y \le 4$이므로

$Y=3$일 때 $Z=6$이 되고 $Y=4$일 때 $Z=4$가 된다.

답, $X=2,\ Y=3,\ Z=6$ 또는 $X=2,\ Y=4,\ Z=4$

2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$

$x \le y$라 하면 $\frac{1}{x} \ge \frac{1}{y}$이므로 $\frac{2}{x} \ge \frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{2}$

$\therefore x<4,\ x \ge 3$이므로 $x=3$

이때 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{2}$에서 $\frac{1}{y}>\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ $\therefore y<6$

$x \le y$라 가정했으므로 $y=3,\ 4,\ 5$

$x=3,\ y=3$일 때 $\frac{1}{z}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ $\therefore z=6$

$y=4$일 때 $\frac{1}{z}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$ $\therefore z=12$

$y=5$일 때 $\frac{1}{z}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}=\frac{1}{30}$ $\therefore z=30$

$x>y$인 경우도 같은 방법으로 풀면 $\{x=4,\ y=3, z=12\}$와 $\{x=5,\ y=3, z=30\}$을 얻는다. 따라서 구하는 정수해는 다음과 같다.

$(x,\ y,\ z)=(3,\ 3,\ 6),\ (3,\ 4,\ 12),\ (3,\ 5,\ 30),\ (4,\ 3,\ 12),\ (5,\ 3,\ 30)$

[문제7] 원점을 중심으로 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 제1사분면 위에 있는 원주의 길이가 $\pi/2$임을 증명하라.

▶ 전문가 클리닉

적분의 기본원리와 테크닉은 철저히 암기해야 한다. 이 문제는 전형적인 구술 문제로 풀이에

접근하는 두 가지 방법을 소개한다.

길이를 구할 때 적분공식을 어떻게 적용하는지 확실히 이해하도록 하자.

▶ 예시답안

제1사분면에서 반지름의 길이가 1인 원을 함수로 표현하면 $y=\sqrt{1-x^2}\,(0 \le x \le 1)$이므로 제1사분면 위 원주의 길이 L은 다음과 같이 적분해 구한다.

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+(\frac{dy}{dt})^2}\,dx$$
$$=\int_0^1 \sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}})^2}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

여기서 $x=\sin\theta$로 두면

$$L=\int_0^1 \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin\theta^2}}d\theta \;=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx \;=\frac{\pi}{2}$$

또 매개변수를 이용해 풀 수도 있다.

원의 방정식을 매개변수로 표현하면 $x=\cos t,\ y=\sin t$가 된다. $(0 \le t \le \frac{\pi}{2})$

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dt \;=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt \;=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1d\theta \;=\frac{\pi}{2}$$

2005년 06월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

이번 호에는 풀이 테크닉을 이용해야 하는 확률 문제를 다룹니다. 확률에 대한 막연한 공포를 갖고 있는 학생들이 있는데, 확률을 수학과 물리학의 중간 쯤 위치하는 괴물 같은 존재로 여깁니다. 많은 문제를 풀어보면서 수학적인 의미를 파악하려 노력한다면 추상적인 확률을 몇 가지 간단한 계산으로 풀 수 있습니다. 복잡한 계산이 아닌 상상만으로 충분히 확률을 즐길 수 있기 바랍니다.

[문제1]

1) **주머니 속에 정상적인 동전 한 개와 불량 동전 한 개가 있다. 불량 동전은 양면이 모두 앞면으로 이뤄져 던지면 항상 앞면만 나온다. 주머니 속에서 무작위로 한 개의 동전을 꺼냈을 때 이것인 정상적인 동전일 확률은?**

2) **꺼낸 동전을 한 번 던졌을 때 앞면이 나왔다. 이 동전이 정상일 확률은?**

3) **꺼내서 한 번 던진 동전을 한 번 더 던졌더니 또 앞면이 나왔다. 이 동전이 정상일 확률은?**

4) **두 번 던진 동전을 또 한 번 던졌더니 이제는 뒷면이 나왔다. 이 동전이 정상일 확률은?**

▶ 전문가 클리닉

조건부 확률을 이해하는 것이 확률을 제대로 아는 것이다. 그러므로 조건부 확률에 관련된 예는 모두 정리하고 그 의미를 파악하고 있어야 한다.

이 문제는 조건부 확률 문제가 어떻게 변형될 수 있는지 보여주고 있다. 해답을 보지 말고 먼저 스스로 풀어보기 바란다. 조건부 확률에 대한 개념이 없다면 이 문제는 다음 기회로 넘기고 풀이를 먼저 보지 않기 바란다. 기본적인 개념이 있는 경우만 상황을 머릿속으로 상상하며 접근하기 바란다.

문제를 풀다보면 상황이 명쾌하게 이해하지 못할 때가 있다. 어떤 동전을 선택한 후 이것을 계속 던질 때 선택한 동전이 정상 아니면 불량일 확률은 각각 1/2로 정해졌다. 그런데 왜 정상적인 동전일 확률이 계속 변하고 있을까?

의문을 풀기 위해 다른 예를 생각해보자. 주사위를 던졌을 때 나온 눈이 1일 확률은? 물론 1/6이다. 그런데 지금 나온 눈이 절대로 2는 아니라는 사실을 알았다. 그럼 나온 눈이 1일 확률은? 분명 1/6은 아니다. 이제 문제의 상황을 이해할 수 있을 것이다.

▶ 예시답안

1) 구하는 확률은 1/2이다.

2) 정상인 동전을 A, 불량인 동전을 B라 하고 앞면이 나오는 사건을 H라 두자. 구하는 확률은 조건부 확률이 되고 다음과 같이 구하면 된다.

$$P(A|H)=\frac{P(H\cap A)}{P(H)}$$
$$=\frac{P(H|A)\ P(A)}{P(H|A)\,P(A)+P(H|B)\,P(B)}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}$$

3) 두 번 모두 앞면이 나온 사건을 HH라 하면,

$$P(A|HH) = \frac{P(HH \cap A)}{P(HH)} = \frac{P(HH|A)\,P(A)}{P(HH|A)\,P(A) + P(HH|B)\,P(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$

4) 불량인 동전은 뒷면이 나올 수 없다. 한 번이라도 뒷면이 나왔다면 이 동전은 확실히 정상이다. 그러므로 구하는 확률은 1이다.

▶ 참고

조건부확률(Conditional Probability)이란 사건 A가 일어났다는 가정 하에 사건 B가 일어날 확률로 기호로는 P(B|A)로 표현한다. 조건부 확률의 수학적 정의는 다음과 같다.

$P(B|A)=P(A \cap B)/P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B)=P(A)P(B|A)$

즉, 두 사건 A와 B가 동시에 일어날 확률은 먼저 A가 일어났다는 가정 하에 B가 일어날 확률을 곱해 계산한다는 뜻이다.

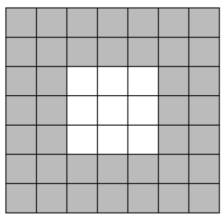
실제 계산은 다음과 같이 구한다.

$P(A|B)=P(A \cap B)/P(A)$

$=P(A \cap B)/[P(A|B)P(B)+P(A|\text{not } B)P(\text{not } B)]$

여기서 P(B)가 어떻게 구해지는지 살펴보자. 사건 B가 일어나는 것은 사건 A와 관계가 있을 수도 있고 없을 수도 있다. 다시 말해 사건 B는 사건 A와 동시에 일어나는 경우도 있고 A가 일어나지 않은 상태에서 일어나는 경우도 있다. 이것을 이분법적으로 나눠 생각하면 위의 식으로 표현할 수 있을 것이다. 이 식에 적절한 수치를 넣어 조건부확률을 구할 수 있다.

[문제2] 정사각형 타일 40장을 바깥쪽에 24장, 안쪽에 16장씩 이중으로 배치해 아래 그림처럼 한가운데가 빈 정사각형을 만들었다. 이와 같은 방법으로 700장의 타일을 모두 사용해 5겹의 테두리로 둘러싸인 가운데가 빈 정사각형을 만들 때, 제일 바깥쪽 변을 이루는 한 변의 타일 수와 제일 안쪽의 한 변의 타일 수를 구하시오.



▶ 전문가 클리닉

문제 자체는 어렵지 않게 풀 수 있을 것이다. 쉽다고 지나치지 말고 조건을 일반화하는 방법을 익힐 기회로 삼기 바란다. 다른 여러 상황을 문제로 만들어 스스로 풀어 보기 바란다.

▶ 예시답안

제일 바깥 테두리 한 변의 타일 수를 x라 하면 2번째, 3번째, 4번째, 5번째 테두리 한 변의 타일 수는 $x-2$, $x-4$, $x-6$, $x-8$이 된다.

제일 바깥 정사각형 테두리를 이루는 타일 수는 $x+(x-1)+(x-1)+(x-2)$로 모두 $4(x-1)$이 된다.

따라서 제일 바깥부터 배열된 4면의 타일 수는 $4(x-1)$, $4(x-3)$, $4(x-5)$, $4(x-7)$이므로 전체 타일 수는 다음과 같다.

$$4[(x-1)+(x-3)+(x-5)+(x-7)+(x-9)]=700$$

$\therefore\ 5x=175+25$

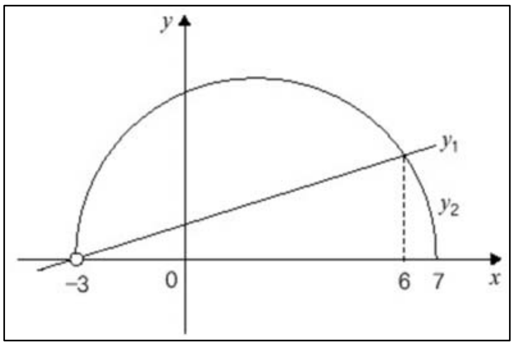
$\therefore\ x=40$

따라서 제일 바깥쪽 정사각형의 한 변의 타일의 수는 40, 제일 안쪽 한 변의 타일 수는 32개다.

[문제3] 부등식 $ax+b \geqq \sqrt{(c+dx+x^2)}$의 해집합이 $\{x|x=-3$ 또는 $6 \leqq x \leqq 7\}$가 되도록 상수 a, b, c, d의 값을 정할 때 이들의 곱 abcd의 값을 구하시오.

▶ 전문가 클리닉

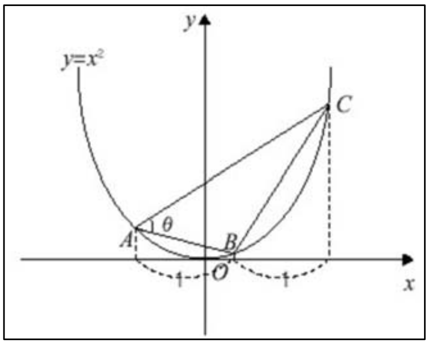
무리부등식 문제를 하나 소개한다. 무리방정식이나 무리부등식을 풀 때는 항상 무연근을 조심해야 한다. 해법은 그래프를 이용하는 것이 가장 좋다.



▶ 예시답안

$y_1=ax+b$, $y_2=\sqrt{c+dx-x^2}$이라 놓으면 문제의 부등식은 $y_1 \geqq y_2$이며 해집합이 문제에서처럼 두 부분이 되려면 y_1 그래프와 y_2 그래프가 두 교점을 가져야 한다.

이때 x=−3이 해집합의 한 부분이므로 이것은 반원 y_2의 한 끝점을 나타내고 직선 y_1이 이 점을 지난다는 것을 알 수 있다.



또 $6 \leqq x \leqq 7$이 해집합의 또 다른 부분이므로 $x=7$에서 반원의 다른 한 끝점이 있고 $x=6$에서 반원과 직선이 만난다(그림 참조).

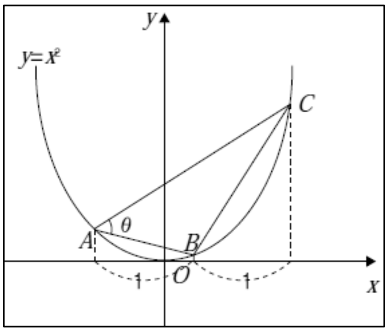
즉, $y_2=\sqrt{21+4x-x^2}$이고 y_1은 $(-3,\ 0)$과 $(6,\ 3)$을 지나므로 $y_1=\left(\dfrac{1}{3}\right)x+1$이다.

$\therefore$ a=$\dfrac{1}{3}$, b=1, c=21, d=4

$\therefore\ abcd=\dfrac{1}{3}\times1\times21\times4=28$

[문제4] 곡선 $y=x^2$위에 x값이 작은 지점부터 차례로 점 A, B, C를 정할 때 인접한 두 점의 x좌표 값의 차가 1이 되도록 한다.

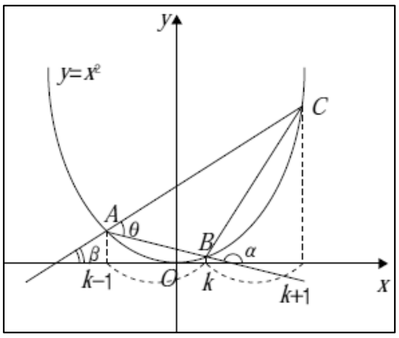
∠CAB가 최대일 때 점 B의 x좌표를 구하라.



▶ 전문가 클리닉

최대 최소 문제는 심층면접의 단골 메뉴다. 이 문제는 특별한 풀이법이 요구된다. 단순하지만 중요한 문제이므로 반드시 풀어보기 바란다.

▶ 예시답안



직선 AB, AC와 x축의 양의 방향과 이루는 각을 각각 α, β라 하고 $\angle CAB=\theta$라 하면 $\theta=\beta-\alpha$ 또는 $\theta=-\pi+\beta-\alpha$

$\therefore\ \tan\theta=\tan(\beta-\alpha)$··················(i)

점 $A(k-1,\ (k-1)^2)$, $B(k,\ k^2)$, $C(k+1, (k+1)^2)$에서 직선 AB, AC의 기울기는 각각

$$\tan\alpha=\frac{k^2-(k-1)^2}{k-(k-1)}=2k-1$$

$$\tan\beta=\frac{(k+1)^2-(k-1)^2}{(k+1)-(k-1)}=2k$$

(i)에서 $\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)$

$$=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\cdot\tan\alpha}$$

$$=\frac{2k-(2k-1)}{1+(2k-1)2k}$$

$$=\frac{1}{4k^2-2k+1}=\frac{1}{4\left(k-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$\tan\theta>0$이므로 $\tan\theta$가 최대일 때, θ도 최대값을 갖는다.

$\therefore\ k=\frac{1}{4}$일 때, $\angle CAB$는 최대가 된다.

[문제5] A와 B가 게임을 하는데 A가 1과 2 중 어느 한 수를 기록하면 B는 그 수를 예측한다. 만일 A가 기록한 수를 i라 할 때(i=1,2) B가 그 수를 정확히 맞히면 B는 A에게 i만원만큼 받고 B가 알아맞히지 못하면 B가 A에게 7500원을 지불한다. B가 수를 예측할 때 1로 결정할 확률이 p, 2로 결정할 확률이 1−p라고 하면, 다음 경우에 B가 A로부터 받게 될 돈의 기대값을 구하라.

1) A가 숫자 1을 기록한 경우.

2) A가 숫자 2를 기록한 경우.

3) B의 최소기대이득을 최대화하는 p값은 얼마인가? 이때의 기대값은?

이제 다시 A의 입장에서 생각해보자. A가 무작위로 숫자 1을 기록할 확률이 q, 2를 기록할 확률이 1−q라 하면 다음 경우에 A의 기대손실은 얼마인가?

4) B가 숫자 1을 선택할 경우.

5) B가 숫자 2를 선택할 경우.

6) A의 최대 기대손실을 최소화하는 q 값은 얼마인가? 그리고 A의 최대 기대손실의 최소값은 얼마인가?

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 게임이론에 대한 기초적인 문제다. 문제 자체가 약간 생소해 이해하기 어려울 수도 있지만 문제를 여러 번 읽고 직접 풀어 본다면 오히려 상당한 재미를 느끼게 될 것이다.

문제 속에 등장하는 가상게임은 실생활에서 우리가 흔히 접하는 게임과 비슷하다. 문제를 잘 보면 B가 2를 예측할 때 받는 돈이 2만원이기 때문에 2만원으로 예측하는 것이 유리할 것 같다. 지는 경우 내는 돈이 7500원으로 정해졌기 때문이다.

물론 B는 A가 어떤 숫자를 기록한지 모른다. 다만 상금이 커서 2를 선택하는 것이 유리하게 보이는 것 뿐이다. 그런데 이 사실을 A가 모를리 없다. 그래서 A는 1을 기록하고 싶을 것이다. 1을 기록해야 2라고 예측하려는 B를 이길 수 있기 때문이다.

이제 B는 자기가 2를 부르고 싶어한다는 사실을 A가 알고 있기 때문에 A는 1을 기록하려 한다는 사실 또한 알고 있다. 다시 B는 1을 기록해야 이길 가능성이 높아진다고 생각해 1을 예측하고 싶을 것이다. 이런 식으로 A와 B는 실리싸움을 계속 할 것이다.

그럼 A와 B는 어떤 전략을 세워야 할까? B의 입장에서는 게임을 여러 번 반복할 때 1과 2를 반반씩 예측하면 될까?

합리적인 논리를 세워 이런 상황의 딜레마를 풀어보자.

▶ 예시답안

1) A가 숫자 1을 기록한 경우 B가 1을 맞히면 A에게서 1만원 받고 틀리면 A에게 3/4만원(7500원)을 줘야 하므로 B의 기대 이익은 $1\times p-\frac{3}{4}(1-p)=\frac{7}{4}p-\frac{3}{4}$이다.

2) 수를 맞힐 확률이 $1-p$, 틀릴 확률이 p이므로 B의 기대이익은 $2(1-p)-\frac{3}{4}p=2-\frac{11}{4}p$이다.

3) 만일 $\frac{7}{4}p-\frac{3}{4}>=2-\frac{11}{4}p$이면 이 부등식을 만족하는 p의 범위는 $p\geq\frac{11}{18}$이다. 이때 B의 최소 기대이익이 $2-\frac{11}{4}p$이고, 이 값이 최대인 경우는 위 부등식에서 등식이 성립하는 때이므로 $p=\frac{11}{18}$이다.

위의 부등식이 바뀌는 경우 즉, B의 기대이익이 최소일 때도 마찬가지로 이 값을 최대화하는 p값은 두 기대값이 같은 경우 즉 $p=\frac{11}{18}$이다. 그리고 이 경우 기대값은 $\frac{23}{72}$만원(약 3194원)이다.

4) A가 숫자 1을 기록하면 1만원을 잃게 되고 2를 기록하면 3/4만원을 받게 되므로 A의 기대손실은 $1\times q-\frac{3}{4}(1-q)=\frac{7}{4}q-\frac{3}{4}$이다.

5) 이 경우는 A가 숫자 2를 기록하면 2만원을 잃고 1을 기록하면 $\frac{3}{4}$만원을 받게 되므로 A의 기대손실은 $2(1-q)-\frac{3}{4}q=2-\frac{11}{4}q$이다.

6) A의 최대 기대손실을 최소화하는 q의 값은 3)과 같이 계산하면 $q=\frac{11}{18}$이다. 이때 A의 최

대 기대손실의 최소값 역시 $\frac{23}{74}$만원(약 3194원)이 된다.

▶ 참고

게임이론은 어려운 수학 분야의 하나로 1921년 보렐이 처음 이론을 제시했다. 독일의 수학자 폰 노이만은 '게임이론'이라는 용어를 처음 도입하며 게임의 구조와 게임에 참여하는 사람의 성향을 수학적으로 표현하기 시작했다. 이제 게임이론은 포커나 체스와 같은 게임뿐 아니라 경제, 군사 분야 분야에도 적용되고 있다.

게임이론으로 유명한 또 한 명의 수학자가 있는데 영화 '뷰티플 마인드'(Beautiful mind)로 유명해진 경제학자 겸 수학자 존 내쉬다. 영화에서처럼 그는 금발의 미녀를 둘러싼 남학생들의 심리적 역학 관계에서 단서를 얻어 '내쉬 균형'(Nash Equilibrium)이라는 개념을 발표해 천재적인 학자로 주목 받았다. 그는 정신분열증으로 파란만장한 인생의 우여곡절을 겪고 4반세기가 지난 1994년에야 노벨 경제학상을 공동 수상했다.

게임이론을 응용한 대표적인 예인 3인 결투 문제를 소개한다. A, B, C 세 사람이 결투를 한다. 세 사람 모두 총을 한 자루씩 들고 그들 중 한사람만 살아남을 때까지 돌아가며 총을 쏘기로 했다. 그런데 C는 사격에 매우 능해 명중률이 100%다. B는 C보다는 못하지만 그래도 2/3의 명중률로 총을 쏜다. A는 세 사람 중 총을 제일 뒤처져 명중률이 1/3이다.

공정한 결투를 위해 명중률이 낮은 사람부터 먼저 한 발씩 쏘는 것으로 정했다. 먼저 A가, 다음에 B가, 마지막으로 C가 쏘기로 했다. 한 사람만 살아남을 때까지 이런 순서로 계속 돌아가며 쏘기로 한 것이다.

그렇다면 제일 먼저 쏘기로 한 A는 어떤 전술로 이 결투에 임해야 할까? 명중률이 제일 낮은 그는 누구를 먼저 쏴야 하는가?

1) A가 B를 쏘아 명중시킨다면 그는 최악의 선택을 한 것이다. 다음에 총을 쏘는 C가 100%의 명중률로 A를 겨누게 될 것이기 때문이다.

2) A가 C를 쏘아 명중시킨다면 어떻게 될까? 그는 2/3의 명중률을 가진 B의 총알을 맞게 될 것이다.

3) 명중률이 제일 낮은 A에게 최선의 선택은 누구도 명중시키지 않는 것이다. 확실하게 명중하지 않으려면 허공에 대고 쏘면 된다.

이렇게 했을 때 결과를 따져보자. 다음 차례인 B는 C를 쏴야 한다. 그렇지 않고 A를 쏴서 명중시킨다면 B 역시 100% 명중률을 가진 C의 총알을 맞게 되기 때문이다. B가 C를 겨냥해 명중시켰다면 다음은 A차례다. A는 명중률은 낮지만 이제 다시 쏘는 위치에 온다. B가 C를 향해 총을 쐈지만 맞추지 못했다면 이제 C의 차례다. 그에게는 A보다 B가 더 위험한 존재이므로 B를 쏴야 한다. C의 명중률은 100%이므로 B는 죽은 목숨이다. 이제 다시 A에게 C를 쏠 기회가 주어진다.

A가 허공에 총을 쏜다면 어떤 경우라도 총알을 맞지 않고 총을 겨눌 위치에 서게 되므로 최선의 선택을 한 것이다.

이 예에서 B와 C 모두 자신의 상황에 최선의 선택을 할 것을 가정해 A의 전술을 세웠다. B 또는 C가 어리석은 선택을 한다면 이 전술은 통하지 않는다.

2005년 07월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

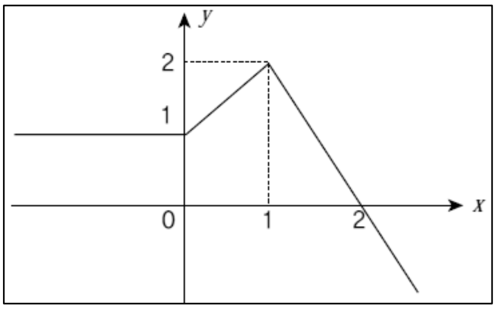
이번 호에서는 미적분에서 자주 볼 수 있는 평균값의 정리와 함께 교과서에서는 만나지 못했지만 구술시험에서는 만날 수 있는 중요한 문제들을 다뤘습니다. 복합적인 사고를 요하는 문제도 준비했습니다. 모두가 중요한 문제이니만큼 차근차근 다가가보도록 합시다.

[문제1] 다음 질문에 답하라(2003 서강대 응용).

1) 평균값의 정리에 대해서 설명하라.

2) 평균값 정리를 이용해서 $|\sin b - \sin a| \le |b-a|$임을 증명하라.(단, a, b∈R)

3) 함수 f가 폐구간 $[a, b]$에 속하는 모든 점 x에 대해 $f'(x)=0$이라 하자. 평균값의 정리를 사용해서 $f(x)$가 개구간(a, b)에서 상수함수임을 설명하시오.



4) 함수 g의 그래프가 오른쪽과 같을 때 극한값 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int^{1+2h} g(x)dx$를 구하시오.

▶ 전문가 클리닉

평균값 정리에 관한 내용은 이미 여러 번 소개했다. 평균값정리는 미적분학을 배울 때 시험에서 한 번쯤은 만나는 단골 정리중 하나다. 이 정리는 증명이 간단할 뿐 아니라 직관적으로 이해하기 쉽고 강력한 응용력을 가지기 때문에 학생들은 철저하게 공부할 필요가 있다. 위에 소개된 문제를 잘 이해하고 정리한 후 유사문제들도 다양하게 풀어 보길 권한다.

▶ 예시답안

1) 함수 f가 [a, b]에서 연속, (a, b)에서 미분 가능일 때 평균변화율 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$을 미분계수로 갖는 x값이 (a, b)에서 적어도 하나 존재한다. 즉, 평균값 정리는 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$이 되는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다는 정리다.

롤의 정리를 이용하면 평균값의 정리가 쉽게 증명된다.

$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$라 두면, $F(x)$는 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고, 개구간 (a, b)에서 미분 가능하므로 $F(a)=F(b)(=0)$가 성립한다.

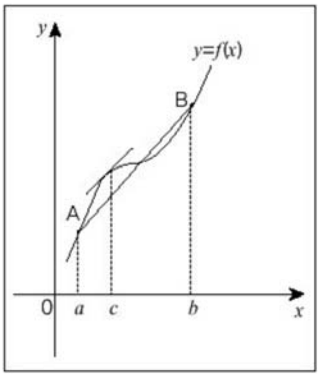
그러므로 롤의 정리에 의해 $F'(c)=0$ $(a<c<b)$인 c가 존재한다.

$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$이므로 $0=F'(c)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\therefore\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad (a<c<b)$

또 평균값 정리의 도형적 의미는 옆의 그림과 같다. 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 각각 A, B라 했을 때 직선 AB에 평행한 $y=f(x)$의 접선을 개구간 (a, b) 안에 적어도 한 점에서 그을

수 있다고 하는 것이다.



2) $f(x)=\sin x$라면 $\sin x$는 $[a,\ b]$에서 연속이고 $(a,\ b)$에서 미분가능하므로 이 함수는 평균값 정리의 조건을 만족한다.

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{\sin b-\sin a}{b-a}=f'(c)$인 c가 $(a,\ b)$ 사이에 존재한다.

그런데 $f'(c)=\cos c$이므로 $\dfrac{|\sin b-\sin a|}{b-a}=|f'(c)|\le 1$이다. 그러므로 $|\sin b-\sin a|\le|b-a|$이다.

3) 주어진 조건에서 폐구간 $[a,\ b]$에 속하는 모든 x에 대해 $f'(x)=0$이다. 따라서 개구간에 속하는 한 점을 $(d,\ f(d)=k)$라 하고 개구간 $(a,\ b)$에 속하는 임의의 한 값을 $t(t\ne d)$라 하면 $a<d<b,\ a<t<b$이므로 평균값의 정리에 따라 $\dfrac{f(d)-f(t)}{d-t}=0$이다. 그러므로 $f(d)=f(t)=k$이다.

이것은 임의의 t에 대해 성립하므로 개구간 $(a,\ b)$에 속하는 모든 x에 대해 $f(x)=k$이다. 따라서 이 구간에서 함수 f는 상수함수이다.

4) $G'(x)=g(x)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int^{1+2h}g(x)dx&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[G(1+2h)-G(1)]\\&=\lim_{h\to0}\frac{1}{2h}[G(1+2h)-G(1)]\times2\\&=2G'(1)=2g(1)\\&=4\end{aligned}$$

▶ **Tip**

4)번 문제는 적분의 평균값 정리를 이용해서 풀 수도 있다.

적분의 평균값 정리를 미분의 평균값 정리와 함께 따로 정리해두기 바란다.

다음은 적분의 평균값 정리다.

함수 f가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$가 성립하는 점 c가 구간 $(a,\ b)$에 존재한다.

[증명]

함수 f가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이므로 최대값 $f(x_M)=M$과 최소값 $f(x_m)=m$을 가진다.

따라서 모든 $x\in[a,\ b]$에 대하여 $m\le f(x)\le M$이므로

$$\int_a^b m\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b M dx\ \cdots\ (\mathrm{i})$$

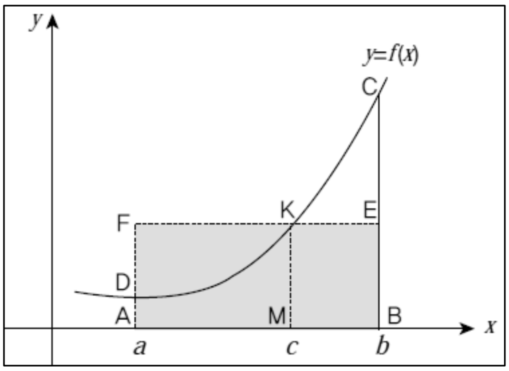
가 된다. 그런데(i)은

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

가 되므로 양변을 $b-a$로 나누면

$$m=f(x_m)\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le f(x_M)=M$$

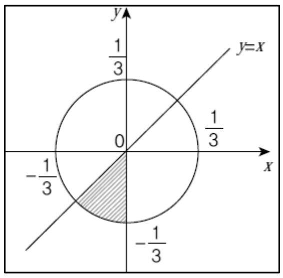
이 된다.



따라서 연속함수의 중간값 정리에 따라 $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$가 성립하는 점 c가 $(a,\ b)$ 안에 존재한다.

우측 그림에서 보는 바와 같이 함수 f가 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x)>0$일 때 적분의 평균값 정리는 기하학적으로 영역 ABCD의 면적을 나타내는 정적분 $\int_a^b f(x)dx$와 가로가 $b-a$이고 세로가 $f(c)$인 직사각형 ABEF의 면적, $f(c)(b-a)$가 서로 같아지게 하는 점 $c\in(a,\ b)$이 존재함을 보여준다.

[문제2] n이 자연수이고 행렬 $A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$로 나타나는 일차변환 f에 의해 점 P_n이 점 P_{n+1}로 옮겨진다. 점 P_1의 좌표가 $(4,\ 4\sqrt{3})$일 때, 다음 그림에서 원의 빗금 친 부분의 둘레 또는 내부에 점 P_n이 속하게 되는 자연수 n의 최소값은?



▶ 전문가 클리닉

일차변환에 관한 내용은 형식상 교과과정에서 빠져 있다. 하지만 부지불식중 우리는 이 일차변환의 내용을 문제에 응용하고 있다.

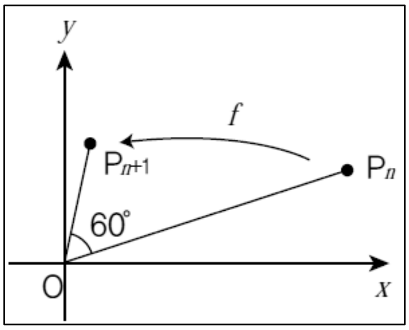
재미있는 것은 교과 과정에 없는 내용이 구술시험에 종종 등장한다는 사실이다. 교과내용에 관계없이 중요한 것은 항상 중요하기 때문에 학생들은 복소수와 일차변환에 관한 내용을 꼭 이해해두기 바란다. 게다가 이 문제에서는 회전 변환에 대한 내용과 기술이 이용되고 있어 회전 변환에 대해서도 이번 기회에 정리해두기 바란다.

▶ 예시 답안

$$A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos60^\circ & -\sin60^\circ\\ \sin60^\circ & \cos60^\circ\end{pmatrix}$$



즉, 일차변환 f는 원점을 중심으로 60°하는 회전변환과 $\frac{1}{2}$배 닮음변환의 합성변환이다.

$\overline{OP_1} = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8$

$\angle P_1 O x = 60^\circ$

$\therefore \overline{OP_n} = \overline{OP_1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= 2^{4-n} \le \frac{1}{3}$

$\therefore n \ge 6$ ⋯ (i)

또, 반직선 OP_n이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 360°, 60°, ⋯이다. 점 P_n이 주어진 영역에 속하려면 n은 6으로 나눈 나머지가 4인 자연수이어야 한다. ⋯ (ii)

따라서(i), (ii)을 동시에 만족하는 자연수 n의 최소값은 10이다.

[문제3] 아래 문제를 해결할 수 있는 논리적 방법을 생각하여 물음에 답하시오(중앙대 2005 응용).

경비행기로 육지 위와 강 위를 비행할 때는 그 소모되는 에너지에 차이가 있다고 한다. 강 위를 비행할 때는 육지 위를 비행할 때 소비되는 에너지의 k배가 필요하다고 하자.

다음은 두 지점 A와 B 사이를 공중에서 내려다본 그림이다. 두 지점 사이에는 반지름이 4Km인 반원 모양의 강변이 있고 다른 곳은 강폭이 동일하게 1Km다. 경비행기를 타고 A지점에서 B지점으로 가려고 한다.

1) 육지 위로만 비행하여 A지점에서 B지점으로 갈 때, 가장 경제적인 항로를 답안지에 그리고 이때의 비행거리를 측정하시오.

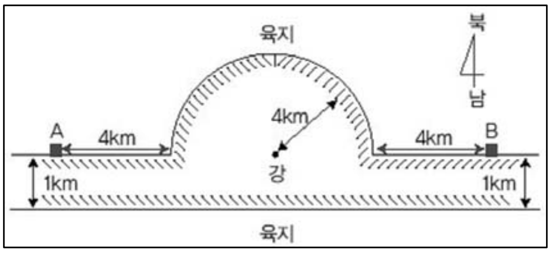
2) A지점에서 강 남단을 경유하여 B지점으로 가려고 할 때, k값에 따른 가장 경제적인 항로를 답안지에 그리고 이때의 비행거리를 측정하시오.

3) 1)과 2)에서 구한 항로를 비교할 때, 어느 항로가 더 경제적인지 k값에 따라 판단하시오.

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 중앙대 기출문제를 해설과 함께 그대로 옮겨 놓은 것이다. 문제자체가 어렵고 생각을 많이 해야 하는데다 기하학과 미적분의 기술이 없다면 접근하기 쉽지 않다. 아주 복잡한 계산을 요구 하는 것은 아니지만 약간 생소한 내용과 형식에 학생들은 당황 할 수 있다. 이 문제는 앞으로 학생들이 어떻게 구술을 준비해야 하는지에 대한 묵시적 나침반을 제시하고 있다.

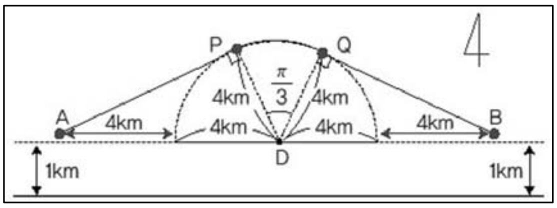
▶ 예시답안



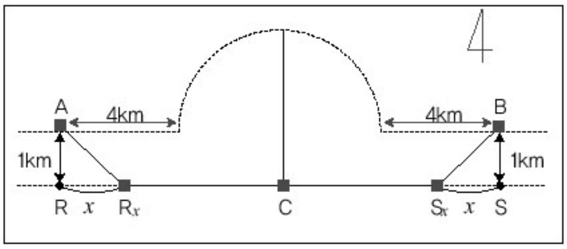
1) 반원의 중심을 D라고 하자. 점 A와 B로부터 반원에 접선을 그어 그 접점을 각각 P와 Q라고 하자. 그러면 직선 AP를 지나 호 PQ를 거쳐 직선 QB를 통과하는 항로의 거리가 육지 위를 비행해서 B에 도달하는 가장 짧은 거리다.

직각삼각형 APD에서 $\overline{AP}$의 길이는 $4\sqrt{3}$이고 직각삼각형 BQD에서 $\overline{BQ}$의 길이는 $4\sqrt{3}$이

다. 각 $\angle ADP$와 $\angle BDQ$는 $\frac{\pi}{3}$이므로 각 $\angle PDQ$는 $\frac{\pi}{3}$, 따라서 호 $\overline{PQ}$의 길이는 $\frac{4\pi}{3}$이고 전체 항로의 거리는$(8\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3})$이다.



2) 점 A와 B에서 남단의 강변과 직교하는 직선을 그어 각 교점을 R과 S라고 하자. 그리고 R과 S의 중점을 C라고 하자.



0≤x≤8일 때, R에서 동쪽으로 xKm떨어져 있는 점을 Rx라고 하고, 점 S에서 서쪽으로 xKm떨어져 있는 점을 Sx라고 하자.

선분 $\overline{AR_x}$(또는 선분 S_xB)의 거리 : $\sqrt{x^2+1}$

선분 $\overline{R_xC}$(또는 선분 CS_x)의 거리 : $8-x$

최소 에너지로 A에서 강남 강변을 지나 B로 가려면 항로가 대칭성을 가져야 한다. 그러므로 A를 출발해 Rx를 지나서 C까지 가는 항로만 고려하면 된다. 지상에서 1Km 비행하는데 1J이 소비된다고 가정하자. 이때 총에너지는 $E_k(x)=2(k\sqrt{x^2+1}+(8-x)$이다.

$0\le x\le 8$에서 $E_k(x)$의 최소값을 구하자.

$E_k'(x)=2(\frac{kx}{\sqrt{x^2+1}}-1)$에서 $E_k'(x_0)=0$이 되는 점은 $x_0=\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$이다.

▶ $k>1$일 때 : x_0가 존재한다.

(ⅰ) $x_0\le 8$ 즉 $\sqrt{\frac{65}{64}}\le k$일 때 에너지 최소값은 $E_k(x_0)=2(8+k^2-1)$, 이동경로는 선분 AR_{x0}를 지나 선분 $R_{x0}S_{x0}$를 거쳐 $S_{x0}B$를 이어주는 항로다.

x	0		x_0		8
$E_k'(x)$	−	−	0	+	+
$E_k(x)$			최소		

(ⅱ) $x_0\ge 8$ 즉 $1\le k\le\sqrt{\frac{65}{64}}$일 때 최소에너지는 $E_k(8)=2k\sqrt{65}$, 이동경로는 선분 $\overline{AC}$와 $\overline{CB}$를 잇는 항로다.

x	0		8		x_0
$E_k'(x)$	−	−	−	−	0
$E_k(x)$			최소		

▶ $0\le k\le 1$일 때 : x_0가 존재하지 않는다.

(ⅲ) 항상 $E_k'(x)<0$이므로 따라서 E_k는 감소함수다.

최소값은 $E_k(8)=2k\sqrt{65}$, 이동경로는 선분 $\overline{AC}$와 $\overline{CB}$를 잇는 항로다.

3) 1)의 에너지 값 : $8\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}$.

2)의 에너지 값 :(i)에서 $E_k(x_0)$, (ii)(iii)에서 $E_k(8)$.

(i)에서 $\sqrt{\frac{65}{64}} \le k$일 때

1)의 $(8\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3})$와 2)의 (i) $E_k(x_0)$를 비교하자.

$E_k(x_0) < (8\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3})$인 경우

즉 $\sqrt{\frac{65}{64}} \le k \le \sqrt{4(\sqrt{3}-2+\frac{2\pi}{3})^2+1} \simeq 1.4$일 때는 2) 항로가 더 경제적이다.

반면 $E_k(x_0) \geqq (8\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3})$인 경우,

즉 $k \ge \sqrt{4(\sqrt{3}-2+\frac{2\pi}{3})^2+1} \simeq 1.4$일 때는 1) 항로가 더 경제적이다.

2)의 (ii), (iii)에서 $0 \le k \le \sqrt{\frac{65}{64}}$ 일 때

1)의 $(8\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3})$과 (ii), (iii)의 $E_k(8)$을 비교해서 부등식 $E_k(8) < 8\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}$을 풀면

$\frac{4\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}}{\sqrt{65}} \ge k$가 된다.

이 경우 2)의 항로를 선택하는 것이 경제적이다. 그런데 $\frac{4\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}}{\sqrt{65}} \ge \sqrt{\frac{65}{64}}$ 이므로 언제나 2)의 항로를 택하는 것이 더 경제적이다.

즉, k값이 클 때(대략 1.4 보다 클 때) 강 위를 비행하는데 소모되는 에너지가 육지 위를 비행하는 것보다 많으므로 육지쪽을 택한다.

그러나 k값이 작을 때(대략 1.4 보다 작을 때)는 강 위에서 소모되는 에너지가 더 적으므로 강 위를 비행하는 것이 더 경제적이다.

[문제4] n을 3이상의 정수라 하자.

1) $1 \le p \le q$를 만족하는 정수 p, q에 대해 $n=p+q$를 만족하는 모든 경우의 수를 a_n이라 하자. 이때 $a_n=[n/2]$임을 보이시오.(단, [x]는 x를 넘지 않는 최대의 정수다)

2) $1 \le i \le j \le k$를 만족하는 정수 i, j, k에 대해 $n=i+j+k$를 만족하는 모든 경우의 수를 b_n이라 하자. 이때 $2 \le i \le j \le k$를 만족하는 정수 i, j, k에 대해 $n+3=i+j+k$를 만족하는 모든 경우의 수는 b_n과 같음을 증명하시오.

3) $b_{n+3}=b_n+a_{n+2}$임을 보이시오.(단, a_n은 문항 1)에서의 경우의 수이고 b_n은 문항 2)에서의 경우의 수다)

▶ 전문가 클리닉

정수론과 점화식을 결합한 문제다. 점화식을 이용한 문제는 구술시험의 단골메뉴다.

점화식은 여러 가지 개념과 융합해서 문제가 출제되기 때문에 기본적인 기술을 완전히 익혀둬야 실전에서 시간이 부족해 실력발휘를 못하는 최악의 상황을 피할 수 있다. 이 문제처럼 일반식을 유도해야 하는 문제를 풀 때는 처음부터 일반식을 찾기보다 몇 가지 특수한 숫자를 대입해서 충분히 사고실험을 해본 후 일반적인 패턴을 유추하는 것이 훨씬 더 효율적이다.

▶ 예시답안

1) $n=2m$일 때

$$(p,\ q)=(1,\ 2m-1),\ (2,\ 2m-2),\ \cdots,\ (m,\ m)$$

$$\therefore\ a_n=a_{2m}=\left[\frac{2m}{2}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]$$

$n=2m+1$일 때

$$(p,\ q)=(1,\ 2m),\ (2,\ 2m-1),\ \cdots,\ (m-1,\ m+2),\ (m,\ m+1)$$

$$\therefore\ a_n=a_{2m+1}=m=\left[\frac{2m+1}{2}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]$$

2) $n+3=i+j+k(2\le i\le j\le k)$ $\Leftrightarrow$ $n=(i-1)+(j-1)+(k-1)(1\le i-1\le j-1\le k-1)$이므로 경우의 수는 b_n과 같다.

3) $n+3=i+j+k(1\le i\le j\le k)$는

i) $i=1$일 때

$n+2=j+k(1\le j\le k)$로 나타낼 수 있으므로 이것은 a_{n+1}의 경우의 수와 같다.

ii) $i\ge 2$일 때

$n+3=i+j+k(2\le i\le j\le k)$이므로

$n=(i-1)+(j-1)+(k-1)(1\le i-1\le j-1\le k-1)$로 나타낼 수 있다. 이 경우의 수는 b_n과 같다.

따라서 i)과 ii)에 의해 $b_n+3=b_n+a_n+2$이다.

2005년 08월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학] 톡 쏘는 마티니 맛의 비결

[문제1] 마티니는 진과 백포도주를 k:1의 비율로 섞어 만든 술이다. 백포도주는 알코올 농도가 20%인 반면 진은 알코올 농도가 보통 40%이다. 백포도주가 진에 비해 거의 들어가지 않은 마티니의 맛을 '톡 쏘는 맛'(dry)이라 한다. 예를 들어 k=15일 때 '톡 쏘는 맛'의 마티니라고 하는 것이다. 이와 달리 k=5라면 '달콤한 맛'(sweet)의 마티니라고 한다. 어떤 사람들은 빨리 취한다는 이유로 톡 쏘는 맛의 마티니를 싫어하지만 이 톡 쏘는 맛의 마티니를 더 선호하는 사람들도 있다. 위 설명에 근거해 톡 쏘는 맛의 마티니와 달콤한 맛의 마티니에 들어 있는 알코올의 양을 계산하라. 또한 이 수리계산을 바탕으로 이러한 취향을 가진 술꾼들의 심리에 대해 자유롭게 기술하라.

▶ 전문가 클리닉

문제 자체가 어려운 것은 아니지만 적절한 모델을 세워 알코올의 양을 계산하는 것은 쉽지 않다. 또한 문제의 형식이 생소하기 때문에 문제를 보고 당황할 수도 있다. 예시답안을 보면서 어떻게 접근해야 하는 지 잘 살펴보자. 그러나 정답은 존재하지 않는다. 이것이 논술의 매력인데 무엇보다 각자의 생각을 논리적으로 전개하는 것이 중요하다. 다만 논리 속에 수학적 테크닉이 녹아 있어야 한다.

▶ 예시답안

먼저 달콤한 마티니에 대해서 생각해 보자. 달콤한 마티니 전체를 6으로 보면 이 중 5는 진의 양이고 나머지 1은 백포도주 양이다. 진의 알코올 농도는 40%이므로 $0.4\times5=2.0$에 해당하는 알코올이 들어있다는 사실을 알 수 있다. 한편 백포도주의 알코올 농도는 20%이므로 $0.2\times1=0.2$에 해당하는 알코올이 들어 있다는 사실을 알 수 있다. 따라서 전체가 6인 달콤한 마티니에는 총 2.2에 해당하는 알코올이 들어 있다. 그러므로 '달콤한 마티니'의 알코올 농도는 $\frac{2.2}{6}\times100$, 즉 36.67%가 된다.

이제 톡 쏘는 마티니에 대해서 알아보자. 톡 쏘는 마티니를 16으로 보면 이 중 15의 양은 진이고 나머지 1의 양은 백포도주이다. 진의 알코올 농도는 40%이므로 $0.4\times15=6$에 해당하는 알코올이 들어 있다는 사실을 알 수 있고 백포도주의 알코올 농도는 20%이므로 $0.2\times1=0.2$에 해당하는 알코올도 들어 있다는 것을 알 수 있다. 따라서 전체가 16인 달콤한 마티니에는 총 6.2에 해당하는 알코올이 들어 있다. 그러므로 '톡 쏘는 마티니'의 알코올 농도는 $\frac{6.2}{16}\times100$, 즉 38.75%이다.

여기서 달콤한 마티니와 톡 쏘는 마티니의 알코올 농도 차이는 2.09%로 그다지 크지 않다는 것을 알 수 있다. 사실 2%정도의 알코올 농도 차이를 느끼기는 힘들다. 다시 말해 달콤한 마티니를 마시나 톡 쏘는 마티니를 마시나 취하는 정도에는 별 차이가 없다는 것이다. 단지 톡 쏘는 맛의 술이 더 독하다는 느낌(알코올의 농도가 더 진하다는 느낌)을 주기 때문에 심리적으로 둘의 알코올 농도 차이가 크게 느껴진다.

[문제2] 다음은 유명하고 오래된 문제지만 그 질문은 간단해 보인다.

"줄리어스 시저가 '부르터스 너마저?'(Et tu, Brute?)라고 외치면서 내쉰 숨 속의 공기 분자가 당신이 들이마실 숨 속에 포함될 확률은 얼마인가?"

이 문제에는 두 가지의 특징이 있다. 첫 번째는 실제로 수학적인 모형을 세운 뒤에 해답을 찾을 수 있다는 것이고 다른 하나는 시저와 같은 공기를 들이마시게 될 가능성이 의외로 높다는 것이다(놀라울 정도로!). 논리적으로 답을 구하기 위해 다음을 가정하고 질문에 답하여라.

>>> 가정

첫 번째, 줄리어스 시저가 내쉰 숨은 대기 중에 균등하게 퍼진다.

두 번째, 이때 내쉰 숨 속의 분자는 계속 대기 중에 존재한다. 즉 대기 중의 분자수는 불변이다.

세 번째, 공기 분자는 대기 중에 균등하게 존재한다.

네 번째, 대기 중에는 10^{44}개의 분자가 있고 한 번 숨 쉴 때 평균 0.4L의 공기를 들이마신다.

1) 당신이 들이마시게 될 공기 속에 시저가 마지막으로 내쉰 공기의 분자가 하나도 없을 확률을 구하라.

2) 위에서 구한 확률을 %로 바꾸고 현실적인 값으로 표현하라.

3) 위에서 제시한 몇 가지 가정들은 문제를 풀기 위해 실제 사실을 조금 단순화한 것이다. 이 가정들과 현실세계의 차이는 무엇이며 가정 아래 나온 확률과 실제 확률은 어떻게 다른가.

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 예전에 구술 문제로 출제 되었던 '우리나라의 이발사는 대략 몇 명인가'라는 문제와 유사한 형식을 가지고 있다. 주어진 가정(전제 조건)을 잘 이용하면 쉽게 접근할 수 있다. 다만 여기서 우리가 배워야 할 중요한 교훈은 단순한 가정을 스스로 만들 수 있는 과학적 사고를 길러야 한다는 것이다. 수치적인 것은 중요한 것이 아니다. 만약 처음에 아무런 가정이 없다면 여러분들은 이런 가정을 스스로 만들 수 있겠는가?

▶ 예시답안

1) 표준 온도에서는 어떤 기체의 그램분자량도 22.4L속에 6×10^{23}개(아보가드로수)의 분자를 포함한다. 문제에서 가정하기를 우리는 한 번 숨 쉴 때마다 평균 0.4L의 공기를 들이마신다고 한다. 따라서 평균적으로 들이마시는 숨 속에 들어있는 분자의 수는 다음과 같다.

$$0.4\times\frac{1}{22.4}\times6\times10^{23}=1.0714\times10^{22}(\text{개})$$

이제 문제는 간단하다. 당신이 들이마시게 될 공기 속에는 1.0714×10^{22}개의 분자가 들어있고 시저가 내쉬었던 공기 속에도 1.0714×10^{22}개의 분자가 들어 있으며 이러한 공기 분자들은 대기 중의 10^{44}개의 분자들 속에 섞여 있는 것이다. 그렇다면 당신이 들이마시게 될 공기와 시저가 내쉬었던 공기가 같을(즉 적어도 한 개의 분자라도 공통으로 들어갈) 확률은 얼마인가.

먼저 이를 직관적으로 생각해 보자. 우리가 평균적으로 들이마시는 공기 속의 분자 개수를 반올림하면 10^{22}개가 된다. 대기 중에는 10^{44}개의 분자가 있고 한 번 들이마시는 공기 속에는

10^{22}개의 분자가 있으므로 숨을 10^{22}번 들이마시면 들이마신 공기의 총 분자 수가 대기 중의 분자의 수와 같게 된다. 시저가 마지막으로 내쉰 숨 속에 들어 있는 10^{22}개의 분자가 대기에 균등하게 섞여 있다면 아마도 이 분자들 중의 한 개는 다른 사람이 들이마시는 공기 속에 들어 있을 것이다(대기를 한 번 들이마시는 양 만큼의 공기 속에는 시저가 내쉰 공기 속의 분자들 중 한 개씩은 들어 있기 때문이다). 따라서 당신이 들이마시게 될 공기 속에 시저가 내쉰 공기 속의 분자들 중 한 개는 들어 있을 것이라는 사실이 거의 확실해 보인다.

이제 이를 정확하게 계산해 보자. 이 과정은 과학적인 계산을 수반하는 중요한 문제다. 앞서 반올림한 수치에 따르면 시저가 내쉬지 않은 공기 분자는 대기 중에 $10^{44}-10^{22}$개 들어 있다. 대기 중의 분자 한 개가 시저가 내쉰 것이 아닐 확률은 다음과 같다.

$$\frac{10^{44}-10^{22}}{10^{44}}=1-10^{-22} \cdots (\text{i})$$

이 확률은 당신이 들이마시게 될 각각의 공기 분자들에 적용된다. 따라서 당신이 들이마시게 될 공기 분자들 중에 시저가 내쉰 공기 분자가 없을 확률은 (i)를 10^{22}번(당신이 들이마시게 될 공기 분자 한 개에 한 번씩) 곱한 것과 같다. 그러므로 당신이 들이마시게 될 공기 속의 분자들이 모두 시저가 내쉰 공기 속의 분자가 아닐 확률은 다음과 같다.

$$(1-10^{-22})^{10^{22}}$$

2) 앞에서 구한 값은 $(1-10^{-22})^{10^{22}}$이지만 이 수치가 어느 정도인지 직관적으로 알 수 없다. 그러므로 좀더 현실적으로 느낄 수 있는 값으로 바꾸어야 한다.

$K\to\infty$이면 $\left(1-\dfrac{1}{K}\right)^{K}$는 $\dfrac{1}{e}$로 수렴하는 것을 이용해 쉽게 구할 수 있다. 즉 10^{22}은 매우 큰 수이므로 $(1-10^{-22})^{10^{22}}$은 $\dfrac{1}{e}$에 가까운 값이 되고(e는 대략 2.718) 이를 계산하면 0.368이 된다.

다시 말하면 놀랍게도 우리가 마시는 공기 속에 시저가 내쉰 공기 분자가 포함될 확률은 대략 63%라는 것이다.

3) 문제에서 제시한 가정들은 현실세계를 매우 단순화한 것이다. 두 번째 가정은 실제와 다를 수 있다. 공기 분자들은 이 우주의 알려지지 않은 곳으로 흩어 질 수 있기 때문이다. 세 번째 가정은 대기 중에 공기가 균등하게 퍼진다는 것인데 이는 사실과 다르다. 대기의 공기는 지표면에서 멀어질수록 희박해진다. 그러나 이점을 고려해 확률을 구해도 별 차이가 없을 것이다. 왜냐하면 계산 과정에서 반올림을 사용하거나 대략적인 수치를 사용하기 때문에(예를 들어 들이마시는 공기 0.4L나 대기 중의 분자수 10^{44}도 대략적인 값이지만 실제 값은 알 수 없다) 서로의 오차가 상쇄될 가능성이 많기 때문이다.

[문제3] 다음 식이 성립한다고 할 때 규칙성 및 일반화에 초점을 맞춰 주어진 식과 관련된 수학적 사실을 자유롭게 논술하여라(고려대 2004 응용).

$$4=1^2-2^2-3^2+4^2=2^2-3^2-4^2+5^2=3^2-4^2-5^2+6^2$$

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 논술의 특징을 잘 감상할 수 있는 매우 중요한 문제이니만큼 해설을 보기 전에 직접 논술해보자. 예시답안은 고려대에서 제공한 것이다. 논술의 방향이 어떻게 변화하는 지 잘 살펴

보기 바란다. 어떤 구체적인 사실에서부터 추상적이고 일반적인 규칙을 알아내는 문제는 구술시험이나 수리논술에서 출제될 가능성이 높을 뿐더러 그 자체가 수학 공부에 매우 중요하다.

▶ 예시답안 1

위 식 다음에는 아래와 같은 등식이 계속 이어질 것으로 추측된다.

$$=4^2-5^2-6^2+7^2=5^2-6^2-7^2+8^2=6^2-7^2-8^2+9^2=\cdots$$

계산을 통해 각 식의 값은 4로 일정함을 확인할 수 있다. 이들 식은 일반식

$$4=n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2,\ (n=1,\ 2,\ \cdots)\ \cdots\ (\text{i})$$

으로 표현할 수 있는데 실제로 n에 관계없이 그 값이 4로 일정함을 다음과 같이 알 수 있다.

$$(\text{우변}) = \left[n^2-(n+1)^2\right]-\left[(n+2)^2-(n+3)^2\right]$$

$$=(-1)(2n+1)-(-1)(2n+5)=4\ \cdots\ (\text{ii})$$

식 (i)은 자연수 4의 매우 독특한 성질을 보여주고 있다. 즉 4는 임의의 자연수인 연속된 네 자연수의 제곱의 합 또는 차로 표현할 수 있음을 알 수 있다. 다른 자연수에는 이런 4의 성질이 어떤 식으로 확장되는지 알아보자. 먼저 (i)식의 양변에 2^2을 곱하면 16에 대한 일반식

$$16=(2n)^2-(2n+2)^2-(2n+4)^2+(2n+6)^2, (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

을 얻고 좀 더 일반적으로 양변에 k^2을 곱하면 일반식

$$(2k)^2=(nk)^2-(nk+k)^2-(nk+2k)^2+(nk+3k)^2,\ (k,\ n=1,\ 2,\ \cdots)$$

을 얻는다. 이 식에서 임의의 짝수의 제곱은 등차수열을 이루는 네 자연수의 제곱의 합과 차로 표현할 수 있음을 알 수 있다.

▶ 예시답안 2

(ii)까지의 과정은 예시답안1과 동일하다.

식 (i)을 반복해 적용하면 임의의 4의 배수는 연속된 자연수의 제곱의 합과 차로 표현할 수 있음을 알 수 있다. 예를 들어 아래와 같다.

$$8=4+4=(1^2-2^2-3^2+4^2)+(5^2-6^2-7^2+8^2)=\cdots$$

이 식에서 착안해 4의 배수가 아닌 자연수에 문제의 식을 적용해보자. 먼저 $-3=1^2-2^2$과 (i)을 반복적으로 이용하면 임의의 $(4N+1)$꼴의 자연수도 연속된 자연수의 제곱의 합과 차로 표현할 수 있음을 알 수 있다.

$$1=-3+4=(1^2-2^2)(3^2-4^2-5^2+6^2)$$

$$5=1+4=(1^2-2^2+3^2-4^2-5^2+6^2)+(7^2-8^2-9^2+10^2)$$

또 $3=-1^2+2^2$과 (i)을 반복적으로 이용하면 임의의 $(4N+3)$꼴 자연수도 연속된 자연수의 제곱의 합과 차로 표현할 수 있음을 알 수 있다.

$$7=3+4=(-1^2+2^2)+(3^2-4^2-5^2+6^2)$$

$$11=7+4=(-1^2+2^2)+(3^2-4^2-5^2+6^2)+(7^2-8^2-9^2+10^2)$$

⋮

이제 마지막 남은 $(4N+2)$꼴의 자연수에 대한 것은 결국 '2를 연속된 자연수의 제곱의 합과 차로 표현할 수 있는가?'라는 문제로 귀결된다. 이 문제의 옳고 그름은 현재로서는 알 수 없으며 주어진 식과는 독립적인 문제로 보인다. 여기서는 이 문제를 제기하는 것으로 그친다.

[문제4] 어떤 은행에 연이율이 같은 1년 만기 정기예금 A와 B 두 종류가 있다. 정기예금은 만기시에는 원금과 이자를 지급하며 중도 해약시에는 원리금에서 해약부담금을 뺀 나머지 금액을 지급한다.

두 상품 A, B의 해약부담금에 대한 규정은 다음과 같다.

K씨는 일정 금액을 이 은행의 1년 만기 정기예금에 예탁하기로 마음먹었다. 다음 물음에 답하시오(중앙대 2004).

상품 A : $(\text{해약부담금}) = a \times (\text{원금}) \times \dfrac{(\text{잔여일수})}{365}$

상품 B : $(\text{해약부담금}) = b \times (\text{원금})$

1) K씨가 1년 이내에 해약할 때 받는 금액에 대해 알아보고자 한다. 위의 두 상품에 대해 K씨가 받는 금액을 해약 시점에 따른 모형으로 각각 표현하고 이를 동일한 좌표상에 그리시오(단 해약시점은 0과 365 사이의 연속적인 값으로 가정한다).
2) K씨는 중도 해약의 가능성을 고려해 두 상품 A, B 중 하나를 선택하고자 한다. 중도 해약이 예상되는 시점이 있을 때 어느 상품을 선택하는 것이 유리할지 해약부담금의 규정에 명시된 a, b를 이용해 논리적으로 설명하시오.

▶ 전문가 클리닉

문제에서 새로운 개념과 수식을 제공하는 형식의 문제이다. 스스로 문제에서 주어진 정의와 개념을 이해하고 문제를 풀어야 한다. 해약 부담금이라는 생소한 개념을 이해해야 하지만 수식으로 주어졌기 때문에 이 식을 따라 가면 해답을 구할 수 있다. 이런 개념이 일반 문장으로 제공될 때 이를 수식으로 표현할 수 있도록 연습을 해야 한다. 이런 형식의 문제도 출제될 가능성이 있으니 미리 준비하자.

▶ 예시답안

주어진 문제를 편리하게 수리적인 모형으로 표현할 수 있도록 다음과 같이 변수를 정의하자.

$M \equiv$원금 $r \equiv$연이율 $t \equiv$해약시점 $R(A) \equiv$상품 A의 해약반환금 $R(B) \equiv$상품 B의 해약반환금

1) 위에서 정의한 변수를 이용해 두 상품 A, B를 각각 선택하였을 때의 해약반환금은 다음과 같다.

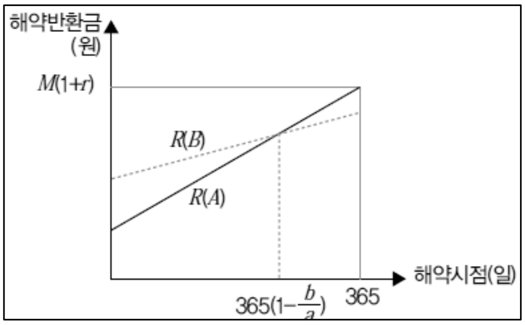
$$R(A) = M\left(1 + \frac{t}{365}r\right) - a \cdot M \cdot \left(\frac{365-t}{365}\right)$$

$$R(B) = M\left(1 + \frac{t}{365}r\right) - b \cdot M$$

여기서 a와 b는 문제에서 주어진 상수이며 해약시점 t는 0<t<365인 연속적인 값이다. 만일 만기까지 해약을 하지 않는다면 두 상품 중 어떤 것을 선택할지라도 만기에 지급받는

금액은 같다. 또한 a와 b의 값은 만기 이전에 아무 때나 해약하더라도 해약부담금이 원금을 초과하지 않도록 합리적인 값을 가져야 함은 너무나 당연하다.

이 은행의 1년 만기 정기예금 상품 A와 B에 가입하는 고객이 있기 위해서는 다음 그래프에서 볼 수 있는 것처럼 R(A)와 R(B)의 직선이 만나는 점이 0과 365사이에 존재해야 합리적이다. 즉 R(A)와 R(B)의 직선이 만나지 않는다면 해약시점에 관계없이 두 그래프 중 위쪽에 존재하는 상품이 더 많은 금액을 돌려주므로 모든 고객은 당연히 위쪽에 존재하는 상품을 선택할 것이다.



$R(A)=R(B)$라 놓고 이를 t에 관해 풀면 $t=365\left(1+\dfrac{b}{a}\right)$가 되므로 이 해가 0과 365 사이에 존재하기 위한 조건은 $a>b$가 된다. $R(A)$와 $R(B)$를 동일한 좌표상에 그래프로 그리면 다음과 같다.

2) 실제로 은행에서 1년 만기 정기예금을 두 가지 상품으로 만들어 마케팅을 한다고 가정하면 위 그래프처럼 R(A)와 R(B)가 교차하는 지점이 0과 365사이에 존재하도록 a와 b가 미리 결정되어 있다고 할 수 있다. 따라서 K씨는 1)에서 구한 $t=365\left(1-\dfrac{b}{a}\right)$를 이용해 해약가능성이 있다고 예상하는 시점이 이 값보다 작다면 이러한 경우에 돌려받는 금액이 더 큰 상품 B를 선택하는 것이 유리하며 예상하는 해약시점이 이 값보다 크다면 이런 경우에 돌려받는 금액이 더 큰 상품 A를 선택하는 것이 유리할 것이다.

물론 개인의 성향에 따라 위험을 감수하고라도 주관적인 판단으로 이익이 더 크다고 생각되는 상품을 선택할 수도 있으나 이런 결정은 객관적이거나 논리적이라고 하기에는 많은 무리가 있다. 또한 두 그래프의 차이가 거의 없다면 어떤 상품이 더 유리하다거나 불리하다고 할 수 없지만 이러한 경우가 발생한다고 가정하는 것은 현실적으로 합리적이지 않으므로 배제해도 될 것이다.

[문제5] 9 이하의 서로 다른 자연수로 구성된 미지의 네 자리 수를 알아내기 위해 무작위로 네 자리 수를 다음과 같이 불러보았다. 이때 수의 자리와 숫자가 동시에 맞으면 스트라이크(strike)를, 자리는 틀렸지만 숫자가 맞으면 볼(ball)을 선언하도록 했다.

A : 9412를 불렀다. 결과는 스트라이크 1개였다.

B : 3197을 불렀다. 결과는 스트라이크 1개, 볼 1개였다.

C : 5678을 불렀다. 결과는 스트라이크 1개, 볼 1개였다.

D : 8956을 불렀다. 결과는 볼 2개였다.

E : 1234를 불렀다. 결과는 볼 2개였다.

F : 6713을 불렀다. 결과는 스트라이크 1개, 볼 1개였다.

위의 정보들만으로 답안을 얻기 위해서는 정보들의 활용 순서가 중요하다. 정보를 활용한 순서와 함께(예 : B−C−F−D−A−E) 미지의 네 자리 수를 답하시오(중앙대 2005).

▶ 전문가 클리닉

전형적인 논리 문제이다. 구술시험에서 이런 유형의 문제가 계속 출제될 가능성이 높다. 논리적인 문제는 초등학교 수준의 수학으로도 충분히 풀 수 있기 때문에 구술시험의 목적과 이념에 충실하다고 할 수 있다. 그러나 입시생의 입장에서는 이런 형식의 문제를 훈련하는 특별한 기술이나 공식이 없기 때문에 까다롭다고 생각될 것이다. 평소 유사한 문제를 잘 정리해서 조금씩 훈련하는 수밖에 없다. 예시답안을 보기 전에 꼭 자신의 답안을 작성해보길 바란다. 초등학생처럼 생각해보라!

▶ 예시답안

(C 또는 E)−(A 또는 D)−B−F 순서여야 한다. 예를 들어 C−E−A−D−B−F이거나 E−C−D−A−B−F등이 모두 정답이다(C와 E 그리고 A와 D는 순서에 상관없음). C, E 질문을 통해 9가 없음을, A번 질문을 통해 3이 있음을 알게 되고 D번 질문을 통해 7이 없음을, B 질문을 통해 1이 있으며 또한 2와 4가 없음을 알게 된다. 마지막으로 F번 질문을 통해 6이 없음과 5와 8이 반드시 있음을 알게 된다. 즉 숫자는 1, 3, 5, 8의 조합이다. 이를 6개의 정보를 이용해 자리를 찾아보면 3518의 답을 얻게 된다.

2005년 09월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학] 교통수단의 안정성 비교

[문제1] 아래 표는 교통수단A와 교통수단B의 운행 및 사망자 수에 관한 2003년도 통계자료이다. 이 통계자료에 근거해 두 교통수단의 안전성을 비교할 수 있는 세 가지 기준(예: 주행거리 대비 사망자수)을 제시하시오. 그 세 가지 기준에 따라 각 교통수단의 사망자 비율(근사값)을 계산하고 그 결과에 근거해 두 교통수단의 안전성을 비교 논술하시오.

<표1> 2003년도 교통수단A의 운행 및 사망자 수 통계자료

교통수단	등록대수 (100만대)	연간 총 주행거리 (10억Km)	1대당 연간 주행거리 (만Km)	평균 운행속도 (Km/h)	1대당 연간 운행횟수	사망자(명)	
						총사망자	10억 Km당
A	16	330	2.1	30	1800	7200	21.8

<표2> 2003년도 교통수단B의 운행 및 사망자 수 통계자료

교통수단	연간 총 이용승객 (100만명)	연간 총 주행거리 (100만Km)	평균 운행속도 (Km/h)	연간 총 운행횟수 (100만)	총사망자 (명)
B	67	1072	80	36	18

▶ 전문가 클리닉

수리논술 시험이 여러 학교에서 시행되면서 위 문제와 같은 '수리분석적' 문제가 새롭게 등장하고 있습니다. 주어진 자료나 통계, 그래프 안에 담겨있는 의미를 수학적으로 접근해 분석해야 합니다. 이 문제는 고려대에서 출제됐던 기출문제인데 이러한 수리분석적 문제는 수리논술 시험에서 점차 중요한 유형으로 자리잡아가고 있습니다. 수리분석적 문제는 난이도가 다양하므로 이 유형의 문제를 다루는 기본적 방법을 반드시 익힐 필요가 있습니다.

다음 예시답안은 학생들의 이해를 돕기 위해 자세하게 작성됐지만 실제로는 요약해서 답안을 제출하는 것이 더욱 경제적이고 바람직합니다. 특히 표를 설명하는 자세한 계산 과정을 생략하고 결과를 정확히 제시하는 것이 좋습니다.

▶ 예시답안

주어진 통계자료에 근거해 두 교통수단의 안정성을 비교할 수 있는 세 가지 기준은 주행거리 대비 사망자수, 연간 운행횟수 대비 사망자수, 연간 운행시간 대비 사망자수이다. 연간 총 이용승객에 대한 사망자수는 안정성 비교의 중요한 근거가 되지만 교통수단A에 대한 통계에서 그 값이 주어지지 않았으므로 비교 기준이 될 수 없다. 평균운행속도 대비 사망자수는 안전성을 평가하는 통계로서 의미가 적다.

세 가지 기준에 따른 두 교통수단의 사망자 비율을 표로 정리하면 다음과 같다.

	A	B	안정성 평가
주행거리 대비 사망자수	21.8명/10억Km	18명/10억7000Km	B가 안전
연간 운행횟수 대비 사망자수	$\frac{1}{4}$명/100만회	$\frac{1}{2}$명/100만회	A가 안전
연간 운행시간 대비 사망자수	약 654명/10억시간	약 1440명/10억시간	A가 안전

위 표에서 연간 운행횟수 대비 사망자수를 계산한 방법은 다음과 같다.

교통수단A는 등록대수 16(100만대)에 1대당 연간 운행횟수가 1800회이므로 연간 총 운행횟수는 1800×16(100만회)이고 사망자수가 7200명이므로 100만회당 사망자수는 $\frac{1}{1800\times16}=\frac{1}{4}$

(명/100만회)이다. 교통수단B는 연간 총 운행횟수 36(100만회)에 사망자수가 18명이므로 100만회당 사망자수는 $\frac{1}{2}$(명/100만회)이다.

또한 위 표에서 연간 운행시간 대비 사망자 수는 다음과 같이 계산했다.

교통수단A는 30Km/h의 속력으로 연간 330(10억Km)을 주행했으므로 그 운행시간은 110억 시간이다(∵ 운행시간=운행거리/평균속도). 이때 사망자수가 7200명이므로 10억 시간당 사망자수는 $\frac{7200}{11} \fallingdotseq 654$(명/10억시간)이다. 교통수단B는 80Km/h의 속력으로 연간 7200만Km를 주행했고 이를 근사값 10억Km로 계산하면 그 운행시간은 $\frac{1}{80}$(10억 시간)이 된다. 이때 사망자수가 18명이므로 10억 시간당 사망자수는 $\frac{18}{\frac{1}{80}} = 1440$(명/10억시간)이 된다.

위 표의 두 가지 기준에서 교통수단A의 안전성이 교통수단B를 앞서 전체적으로 볼 때 A의 안전성이 B보다 높은 것으로 결론 내릴 수 있다. 다만 위에서 언급한 바와 같이 총 이용승객에 대한 사망자의 비율을 비교할 수 없었다는 점에서 위 통계에 의한 안정성 비교 평가는 한계를 갖는다.

[문제2] 경기지역 고등학교 학생회 연합은 각 학교 학생들의 친목도모와 운영비 마련을 위해 축구대회를 열기로 했다. 실무기획단에서 다음 세 가지 안을 <표1>와 같이 제출했을 때 내가 학생회 연합 운영위원이라면 어떤 안을 지지하겠는 지 팀별 참가경비, 수익성 등을 분석해 의견을 논술하여라. 단 각 학교 학사일정을 감안해 대회기간은 10일을 넘지 않기로 하고 한 팀이 하루에 여러 경기를 할 수 있다고 한다. <표2>는 지난 회의에서 확정된 내용이다.

<표1>

	참가팀수	예선조편성	본선진출팀	예선진행방식	본선진행방식
첫 번째 안	32	각조 4개팀	각조 1·2위팀 16강 진출	각 조에 속한 팀들이 각각 서로 한 차례씩 경기하는 리그방식	각 경기마다 패자는 탈락하고 최후에 남는 두 팀이 우승을 겨루는 토너먼트 방식(3·4위 전은 치루지 않음)
두 번째 안	48	각조 3개팀	각조 1위팀 16강 진출		
세 번째 안	48	각조 6개팀	각조 1·2위팀 16강 진출		

<표2>

팀당 참가비	팀당 예선경기횟수×20만원
한 경기당 주최측의 지출 경비	10만원
참가팀 한 팀당 제공하는 기념품 비	5만원
하루에 진행할 수 있는 경기수	10경기

▶ 전문가 클리닉

문제를 정확히 이해했다면 일련의 수학적 분석과 계산을 통해 수익성을 분석할 수 있을 것입니다. 이 문제의 특징은 수리적 분석 후 어떤 안을 지지할 것인가라는 의견 제시를 요구했다는 것입니다. 지금까지 이런 유형의 문제는 없었는 데 수리분석적 문제가 이런 유형으로 발전할 수 있을 것 같아 출제했습니다. 이 문제에 대해 대부분의 학생들은 대개 첫 번째 안을 지지하지만 대회 개최의 취지가 친목도모와 운영비 마련을 위해서라고 했으므로 두 번째 안을 지지할 수도 있습니다.

▶ 예시답안

우선 대회의 수입을 이루는 참가비는 팀당 예선경기횟수×20만원이므로 세 가지 안의 예상 수입은 다음과 같이 계산할 수 있다.

	한 팀의 예선 경기횟수	팀당 참가비	예상수입(만원)
첫 번째 안	3	60	60×32=1920
두 번째 안	2	40	40×48=1920
세 번째 안	5	100	100×48=4800

이때 세 가지 안의 총 경기 수를 계산하면 예선 총 경기 수는 한조에 n개의 팀을 편성해 리그전을 치룰 경우

$${}_nC_2 \times \text{조의 수}$$

이고 본선 진출 16개 팀이 토너먼트 방식으로 우승자를 뽑을 때 경기 수는 15경기이므로 다음과 같다.

	조의 수	조당 경기수	예선 경기총수	본선 경기수	총 경기수
첫 번째 안	8	${}_4C_2=6$	48	15	63
두 번째 안	16	${}_3C_2=3$	48	15	63
세 번째 안	8	${}_6C_2=15$	120	15	135

이때 세 번째 안은 135경기를 치르는 데 하루에 치를 수 있는 최대경기수가 10경기이므로 대회기간이 10일을 넘어 채택될 수 없다.

첫 번째 안과 두 번째 안의 지출경비를 계산해보면 지출경비는 경기총수×10(만원)+(참가팀수)×5(만원)이므로 다음과 같다.

	경기에 따른 지출경비	기념품 제공비	예상지출(만원)
첫 번째 안	63×10(만원)	32×5(만원)	790(만원)
두 번째 안	63×10(만원)	48×5(만원)	870(만원)

따라서 첫 번째 안의 예상수익은 1130만원이고 두 번째 안의 예상수익은 1050만원이다.

(위의 계산 결과를 거친 후 자신의 판단에 따라 아래 두 답안 중 하나를 제시할 수 있다.)

▣ 첫 번째 안의 수익성이 높으므로 첫 번째 안을 지지하겠다.

▣ 두 번째 안이 더 많은 팀이 참가할 수 있고 팀당참가비가 저렴해 친목도모라는 취지에 더 부합한다고 판단되므로 두 번째 안을 지지하겠다.

[문제3] 다음 글을 읽고 물음에 답하여라.

As we know, the definition of the derivative $f(x)$ can be stated as follows:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \cdots\ (1)$$

It is understood here that Δx is nonzero change in the independent variable x, and that $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ is the corresponding change in y. We introduced the equivalent notation ⋯(2)

for this derivative, and we emphasized there that (2) is a single symbol and not a fraction. However, it is certainly true that (2) looks like a fraction, and in some circumstances it even acts like one. The most important example of this is the chain rule,

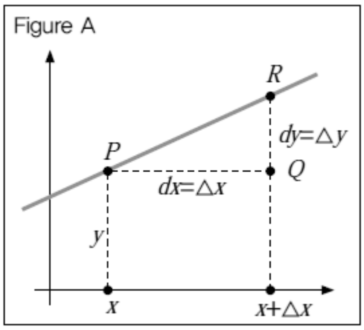
$$\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{dy}{\cancel{du}}\frac{\cancel{du}}{dx}=\frac{dy}{dx}$$

where the correct formula for the derivative of a composite function is obtained by canceling as if the derivative were fractions.

Our present purpose is to give individual meanings to the pieces of (2), namely to dy and dx, in such a way that their quotient is indeed the derivative $f(x)$. Our reasons for doing this are difficult to explain in advance. Suffice it to say that this notational device is a necessary prelude to the powerful computational methods introduced in this chapter—integration by substitution, and the solution of certain differential equations by separating the variables.

We begin by considering the special case in which y is a linear function of x.

$$y=mx+b \ \cdots \ (3)$$

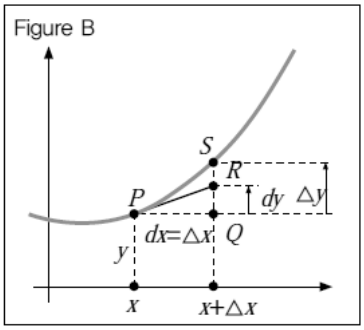


Let $P=(x, y)$ be a point on this line <Fig. A>. If x is given an increment Δx and if the corresponding increment in y is Δy, then the slope of the line (3) is

$$m=\frac{change\ in\ y}{change\ in\ x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

So

$$\Delta y=m\Delta x \ (4).$$



When working in this way with increments along a straight line, we denote these increments by the symbols dx and dy, so that by definition.

$$dx=\Delta x \text{ and } dy=\Delta y$$

and we call them differentials. With this notation (4) becomes

$$dy=m\,dx \ \cdots \ (5).$$

Now consider an arbitrary function

$$y=f(x) \ \cdots \ (6)$$

and assume that this function has a derivative at x. If P is the corresponding point on the graph, then the tangent at P is the straight line PR with slope $m=f'(x)$. By the differential dx and dy arising from (6), we mean the increment in the variables x and y that are associated with this tangent line. To state this more precisely, the differential dx of the independent variable x is any increment Δx in x, as shown

$$dx=\Delta x \ \cdots \ (7);$$

and the differential dy of the dependent variable y is the corresponding increment in y along the tangent line, namely,

$$dy=f'(x)dx \ \cdots \ (8).$$

Thus, as <Fig. B> shows, if $dx=\Delta x=PQ$ is any change in x, then $\Delta y=QS$ and $dy=QR$ are the corresponding changes in y along the curve and along the tangent line, respectively. We observe that (8) reduces to (5) when $f(x)=mx+b$, if dx, then we can divide (8) by it and obtain

$$\frac{dy}{dx}=f'(x) \quad \cdots(9).$$

Up to thus point equation (9) has been trivially true because its two sides have been merely two different ways of writing the same thing, namely the derivative if the function $y=f'(x)$. The new feature of (9) in our present discussion is that now the Leibniz symbol on the left not only looks like a fraction but is a fraction.

1) 위 글을 요약하고 $\frac{dy}{dx}$가 분수인지 아닌지에 대해 설명하여라.

2) 이 글에서 설명하고 있는 원리에 따라 다음 식의 빈칸에 알맞은 식을 써넣어라.

$$d(x^4-3x^2-3)=(\qquad\qquad\qquad)dx$$

▶ 전문가 클리닉

통합교과형 논술이라는 말이 입시에서 유행입니다. 자연계 학생들의 경우 통합교과형 논술의 극한은 언어, 영어, 수리가 모두 통합된 문제일 것입니다. 물론 이러한 시험 유형이 얼마나 확대될지는 알 수 없으나 지금 이미 서강대에서는 영어혼합수리논술 시험을 실시하고 있습니다. 그런 점에서 위의 문제를 다루어보았습니다.

이 문제는 학생들이 늘 궁금해 하는 문제 $\frac{dy}{dx}$ 표현이 분수인가 아닌가라는 주제에 대한 대학 미적분학 수준의 해답을 담고 있는 것입니다. 아래의 핵심적인 단어들을 참조해 위 문장을 정확히 해석하고 나면 평소의 궁금증이 해결될 것입니다. 풀이는 여러분께 숙제로 남기겠습니다.

derivative : 도함수(derive(끌어내다)에서 파생)
chain rule : 연쇄법칙
composite function : 합성함수
canceling : 약분
quotient : 몫
Suffice it to say that : (지금은) ~라고만 말해 두자 ; ~라고 말하면 충분하다
notational device : 표기법상의 장치, 고안
integration by substitution : 치환적분법
differential equations by separating the variables : 변수분리에 의한 미분방정식
differentials : 미분
this function has a derivative at x : 이 함수는 x값에서 미분계수를 갖는다.

[문제4] 포물선 $y=b(a^2-x^2)$과 x축으로 둘러싸인 영역 S의 넓이가 $\frac{4}{3}$로 일정하다. 다음 물음에 답하시오. (단 a>0, b>0)

1) b를 a에 관한 식으로 나타내시오.

2) 영역 S에 내접하는 원의 반지름의 길이 r을 a에 관한 식으로 나타내시오.

3) r의 최대값을 구하시오.

▶ 전문가 클리닉

지난해 고려대의 2학기 수시모집에서 출제된 문제입니다. 무엇보다도 포물선의 기본 개념을 확실히 알아두는 것이 우선입니다. 포물선의 방정식과 포물선이 만드는 넓이를 구하는 공식은 잘 알아둡시다. 그리고 앞으로의 수시모집은 단순 풀이형 문제를 지양하고 논술형 문제를 선호한다는 것을 명심해두기 바랍니다.

▶ 예시답안

1) $y=-bx^2+ba^2$이고 $b(a^2-x^2)=0$에서 x절편은 $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$이므로 영역 S의 넓이를 적분을 이용해 구한다.

$$\begin{aligned}2\int_0^a(-bx^2+ba^2)dx &= 2\left[-\frac{b}{3}x^3+ba^2x\right]_0^a \\ &= 2\left(-\frac{b}{3}a^3+ba^3\right) \\ &= 2\left(\frac{2}{3}a^3b\right) \\ &= \frac{4}{3}a^3b\end{aligned}$$

영역 S의 넓이는 $\frac{4}{3}$로 일정하므로 다음과 같다.

$$\frac{4}{3}a^3b=\frac{4}{3}$$

$$a^3b=1$$

$$\therefore b=\frac{1}{a^3}$$

그러나 포물선의 넓이를 구하는 공식을 이용하면 더 간단하게 문제를 풀 수 있다.

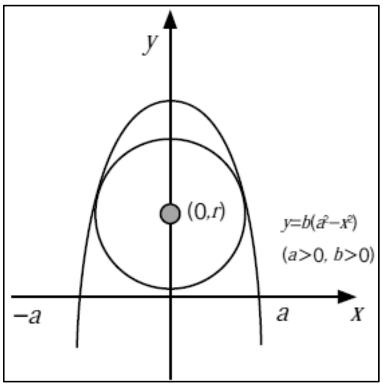
$$\frac{|-b|}{6}\{a-(-a)\}^3=\frac{4}{3}$$

$$\frac{b}{6}\times(2a)^3=\frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3}a^3b=\frac{4}{3}$$

$$a^3b=1$$

$$\therefore b=\frac{1}{a^3}$$



2) 영역 S에 내접하는 반지름 r인 원의 방정식은 다음과 같다.

$x^2+(y-r)^2=r^2$ ⋯ (1)

(1)이 $y=\frac{1}{a^3}(a^2-x^2)$ ⋯ (2)와 두 점에서 접하므로 (1)과 (2)를 연립하면 중근을 갖는다.

(2)를 정리하면 다음과 같다.

$a^3y=a^2-x^2$

$x^2=a^2-a^3y$ ⋯ (3)

(3)을 (1)에 대입하면 $a^2-a^3y+y^2-2yr=0$이 된다.

$y^2-(a^3+2r)y+a^2=0$

이 방정식은 중근을 가지므로 판별식(D)이 0이어야 한다.

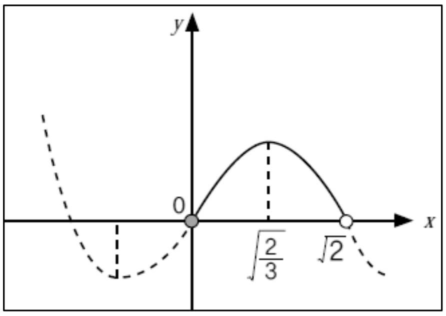
$D=(a^3+2r)^2-4a^2=0$

$a^6+4ra^3+4r2-4a^2=0$

$4r^2+4a3r+a6-4a^2=0$

인수분해하면 $(2r+a^2+2a)(2r+a^3-2a)$가 되므로 r을 구할 수 있다.

$r=-\frac{a^3+2a}{2}$ 또는 $r=-\frac{a^3-2a}{2}$



그런데 $r=-\frac{a^3+2a}{2}$라면 $a>0$에서 $r<0$이 되어 모순이다.

(∵ r은 반지름)

∴ $r=-\frac{a^3-2a}{2}$

3) $r=-\frac{a^3-2a}{2}(r>0)$를 a로 미분을 하자.

$$\frac{dr}{da}=-\frac{1}{2}(3a^2-2)=-\frac{3}{2}(a^2-\frac{2}{3})=-\frac{3}{2}\left(a+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(a-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

따라서 r은 $a=\sqrt{\frac{2}{3}}$에서 최대값을 갖는다.

그러므로 r의 최대값은 $r=\frac{2\sqrt{6}}{9}$가 된다.

2005년 10월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학] 귀류법의 우아함

[문제1] P가 n차 다항식일 때 방정식 $P(x)=0$의 근의 개수는 n보다 클 수 없음을 증명하시오.

▶ 전문가 클리닉

수학의 학문적 특성은 논리적 증명에 있습니다. 고등학교 수학 교육을 통해 학생들이 배워야 하는 것은 단순한 수학적 지식이 아닙니다. '증명하기 전까지는 참임을 인정할 수 없다'는 수학의 학문적 원칙에 따라 가장 기초적인 사실조차도 정말 참인지 한 번쯤 의심해보는 자세를 배워야 하는 것입니다. 또한 당연하게 받아들였던 사실이 수학적으로 어떻게 증명되는 지를 체험하고 그 논리의 우아함에 감탄해보는 것은 사실상 고등학교 수학 교육의 중요한 목표입니다. 그러나 현재의 수학교육은 5지 선다형 문제풀이에 치우침으로써 이러한 목적을 달성하기에는 미흡한 면이 있지요.

바로 이러한 문제점을 보완해주는 역할을 하고 있는 것이 현재로서는 수리논술이나 심층면접 시험입니다.

위 문제는 서울대에서 출제되었던 심층면접 문제로서 언뜻 당연해 보이는 명제에 대한 논리적 증명을 요구합니다. 이 문제는 귀류법으로 증명할 수 있는 데 귀류법은 어떤 명제나 그 명제의 결론을 부정하면 공리, 정리, 가정에 모순이 됨을 보임으로써 그 명제가 참임을 보이는 증명법입니다.

▶ 예시답안

방정식 $P(x)=0$이 k $(k \geq n+1)$개의 근을 갖는다고 가정하자.

이때 근을 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ a_{n+1},\ \cdots,\ a_k$라 하면 $P(x)$는

$x-\alpha_1,\ x-\alpha_2,\ x-\alpha_3,\ \cdots, x-\alpha_n,\ x-\alpha_{n+1},\ \cdots,\ x-\alpha_k$를 인수로 갖는다.

$$\therefore P(x)=\alpha(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)(x-\alpha_{n+1})\cdots(x-\alpha_k)$$

따라서 $P(x)$는 k차 다항식이 되고 $k>n$이므로 $P(x)$는 n차 다항식이라는 조건에 모순이다.

그러므로 $P(x)=0$의 근의 개수는 n보다 클 수 없다.

[문제2] 다항식 $f_1,\ f_2,\ f_3,\ \cdots$는 다음을 만족한다.

(가) $f_1(x)=x$

(나) $\dfrac{d}{dx}f_n(x)=nf_{n-1}(x)\ (n=2,3,\ \cdots)$

(다) $\displaystyle\int_{-1}^{1}f_n(x)\,dx=0\ (n=1,2,\ \cdots)$

$f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5$를 구해 보면 다음과 같다.

$$f_2(x)=x^2-\frac{1}{3},\qquad f_3(x)=x^3-x,$$

$$f_4(x)=x^4-2x^2+\frac{7}{15},\quad f_5(x)=x^5-\frac{10}{3}x^3+\frac{7}{3}x$$

1) $f_6(x)$를 구하시오.

2) 방정식 $f_n(x)=0$이 서로 다른 n개의 실근을 가지면 $f_{n-1}(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 정확히 $n-1$임을 보이시오.

3) 방정식 $f_6(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 정확하게 2개임을 보이시오.

※ 참고 : $7^4-5\cdot 3\cdot 7^3+3^2\cdot 7^3-3^2\cdot 31=64$

4) 6 이상의 모든 n에 대해서 방정식 $f_n(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 n보다 작게 됨을 설명하시오.

▶ 전문가 클리닉

[문제1]과 함께 출제된 서울대 심층면접 문제입니다. 1)번 문항은 문제의 조건을 정확히 적용하여 미적분계산을 할 수 있는지 묻고 있으며 나머지 문항들은 증명이 필요합니다.

▶ 예시답안

1) 주어진 조건 (나)에서

$$\frac{d}{dx}f_6(x)=6f_{6-1}(x)=6f_5(x)=6\left(x^5-\frac{10}{3}x^3+\frac{7}{3}x\right)=6x^5-20x^3+14x$$

$$\therefore f_6(x)=\int(6x^5-20x^3+14x)dx=x^6-5x^4+7x^2+C \text{ (} C\text{는 적분상수)}$$

조건 (다)에서 $\int_{-1}^{1}f_6(x)dx=0$이므로

$$\int_{-1}^{1}f_6(x)dx=\int_{-1}^{1}(x^6-5x^4+7x^2+C)dx$$
$$=\left[\frac{1}{7}x^7-x^5+\frac{7}{3}x^3+Cx\right]_{-1}^{1}$$
$$=2\left(\frac{1}{7}-1+\frac{7}{3}+C\right)$$
$$=2\left(\frac{31}{21}+C\right)$$

$2\left(\frac{31}{21}+C\right)=0$에서 $C=-\frac{31}{21}$

$$\therefore f_6(x)=x^6-5x^4+7x^2-\frac{31}{21}$$

2) 방정식 $f_n(x)=0$이 서로 다른 n개의 실근 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_n(\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\cdots<\alpha_n)$을 가진다고 하면

$$f_n(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n) \text{ ...... (i)}$$

으로 놓을 수 있다.

(i)의 양변을 x에 대해 미분하면

$$\frac{d}{dx}f_n(x)=(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)+(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)$$
$$+\cdots+(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1})$$

조건 (나)에서 $\frac{d}{dx}f_n(x)=nf_{n-1}(x)$이므로

$$f_{n-1}(x)=\frac{1}{n}\{(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)+(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)$$
$$+\cdots+(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1})\}$$

x에 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_n$을 각각 대입하면

$$f_{n-1}(\alpha_1)=\frac{1}{n}(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\cdots(\alpha_1-\alpha_n)$$

$$f_{n-1}(\alpha_2)=\frac{1}{n}(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\cdots(\alpha_2-\alpha_n)$$

$$\vdots$$

$$f_{n-1}(\alpha_n)=\frac{1}{n}(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)\cdots(\alpha_n-\alpha_{n-1})$$

이때 $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\cdots<\alpha_n$이므로

$$f_{n-1}(x)=\frac{1}{n}(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)+(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)+$$
$$\cdots+(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1})$$

x에 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_n$을 각각 대입하면

$$f_{n-1}(\alpha_1)=\frac{1}{n}(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\cdots(\alpha_1-\alpha_n)$$

$$f_{n-1}(\alpha_2)=\frac{1}{n}(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\cdots(\alpha_2-\alpha_n)$$

$$\vdots$$

$$f_{n-1}(\alpha_n)=\frac{1}{n}(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)\cdots(\alpha_n-\alpha_{n-1})$$

이때 $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\cdots<\alpha_n$이므로

$$f_{n-1}(\alpha_1)\cdot f_{n-1}(\alpha_2)<0$$
$$f_{n-1}(\alpha_2)\cdot f_{n-1}(\alpha_3)<0$$
$$\vdots$$
$$f_{n-1}(\alpha_{n-1})\cdot f_{n-1}(\alpha_n)<0$$

중간값의 정리에 의하여 방정식 $f_{n-1}(x)=0$은

$$\alpha_1<\beta_1<\alpha_2<\beta_2<\alpha_3<\cdots<\alpha_{n-1}<\beta_{n-1}<\alpha_n$$

을 만족하는 실근 $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \cdots,\ \beta_{n-1}$을 가지므로 서로 다른 실근의 개수는 $n-1$이다.

<별해>

방정식 $f_n(x)=0$이 서로 다른 실근을 가지고 $y=f_n(x)$가 미분가능한 함수이므로 롤의 정리에 의해 $f_n{}'(x)=0$을 만족하는 근 β_k가 $f_n(x)=0$의 실근 α_k와 α_{k+1} 사이에 적어도 하나 존재한다.

조건에서 $f_n(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 n개라고 했으므로 $f_n{}'(x)=0$의 실근의 개수는 적어도 $n-1$개가 된다. 그런데 $f_n{}'(x)=0$는 $n-1$차 방정식이므로 [문제1]에서 근의 개수는 $n-1$보다 클 수는 없다.

따라서 $f_n'(x)=0$의 실근의 개수는 $n-1$이고 $f_{n-1}(x)=\frac{1}{n}\frac{d}{dx}f_n(x)$이므로 $f_{n-1}(x)=0$의 실근도 $n-1$이 된다.

3) $f_6(x)=x^6-5x^4+7x^2-\frac{31}{21}$에서

$$f_6'(x)=6x^5-20x^3+14x$$
$$=2x(3x^4-10x^2+7)$$
$$=2x(3x^2-7)(x^2-1)$$
$$=2x(\sqrt{3}x-\sqrt{7})(\sqrt{3}x+\sqrt{7})(x+1)(x-1)$$

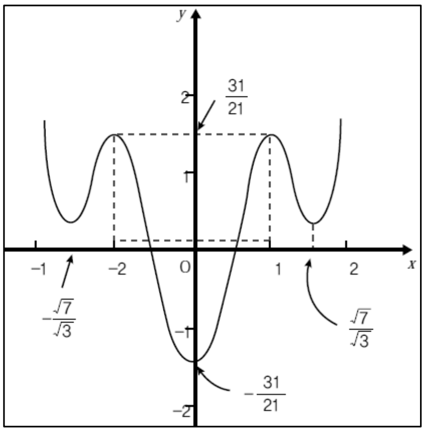
$f_6'(x)=0$에서

$$x=\pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \text{ 또는 } x=\pm 1 \text{ 또는 } x=0$$

함수 $f_6(x)$의 증가 및 감소를 나타내면 다음 표와 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f_6'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f_6(x)$	↘	$\frac{64}{189}$	↗	$\frac{32}{21}$	↘	$-\frac{31}{21}$	↗	$\frac{32}{21}$	↘	$\frac{64}{189}$	↗

위의 표를 이용하여 함수 $f_6(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같고 이때 함수 $f_6(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 실근의 개수는 2개다.



4) $f_n(x)=0$의 서로 다른 실근은 최대 n개까지 될 수 있으므로 $f_n(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 n이 아님을 보이면 된다.

$f_n(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 n이라고 하면 위의 2)에 의해 $f_{n-1}(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 $n-1$이고 $f_{n-1}(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 $n-1$이므로 2)에 의해 $f_{n-2}(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 $n-2$다.

위와 같은 방법으로 하면 2)에 의해 $f_6(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 6이 되고 이는 3)에 모순이므로 $f_n(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 n이 아니다.

따라서 6 이상의 모든 n에 대해서 방정식 $f_n(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 n보다 작다.

[문제3] 평면 위에 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형 $ABCD$와 임의의 점 P가 있다. 정사각형의 대각선의 교점을 D라 하고 $a=\overline{PA}^2, b=\overline{PB}^2, c=\overline{PC}^2, d=\overline{PD}^2, s=\overline{OP}^2$이라 하자.

1) s를 a, b, c, d의 식으로 나타내시오.

2) 임의의 양의 실수 u, v, x, y에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{u^2}{x}+\frac{v^2}{y} \geqq \frac{(u+v)^2}{x+y}$$

3) 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

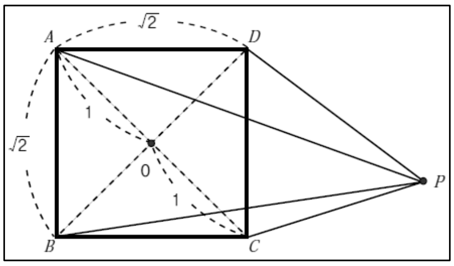
$$\frac{a^2}{1+a}+\frac{b^2}{1+b}+\frac{c^2}{1+c}+\frac{d^2}{1+d} \geqq 2$$

▶ 전문가 클리닉

부등식 $A \geqq B$를 증명하는 가장 기본적인 방법은 $A-B \geqq 0$임을 증명하는 것이다. 위의 2)번 문제가 대표적인 유형이라 할 수 있다.

대개 이런 문제에 대한 학생들의 풀이를 보면 $A-B$의 식을 구해 그 값이 0보다 크거나 같음을 보이는 것이 아니라 부등식 $A \geqq B$ 자체를 변형해 나가는 경우가 많다. 그러나 증명해야 할 사실을 논리 전개의 전제로 삼아서는 곤란하다. 학생들도 이런 사실을 알고는 있겠으나 증명의 형태를 어떻게 갖춰야 논리 전개의 순서가 올바른지 명확하게 알지 못하는 것 같다.

▶ 예시답안



1) $\triangle PAC$에서 O는 $\overline{AC}$의 중점이므로 중선정리에 의해

$$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=2(\overline{OP}^2+\overline{OA}^2)$$

즉 $a+c=2(s+1)$ ⋯ (ⅰ)

$\triangle PBD$에서 마찬가지로 $\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=2(\overline{OP}^2+\overline{OB}^2)$

$$b+d=2(s+1) \cdots \text{(ii)}$$

(ⅰ)과 (ⅱ)를 더하면 $a+b+c+d=4s+4$ ⋯ (ⅲ)

$$\therefore s=\frac{a+b+c+d}{4}-1$$

2) 임의의 양의 실수 $u,\ v,\ x,\ y$에 대해

$$\frac{u^2}{x}+\frac{v^2}{y}-\frac{(u+v)^2}{x+y}=\frac{u^2y(x+y)+v^2x(x+y)+xy(u+v)^2}{xy(x+y)}$$

$=\dfrac{(uy-vx)^2}{xy(x+y)} \geqq 0$ ($\because x,\ y$는 양수. 단 등호는 $uy=vx$일 때)

$\therefore \dfrac{u^2}{x}+\dfrac{v^2}{y} \geqq \dfrac{(u+v)^2}{x+y}$ (등호는 $uy=vx$ 즉 $\dfrac{u}{x}=\dfrac{v}{x}$일 때 성립)

3) 2)에서 증명한 부등식에 의해

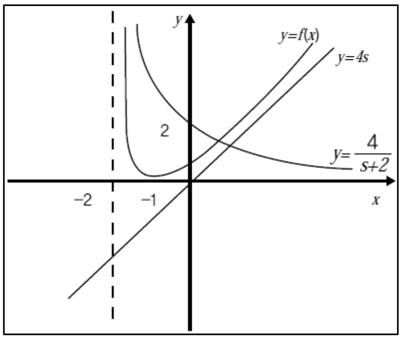
$$\frac{a^2}{1+a}+\frac{b^2}{1+b}+\frac{c^2}{1+c}+\frac{d^2}{1+d} \geqq \frac{(a+b)^2}{2+a+b}+\frac{(c+d)^2}{2+c+d}$$

$\geqq \dfrac{(a+b+c+d)^2}{4+a+b+c+d}=\dfrac{(4s+4)^2}{4+4s+4}$ ($\because$ (ⅲ)에서) ⋯ (ⅳ)

이때 $f(s)=\dfrac{(4s+4)^2}{4s+8}$ $(s \geqq 0,\ \because s=\overline{OP}^2)$의 최소값을 조사하면

$$f(s)=\frac{(4s+4)^2}{4(s+2)}=\frac{4(s^2+2s+1)}{s+2}=4\left(s+\frac{1}{s+2}\right)=4s+\frac{4}{s+2}\quad \cdots (\text{v})$$

그래프 (v)는 $y=4s$와 $y=\frac{4}{s+2}$의 합성이므로 그 개형은 오른쪽 그림과 같다.



$s>-2$일 때 $4\left(s+\frac{1}{s+2}\right)$의 최소값은 산술기하평균을 이용하면

$4\left(s+\frac{1}{s+2}\right)=4\left(s+2+\frac{1}{s+2}-2\right)\geqq 4(2\sqrt{1}-2)=0$ (등호는 $s=-1$일 때 성립)

따라서 $y=f(s)$ 그래프는 $s=-1$에서 $(-1,\ 0)$을 지나고 $s\geqq -1$일 때 증가함수가 된다.

그런데 $s\geqq 0$이면 (v)에서 $f(s)\geqq 2$ ⋯ (vi)

(iv)(v)(vi)에서

$$\frac{a^2}{1+a}+\frac{b^2}{1+b}+\frac{c^2}{1+c}+\frac{d^2}{1+d}\geqq\frac{(4s+4)^2}{4s+8}\geqq 2$$

<별해>

위의 (v)에서 $f(s)-2$의 식을 구해 $f(x)-2\geqq 0$임을 보이는 방법도 있다.

[문제4] 한 변의 길이가 2인 정육면체가 중심이 O인 구에 내접하고 있다. 구 위의 임의의 점 P에서 정육면체의 각 대각선에 내린 수선의 길이를 각각 $a,\ b,\ c,\ d$라 하고 각 대각선와 $\overrightarrow{OP}$가 이루는 각의 크기를 차례대로 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$라 하자. 또 $t=a^2+b^2+c^2+d^2$ $s=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta$ 1) 구의 반지름의 길이를 구하시오. 2) t를 s의 식으로 나타내시오. 3) t의 값은 점 P의 위치에 관계없이 일정함을 보이시오.

▶ 전문가 클리닉

도형의 성질만을 이용해 증명하기 어려운 많은 문제들이 평면좌표나 공간좌표에서 도형들을 다룸으로써 쉽게 증명된다. 문제는 학생들이 해석기하학의 발상법이 얼마나 강력한 증명의 도구가 되는지를 망각한다는 데 있다. 위 문제도 공간좌표를 도입하고 벡터의 원리를 이용하면 간단히 증명할 수 있다.

▶ 예시답안

1) 정육면체의 한 변의 길이가 2이므로 대각선의 길이는

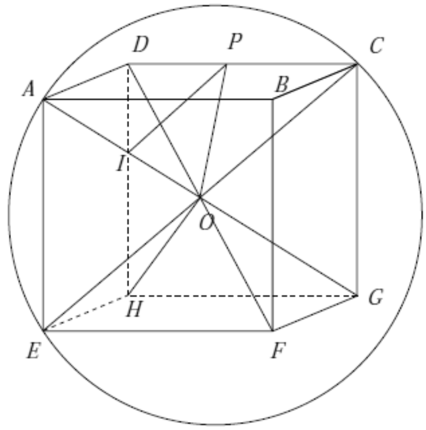
$$\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$$

따라서 구의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$

2) 점 P에서 $\overline{OA}$에 내린 수선의 발을 I라 하고 $\overline{PI}=a$, $\angle POI=\alpha$라 하면

$$a=\overline{OP}\sin\alpha=\sqrt{3}\sin\alpha$$

$$\therefore a^2=3\sin^2\alpha$$



마찬가지로 $b^2=3\sin^2\beta$, $c^2=3\sin^2\gamma$, $d^2=3\sin^2\delta$가 된다.

$$\therefore t=a^2+b^2+c^2+d^2$$

$$=3\sin^2\alpha+3\sin^2\beta+3\sin^2\gamma+3\sin^2\delta$$

$$=3(1-\cos^2\alpha)+3(1-\cos^2\beta)+3(1-\cos^2\gamma)+3(1-\cos^2\delta)$$

$$=12-3s$$

$$\therefore t=12-3s$$

3) s의 값이 일정하면 t의 값도 일정함이 증명된다.

증명을 위해 구의 중심 O를 원점으로 하는 공간좌표를 생각해보자.

$A(1,-1,1)$ $B(1,1,1)$ $C(-1,1,1)$ $D(-1,-1,1)$ $P(x,y,z)$라 하면 $\angle POA=\alpha$이므로

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|}=\frac{x-y+z}{3}$$

마찬가지로 $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\cos\delta$를 구해 s에 대입하면

$$s=\frac{(x-y+z)^2}{9}+\frac{(x+y+z)^2}{9}+\frac{(-x+y+z)^2}{9}+\frac{(-x-y+z)^2}{9}$$

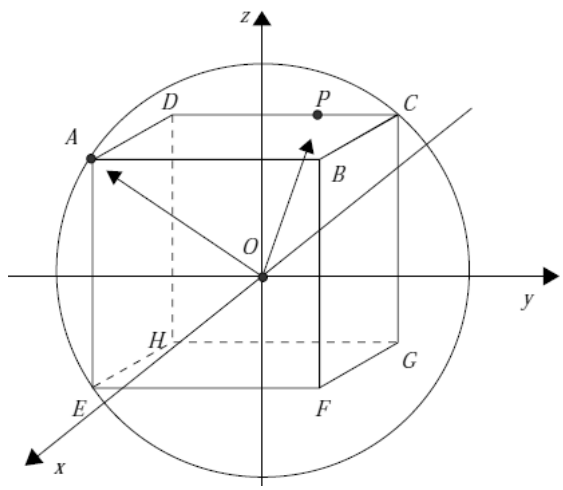
$$=\frac{1}{9}(4x^2+4y^2+4z^2)$$

$$=\frac{4}{9}(x^2+y^2+z^2)$$

$$=\frac{4}{9}\times3\ \ (\because x^2+y^2+z^2=\overline{OP}^2=3)$$

$$=\frac{4}{3}$$

$$\therefore t=12-3\cdot\frac{4}{3}=8\text{로 일정하다.}$$



2005년 11월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학] 무게 다른 진주 골라내기

1. 모양과 크기가 같은 진주들이 있다고 하자. 이 중에는 무게가 다른 진주가 하나 섞여있다. 이 진주를 찾기 위해 양팔 저울 위에 진주를 올려놓아 양쪽 팔의 무게를 비교하는 방법을 사용할 수 있다. 다음 물음에 답하시오.
1) 9개의 진주가 있는 데 이 중 8개는 무게가 같고 나머지 1개는 무게가 다르다. 무게가 다른 진주가 나머지보다 무거운지 가벼운지는 아직 알 수 없다. 양팔 저울만을 세 번 써서 무게가 다른 진주 1 개를 찾을 수 있는 지 논하시오.
2) 80개의 진주가 있다. 이 중 1개는 나머지 진주들보다 가볍다. 양팔 저울을 네 번만 써서 무게가 다른 진주를 찾아낼 수 있는 지 논하시오.

▶ 전문가 클리닉

무게가 다른 진주를 찾아낼 수 있는 지 정확히 판단하고 그 방법을 논리적으로 설명할 수 있는 지 묻는 문제입니다. 올바른 답을 제시하는 것은 기본이고 자신이 낸 답에 대해 수학적 논리를 갖춰 설명할 수 있어야 좋은 평가를 받을 수 있습니다. 위의 두 경우 모두 무게가 다른 진주를 찾아낼 수 있습니다. 아래에 예시답안과 함께 한 학생의 우수답안을 실었습니다.

▶ 예시답안

1) 양팔 저울을 세 번 이용해서 9개의 진주 중 무게가 다른 하나의 진주를 찾을 수 있다.

우선 무게가 다른 하나의 진주가 나머지 진주에 비해 무거운지 가벼운지 판정해야 한다. 이를 위해 9개의 진주를 3개씩 세 묶음으로 나눠 각 묶음을 A,B,C라 하고 양팔 저울에 달아 무게를 비교해보자.

먼저 A와 B를 저울에 달아본다. 이때 무게가 같다면 무게가 다른 진주는 C에 있다. A와 C를 비교하면 무게가 다른 하나의 진주가 다른 것보다 무거운지 가벼운지 알 수 있다. 만약 A와 B를 저울에 달아 무게가 다르다면 A와 C를 다시 비교해본다. A와 C의 무게가 다르면 무게가 다른 진주는 A에 있고 무게가 같다면 무게가 다른 진주는 B에 있다. 결국 양팔 저울을 두 번 이용해서 무게가 다른 진주가 A, B, C 중 어디에 들어있는 지 그리고 그 진주가 다른 진주에 비해 무거운지 가벼운지 알아낼 수 있다.

다음으로 무게가 다른 진주가 든 묶음을 저울에 달아본다. 3개 중 2개를 올려놓았을 때 무게가 같다면 나머지 한 진주가 무게가 다른 진주이다. 만약 무게가 다르다면 우리가 찾고 있는 진주가 다른 진주에 비해 무거운지 가벼운지를 이미 알고 있으므로 어느 쪽이 다른 진주와 무게가 다른 것인지를 결정할 수 있다. 결국 항상 세 번 만에 무게가 다른 진주를 찾아낼 수 있다.

2) 양팔 저울을 네 번 이용하면 80개의 진주 중 다른 진주에 비해 무게가 가벼운 진주를 찾아낼 수 있다.

먼저 80개의 진주를 27개, 27개, 26개의 세 묶음으로 나눈다. 27개가 든 묶음 두 개의 무게를 양팔 저울로 비교하면 가벼운 진주가 어느 묶음에 들어있는 지 알 수 있다. 만약 두 묶음의 무게가 같다면 가벼운 진주는 26개가 든 묶음에 들어있고 어느 한 묶음이 가볍다면 그 묶음에 가벼운 진주가 들어있는 것이다.

만약 가벼운 진주가 27개의 묶음 중에 들어있다면 이 진주들을 다시 9개씩 세 묶음으로 나눈다. 이 중 두 묶음의 무게를 비교하면 가벼운 진주가 세 묶음 중 어디에 들어있는 지 알 수 있다.

가벼운 진주가 들어가있는 묶음의 9개의 진주를 다시 3개씩 세 묶음으로 나눠 두 묶음의 무게를 비교하면 이 중 어디에 가벼운 진주가 들어있는 지 알 수 있다. 또 3개의 진주 중 2개의 무게를 비교하면 셋 중 가벼운 진주가 어느 것인지 결정할 수 있다. 즉 네 번 만에 가벼운 진주를 찾게 된다.

만약 26개 중에 가벼운 진주가 들어있다면 이 묶음을 다시 9개, 9개, 8개의 묶음으로 나눈 다음 9개, 9개 묶음의 무게를 비교한다. 무게가 서로 다르다면 더 가벼운 쪽에 가벼운 진주가 들어있는 것이다. 여기서 앞서와 같은 과정을 거치면 네 번 만에 가벼운 진주를 찾게 된다.

만약 무게가 같다면 8개 중 하나가 가벼운 진주다. 그러면 다시 8개를 3개, 3개, 2개로 나눈다. 3개, 3개 묶음의 무게를 비교해서 만약 같다면 가벼운 진주는 2개 중 하나이고, 다르다면 가벼운 쪽 3개의 진주 중에 가벼운 진주가 들어있다. 어느 경우이든 양팔 저울을 한 번 더 이용하면 가벼운 진주를 찾을 수 있다. 결국 네 번 만에 가벼운 진주를 찾는다. 따라서 어떤 경우든 양팔 저울을 네 번 이용하면 가벼운 진주를 찾아낼 수 있다.

▶ 1)번 문항에 대한 학생 우수답안

9개를 세 묶음으로 나눈 후 두 묶음씩 비교하며 무게를 재본다(2번 측정). 그러면 그 중 한 묶음은 무게가 다르다는 사실을 알 수 있게 된다. 그 다음 그 묶음의 진주 3개 중 2개의 무게를 달아 본다. 만약 둘의 무게가 같다면 나머지 1개가 무게가 다른 진주이고 무게가 다르다면 무게를 단 것 중 하나가 무게가 다른 진주이다. (정상적인 진주의 무게는 9개를 세 묶음으로 나누고 두 묶음씩 측정했을 때 알 수 있다.)

2. 다음 <표>는 멕시코의 북미자유무역협정(NAFTA) 가입 전과 가입 후 경제상황을 나타낸 것이다. 이에 근거해 다음 물음에 답하시오.

1) 멕시코의 NAFTA 가입 이전과 이후의 주요 경제 상황을 비교분석하시오.

2) "NAFTA 가입 이후 경상수지 적자가 늘어나면 경제성장률은 높아지고 경상수지 적자가 줄어들면 경제성장률도 낮아졌다"라는 분석이 옳은지에 대해 논하시오.

3) NAFTA 가입이 멕시코 경제에 긍정적 효과를 가져왔는 지에 대한 의견을 논술하시오.

<표1> NAFTA 가입 직전까지의 멕시코 주요 경제지표

	1990년	1991년	1992년	1993년
경제성장률(%)	5.2	4.5	3.5	1.9
수출(10억달러)	40.7	42.7	46.2	51.9
수입(10억달러)	41.6	50.0	62.1	65.4
경상수지(10억달러)	-7.5	-14.6	-24.4	-23.4
소비자물가상승률(%)	26.7	22.7	15.5	9.6
실업률(연평균%)	7.4	7.7	8.2	9.3
외채(10억달러)	104.3	116.6	117.6	131.5
환율(페소/달러)	2807	3017	3094	3.1

<표2> NAFTA 가입 이후의 멕시코 주요 경제지표

	1994년	1995년	1996년	1997년	1998년	1999년
경제성장률(%)	4.5	-6.2	5.1	6.8	4.9	3.7
수출(10억달러)	60.9	79.5	96.0	110.4	117.5	136.4
수입(10억달러)	79.3	72.5	89.5	109.8	125.4	142.0
경상수지(10억달러)	-29.7	-1.6	-2.5	-7.7	-16.1	14.0
소비자물가상승률(%)	7.0	35.0	34.4	20.6	15.9	16.6
실업률(연평균%)	9.7	11.2	10.5	9.9	10.0	10.1
외채(10억달러)	142.1	169.6	163.6	152.8	162.1	164.4
환율(페소/달러)	3.4	6.4	7.6	7.9	9.2	9.6

▶ 전문가 클리닉

수리논술시험에서 가장 자주 출제되는 수리분석 문제입니다. 수리분석 문제는 자료를 해석하는 명확한 답을 물을 수도 있고 그 자료를 총괄적으로 분석하고 비교하는 능력을 요구할 수도 있습니다. 더 나아가 의견이나 대안을 제시하도록 하는 문제의 경우는 '명확한 답이 존재하지 않

는 논술'의 성격을 띠는, '수리논술'과 '일반논술'의 경계선에 있는 문제라고 할 수 있습니다. 따라서 명확한 답이 존재하는 형태의 문제인지 자유로운 의견을 요구하는 문제인지 판단해야 합니다. 문제에 대한 해설과 함께 1)번과 3)번에 대한 한 학생의 우수답안을 제시했습니다.

▶ 예시답안

1) 경제성장률, 수출·수입의 교역량, 경상수지, 실업률, 물가상승률, 외채의 흐름에 대한 객관적인 비교분석이 필요합니다. 비교분석에는 평균을 구하는 방법, 그래프를 그려 그 흐름이나 경향성을 분석하는 방법 등 다양한 수학적 분석방법이 이용될 수 있습니다. '표에 다 나와 있는 내용이니까 더 설명할 것이 없다'라고 생각해선 안 됩니다. 데이터와 통계를 분석해서 그 특징을 요약하는 것이야말로 수리분석 문제에서 측정하고자 하는 능력이기 때문입니다. 주어진 자료를 분석한 후 그 핵심적인 특징을 잘 요약해서 서술해야 하는 문제입니다.

2) 표에 주어진 것은 경상수지입니다. 경상수지가 음수일 때 경상수지 적자는 경상수지 값의 절대값이 됩니다. 따라서 주어진 자료로부터 경상수지 적자가 줄어들 때 경제성장률도 낮아지는 것을 확인할 수 있습니다. 그러나 이것은 대략적인 경향일 뿐입니다. 1997년에서 1998년 사이에는 경상수지 적자가 커지면서 경제성장률은 떨어졌습니다. 따라서 대체적인 경향은 있으나 비례관계라고 할 수는 없습니다.

3) 문제1)번에서 서술한 비교분석에 기초해 자신의 의견을 서술하면 됩니다. 여기서 중요한 것은 주어진 자료에 대한 수리적 분석을 의견의 근거로 삼아야 한다는 점과 주어진 자료의 입장에서 봤을 때 논리적 설득력이 있어야 한다는 점입니다. 평소 상식이나 주어진 자료외의 논거를 이용하는 것은 수리분석 문제의 출제의도에서 벗어나는 것입니다.

▶ 1), 3)번 문항에 대한 학생 우수답안

1) 멕시코가 NAFTA에 가입하기 이전에는 경제성장률이 점점 감소하고 있었으며 수입과 수출도 500억 달러를 웃도는 수준이었다. 또한 경상수지는 점점 감소추세로 적자를 기록하고 있었고 실업률과 외채는 늘어가고 있었다. 반면 소비자물가 상승률은 감소추세를 보이고 있었다.

   이에 비해 NAFTA에 가입한 후로는 경제성장률이 1995년과 같이 마이너스를 기록한 해도 있지만 대체로 이전보다 높아졌고 수입과 수출의 양이 눈에 띄게 증가했으나 여전히 수입량이 수출량보다는 많음을 알 수 있다. 경상수지는 계속해서 적자를 보이고 있고 실업률은 10%정도로 증가했다. 또한 소비자물가 상승률이 급격히 커졌으며 외채도 1500억 달러 정도로 늘어났고 환율도 높아졌다.

3) NAFTA 가입이 멕시코 경제에 긍정적인 효과만을 가져왔다고는 볼 수 없다. 수출량을 지속적으로 증가시켰지만 그만큼 수입량도 늘어 여전히 적자를 내고 있고 경제성장률도 그다지 높아지지 않았다.

   멕시코의 경상수지 적자는 한 때 감소했지만 다시 늘어나고 있고 소비자물가 상승률은 오히려 급격히 상승하고 있다. 거기에 실업률도 증가했고 외채도 이전에 1300억 달러 정도였던 것이 1600억 달러를 훌쩍 넘어섰다. 따라서 NAFTA 가입은 멕시코에게 긍정적인 효과보다는 부정적인 효과를 미쳤다고 판단할 수 있다.

3. 사람의 머리카락 수는 평균적으로 약 10만개 정도이며 아무리 머리카락이 많은 사람도 머리카락의 수가 50만개는 넘지 않는 것으로 알려져있다. 이 통계가 사실이라고 가정하고 다음 물음에 답하시오.

1) 한국인 중에는 반드시 머리카락 수가 같은 두 사람이 존재한다고 할 수 있는 지에 대해 논하시오.

2) 머리카락의 수가 같은 두 사람이 반드시 존재할 확률이 0.5보다 크려면 얼마나 많은 사람이 있어야 하는가? 자신의 풀이 방법을 설명하시오.

▶ 전문가 클리닉

1)번은 주어진 상황에 대한 수학적 판단이 옳은지를 결정하고 그 결정의 근거를 논리적으로 설명할 수 있는 지 묻는 문제입니다. 논리적으로 설명하는 방법에는 여러 가지 방법이 있습니다. 아래 예시답안에서는 귀류법 원리를 사용해 논리를 전개했습니다. 2)번 문제는 주어진 상황에서 답을 찾을 수 있는 방법을 논리적으로 고안할 수 있는 지 묻는 문제입니다.

이 문제를 학생들에게 풀어보게 하면 학생들은 1)번 문제에 대해 대체로 올바른 판단을 하면서도 그것을 어떻게 설명해야 할지 방향을 잘 잡지 못했습니다. 아직도 대부분의 학생들은 자신의 판단에 대한 이유를 논리적으로 표현하는 데 미숙합니다. 아래에 제시한 한 학생의 답안은 길지 않지만 여러 답안 중 우수한 사례로 꼽힐 만합니다. 그럼에도 불구하고 뭔가 논리적 설명이 명료하지 못한 게 아쉬움으로 남는 답안이었습니다.

▶ 예시답안

1) 만약 모든 한국인이 서로 다른 머리카락의 수를 가졌다고 가정해보자. 한국인의 수는 약 4800만명이다. 따라서 서로 다른 머리카락의 경우의 수는 최소한 4800만 가지가 돼야 한다. 그런데 문제에서 서로 다른 머리카락의 경우의 수는 0개에서 50만 개까지로 500001가지 밖에는 없다. 이는 모순이다. 따라서 한국인 중에는 반드시 머리카락이 같은 두 사람이 존재한다.

2) 어떤 사람의 머리카락 수가 어떤 값이 되는 지는 취할 수 있는 값의 범위 내에서 같은 정도로 기대된다고 가정하자. 이때 머리카락의 수가 같은 두 사람이 존재할 확률은 '1−(모든 사람이 서로 머리카락의 수가 다를 확률)'이고 이 확률이 0.5보다 커지는 사람수를 구하면 된다.

   모든 사람의 머리카락의 수가 서로 다를 확률은 다음과 같이 구할 수 있다. 사람의 수를 N이라 했을 때 각 사람이 취할 수 있는 머리카락 개수의 경우의 수는 500001이다. 첫 번째 사람의 머리카락 수는 이 500001가지 중 아무 값이나 취할 수 있다. 그런데 모든 사람의 머리카락의 수가 다르려면 두 번째 사람의 머리카락의 수는 50만 가지 중 하나가 돼야 한다. 또한 세 번째 사람의 머리카락의 수는 499999가지 중 하나여야 한다. 이렇게 N번째 사람까지 생각하면 결국 N명의 사람이 모두 머리카락의 수가 다를 확률은

$$\frac{500001}{500001}\times\frac{500000}{500001}\times\frac{499999}{500001}\times\cdots\times\frac{(500001-N+1)}{500001}$$

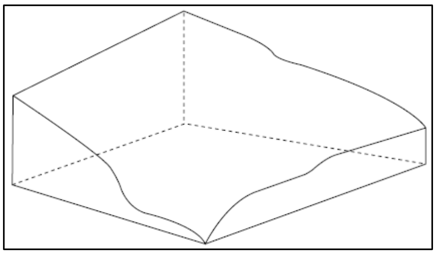
$$=\frac{500001\times\cdots\times(500001-N+1)}{500001^N}$$

   이 된다. 1에서 이 확률을 뺀 값이 0.5보다 커질 때의 N을 구하면 된다.

▶ 1)번 문항에 대한 학생 우수답안

머리카락의 수는 대략 0개에서 50만개 사이로 볼 수 있다. 한국인 인구는 4000만명 정도다. 그러므로 50만명까지는 머리카락 수가 각기 다를 수 있겠지만 그 이상 넘어서면 머리카락의 수가 같은 두 사람이 존재한다고 할 수 있다.

4. 전원주택을 짓기 위해 한 야산에 입지한 택지를 구입했다. 다음 그림은 구입한 택지의 모양을 간단히 입체도형으로 나타낸 것이다. 경사가 심하고 땅의 표면이 고르지 못해 집을 짓기 위해서는 평평한 평지로 만드는 작업이 필요한 상황이다. 다음 물음에 답하시오.



1) 이 땅을 모두 깎아 평평한 평지를 만들려고 하면 많은 흙더미가 나온다. 이 흙더미를 실어나를 계획을 세우기 위해 이 도형의 부피를 구하려고 한다. 이 입체도형의 부피를 구할 수 있는 방법을 구상하고 설명하시오.

2) 흙더미를 실어나르는 데는 많은 비용이 필요하다는 것을 알고 계획을 바꿨다. 이 땅의 일부를 깎아내고 그 깎아낸 흙더미를 활용해서 전체적으로 평평한 평지를 조성하려는 것이다. 이를 위해 밑면에 평행하면서 이 입체도형의 부피를 이등분하는 평면을 찾아내고자 한다. 이것이 가능하다고 생각하는가? 만약 그렇다면 그 이유는 무엇이고 어떻게 찾아낼 수 있는가? 불가능하다면 그 이유는 무엇인가?

3) 이 땅의 건너편에는 큰 구 모양의 건축물이 위치하고 있다. 땅 주인은 위 입체도형의 부피를 이등분할 수 있는 방법이 있는 지 생각해보다가 구 모양의 건축물의 부피도 이등분하면서 위의 입체도형의 부피도 이등분하는 평면이 존재할 수 있는 지 궁금해졌다. 이에 대한 자신의 의견을 서술하시오.

▶ 전문가 클리닉

간단한 입체도형의 부피를 구하는 문제에서 시작해 입체의 부피를 이등분하는 것이 언제나 가능한지에 대한 물음으로 나아가는 문제입니다. 아래 예시답안의 1)번에서는 구분구적법의 원리를 활용했고 2)번과 3)번에서는 중간값의 정리를 사용했습니다.

▶ 예시답안

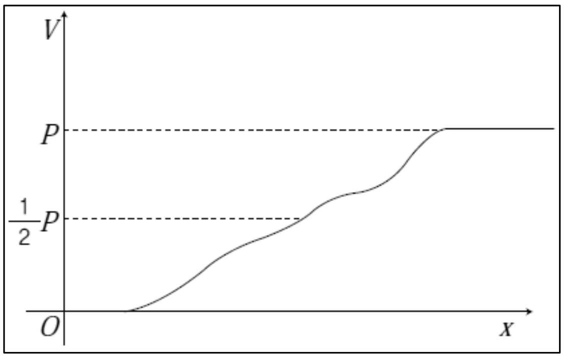
1) 먼저 땅의 표면을 작은 정사각형들로 나눈다. 각각의 정사각형들의 위치 중 가장 땅이 낮은 곳에 측량기구를 설치해 그 위치를 기준으로 각 정사각형들의 위치를 잰다. 각 정사각형의 면적에 방금 측량한 위치를 곱하면 그 부분에 해당하는 부피의 근사값이 된다. 이와 같은 과정을 되풀이하면서 각 정사각형에 해당하는 흙의 부피를 구해 모두 더하면 원하는 입체의 부피의 근사값이 얻어진다. 이 정사각형의 크기를 좀더 작게 만들고 높이를 여러 번 측량해 부피의 값을 구해나가면 더 정확한 부피를 구할 수 있다.

2) 주어진 입체의 부피를 이등분하면서 밑면에 평행한 평면을 찾아낼 수 있다.

밑면에 평행한 평면 하나를 α라 하고 주어진 입체도형의 부피를 P라 하자. 평면 α를 처음에는 이 입체의 위쪽에 위치시킨다. 주어진 입체 중 이 평면 위에 존재하는 부분의 부피를 V라 하면 처음에 $V=0$이다. 이제 평면 α를 서서히 아래로 내려서 주어진 입체를 지나도록 위치를 변화시켜 나가면 V의 값은 점점 커지게 되고 결국 연속인 증가함수가 된다. 또

한 평면 α가 이 입체도형의 아래쪽에 위치하게 되면 V의 값은 이 입체도형의 부피 P와 일치하게 되며 더 이상 커지지 않는다.

이때 V는 평면 α의 위치에 따른 함수가 되는 데 $V=\frac{1}{2}P$가 되는 순간에 평면 α가 입체도형의 부피를 이등분하게 된다. V는 그 값이 0에서 P까지 변하는 연속증가함수이므로 중간값정리에 의해 $V=\frac{1}{2}P$가 되는 순간은 반드시 존재하게 된다.



이를 그래프로 표현하면 다음과 같이 나타나는 데 이 그래프에서 x는 평면 α를 움직여나갈 때 처음 위치와 움직인 위치 사이의 수직거리로 정의한다.

3) 구 모양의 건축물의 부피도 이등분하고 주어진 입체도형의 부피도 이등분하는 평면이 존재한다.

구 모양의 부피를 이등분하기 위해서는 구의 중심을 지나는 평면을 생각하면 된다. 구의 중심을 지나는 무수히 많은 평면 β중 주어진 입체의 위쪽을 지나는 평면을 하나 생각하자. 이제 위에서와 같이 평면 β위에 존재하는 주어진 입체도형의 부피를 V라 하면 그 값은 처음에 0이 된다. 평면 β가 구의 중심을 지나도록 하면서 서서히 회전시켜 나가면 V의 값은 점점 커지는 연속증가함수가 되며 평면 β가 주어진 입체의 아래쪽을 지나가게 되면 $V=P$가 된다. V는 그 값이 0에서 P까지 변하는 연속증가함수이므로 중간값의 정리에 의해 $V=\frac{1}{2}P$가 되는 순간은 반드시 존재한다.

2005년 12월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]통계, 복소평면, 무한집합

[문제1] 아래의 자료 (가)는 주택보급에 관련된 정부의 계획이다. 정부의 '주택보급계획'이 어떻게 추진되고 어떤 결과를 낳았는 지 평가하고 기술하시오. (가)~(다)의 제시문과 자료를 모두 활용해 다음 세 가지 측면에 중점을 두고 평가하되 그 근거를 구체적으로 제시하시오(300자 이내).

1) 계획(주택보급 증대)이 발표한대로 추진됐는가?

2) 계획한 목표(주택보급률)는 어느 정도 달성했는가?

3) 목표에 미달한 점이 있다면 당초 계획에 어떤 문제가 있었는가?

(가) 1990년 주택보급관련 정부계획 발표

정부는 1990년 이후부터 1995년까지 매년 10%씩 주택공급을 늘리고 1995년 이후부터 2000년까지는 5%씩 늘릴 계획이다. 이 계획이 차질없이 시행된다면 2000년에는 전국 가구당 주택보급률이 100%를 넘어설 것이고 수도권의 가구당 주택보급률도 90%를 넘어설 것이다. 이러한 계획 및 예측은 아래에 제시된 통계에 근거한 것이다. 즉 인구변화 예측[표1]과 주택공급 예측[표2] 그리고 가구당 가구원 수 통계[표3]를 기초로 가구당 주택보급률을 추산한 결과다. 주택보급률은 실제 가구수 조사 자료를 근거로 계산하는 것이지만, 이 계획에서는 예상 인구를 1990년 현재 가구당 평균 가구원 수로 나눠 추정한 가구수(추정치)를 바탕으로 예측했다.

[표1] 인구 예측 통계: 1990년~2000년

연도	인구	비고
1990	43000	실제 조사 인구
1995	45000	90년 기준 예상 인구
2000	47000	90년 기준 예상 인구

(단위: 1000명)

[표2] 주택공급 예측통계: 1990년~2000년

연도	주택수	비고
1990	7200	실제 조사 주택수
1995	11600	90년 기준 예상 주택수
2000	14804	90년 기준 예상 주택수

(단위: 1000)

[표3] 가구당 가구원 수 비율조사 통계 : 1990년 **(단위 : %)**

구분	1인	2인	3인	4인	5인	6인 이상	평균 가구원수
1990	9.0	13.8	19.1	29.5	18.8	9.8	3.7명

(나) 주택관련 통계표 : 1990~2003년 **(*주택보급률=주택수/가구수 단위 : 1000)**

연도	전국			수도권			서울		
	주택보급률	주택수	가구수	주택보급률	주택수	가구수	주택보급률	주택수	가구수
1990	72%	7200	10000	63%	2500	4000	58%	1400	2400
1995	86%	9500	11000	80%	4000	5000	68%	1700	2500
2000	96%	11500	12000	85%	4700	5500	77%	2000	2600

(다) 가구당 가구원 수 비율조사 통계 : 1995, 2000년 **(단위:%)**

구분	1인	2인	3인	4인	5인	6인 이상
1995	12.7	16.9	20.3	31.7	12.9	5.5
2000	15.5	19.1	20.9	31.1	10.1	3.3

▶ 전문가 클리닉

올해 중앙대에서 수리논술 예시문제로 발표한 문제입니다. 문제풀이형 수학문제 출제가 금지된 이후 수리논술 시험의 경향을 가늠해볼 수 있습니다. 만약 앞으로 수리논술이 위와같이 출제된

다면 수리논술과 일반논술의 경계를 말하는 것은 더이상 의미가 없겠지요.

이 문제에 대한 학생들의 답안을 검토해보면 다음 세 가지 오류가 가장 많이 나타납니다.

첫째, 문제에서 요구한 세 가지 질문에 모두 답변하지 않는 경우입니다.

둘째, 평가에 대한 구체적 근거를 제시하라고 했는 데 구체적 근거없이 평가만 내리는 경우입니다.

셋째, 목표한 주택보급률을 달성하지 못한 이유를 파악하고 나서도 그것을 논리적으로 정확하게 표현하지 못해 설득력이 부족한 답안이 되는 경우입니다.

다음은 학생이 작성한 답안의 사례입니다. 주택보급 증대계획이 어떻게 추진됐는 지에 대한 평가가 빠져있고 목표한 주택보급률을 달성하지 못한 현황에 대한 구체적인 지적도 없습니다. 비록 가구당 가구원 수의 비율 변화를 자세하게 설명하고 있기는 하지만 설득력이 부족합니다.

"1990년도와 2000년도의 가구수와 주택수의 차이가 많이 줄어들어 그 비율값인 주택보급률이 정부가 목표한 보급률 100%에 근접했다. 그러나 주택수가 가구수보다 많아져 100%를 넘기지는 못했는 데, 이는 가구당 가구원 수 비율이 예상과 다른 증감을 보였기 때문이다. 즉 2000년대에 1995년대보다 4인 이상의 가구비율이 줄어든 데 비해 3인 이하의 가구비율은 늘어난 데 그 이유가 있다. 원래대로라면 4인 이상 가구가 안정적으로 유지되고 주택수는 늘어야 하는 데, 4인 이상 가구에서 1,2인 가구로 나눠지면서 오히려 주택수가 부족해져 주택보급률 100%를 이루지 못한 것이다."

▶ 예시답안

주택보급 증대계획은 목표를 달성하지 못했다. 1995년과 2000년 목표 주택수는 각각 1160만, 1480.4만이었으나 실제 주택수는 각각 950만, 1150만에 그쳤다. 주택보급률 역시 계획한 목표를 달성하지 못했다. 2000년 전국과 수도권 가구당 주택보급률 목표는 각각 100%, 90%였으나 실제 주택보급률은 전국 96%, 수도권 85%에 머물고 있다. 주택보급률 목표를 달성하지 못한 것은 우선 계획을 세울 때 주택공급의 양을 잘못 예측했기 때문이며 또한 가구당 평균 가구원 수의 하락에 따른 가구수의 증가를 예측하지 못했기 때문이다.

[문제2] 아래 글은 한 전문가가 주택보급 정책과 통계에 대해 새로운 의견을 제시한 것이다. 잘 읽고 아래 물음에 답하시오.

정부의 주택공급증대 정책에 따라 주택보급의 양은 늘어나 가구당 주택 보급률은 전국 100%를 넘어섰지만 자기 집에 사는 비율인'자가점유율'은 아직도 50%대에 머무르고 있다. 이런 괴리를 감안하여 대다수 선진국에서는 주택정책의 주요 지표로 주택보급률을 사용하지 않고 자가점유율을 사용한다. 우리 정부도 앞으로는 선진국들의 예를 따르는 것이 바람직하다. 정부는 주택보급률을 116%로 끌어올리겠다는 목표를 가지고 있는 데 아무리 주택보급률이 높아진다 하더라도 자가점유율이 낮은 상황에서는 집값 안정과 서민들의 집 장만의 꿈을 이루기 어렵다.

위의 의견에 따르면 주택공급에 관한 정책적인 지표로 주택보급률보다는 자가점유율을 사용하는 것이 바람직하다고 한다. 자가점유율이라는 지표는 주택보급률이라는 지표의 어떤 단점을 보완할 수 있는 지 그리고 자가점유율의 지표를 사용하는 데에는 또다른 문제가 없는 지 서술하시오(300자 이내).

▶ 전문가 클리닉

문제1과 연결되는 문제입니다. 우리는 일상생활에서 흔히 '비율'을 사용하는 데 이는 수학적 개념이라 할 수 있습니다. 또한 사회현상을 분석하는 데도 비율이 자주 사용됩니다. 그러나 비율이 담고 있는 의미를 정확하게 파악하지 않고 피상적 숫자에만 집착하면 오히려 현상에 대해 정확하지 못한 진단을 내릴 위험이 있습니다. 이 문제는 흔히 접하는 개념인 '비율'에 대한 비판적 사고력을 요구하고 있는 것입니다.

▶ 예시답안

주택을 소유하는 것은 안정된 주거생활의 토대다. 무주택 서민들이 집 장만의 꿈을 갖는 것도 이 때문이다. 그런데 주택보급률은 단순한 주택수와 가구수의 비율만을 나타내고 있어 주택을 소유하고 있는 가구의 비율을 보여주지 못한다. 자가점유율은 주택보급률의 이러한 단점을 보완하는 지표가 될 수 있다. 그러나 자가점유율 역시 주택거주현황을 나타내지 못한다는 단점이 있다. 주택소유현황 못지 않게 주택거주현황에 대한 지표도 필요하다. 왜냐하면 주택을 소유하든 임대하든 거주할 주택이 있는 가구의 비율 역시 주택 정책을 세우는 데 중요한 지표이기 때문이다.

[문제3] 복소수 계수를 갖는 z에 관한 이차방정식 $z^2+\alpha z+\beta=0$ (α, β는 복소수인 상수)은 두 개의 복소수 해를 가짐을 증명하시오(단 중근도 두 개의 근으로 생각함).

▶ 전문가 클리닉

수리논술문제는 잠시 접어두고 익숙한 수학문제로 돌아가봅시다. 이 문제는 작년 서울대 특기자전형 면접시험에서 출제됐던 문제입니다. 실계수 방정식이 복소수 해를 두 개 가진다는 것은 간단하게 보일 수 있습니다. 복소수계수 방정식일 때는 다음과 같이 증명하면 됩니다.

▶ 예시답안

$z^2+\alpha z+\beta=0$을 완전제곱식으로 고치면

$$\left(z+\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2-4\beta}{4}$$

i) $\dfrac{\alpha^2-4\beta}{4}=0$일 때 주어진 이차방정식은 중근 $-\dfrac{\alpha}{2}$를 갖는다.

ii) $\dfrac{\alpha^2-4\beta}{4}\neq 0$일 때 $\dfrac{\alpha^2-4\beta}{4}=a+bi$로 놓을 수 있다. ($a$, b는 실수이고 $a^2+b^2\neq 0$)

$z+\dfrac{a}{2}=c+di$ (c, d는 실수)라 하면

$$(c^2-d^2)+2)+2cdi=a+bi$$

$$\therefore a=c^2-d^2,\ b=2cd$$

위의 두 식을 c, d에 대한 식으로 보고 좌표평면 위에서 그래프를 그리면 $1=\dfrac{c^2}{a}-\dfrac{d^2}{a}$은 쌍곡선, $d=\dfrac{b}{2c}$는 분수함수이므로 반드시 두 쌍의 근을 갖는다. 따라서 z는 두 개의 복소수 해를 갖는다.

[문제4] 실수를 복소수로 확장시킬 때와 같이 복소수가 아닌 새로운 수 j를 생각해 새로운 수 a+bi+cj(a,b,c는 실수)를 좌표공간 위의 점 (a,b,c)에 대응시키자. 그리고 이 수에 대한 덧셈과 곱셈을 다음과 같이 정의하자.

$$(a_1+b_1i+c_1j)+(a_2+b_2i+c_2j)=a_1+a_2+(b_1+b_2)i+(c_1+c_2)j$$

$$(a_1+b_1i+c_1j)(a_2+b_2i+c_2j)$$

$$=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i+(a_1c_2+a_2c_1)j+(b_1c_2+b_2c_1)ij$$

이때 좌표공간 위의 점들의 집합 $R^3=\{a+bi+cj|i^2=j^2=-1,\ i\neq j,\ a,b,c$는 실수$\}$가 위에서 정의된 곱셈에 대해 닫혀 있고 결합법칙이 성립하도록 ij 값을 정할 수 있는가?

▶ 전문가 클리닉

실수체계에서 성립하는 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙 등의 규칙이 새롭게 정의되는 수와 연산체계에서도 성립하는 지 알아봅시다.

영국의 수학자이자 이론물리학자였던 윌리엄 해밀턴(1805~1865)은 3차원 공간에서 벡터와 회전을 연구하기 위해 "사원수"라는 새로운 수 체계를 고안하려 했습니다.

그런데 해밀턴을 괴롭혔던 것은 그가 고안한 수 체계에서 곱셈의 교환법칙이 성립하지 않는다는 사실이었습니다. 해밀턴은 이 문제를 놓고 15년 동안이나 고민했다고 합니다. 교환법칙이 성립하지 않는 새로운 곱셈인 행렬의 곱셈을 어렵지 않게 받아들이는 현대의 학생들은 해밀턴의 고민을 잘 이해할 수 없을 것입니다. 하지만 그런 곱셈이 있을 수 있다는 것을 처음으로 생각해내는 것은 꽤 힘든 과정이었습니다.

해밀턴은 어느 날 황혼 무렵 아내와 함께 더블린 근처에 있는 로열 운하를 따라 산책을 하던 중 곱셈의 교환법칙을 포기하려는 생각이 번개처럼 스쳐갔다고 합니다. 그는 새롭게 떠오른 아이디어를 기억해두기 위해 마침 가지고 있던 주머니칼로 이 생각을 브로엄 다리의 한 돌기둥에 새겼습니다. 오늘날 이 다리의 난간에는 해밀턴의 발견을 기념하는 기념명판이 새겨져 있습니다.

해밀턴의 착상을 계기로 보통의 대수와는 다른 구조적 법칙을 만족시키는 대수가 발달하기 시작해 오늘날의 현대 추상대수학을 성립시켰다고 하는 군요. 해밀턴의 사원수는 a+bi+cj+dk의 형태로 쓰니 위의 문제는 사원수 문제는 아닙니다만 결국 출제의도는 새로운 수와 연산체계에서 성립하는 규칙을 조사해보라는 것입니다.

▶ 예시답안

곱셈에 대해 닫혀있기 위해서는 ij가 R3의 원소이어야 하므로

ij=a+bi+cj (a, b, c는 실수)

의 꼴이어야 한다. 이때 양변에 i를 곱하면

$-j=ai-b+cij$

$=ai-b+c\ (a+bi+cj)$

$=ai-b+ca+bci+c^2j$

$\therefore\ (ac-b)+(bc+a)i+(c^2+1)j=0$

그런데 $c^2=-1$을 만족하는 실수 c는 존재하지 않으므로 모순이다.

따라서 문제에서 정의된 곱셈에 대해 닫혀있도록 ij의 값을 정할 수는 없다.

[문제5] 다음 두 식을 동시에 만족하는 서로 다른 복소수 z_1, z_2, z_3가 존재하도록 양수 x와 cosθ (0<θ<π/2)를 구하시오.

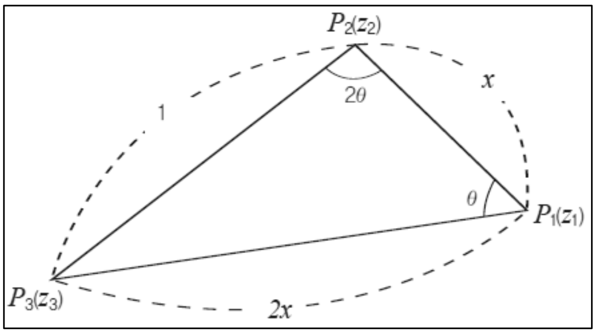
$z_3 - z_1 = 2(z_2 - z_1)(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z_1 - z_2 = x(z_3 - z_2)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

▶ 전문가 클리닉

지금은 교과과정에서 빠져있는 복소평면과 관련한 문제입니다. 이 문제는 서울대 특기자전형 면접에서 출제된 문제로서 '특기자'라면 교과과정에 얽매이지 않고 심층적인 공부를 했을 것이라는 전제하에 출제한 것입니다. 복소평면에 대한 기본적인 이론은 6차 교육과정시기의 수학 교재를 참고하기 바랍니다.

▶ 예시답안



좌표평면에서 z_1, z_2, z_3를 나타내는 세 점을 P_1, P_2, P_3라 하자. 복소수 $(a+bi)(\cos\theta + i\sin\theta)$는 점 $(a,\ b)$를 원점에 대해 θ만큼 회전시킨 점에 대응한다. 따라서 $\overline{P_2P_3}$의 길이를 1이라 하면 위의 두 식에 의해 다음과 같은 삼각형 $\triangle P_1P_2P_3$가 나타남을 알 수 있다.

$\triangle P_1P_2P_3$에서 코사인법칙에 의해

$$(2x)^2 = x^2 + 1 - 2x\cos 2\theta$$

$$4x^2 = x^2 + 1 - 2x(2\cos^2\theta - 1) \ \cdots \ (\text{i})$$

또한 사인법칙에 의해

$$\frac{1}{\sin\theta} = \frac{2x}{\sin 2\theta}$$

$$\sin 2\theta = 2x\sin\theta$$

$$2\sin\theta\cos\theta = 2x\sin\theta \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \cos\theta = x \ (\because\ 0 < \theta < \ )$$

(ii)를 (i)에 대입하면

$$4x^2 = x^2 + 1 - 2x(2x^2 - 1)$$

$$4x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$(x+1)(4x^2 - x - 1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1+\sqrt{17}}{8} \ (\because x > 0)$$

이때 (ii)에 의해 $\cos\theta = \dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$이다.

[문제6] 다음 물음에 답하시오. 1) 서울시의 남자와 여자를 일대일 대응시킬 수 있는가? 2) 자연수와 실수를 일대일 대응시킬 수 있는가?

▶ 전문가 클리닉

언뜻 보면 단순한 문제 같지만 평소에 수학에 관한 책을 많이 읽어 교양이 풍부한 학생이 아니라면 출제의도를 파악하기 어려운 문제입니다.

집합론을 정립한 수학자는 칸토어(1845~1918)입니다. 칸토어가 집합론을 창시하고 연구한 목적은 바로 무한의 성질을 규명하기 위한 것이었습니다. 칸토어 집합론의 핵심은 무수히 많은 것 중에서도 더 많고 더 적은 것이 있다는 것입니다.

두 집합의 원소가 일대일로 대응될 수 있다면 두 집합의 원소의 개수는 같습니다. 무한집합에서는 어떻게 될까요? 예를 들어 자연수의 집합과 양의 짝수의 집합을 생각해보면 두 집합의 원소 사이에는 n과 2n이 서로 일대일 대응하는 관계가 있음을 알 수 있습니다. 짝수는 자연수의 한 부분이므로 자연수가 짝수보다 많을 것 같지만 두 집합의 원소는 일대일 대응을 이룰 수 있기 때문에 자연수가 짝수보다 많다고 할 수 없는 것입니다. 여기서 칸토어는 농도라는 개념을 도입해 두 집합의 농도는 같다고 했습니다.

그렇다면 자연수의 집합과 실수의 집합은 농도가 같다고 할 수 있을까요? 이것이 위 문제의 핵심입니다. 칸토어는 '자연수의 집합과 유리수의 집합은 일대일 대응시킬 수 있다, 즉 농도가 같다'고 했으며 자연수의 집합과 일대일로 대응시킬 수 있는 집합을 가부번집합이라고 불렀습니다. 유리수의 집합은 자연수의 집합과 일대일 대응시킬 수 있지만 실수의 집합은 그럴 수 없습니다. 실수의 집합은 자연수의 집합보다 농도가 큰 것입니다. 이를 증명하는 과정에서 칸토어가 사용한 증명방법을 '대각선법'이라고 하는 데 아래 예시답안에 소개했습니다.

▶ 예시답안

1) 서울시의 남성 수와 여성 수가 같다면 일대일 대응을 시킬 수 있고, 다르다면 일대일 대응을 시킬 수 없다. 그런데 서울시의 남자의 수와 여자의 수는 똑같지 않은 것으로 알고 있다. 그렇다면 서울시의 남자와 여자는 일대일 대응을 시킬 수 없다.

2) 실수의 집합의 농도가 자연수의 집합의 농도보다 크고 두 집합의 원소는 서로 일대일 대응을 시킬 수 없다. 자연수의 집합 N이 $0 \leqq x \leqq 1$인 실수 x의 집합 C와 일대일 대응하지 않음을 증명하면 다음과 같다.

(증명)

C집합의 임의의 실수 $x(0 < x \leq 1)$는 무한소수로 한 가지 방법으로만 표현된다. 유한소수 역시 무한소수로 표현할 수 있는 데 0.25는 0.24999…라 할 수 있다. 즉 집합 C는 0.…로 시작하는 모든 무한소수의 집합이다. 이제 N과 C가 일대일 대응한다고 가정해보자.

가정된 일대일 대응에서 N의 임의의 원소 n에 대응하는 C의 원소를

$$0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\cdots$$

라 하자. 그리고 N의 원소 1,2,3,4… 와 대응하는 C의 원소를 위에서 아래로 나열하면

$$0.a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\cdots$$

↘

$$0.a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\,a_{24}\cdots$$
$$\searrow$$
$$0.a_{31}\,a_{32}\,a_{33}\,a_{34}\cdots$$
$$\searrow$$
$$0.a_{41}\,a_{42}\,a_{43}\,a_{44}\cdots$$
$$\vdots$$

이 되고 가정에 의해 여기에는 C의 원소가 다 들어있어야 한다.

그러나 우리는 C의 원소로서 이에 속하지 않은 것을 만들 수 있다. 먼저 위에서 화살표에 따른 대각선상의 숫자 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\cdots$ $a_{nn}\cdots$에 대해 $a_{nn}\neq 1$이면 $d_n=1$, $a_{nn}=1$이면 $d_n=2$가 되게 하자. 모든 d_n의 n에 대하여 이와 같이 정하면 소수 $d=0.d_1d_2d_3\cdots$ d_n $\cdots$ 이 만들어진다. 이 d는 분명히 무한소수이므로 C의 원소다. 그러나 모든 n에 대해 d는 $0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_n\cdots$과 소수 제 n째 자리의 숫자가 다르다.

즉 우리는 N과 C가 일대일 대응한다고 가정하고 C의 원소 전부를 N의 원소 1,2,3,4…와 대응하는 순서로 나열했으나 거기에는 C의 원소 d가 빠져있다. 이것은 모순이다. 이 모순은 N과 C가 일대일 대응한다고 가정한데서 비롯됐다. 그러므로 N과 C는 일대일 대응할 수 없다.

2006년 01월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학] 이차방정식과 정수

x에 대한 이차방정식 $(1+a)x^2+2x+1-a=0$ (단, a는 실수)에 대해 다음 물음에 답하여라.

1) 임의의 실수 a에 대해 실근이 될 수 없는 수를 구하여라.

2) 주어진 이차방정식의 두 개의 근이 모두 정수가 되는 a의 최대값을 m, 최소값을 n이라 할 때 $m+n$의 값을 구하여라.

3) 주어진 이차방정식의 두 개의 근이 모두 정수가 되는 a의 값으로 $|a+1| \geq \frac{1}{N}$을 만족하는 실수 a의 개수를 $f(N)$이라 할 때 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{N}f(N)$의 값을 구하여라.

▶ 전문가 클리닉

지난 호에는 집합론을 정립한 칸토어를 언급했습니다. 칸토어의 집합론은 처음에 많은 수학자들의 반대에 부딪혔는 데 그 대표적 수학자가 크로네커(1823-1891)였습니다. 그는 칸토어의 '무한에 대한 이론'을 수학이 아닌 신학으로 간주하며 비난했습니다. 그는 모든 수학은 수 전체에 대한 유한한 방법에 의존해야 한다고 믿었고 그래서 그를 19세기의 피타고라스라는 사람도 있습니다. 그는 다음과 같은 명언을 남겼습니다.

"신은 정수를 만들었고 나머지 수는 모두 사람이 만든 것이다."

크로네커의 이 명언에서 우리는 수학자들의 '정수'에 대한 사랑을 엿볼 수 있습니다. 이 세상 만물은 정수로 이뤄졌다고 믿은 피타고라스 이후 '정수'는 수학자들의 지속적인 탐구대상이었습니다. 방정식 문제에 정수근 문제가 자꾸 등장하는 것도 이런 배경 속에서 이해됩니다.

▶ 예시답안

1) 주어진 방정식을 a에 대해 정리하면

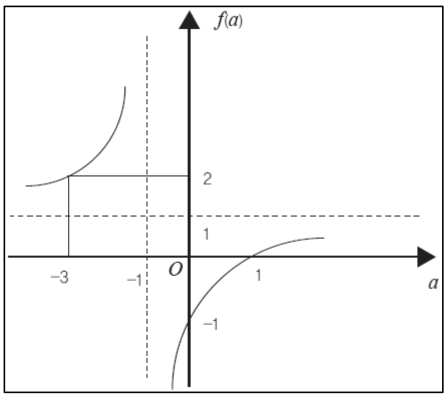
$$a(x^2-1)+(x+1)^2=0$$
$$a(x^2-1)=-(x+1)^2$$

$x=1$일 때 이 식을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않으므로 임의의 실수 a에 대해 $x=1$은 근이 될 수 없다.

2) 주어진 방정식을 인수분해하면

$$(x+1)\{(1+a)x+1-a\}=0$$
$$\therefore\ x=-1 \text{ 또는 } \frac{a-1}{a+1}$$

이때 두 근이 모두 정수가 되려면 $\frac{a-1}{a+1}$이 정수가 되면 된다.



$$f(a)=\frac{a-1}{a+1}=1-\frac{2}{a+1}\text{에서}$$

이 그래프에서 $f(a)$가 정수가 될 수 있는 a의 최대값은 1이고 a의 최소값은-3이다.

$$\therefore\ m+n=1+(-3)=-2$$

3) $\frac{2}{a+1}=k$ ($k\neq 0$인 정수)라고 하면 $|a+1|\geq \frac{1}{N}$로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{2}{|k|}\geq\frac{1}{N}$$

따라서 $|k|\leqq 2N$

따라서 양의 실수 N에 대해 다음과 같이 생각할 수 있다.

$k=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \cdots,\ \pm[2N]$

이때 $f(a)=1-\frac{2}{a+1}$ 그래프에서 k의 값이 하나 정해지면 정수값을 갖는 $f(a)$값이 하나 정해지므로 $|a+1|\geq\frac{1}{N}$을 만족하는 실수 a의 개수 $f(N)$은 다음과 같다.

$$f(N)=2[2N]$$

이때 $2(2N-1)\leqq 2[2N]\leqq 2\times 2N$이므로 다음과 같다.

$$4-\frac{2}{N}\leqq\frac{2(2N)}{N}\leqq 4$$

$$4-\frac{2}{N}\leqq\frac{f(N)}{N}\leqq 4$$

$\therefore$ $N\to\infty$일 때 $4\leqq\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}f(N)\leqq 4$

$$\therefore \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}f(N)=4$$

[수학] 입체도형의 개형과 부피

좌표공간에서 $y=1-x$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때 점 P는 선분 $\overline{AB}$ 위를 움직이는 점이고 점 Q는 축 z위를 움직이는 점이다. $\overline{PQ}$의 길이가 1이 되는 모든 선분들과 z축으로 둘러싸인 입체를 V라 한다. 다음 물음에 답하여라.

1) 좌표평면에서 세 점 $(0, 0)$, (a, b), (c, d)를 연결한 삼각형의 넓이 S는 $S=|ab-cd|$이다. 이를 증명하여라(단, $a\neq c$).

2) 선분 AB를 n등분한 점의 좌표를 Pk(k=0, 1, ⋯n, $P_0=B$)라 하고 $\overline{P_kQ}=1$인 두 점 Q를 Qk, Qk′라 할 때 입체 $Q_kP_kP_{k+1}Q_k'$의 부피를 n과 k의 식으로 나타내어라.

3) 위 문제에서 주어진 입체 V의 부피를 구하여라.

▶ 전문가 클리닉

$\overline{PQ}=1$이라는 조건을 유지하며 P는 선분 $\overline{AB}$ 위를 움직이도록 하고 Q는 z축 위를 움직이도록 변화시키면 어떤 입체도형이 나올까요. 문제풀이에 들어가기 전에 입체도형의 개형을 먼저 생각해보고 어떻게 그 입체도형의 부피를 구할 것인지를 구상해보기 바랍니다.

▶ 예시답안

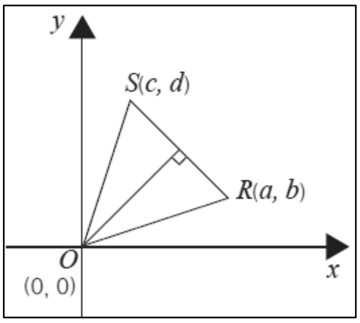
1) $\overline{RS}$의 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-b=\frac{b-d}{a-c}(x-a)$$

$$(a-c)(y-b)=(b-d)(x-a)$$

$$(b-d)x-(a-c)y-a(b-d)+b(a-c)=0$$

$$(b-d)x-(a-c)y=ad-bc=0 \ \cdots \ ①$$



직선 ①과 (0, 0) 사이의 거리를 h라 하면

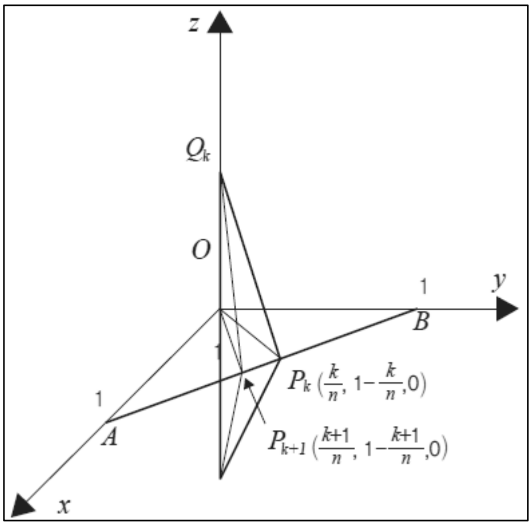
$$h=\frac{|ad-bc|}{\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}}$$

$\triangle ORS$의 넓이 $S=\frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\times\frac{|ad-bc|}{\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}}$

$$=\frac{1}{2}|ad-bc|$$

2) 아래 그림에서

$P_k(\frac{k}{n},\ 1-\frac{k}{n},\ 0)$, $P_{k+1}(\frac{k+1}{n},\ 1-\frac{k+1}{n},\ 0)$ 아래 놓으면



$\triangle OP_kP_{k+1}$의 넓이는

$$S=\frac{1}{2}\left|\frac{k}{n}\times\left(1-\frac{k+1}{n}\right)-\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{k+1}{n}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{k}{n}-\frac{k(k+1)}{n^2}-\frac{k+1}{n}+\frac{k(k+1)}{n^2}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|-\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{2n} \ \cdots \ ②$$

한편 $QP_k=1$이므로 $Q(0,\ 0,\ z)$라 하면

$$\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2+\left(1-\frac{k}{n}\right)^2+z^2}=1$$

$$\frac{k^2}{n^2}+1-\frac{2k}{n}+\frac{k^2}{n^2}+z^2=1$$

$$z^2=\frac{2k}{n}-\frac{2k^2}{n^2}$$

$$\therefore z=\pm\sqrt{\frac{2k}{n}-\frac{2k^2}{n^2}} \ \cdots \ ③$$

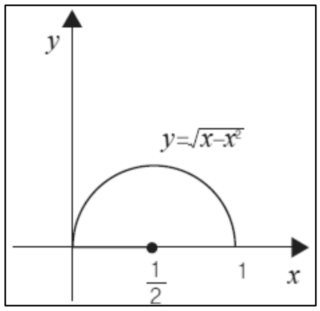
그러므로 입체 QkPkPk+1Qk′의 부피는 ②와 ③에서

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n}\sqrt{\frac{2k}{n}-\frac{2k^2}{n^2}}\times 2=\frac{\sqrt{2}}{3n}\sqrt{\frac{k}{n}-\frac{k^2}{n^2}}$$

3) 구하는 입체의 부피 V는

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{2}}{3n}\sqrt{\frac{k}{n}-\frac{k^2}{n^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3n}\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx \ \cdots \ ④$$



$$y=\sqrt{x-x^2},\ y^2=x-x^2,\ x^2-x+y^2=0$$

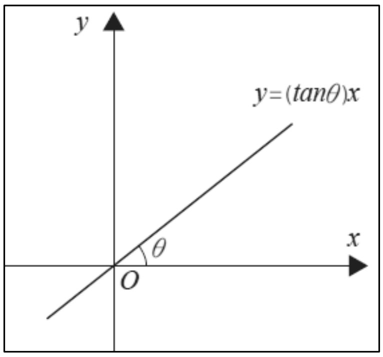
$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$이므로

$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}$은 반지름 $\frac{1}{2}$인 반원의 넓이, 즉 $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}$이다.

$\therefore$ ④에서 $V=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{24}\pi$

수학] 일차변환

다음 물음에 답하여라.



1) 좌표평면에서 점 $P(a,\ b)$를 직선 $y=(\tan\theta)x$에 대해 대칭인 점 Q로 옮기는 변환을 f라고 한다. 점 (0, 1)과 점 (1, 0)을 변환 f로 이동시킨 점들의 좌표를 각각 구하시오.
2) 변환 f는 일차변환이다. 일차변환의 성질과 1)번에서 얻은 결과를 이용해 좌표평면에서 임의의 점 $P(a,\ b)$를 변환 f로 이동시킨 점의 좌표를 구하시오.
3) 좌표평면에서 고정된 점 $P(a,\ b)$가 직선 $y=(\tan\theta)x$에 대칭하는 점을 Q라고 하고 선분 PQ와 직선 $y=(\tan\theta)x$의 교점을 R이라고 한다. 각 θ가 $-\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{2}$까지 변할 때 움직이는 점 Q의 자취로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_Q라고 하고 움직이는 점 R의 자취로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_R라고 한다. 이때 S_Q와 S_R의 비율을 구하시오.
4) 좌표평면에서 점$P(a,\ b)$를 직선 $y=(\tan\theta)x+1$에 대해 대칭인 점 Q로 옮기는 변환을 g라고 한다. 이때 변환 g가 일차변환인지 아닌지를 말하고 그 이유를 설명하시오.

▶ 전문가 클리닉

서울대 특기자 전형에 출제됐던 일차변환 문제입니다. 일차변환은 7차 과정에서 제외된 단원이지만 특기자 전형 문제에선 여전히 출제될 수 있는 영역이므로 간단히 개념을 정리 요약하겠습니다.

① 일차변환의 정의와 성질

좌표평면 위의 점 $P(x,\ y)$를 점 $P'(x',\ y')$으로 옮기는 변환

$$f:(x,y)\rightarrow(x',y')$$

에서 대응하는 점의 좌표 사이가 상수항이 없는 일차식

$\begin{cases}x'=ax+by\\ y'=cx+dy\end{cases}$ 즉 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$으로 나타내어 질 때 이 변환을 일차변환이라 하고 행렬 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$를 일차변환 f를 나타내는 행렬, 또는 간단히 일차변환 f의 행렬이라 합니다.

이러한 일차변환은 다음과 같은 성질이 성립합니다.

$f(P+Q)=f(P)+f(Q)$, $f(kP)=kf(P)$(k는 실수의 상수)

② 여러 가지 일차변환

(1) 항등변환

임의의 점 $P(x,\ y)$를 그 자신으로 옮기는 변환

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases} \text{ 곧 } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(2) 닮음변환

좌표평면 위의 임의의 점 $P(x,\ y)$를 점 $P'(kx, ky)$로 옮기는 변환

$$\begin{cases} x'=kx \\ y'=ky \end{cases} \text{ 곧 } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ (단 k는 0 아닌 실수)

(3) 대칭변환

좌표평면 위의 점 $P(x,\ y)$의 직선 또는 점에 의해 대칭이동하는 변환

대칭이동	x**축**	y**축**	**원점**	**직선**$y=x$	**직선**$y=-x$
변환식	$\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases}$	$\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases}$	$\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases}$	$\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$	$\begin{cases} x'=-y \\ y'=-x \end{cases}$
행렬	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(4) 회전변환

점 $P(x,\ y)$를 원점을 중심으로 θ만큼 회전이동하는 일차변환

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

③ 일차변환의 합성

두 일차변환 f:P(x, y) → P′(x′, y′), g:P′(x′, y′)→P″(x″, y″)에 대해 점 P를 P″으로 옮기는 변환을 f와 g의 합성변환이라 하고 $g\circ f$로 나타냅니다.

$g\circ f:\ P(x,y)\to P''(x'',y'')$

④ 일차변환의 역변환

일차변환 f를 나타내는 행렬을 A라 할 때 A^{-1}가 존재하면 A^{-1}로 나타내는 변환을 역변환이라 하고 기호 f^{-1}로 나타냅니다.

⑤ 일차변환에 의한 도형의 상 구하기

일차변환을 나타내는 행렬은 역행렬이 존재하는 않는 경우 소거법 등을 이용해 도형의 상을 구하며 역행렬이 존재하는 경우 다음과 같이 도형의 상을 구합니다.

첫째, 일차변환의 행렬을 이용해 변환식

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ … ㉠을 세웁니다.

둘째, ㉠에서 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ … ㉡으로 나타냅니다.

셋째, ㉡에서 x, y를 x', y'으로 나타냅니다.

넷째, 위에서 얻은 x, y의 식을 x, y의 도형의 식에 대입합니다.

예를 들어 직선 $2x+y-5=0$은 다음 행렬이 나타내는 일차변환 f에 의해 다음과 같은 도형으로 옮겨집니다.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

(1) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이므로 직선 위의 모든 점은 원점으로 옮겨집니다.

(2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 4x+6y \end{pmatrix}$ $\quad \therefore y' = 2x'$

따라서 직선 위의 모든 점은 직선 $y=2x$위의 모든 점으로 옮겨집니다.

(3) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 6x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix}$

따라서 직선 위의 모든 점은 한 점 (5, 15)로 옮겨집니다.

(4) A^{-1}가 존재하는 경우

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\therefore$ x=5x′−2y′, y=−7x′+3y′

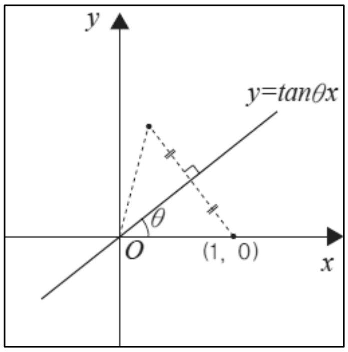
이것을 직선 $2x+y-5=0$에 대입하면

2(5x′−2y′)+(−7x′+3y′)−5=0 ∴3x′−y′−5=0

따라서 구하는(옮겨진) 직선의 방정식은 $3x-y-5=0$입니다.

▶ **예시답안**

1) 직선 $y=(\tan\theta)x$의 기울기가 $\tan\theta$이므로 이 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 θ이다. 따라서 점 (1, 0)을 원점을 중심으로 2θ만큼 회전이동한 점이 점 (1, 0)을 변환 f로 이동시킨 점이다.



$$\therefore \begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta \\ \sin 2\theta\end{pmatrix}$$

같은 방법으로 생각하면 점 (0, 1)을 원점을 중심으로−2 (π/2−θ)=−π+2θ 만큼 회전이동시킨 점이 점 (0, 1)을 변환 f로 이동시킨 점이다.

$$\begin{pmatrix}\cos(-\pi+2\theta) & -\sin(-\pi+2\theta) \\ \sin(-\pi+2\theta) & \cos(-\pi+2\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos(\pi-20) & \sin(\pi-20) \\ -\sin(\pi-20) & \cos(\pi-20)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin 2\theta \\ -\cos 2\theta\end{pmatrix}$$

따라서 구하는 점들의 좌표는 $(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$, $(\sin 2\theta,\ -\cos 2\theta)$이다.

2) 일차변환 f가 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$라 하면 $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta \\ \sin 2\theta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin 2\theta \\ -\cos 2\theta\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}$$
$$\therefore \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos 2\theta+b\sin 2\theta \\ a\sin 2\theta+b\cos 2\theta\end{pmatrix}$$

3) 점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $x=a\cos 2\theta+b\sin 2\theta$, $y=a\sin 2\theta-b\cos 2\theta$이므로

$$x^2+y^2=a^2(\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta)+b^2(\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta)$$
$$\therefore\ x^2+y^2=a^2+b^2\ \cdots\ ㉠$$

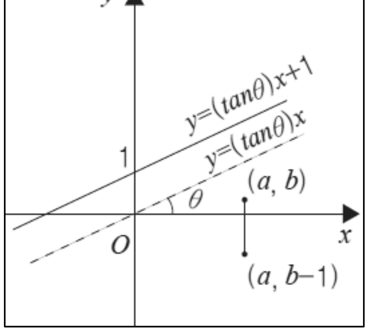
또한 점 R의 좌표를 $(X,\ Y)$라 하면 $X=\dfrac{x+a}{2}$, $Y=\dfrac{y+b}{2}$이므로

$x=2X-a$, $y=2Y-b$를 ㉠에 대입하면

$$(2X-a)^2+(2Y-b)^2=a^2+b^2$$
$$\left(X-\frac{a}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}\ \cdots\ ㉡$$

이때 두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이의 비가 2:1이므로 SQ와 SR의 넓이의 비는 4:1이다.

4) 점 $(a,\ b)$를 직선 y=(tanθ)x+1에 대해 대칭이동한 점은 점 $(a,\ b-1)$을 y=(tanθ)x에 대해 대칭이동한 점을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점과 같다. 따라서 점 Q의 좌표는 (acos2θ+(b−1)sin2θ, asin2θ−(b−1) cos2θ+1)이다.



즉 $\begin{cases}x=a\cos 2\theta+(b-1)\sin 2\theta \\ y=a\sin 2\theta-(b-1)\cos 2\theta+1\end{cases}$ 이므로 변환 g는 일차변환이 아니다.

2006년 02월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

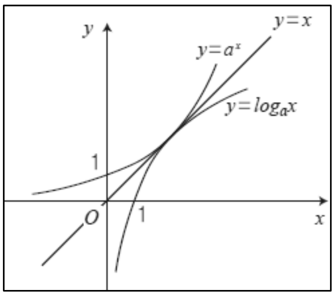
[수학]지수그래프와 로그그래프가 만날 때

1보다 큰 실수 a가 있다. $y=\log ax$와 $y=ax$의 그래프가 오직 한 점에서 만난다면 a의 값은 얼마인가?

▶ 전문가 클리닉

수리논술에 대한 관심이 점점 높아지고 있어 지금까지는 주로 수리논술문제들을 살펴봤습니다. 마지막으로 기출문제를 하나 살펴보도록 하겠습니다. KAIST 심층면접에서 출제되었던 문제입니다.

▶ 예시답안



$y=a^x$와 $y=\log_a x$가 한 점에서 만나는 경우는 그림과 같이 접할 때다. $y=a^x$와 $y=\log_a x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대칭이므로 a의 값을 구하기 위해서는 $a^x=x$를 만족시키는 a를 구하면 된다.

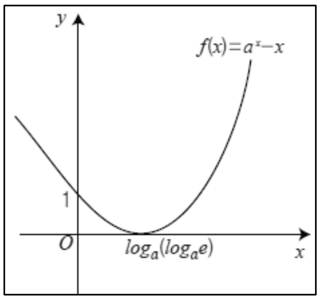
$f(x)=a^x-x$라 하면

$f'(x)=a^x\ln a-1$ ⋯ (ⅰ)

$f''(x)=a^x(\ln a)^2$ ⋯ (ⅱ)

(ⅱ)에서 $f''(x)>0$이므로 (ⅰ)에서 $f'(x)=0$일 때 함수 $f(x)$는 극소값을 갖는다.

$a^x\ln a-1=0$에서 $x=\log_a\left(\dfrac{1}{\ln a}\right)=\log_a(\log_a e)$



따라서 오른쪽 그림과 같이 $f(\log_a(\log_a e))=0$이어야 하므로

$$a^{\log_a(\log_a e)}=\log_a(\log_a e)$$

$$\therefore\ \log_a e=\log_a(\log_a e)$$

$$\therefore\ e=\log_a e$$

$$\therefore\ a^e=e$$

$$\therefore\ a=e^{\frac{1}{e}}$$

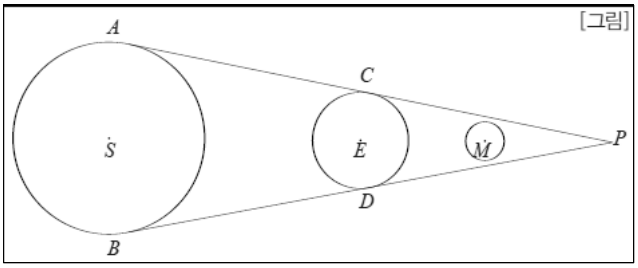
[수학]개기월식, 부분월식이 일어날 조건

월식은 지구가 달과 태양 사이에 위치할 때 일어나는 현상으로 보름달일 때만 일어난다. 월식에서 지구 그림자 내부의 아주 어두운 부분인 본영(本影)에 달의 전부가 들어가면 개기월식이 일어나고 일부만 들어가면 부분식이 일어난다. 우리나라에서도 2006년 9월에는 부분월식을, 2007년 3월과 8월에는 개기월식을 관측할 수 있을 것이라고 한다. 한편 일식은 달이 태양과 지구 사이에 놓일 때 일어난다. 태양빛이 만든 달의 그림자가 지구에 생기고 이 그림자 안에서는 태양이 달에 가려져 보이는 것이다. 달의 그림자에는 내부의 아주 어두운 부분인 본영과 외부의 덜 어두운 부분인 반영(半影)이 있다. 지구상의 관측자가 본영 안에 있으면 태양이 전부 달에 가려지는 개기일식이 일어나고 관측자가 반영 안에 있으면 태양의 일부가 달에 의해 가려진 부분일식이 일어난다. 개기월식, 부분월식이 일어날 조건을 수학적 개념에 근거해 구체적으로 논하시오.

▶ **전문가 클리닉**

교과서를 잘 살펴보면 어떤 개념이 도입되는 과정에서 수학적 개념이 활용되는 경우가 많다는 것을 알게 됩니다. 아쉽게도 많은 학생들은 그냥 지나쳐버리는 부분이죠. 위 문제를 학생들에게 풀게 하면 이것이 수학 문제가 맞느냐고 되묻는 경우가 많습니다. 그러나 일식과 월식에 대한 수학적 설명은 상당수의 교과서에 이미 소개돼있습니다. 원의 위치관계를 다루는 단원에 실려있죠. 일식과 월식이 일어날 조건은 태양과 달, 지구의 위치관계와 밀접한 관련이 있으며 이는 원의 위치관계라는 수학적 개념을 이용해 설명할 수 있는 현상입니다.

▶ **예시답안**



월식은 지구의 그림자에 달이 가려지는 현상이다. 오른쪽 그림은 월식을 수학적으로 설명하기 위해 태양과 지구, 달의 위치관계를 평면상에 간단히 나타낸 단면도이다.

S, E, M을 각각 태양, 지구, 달의 중심이라 하자. 또한 직선 AC와 직선 BD는 태양과 지구의 공통외접선이며 두 공통외접선의 교점은 P라 하자. 그러면 태양빛이 지구에 의해 가려져 생기는 어두운 그림자는 도형 PCD라 할 수 있고 이 도형 안에 달이 완전히 포함되면 개기월식, 일부분만 포함되면 부분월식이 된다.

개기월식이 일어나는 조건을 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 달이 지구보다 작아야 개기월식이 일어날 수 있다. 만약 지구는 태양보다 작은데 달은 지구보다 크다면 개기월식이 일어날 수 없다.

둘째, 선분 EM의 길이가 선분 EP의 길이보다 짧아야 한다. 선분 EM의 길이가 선분 EP의 길이보다 길면 개기월식은 일어나지 않는다.

셋째, 달의 중심 M에서 직선 PC, 직선 BD에 이르는 거리가 달의 반지름보다 커야 한다.

부분월식이 일어나는 조건은 다음과 같다.

첫째, 부분월식이 나타나는 것은 달의 크기와는 관련이 없다. 달이 지구보다 크더라도 부분월식은 일어날 수 있다.

둘째, 선분 EM에서 달의 반지름을 뺀 길이가 선분 EP의 길이보다 짧아야 한다.

셋째, 달의 중심 M에서 직선 AC에 이르는 거리 또는 M에서 직선 BD에 이르는 거리가 달의 반지름보다 짧아야 한다.

[수학]진앙의 위치

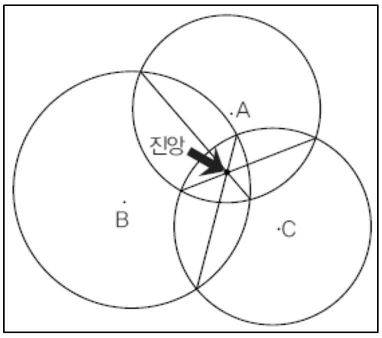
1960년 5월 칠레에서 일어난 지진은 관측사상 가장 강력한 지진이었다. 진도 8.75로 추정되는 이 지진은 진앙에서 1000Km 떨어진 지점에서도 느껴질만큼 강력하고 피해도 컸다. 지진으로 인한 피해를 줄이기 위해 지진을 연구하는 과학자들에 따르면 진앙을 찾는 것이 매우 중요하다고 한다. 그렇다면 진앙의 위치는 어떻게 알아낼 수 있을지 논하시오.

▶ **전문가 클리닉**

지진이 발생하면 P파와 S파가 퍼져나갑니다. 이 두 지진파는 전달 속도가 서로 달라서 어떤 지점에서 이들이 도달하는 시간 차를 관측하면 관측지점으로부터 진앙이 얼마만큼 떨어져 있는 지 알 수 있습니다. 즉 관측지점으로부터 진앙까지의 거리를 알 수 있다는 것이죠. 과학자들은 이를 좀더 응용해 진앙까지의 거리 뿐 아니라 정확한 위치까지를 알아냅니다. 이 문제는 그 방법이 무엇일지 생각해보라는 것입니다. 학생들 중에는 과학 상식이 풍부해서 이미 그 방법을 알고 있는 경우도 있겠지만 이 문제의 출제 의도는 사전 지식이 없다는 가정 하에 주어진 문제를 해결할 수 있는 창의적 아이디어를 구상해 보라는 것입니다.

▶ 예시답안

진앙의 위치를 파악하기 위해서는 지진관측소가 필요하다. 지진관측소에서는 지진파를 관측해 진앙과 지진관측소 사이의 거리를 추정할 것이다. 진앙은 지진관측소를 중심으로 하고 이 거리를 반지름으로 하는 원 위 어느 지점에 있다고 생각할 수 있다.



따라서 진앙의 위치를 확정하기 위해서는 최소한 세 곳의 지진관측소가 필요함을 알 수 있다. 세 곳의 지진관측소에서 지진을 관측하면 세 개의 원이 얻어질 것이며 이 원들이 만나는 교점은 단 한 개 존재한다. 이 지점이 바로 진앙이다.

이를 위해서는 지표면을 좌표평면 상에 두고 각 지역의 위치를 좌표로 나타낸 후 원의 방정식을 풀면 된다. 원의 방정식 세 개를 연립해서 풀면 이를 만족하는 하나의 해가 얻어지는 데 이것이 바로 진앙의 위치다.

물론 지구의 표면은 엄밀히 말해 평면이 아니기 때문에 진앙의 위치를 정밀하게 추적하기 위해서는 구면좌표계를 도입해야 한다. 그러나 진앙에서 충분히 가까운 지진관측소의 기록을 이용한다면 진앙 주변의 좁은 지표면은 거의 평면에 가까운 것으로 볼 수 있으므로 그 오차가 크지 않을 것이다.

[수학]생산가능곡선

국내의 유명 전자회사인 A전자는 반도체와 휴대전화를 생산한다. 그러나 인력과 자금력 및 기술 등의 한계로 제품을 무한정 생산할 수는 없으므로 한 제품을 더 생산하려고 하면 다른 제품의 생산을 줄여야 한다. 일반적으로 한 회사가 자원을 최대로 활용해 생산할 수 있는 두 제품의 생산량 사이에는 일정한 관계가 존재하는 데 이를 그림이나 수식으로 표현한 것을 생산가능곡선이라고 한다.

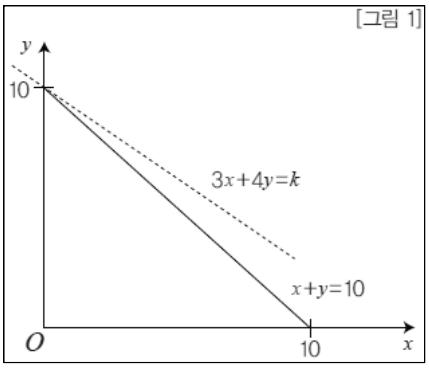
A전자의 반도체 생산량이 x, 휴대전화 생산량이 y일 때 생산가능곡선은 x+y=10가 된다고 하자. 즉 반도체를 x단위 생산할 때 휴대전화의 최대 생산량은 10−x단위가 되는 것이다. 한편 반도체 한 단위의 판매가격은 3원, 휴대전화 한 단위의 판매가격은 4원으로 고정돼있으며 반도체와 휴대전화의 생산량은 0 이상의 실수 값을 갖는 다고 가정하자.

1) A전자가 총 매출액을 극대화하기 위한 생산전략을 구하고 그 이유를 설명하시오.

2) A전자의 생산가능곡선이 x2+y2=100으로 바뀌었다고 하자. 즉 반도체를 x단위 생산할 때 A전자가 생산할 수 있는 휴대전화의 최대 생산량은 100−x2단위가 된다. 이 경우 총 매출액을 극대화하기 위한 A전자의 생산 전략은 어떻게 바뀌겠는가? 구체적인 수치를 제시할 필요 없이 적당한 그래프를 이용해 그 이유를 설명하시오(2006년 중앙대 1학기 수시).

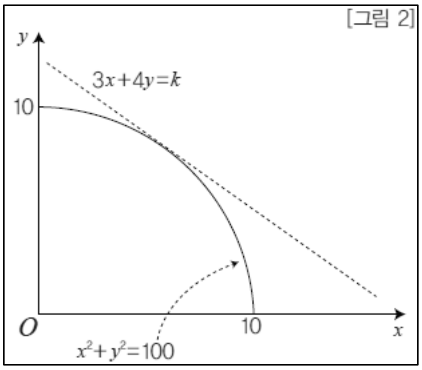
▶ 전문가 클리닉

수리논술문제의 가장 중요한 특징은 답과 함께 적절한 이유까지 설명할 것을 요구한다는 점입니다. 위 기출문제에도 이런 특징이 잘 드러나 있습니다. 이 문제는 부등식의 영역과 최대-최소의 원리를 이용해 해결할 수 있습니다.



▶ 예시답안

1) 총 매출액이 $3x+4y$이므로 매출을 극대화하는 생산전략은 생산가능곡선에서 $3x+4y$의 값이 가장 큰 지점을 찾는 것이 된다. [그림1]을 보면 생산가능곡선 $x+y=10$ 위에서 $3x+4y$의 값이 최대가 되는 지점은 (0, 10)임을 알 수 있다. $3x+4y=k$라 하고 이 직선을 $x+y=10$의 1사분면 영역 위에서 움직여보면 (0,10)을 지날 때 k가 최대가 되기 때문이다. 즉 A전자가 매출을 극대화하기 위해서는 반도체 생산을 중단하고 휴대전화만 10단위 생산해야 한다.



2) 생산가능곡선이 $x^2+y^2=100$이므로 1)에서와 같이 $3x+4y=k$가 이 곡선과 1사분면에서 만나면서 k의 값이 가장 큰 지점을 찾아야 한다. [그림2]를 보면 $3x+4y=k$의 그래프가 생산가능곡선과 접할 때 k의 값이 가장 큰 것을 알 수 있다. 따라서 이 경우 매출을 극대화하기 위해서는 반도체와 휴대전화를 접점의 좌표만큼 생산하면 된다.

[수학]기체의 균형

수능시험을 마치고 철수는 제주도 여행을 위해 비행기에 올랐다. 비행기에 타고 보니 철수의 자리는 창가 쪽이 아닌 통로 쪽이었다. 창가 쪽에 앉고 싶었던 철수는 비어있는 창가 쪽 좌석을 발견하고 그곳으로 자리를 옮겼다. 그러자 승무원이 다가와 철수에게 지정된 좌석으로 돌아가라고 했다. 철수는 어차피 빈자리이니 이곳에 앉아도 괜찮지 않느냐고 물었지만 승무원은 승객은 반드시 자기자리에 앉아야 한다고 고집하는 것이었다. 이에 철수는 왜 빈자리가 있어도 자리를 옮길 수 없는지 그 이유를 알려달라고 했고 승무원은 부기장을 불러 도움을 청했다. 부기장의 자세한 설명을 듣고서야 철수는 자기자리로 돌아가 앉았다. 부기장의 설명은 어떤 것이었을까?

▶ 전문가 클리닉

자동차나 철도와 같은 육상 교통수단과 달리 항공기는 기체의 균형이 매우 중요합니다. 항공기의 전체 무게는 항공기의 무게에 승객, 승무원, 화물, 수하물, 연료, 기내 용품 등의 무게를 모두 합한 것과 같습니다. 이러한 무게들이 균형을 이뤄 무게중심이 적정한 위치에 놓여야 기체의 균형이 유지되는 것입니다. 무게중심은 항공기 동체상의 일정한 선을 기준으로 했을 때 각 물체까지의 거리에 작용하는 힘을 더해서 구합니다.

항공기의 무게중심을 유지하는 업무를 특별히 탑재관리라고 합니다. 여객과 화물이 수속을 완료하는 시점에서 컴퓨터를 통해 좌석 배치와 화물 탑재위치 등을 고려해 무게중심을 구하게 되는 데 이 무게중심이 적절한 위치에 오는 경우에만 운항이 허가됩니다. 따라서 승객들은 배정받은 좌석대로 앉아야 하는 것입니다.

▶ 예시답안

부기장의 설명은 다음과 같았을 것입니다.

비행기 탑승객은 반드시 정해진 좌석에 앉아야 하는 것이 원칙이다. 비행기가 이륙하기 위해서는 비행기의 동체가 균형을 이뤄야 하기 때문이다. 탑승수속 당시 항공사에서는 비행기의 무게중심이 적절한 위치에 있도록 좌석을 배정한 것이다. 승객들이 비어있는 자리 아무 곳에나 앉는다면 무게중심을 적절히 유지할 수 없다.

우리가 비행기의 무게중심을 계산하는 방법은 다음과 같다. 우선 공간좌표를 도입해 비행기 안 물체의 위치를 공간좌표로 나타낸다. 비행기 자체의 무게중심을 (x_a, y_a, z_a), 비행기 무게를 w_a라 하고 비행기 내의 사람과 물건의 위치를 각각 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2),$\cdots$, (x_n, y_n, z_n), 그 무게를 $w_1, w_2, \cdots, w_n$이라 하자. 그러면 비행기의 무게중심 (x, y, z)는 다음과 같다.

$$x = \frac{x_a w_a + x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_n w_n}{w_a + w_1 + w_2 + \cdots + w_n}$$

$$y = \frac{y_a w_a + y_1 w_1 + y_2 w_2 + \cdots + y_n w_n}{w_a + w_1 + w_2 + \cdots + w_n}$$

$$z = \frac{z_a w_a + z_1 w_1 + z_2 w_2 + \cdots + z_n w_n}{w_a + w_1 + w_2 + \cdots + w_n}$$

비행기의 안전한 운행을 위해서는 무게중심을 적절히 유지하는 것이 중요하다. 정해진 원칙에 협조해 주기 바란다.

[수학]대수학과 기하학

다음 제시문의 밑줄 친 부분에서 '기하학적이거나 대수학적인 분석의 가장 좋은 점을 취해 대수학과 기하학의 결점을 상호 보충'한다는 말의 의미를 구체적인 예를 들어 설명하시오.

나는 특히 수학을 더 잘 생각하기 위해 수학을 직선상에서 생각해야 한다고 느꼈다. 왜냐하면 나의 상상이나 나의 감각은 직선보다도 더 판명하게 표상할 수 있는 것을 알지 못했으며 또 직선보다도 더 단순한 것을 발견하지 못했기 때문이다. 그러나 한편으로 수학을 동시에 이해하고 포착하기 위해 가능한 한 가장 짧은 몇 가지 숫자에 의해 수학을 설명해야 한다고 생각했다. 그리고 바로 그런 수단에 의해 나는 기하학적이거나 대수학적인 분석의 가장 좋은 점을 취하게 되고 그럼으로써 대수학과 기하학의 결점을 상호 보충할 수 있게 되리라고 생각했다. 결과적으로 ... 내가 선택했던 얼마 안 되는 이 교훈을 정확히 지키는 일이, 나에게 대수학과 기하학이 포함하고 있는 모든 곤란한 문제들로부터 실마리를 풀 수 있는 여건을 마련해주고, 내가 대수학과 기하학을 검토하기를 시작한 이후 2, 3개월 안에 나는 가장 간단하고도 가장 일반적인 원리로부터 나의 생각을 출발시켰기 때문에 ... 옛날에 내가 매우 어렵다고 판단했던 여러가지 문제를 해결하게 됐을 뿐만 아니라 ... 내가 몰랐던 문제를 지금 규명할 수 있게 됐다.-데카르트의 '방법서설' 중에서

▶ 전문가 클리닉

데카르트(1596~1650)는 해석기하학의 창시자입니다. 데카르트에 의해 처음으로 좌표평면이 수학에 도입됐죠. 좌표평면이란 도구가 오늘날의 수학에서 차지하는 중요성을 생각해보면 그의 업적이 얼마나 대단한 것이었는 지 실감할 수 있습니다. 그는 철학자이면서도 수학을 매우 중

요한 것으로 여겼는 데 그 이유는 무엇이었을까요?

먼저 그는 수학이 그 어떤 학문보다도 본질적인 진리에 근접해 있다고 생각했습니다. 모든 지식은 궁극적으로 지적 명증성을 지향해야 하는 데 이 자체가 수학에서 비롯된다는 생각이었죠. 또한 모든 학문은 가장 단순한 것에서 출발해 점차 복잡하게 나아가야 하는 데 수학은 가장 단순한 개념의 본질을 품고있어 모든 학문의 기초가 된다고 생각했습니다.

데카르트에 따르면 수학적 지식이야말로 가장 확실한 지식입니다. 수학은 인간의 불확실한 감각에 의지하지 않고 순수한 사유만으로 진리를 탐구하는 학문이기 때문이죠. 그는 수학의 질서와 자연의 질서간에 대응관계가 발견된다는 것도 수학의 중요성을 뒷받침하는 증거라고 생각했습니다. 이와 같은 데카르트의 견해는 수학을 공부하는 오늘날의 우리 학생들에게도 귀중한 시사점을 주리라 생각합니다.

데카르트의 '방법서설' 이 제시문으로 등장한 위 문제는 해석기하학의 의의에 대해 논술할 것을 요구하고 있습니다. 앞으로의 수리논술 시험에서 새롭게 출제될 수 있는 문제유형이기도 합니다.

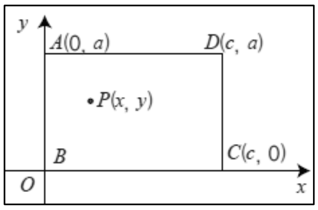
▶ 예시답안

도형을 좌표평면 위에서 다루기 전까지, 새로운 기하학적 성질에 대해 논증하기 위해서는 이미 증명된 또 다른 기하학적 성질을 사용해야만 했다. 그러나 도형의 분석에 좌표평면을 도입하자 기하학적인 성질까지도 좌표 사이의 간단한 대수적 계산과정에 의해 증명할 수 있게 됐다.

도형의 성질에 대한 증명이 대수적 계산에 의해 대체되는 한 예를 살펴보겠다. 직사각형 ABCD에서 직사각형 내부의 임의의 점을 P라 하면 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$$

이를 증명하면 다음과 같다. 점 B를 원점으로 잡고 A(0, a), C(c, 0)으로 놓으면 D(c, a)이므로 임의의 점 P(x, y)에 대해



$$\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\{x^2+(y-a)^2\}+\{(x-c)^2+y^2\}$$

$$\overline{BP}^2+\overline{DP}^2=(x^2+y^2)+\{(x-c)^2+(y-a)^2\}$$

$$\therefore\ \overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$$

2006년 03월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]러셀의 역설

러셀은 1919년 간행된 저서 '수리철학입문'에서 다음과 같은 마을 이발사의 역설을 제시했다. 어느 마을에 단 한 명의 이발사가 있다. 이 이발사는 "자신의 수염을 스스로 깎지 않는 사람들의 수염만을 깎아주겠다."고 약속했다. 그러면 이 이발사는 자신의 수염을 깎을 것인지, 깎지 않을 것인지에 대해 자신의 견해를 밝히고 그 근거를 논술하시오. 또 이와 유사한 사례의 논리를 스스로 구성해보시오.

▶ 전문가 클리닉

영국의 논리 철학자이자 수학자였던 러셀(1872~1970)이 제기한, 집합론에서의 논리적 역설 문제로 '러셀의 역설'로도 불립니다. 러셀은 수학과 철학 이외에도 활발한 사회·정치활동을 펼쳤으며 많은 저작을 남겨 노벨 문학상을 수상하기도 했습니다.

▶ 학생 예시답안

수염을 깎지 않을 것이다. 이발사는 "자신의 수염을 스스로 깎지 않는 마을 사람들의 수염만을 깎아준다"고 약속을 하긴 했지만 스스로 수염을 깎지 않는 마을 사람들의 수염을 반드시 깎아 준다고는 하지 않았다. 그러므로 이발사는 수염을 깎지 않을 때는 약속을 어기게 되지 않는다. 그러나 수염을 깎을 때는 자신의 약속에 대해 모순이 생기므로 약속을 어기게 된다. 그러므로 이발사는 자신의 수염을 깎지 않을 것이다.

비슷한 사례의 논리로는 A마을의 사람인 B가 말하길 "A마을의 사람들은 모두 다 거짓말만 한다"라고 말했을 경우, B의 말이 사실인지 아닌지 밝히는 것이 있다.

▶ 평가 및 첨삭

답안의 첫 번째 부분에서 제시한 학생의 결론은 옳지 않습니다. 이발사는 자신의 수염을 깎지 않더라도 약속을 어기게 되기 때문입니다. 따라서 이 약속은 이발사가 자신의 수염을 깎아도 모순이 생기고 깎지 않아도 모순이 생긴다고 평가해야 옳습니다.

또한 '유사한 사례의 논리를 구성해보라'는 문제에 답할 때는 자신이 구성한 논리와 함께 그것이 왜 위와 유사한 사례가 되는 지에 대한 분석이 포함돼야 합니다. 위 답안에는 그 부분이 빠져있습니다.

러셀 자신이 제기했던 역설 중 가장 대표적인 것으로 다음과 같은 집합을 들 수 있습니다.

$$H=\{x|x\not\in H\}$$

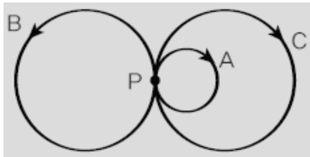
이 집합에서는 $x\in H$이면 $x\not\in H$입니다. 또 $x\not\in H$이면 $x\in H$입니다. 자체적인 모순을 포함하고 있음을 알 수 있습니다.

집합에서 존재할 수 있는 것으로 드러난 이 같은 모순은 당시 수학계에 큰 충격을 주었습니다. 수학적인 옳고 그름의 기준이 무엇인가에 대해 근본부터 다시 따져봐야 한다는 사실이 드러난 것이죠.

러셀의 역설이 제기한 문제를 계기로 20세기의 수학에서는 옳고 그름의 문제에 대한 근본적인 논의가 활발히 일어났습니다. 이로 인해 현대 수학은 크게 발전할 수 있었습니다.

[수학]코스를 달리는 방법의 수

어느 공원에 오른쪽과 같은 달리기 코스 A, B, C가 있다. 이 코스들은 모두 P지점을 지나며 코스 A의 길이는 1Km, 코스 B와 C의 길이는 2Km이다. 각 코스는 각각 정해진 방향으로만 달리는 것으로 하고 P를 출발점과 결승점으로 하는 nKm의 코스를 생각해 nKm 코스의 총 수를 f_n이라 한다.



1) 이차방정식 $t^2-t-2=0$의 두 근을 α, β라 할 때 $g_n=f_n-\alpha f_{n-1}$이라 하자. $n\geq 2$일 때 $g_{n+1}=\beta g_n$이 성립함을 보이시오.

2) f_n을 구하시오.

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{\log f_n}{n}$을 구하시오.

▶ 전문가 클리닉

주어진 상황에서 코스의 총 수를 f_n이라 하고 f_n에 대한 귀납적 정의를 이끌어내어 문제를 해결하는 추론형 문제입니다. 코스의 총 수란 결국 nKm를 달리는 방법의 수를 말하는 것입니다.

▶ 예시답안

1) $(n+1)$Km의 코스를 달리는 방법으로는 다음 두 가지를 생각할 수 있다.

① 처음에 1Km의 코스 A를 달린 후 나머지 nKm를 달린다.

② 처음에 2Km의 코스 B 또는 C를 달린 후 나머지 $(n-1)$Km를 달린다.

$\therefore\ f_{n+1}=f_n+2f_{n-1}$ … (ⅰ)

(ⅰ)은 $\alpha=2, \beta=-1$일 때,

$f_{n+1}-2f_n=-\{f_n-2f_{n-1}\}$ … (ⅱ)

이므로 $g_n=f_n-\alpha f_{n-1}$, $g_{n+1}=\beta g_n$이 성립한다.

또는 $\alpha=-1, \beta=2$일 때

$f_{n+1}+f_n=2\{f_n+f_{n-1}\}$ … (ⅲ)

이므로 $g_n=f_n-\alpha f_{n-1}$, $g_{n+1}=\beta g_n$이 성립한다.

2) (ⅱ)에서 $f_{n+1}-2f_n=(-1)^{n-1}\{f_2-2f_1\}$

(ⅲ)에서 $f_{n+1}+f_n=2^{n-1}\{f_2+f_1\}$

$n=1$일 때 코스를 달리는 방법의 수는 A의 1가지이므로 $f_1=1$이다.

$n=2$일 때 코스를 달리는 방법의 수는 AA, B, C의 3가지이므로 $f_2=3$이다.

$$\therefore \begin{cases} f_{n+1}-2f_n=(-1)^{n-1} \\ f_{n+1}+f_n=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1} \end{cases}$$

$$\therefore f_n = \frac{2^{n+1}-(-1)^{n-1}}{3}$$

3) 위에서

$$\therefore \log f_n = \log\frac{2^{n-1}-(-1)^{n+1}}{3}$$
$$= \log\frac{2^{n+1}}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$$
$$= \left\{(n+1)\log 2 + \log\frac{1}{3}\right\}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\log f_n}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\log 2+\frac{1}{n}log\frac{1}{3}\right\}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}\right]$$
$$= \log 2$$

[수학]롤의 정리

롤의 정리가 무엇인지 설명하고 이를 증명하시오.

▶ 전문가 클리닉

심층면접에서는 고등학교 수학 교과서에 등장하는 중요한 개념을 묻는 경우가 많습니다. 롤의 정리는 프랑스의 수학자 롤(1652~1719)이 남긴 것으로 평균값 정리와 밀접한 관련이 있습니다.

▶ 예시답안

롤의 정리는 다음과 같다.

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 개구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면 $f'(x_1)=0\ (a<x_1<b)$인 x_1이 $(a,\ b)$ 안에 적어도 하나 존재한다는 것이다.

이를 증명하면 다음과 같다.

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)=f(b)$이므로, $f(x)$는 개구간 $(a,\ b)$에서 최대값 M 또는 최소값 m을 갖는다.

이제 $x=x_1$일 때 최대값 M을 가지는 경우에 대해 증명하자.

$f(x_1+\Delta x)\leqq f(x_1)$, 여기서 $\Delta x>0$이면

$\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}\leqq 0$임을 알 수 있다.

그러므로 $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}\leqq 0$

또 $\Delta x<0$이면 $\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}\geqq 0$임을 알 수 있다. 따라서

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}\geqq 0$$

그런데 $f(x)$는 $(a,\ b)$에서 미분가능하므로,

$$0 \geqq \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

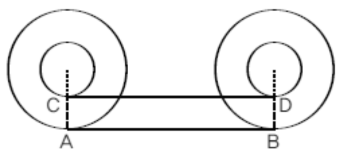
$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} \geqq 0$$이다.

따라서 $f'(x)=0$인 x_1이 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

[수학]아리스토텔레스의 바퀴

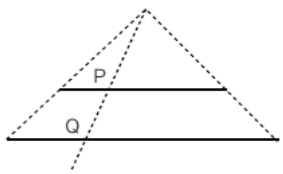
다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[제시문 A]



갈릴레오가 1638년 발행한 <신과학대화>에는 아리스토텔레스의 바퀴라고도 불리는 기하학적 역설이 등장한다. 내용은 다음과 같다. 오른쪽 그림에서 큰 원이 선분 AB를 따라 A에서 B까지 굴러 1회전 했다고 하자. 이때 큰 원에 고정된 작은 원도 선분 CD를 따라 C에서 D까지 굴러 1회전 한다. 그러므로 두 원의 둘레의 길이는 같다.

[제시문 B]



두 집합의 원소 사이에 일대일대응을 만들 수 있으면 두 집합은 서로 일대일대응한다고 한다. 그리고 일대일대응하는 두 집합의 원소의 개수는 같다. 그런데 임의의 두 선분은 서로 일대일대응한다. 그림은 어떻게 임의의 두 선분이 일대일대응이 되는 지를 나타내고 있다. 즉 한 선분 위의 임의의 점 P는 위 그림과 같은 방법으로 다른 선분 위의 점 Q에 대응시킬 수 있다.

제시문 B의 내용을 참고해 제시문 A의 주장을 논리적으로 반박하시오.

▶ 전문가 클리닉

역설(paradox)은 학문의 발전에 기여합니다. 반지름이 서로 다른 두 원의 둘레의 길이가 같을 리는 없습니다. 그러나 아리스토텔레스의 바퀴 이야기를 들어보면 논리적 허점을 발견하기가 그리 쉽지 않습니다.

▶ 학생 예시답안

[제시문 A]의 큰 원을 X, 큰 원의 위에 고정된 작은 원을 Y, X와 Y의 중심을 O라고 두자. O와 X 위의 임의의 점을 선으로 잇는다면 그 선은 Y위의 어느 한 점을 지난다. 이런 방식으로 X위의 모든 점과 점 O를 선으로 잇는다고 생각하면 각각의 선과 그 선이 지나는 Y위의 점은 서로 일대일대응되고 X위의 점과 Y위의 점도 일대일대응이 된다.

이때, X가 한 바퀴 구른 길이인 $\overline{AB}$는 X의 원주 길이이고 $\overline{AB}=\overline{CD}$이며 Y원주는 X원주와 일대일대응이므로, Y원주와 $\overline{CD}$도 일대일 대응이 된다.

하지만 [제시문 B]에서 길이가 다른 두 선분도 일대일대응이 가능하다는 사실을 알 수 있으므

로, Y의 원주와 $\overline{CD}$의 길이가 같다고는 할 수 없다.

그러므로 두 원의 둘레의 길이는 같지 않을 수도 있다.

▶ 평가 및 첨삭

[제시문 B]에 근거해 [제시문 A]의 논리를 반박한 것은 출제 의도를 정확히 읽어낸 것으로 평가합니다. 그런데 마지막에 "두 원의 둘레의 길이는 같지 않을 수도 있다"는 표현은 두 원의 둘레의 길이가 다르다는 사실이 명확한 이 문제에서는 어색한 결론입니다.

이보다는 "[제시문 B]에서 확인된 성질에 비춰볼 때, 작은 원의 둘레와 $\overline{CD}$가 일대일대응이 된다는 것을 근거로 두 길이가 같다는 것을 주장한 [제시문 A]의 논리에는 오류가 있다"라고 표현하는 것이 바람직합니다.

[수학]한 번도 조사 대상이 되지 않은 사람

100명의 학생을 모집단으로 해서 실시한 2번의 설문조사 응답 현황이 아래 표와 같다. 이에 따르면 1차 설문에서는 대상자 55명에게 설문지를 배포해 이 중 40명이 설문에 응답했고 15명은 설문 응답을 거부했다. 2번의 설문조사에서 1차와 2차에 모두 응답한 사람은 30명이었고 2차에만 응답한 사람은 5명이었다.

<설문조사 응답현황>

유형 \ 설문차수	1차	2차
설문응답자	40	a
응답거부자	15	20
대상제외자	45	b

이 자료에서 한 번도 조사대상이 되지 않은 사람수의 최소값을 구할 수 있는 지 논하시오 (2006년 이화여대 1학기 수시).

▶ 전문가 클리닉

작년 이화여대에서 출제됐던 수리논술 문제입니다.

'조사대상이 되지 않은 사람수의 최소값'을 구하는 것 뿐 아니라 '구할 수 있는 지'에 대해서까지 결론을 내려야 한다는 것에 주의하기 바랍니다.

▶ 학생 예시답안

한 번도 조사대상이 되지 않은 사람수를 P라고 두자.

a와 b를 각각 '1, 2차 모두 응답 거부한 학생수','한 번만 거부한 학생수'라 하고 P를 구하는 식을 세워보면

P=전체학생수−(1, 2차 모두 응답한 학생수+한 번만 응답한 학생수+1, 2차 모두 응답거부한 학생수+한 번만 거부한 학생수)=전체학생수−(1, 2차 모두 응답한 학생수+한 번만 응답한 학생수+a+b)

위의 표와 문제의 정보에 따르면 1차 대상 제외자 중 2차에 응답한 학생이 5명이고, 1차 설문응답자 중 대상에서 제외된 학생이 10명이다. 이로부터 한 번 응답한 학생수는 10+5임을 알 수 있다.

∴ P=100−(30+15+a+b)=55−(a+b)이므로 a와 b에 따라 P가 정해진다.

0≤a≤15, 5≤b≤35(a=0일 때 b=35, a=15일 때 b=5)이고 a+b가 최대값일 때 P가 최소값이다.

위의 부등식에서 a+b의 최대값은 35이므로 55−35=20, P의 최소값은 20이다.

▶ 평가 및 첨삭

결론은 옳지만 몇 가지 문제점이 있는 답안입니다.

첫째, 논리적 서술과 풀이를 위한 노트가 섞여있어 체계적인 논술이 되지 못했습니다.

둘째, 위 풀이에서 a, b에 대한 분석은 매우 핵심적인 부분임에도 불구하고 a, b의 범위로부터 a+b의 최대값을 찾아내는 과정이 논리적으로 제시되지 않았습니다.

셋째, 용어의 혼동이 있습니다."1차 설문응답자 중 대상에서 제외된 학생이 10명"이라고 했는데 '대상제외'가 아니라 "1차 설문응답자 중 2차에선 응답하지 않은 학생이 10명"이라는 뜻으로 판단됩니다.

넷째, "1,2차 모두 응답한 학생수+한 번만 응답한 학생수"란 결국 "1차 또는 2차에 응답한 학생수"입니다. 간단한 표현이 있는 데 복잡하게 설명했습니다.

위 논술의 내용을 다시 정리해보면 다음과 같습니다. 1차 또는 2차에 응답한 학생의 집합을 A라 하고 1차 또는 2차에 응답을 거부한 학생의 집합을 B라 할 때, 2번 모두 대상에서 제외된 학생의 수는 전체 학생의 수에서 $n(A\cup B)$를 뺀 값과 같습니다.

이때 문제에서 $n(A)=45$인데 2번 모두 대상에서 제외된 학생의 수가 최소가 되려면 $A\cap B=\Phi$이고 B의 원소의 개수는 최대가 돼야 합니다. 1차, 2차 응답거부자의 집합을 P, Q라 할 때 $B=P\cup Q$이고 $n(P\cup Q)$가 가장 클 때는 $P\cap Q=\Phi$일 때입니다.

문제에 주어진 정보를 다시 검토해보면 이러한 경우는 가능하고 2번 모두 대상에서 제외된 학생 수의 최소값을 구할 수 있으며 그 값은 20입니다.

2006년 04월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학] 각 자리 숫자의 합이 9의 배수이면

다음을 증명하시오.

1) 각 자리 숫자의 합이 9의 배수이면 그 수는 9의 배수다.

2) 어떤 유리수 $\frac{m}{n}$(m, n은 서로소인 양의 정수)이 무한소수일 때 순환마디는 n보다 작다.

3) n이 $2n+1$을 완전제곱수로 만드는 양의 정수일 때, $n+1$은 두 개의 연속하는 완전제곱수의 합으로 나타낼 수 있다.

▶ 전문가 클리닉

수의 성질에 대한 증명 문제입니다. (1)번의 경우 중학교에서 다루는 쉬운 내용이지만 그 내용을 일반적으로 증명할 수 있는 논리력이 필요합니다. (2)번과 (3)번은 정수의 성질을 이용해 풀 수 있습니다.

▶ 학생 예시답안 &첨삭1

(1) 9의 배수($9k$)를 A, B, C로 표현하면 다음과 같다.

$$100A+10B+C=9k$$

$$(100-1)A+(10-1)B+C+A+B=9k$$

99와 9는 9의 배수이므로 $A+B+C$, 즉 어떤 수의 각 자리 숫자의 합이 9의 배수이면 그 수는 9의 배수다. 이를 자릿수를 확장시켜도 10^n-1의 꼴로 9의 배수가 나타남을 확인할 수 있다.

▶ 평가 및 첨삭

위 답안에서는 예를 들어 설명했습니다만 이를 일반화시켜 증명하면 다음과 같습니다.

n자리 자연수 $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 = a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \cdots + a_2 10^1 + a_1 10^0$이라 하자. 우변은 $a_n(9+1)^{n-1} + a_{n-1}(9+1)^{n-2} + \cdots + a_2(9+1)^1 + a_1$으로 변형할 수 있다. $(9+1)^{n-1}$을 전개하면 1이 $n-1$번 곱해진 항을 제외하고는 9가 적어도 한 번 이상 곱해져 있다. 즉 $(9+1)^{n-1}=9k+1$ (k는 정수)이다.

그러므로 우변은 다시 $a_n(9k_n+1)+a_{n-1}(9k_{n-1}+1)+\cdots+a_2(9k_2+1)+a_1$ $=9(a_n k_n + a_{n-1}k_{n-1} + \cdots + a_2 k_2) + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1)$이 된다.

즉 $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$를 9로 나눈 나머지는 $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$를 9로 나눈 나머지와 같다. 따라서 $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$이 9의 배수면 $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$은 9의 배수다.

▶ 학생 예시답안 &첨삭2

어떤 정수 m을 n으로 나눌 때 가능한 나머지는 0부터 $n-1$이다. 즉 나눠 떨어질 때의 나머지 0을 제외하고 $n-1$개의 나머지가 생기는 것이다. 따라서 n번째 나눌 때는 중복된 나머지가 생기고, 이때부터 다시 중복될 때까지의 중복절이 순환한다.

예를 들어 10을 7로 나누면 0.1428571...과 같이 1이 반복돼 142857이 순환하는 데 7로 나눴을 때 가능한 나머지인 1,2,3,4,5,6이 한 번씩 나타났다. 따라서 순환마디의 최대값은 $n-1$로 항상 n보다 작다.

▶ 평가및 첨삭

"따라서 n번째 나눌 땐 중복된 나머지가 생기고"라는 표현보다는 "따라서 적어도 n번째 나눌 때까지는 중복해 나타나는 나머지가 생기고"라는 표현이 더 정확합니다. 꼭 n번째 나눌 때 중복된 나머지가 생기는 것은 아닙니다.

▶ 학생 예시답안 &첨삭3

n은 $2n+1$을 완전제곱수로 만드는 양의 정수이므로, $2n+1$을 x^2이라고 두자. $2n+1$은 홀수이므로 홀수의 제곱 역시 홀수$(2a+1)$이다. 식을 정리하면,

$$2n+1=x^2$$
$$x^2=\text{홀수}$$
$$x=2a+1$$
$$x^2=4a^2+4a+1=2n+1$$
$$2n=4a^2+4a$$
$$n=2a^2+2a$$
$$n+1=2a^2+2a+1=a^2+(a+1)^2$$

따라서 n이 $2n+1$을 완전제곱수로 만드는 양의 정수일 때, $n+1$은 연속하는 두 개의 완전제곱수의 합으로 나타낼 수 있다.

▶ 평가및 첨삭

전체적인 방향은 옳습니다. 그러나 부분적으로 논리적인 혼선이 엿보입니다. "2n+1은 홀수이므로 홀수의 제곱 역시 홀수이다"라는 문장은 그 의미가 분명하지 않습니다. "x^2이 홀수이므로 x도 홀수여야 하고 따라서 $x=2a+1$로 놓을 수 있다"고 표현해야 합니다.

[수학] 원숭이 기르는 사육사

원숭이를 기르는 사육사 세 사람이 있었다. 원숭이는 바나나를 너무 좋아해 바구니에 담아온 바나나를 금방 먹어치우곤 했다. 사육사들은 원숭이의 식사관리를 위해 바나나를 숨겨두기로 하고, 바나나를 줄 때 한 개씩만 주고 남은 바나나의 $\frac{1}{3}$은 숨겨두기로 했다.   처음에 도착한 사육사는 바나나 한 개를 원숭이에게 주고, 남은 바나나의 $\frac{1}{3}$을 다른 곳에 숨겼다. 두 번째로 도착한 사육사도 남아 있는 바나나 중 한 개를 원숭이에게 주고 남은 바나나의 $\frac{1}{3}$을 숨겼다. 마지막으로 도착한 사육사도 똑같이 했다.   그렇다면 이때 처음에 바구니에 있던 바나나의 수는 몇 개인가? 그 수를 결정할 수 있는가? 만약 결정할 수 없다면 그 수는 어떤 수라도 될 수 있는가? 이유를 들어 논술하시오.

▶ 전문가 클리닉

주어진 조건만을 가지고 처음 바나나의 수를 어디까지 추론할 수 있는 지 묻고 있습니다. 바나나의 수를 전혀 알 수 없는 지, 정확한 수를 추론할 수 있는 지, 그렇지 않다면 어떤 정보까지를 찾아낼 수 있는 지에 대해 자신의 생각을 명확히 밝혀야 합니다.

▶ 학생 예시답안 &첨삭

처음에 있던 바나나의 수를 x라 하고 식을 세우면,

$[\{\frac{2}{3}(x-1)-1\}\frac{2}{3}-1]\frac{2}{3}=$정수(N)

이를 x에 대해 풀면 $\frac{8x-38}{27}=N$이다.

정수(N)에 1을 더하거나 빼도 정수이므로 $\frac{8x-38}{27}+1=N$이다.

$8x=27N+11$, 즉 27의 배수에 11을 더한 것이 8의 배수여야 한다. 그런 수로는 x가 25일 때인 200이 있다. 나아가 x가 25+27일 때인 416도 가능하므로 성립되는 x의 값은 25에 27씩 더한 수들의 집합이다.

▶ 평가및 첨삭

바나나의 숫자는 결정할 수 없습니다. 그렇다고 어떤 수라도 될 수 있는 것은 아닙니다. 일정한 조건을 만족해야 하는 것이죠.

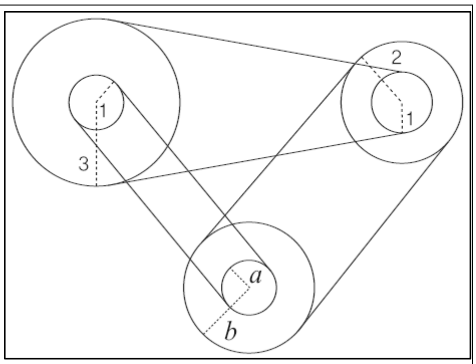
위 답안의 아쉬운 점은 문제의 질문에 명확하게 답변하지 않았다는 것입니다. 바나나의 수를 찾아나가는 과정은 올바릅니다. $8x=27k+11$(x, k는 정수)라는 조건도 정확한 답입니다. 하지만 결론을 내리는 과정에서 보다 더 논리적인 추론 과정을 보여줘야 합니다.

$x=\frac{27k+11}{8}$이므로 $27k+11=R$입니다. 8의 배수이면서 27로 나눈 나머지가 11인 R을 먼저 구하고 x를 구하면 됩니다. 즉 $27k+11$에서 k를 $8m, 8m+1, \cdots, 8m+7$로 분류해보면 $k=8m+7$ (m은 정수)일 때 $27k+11=27(8m+7)+11=8(27m+25)$이 되어 R의 조건을 만족하는 것을 알 수 있습니다. 이때 $x=27m+25$입니다.

즉 27로 나눠 25가 남는 수들만 바나나의 수가 될 수 있습니다.

[수학] 벨트로 연결된 바퀴가 돌기 위한 조건

세 개의 도르래가 그림과 같이 벨트로 연결돼 있다. 각 도르래의 작은 바퀴와 큰 바퀴의 반지름은 (1cm, 3cm), (1cm, 2cm), (acm, bcm)이다. 벨트가 미끄러지지 않고 돌기 위한 a, b의 관계를 설명하시오(2005년 고려대 수리논술 예시문항).



▶ 학생 예시답안 &첨삭

(1, 3), (1, 2), (a, b) 세 개의 도르래를 차례대로 A, B, C라 하자. 이때 A와 B의 비율이 3:1이므로 도는 횟수는 1:3이 된다. B와 C의 경우에는 b:2, A와 C의 경우에는 a:1의 비율로 돌게 된다. 이를 계산하면 A:B:C=2a:b:2, 2a:b=1:3이므로 6a=b가 성립한다. 즉 a와 b가 1:6의 관계를 가질 때 벨트가 미끄러지지 않고 돈다.

▶ 평가및 첨삭

잘 논술했습니다. 다만 전체 답안의 논리적 근거가 되는 '회전수와 도르래의 반지름의 길이는 반비례한다'는 성질에 대해 아무런 근거를 제시하지 않은 점이 조금 아쉽습니다.

[수학] 악수한 횟수를 일반화 하라

어느 부부가 9쌍의 부부를 집으로 초대해 파티를 열었다. 이 자리에 모인 10쌍의 부부 중에는 서로 아는 사이도 있고 모르는 사이도 있다. 사람들은 서로 만난 적이 없는 사람들과만 악수를 한 번씩 나눴다. 저녁식사가 끝나고 집주인은 그 자리에 모인 19명(자신의 부인과 손님들)에게 오늘 모임에서 악수를 몇 번 했는 지 물었다. 놀랍게도 이들이 악수한 횟수는 모두 달랐다. 그렇다면 집주인의 부인은 악수를 몇 번 했을지 생각해보고 부인이 악수한 횟수를 일반화해 설명하시오.

▶ 학생 예시답안 &첨삭

n쌍의 커플이 있는 데 집주인을 제외한 $2n-1$명의 사람들이 악수한 횟수가 모두 달랐다. 그렇다면 사람들이 악수한 횟수는 0부터 $2n-2$번까지이고 중복되는 횟수는 없다고 할 수 있다.

이 사람들을 악수를 많이 한 순서대로 $A, B, C, D\cdots$라 놓을 때, A는 자신의 짝을 제외한 모든 사람과 악수를 했으므로 총 2n−2번의 악수를 했다. 또 A의 짝을 제외한 사람들은 적어도 한 번 이상 악수를 했기 때문에 A의 짝은 악수를 한 번도 하지 않았음을 알 수 있다.

이런 식으로 $A, B, C, D\cdots$와 그들 짝의 악수 횟수를 찾아가면 순서대로 $(2n-2, 0), (2n-3, 1), (2n-4, 2)\cdots$로 둘씩 차례차례 짝지어진다. 이때 사람 수는 $2n-1$로 홀수이기 때문에 둘씩 짝을 지으면 한 명이 남는 데 그 사람이 바로 집주인의 부인이다. 동시에 악수횟수도 하나가 남는 데 그것은 0부터 $2n-2$까지의 수 중 가운데 수이므로 $n-1$이 된다.

그러므로 n쌍의 커플이 있을 때 집주인의 부인이 악수한 횟수는 $n-1$회다. 위의 문제에서 커플의 수는 10이므로 집주인의 부인이 악수한 횟수는 9회가 된다.

▶ 평가및 첨삭

올바르게 추론했습니다. 다만 "이런 식으로 … 찾아가면"라는 부분을 보다 명료하게 증명했더라면 더 좋았을 것입니다.

[수학] 심층면접01

$f(x)=ax^2+bx+c$일 때 모든 실수 x에 대해 $f(x)>0$일 조건을 제시하고 그 이유를 설명하시오.

▶ 예시답안

모든 x에 대해 $f(x)>0$일 조건은 $a>0,\ D>0$ 또는 $a=b=0,\ c>0$이다.

만약 $a<0$이면 함수 $y=f(x)$는 위로 볼록한 포물선 모양의 그래프가 되고 이때는 꼭지점의 위치와 관계없이 그래프의 양쪽 부분이 x축 아래로 내려오게 된다.

$a>0$이면 이차함수는 아래로 볼록한 포물선 모양의 그래프가 된다. 이때 모든 x에 대해서 $y=f(x)$의 그래프가 x축 윗부분에 있으려면 x축과 만나지 않아야 한다.

만약 x축과의 교점이 하나라면 그 점에서 $f(x)=0$이 되며, 교점이 두 개라면 그 두 점 사이에서 $f(x)<0$인 x가 존재하게 된다.

즉 x축과의 교점이 없으면 실근이 존재하지 않으므로 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 D가 0보다 작아진다.

만약 $a=0$이면 모든 x에 대해 $bx>-c$일 조건을 찾아야 한다. $b\neq 0$이면 주어진 부등식을 만족하는 x가 존재하므로 b는 0이어야 하고 항상 $bx>-c$이려면 $c>0$이어야 한다.

[수학] 심층면접02

좌표평면 위에 네 점 $A(2,\ 0)$, $B(0,\ 2)$, $C(-2,\ 0)$, $D(0,\ -2)$가 있다. 점 $P(x,\ y)$가 원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직일 때, $2\log\overline{PA}-\log\overline{PB}+2\log\overline{PC}-\log\overline{PD}$가 최대가 되는 점 P의 좌표를 구하시오.

▶ 예시답안

먼저 $\overline{PA}^2$, $\overline{PC}^2$을 구하면

$$\overline{PA}^2=(x-2)^2+y^2=5-4x\ (\because y^2=1-x^2)$$
$$\overline{PC}^2=(x+2)^2+y^2=5-4x$$

같은 방법으로

$$\overline{PB}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{5-4y}\ (\because x^2=1-y^2)$$
$$\overline{PD}=\sqrt{x^2+(y+2)^2}=\sqrt{5+4y}$$

이때 주어진 식을 t라 놓고 식을 변형하면

$$\begin{aligned}t&=2\log\overline{PA}-\log\overline{PB}+2\log\overline{PC}-\log\overline{PD}\\&=\log\frac{\overline{PA}^2\cdot\overline{PC}^2}{\overline{PB}^2\cdot\overline{PD}^2}\\&=\log\frac{25-16x^2}{\sqrt{25-16y^2}}\\&=\log\frac{25-16x^2}{\sqrt{25-16(1-x)^2}}\\&=\log\frac{25-16x^2}{\sqrt{9+16x^2}}\end{aligned}$$

x의 범위는 $-1\leq x\leq 1$이고 밑이 10인 로그함수는 증가함수이므로 진수 $\dfrac{25-16x^2}{\sqrt{9+16x^2}}$이 최대일 때 t의 값도 최대가 된다.

$x=0$일 때 분자는 최대, 분모는 최소이므로

$$y^2=1-x^2=1\quad\therefore y=\pm1$$

따라서 t의 값이 최대가 되는 점 P의 좌표는 $P(0,\ \pm1)$이다.

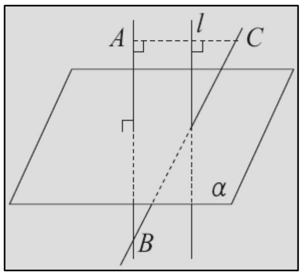
[수학] 심층면접03

좌표공간에 평면 a:x+y=7과 직선 l:x=y−3, z=7이 있다. 평면 α위에도 없고 직선 l위에도 없는 점을 A(a, b, c)라 하자. 점 A를 평면 a에 대해 대칭이동한 점을 B, l에 대해 대칭이동한 점을 C라 할 때 다음 물음에 답하시오.

1) 점 B와 점 C의 좌표를 a, b, c를 이용해 나타내시오.

2) a, b, c의 값에 관계없이 직선 BC는 항상 정점을 지나는 것을 보이시오.

3) c=7일 때 △ABC의 넓이를 a, b를 이용해 나타내시오.



▶ 예시답안

1) $AB \perp \alpha$에서 $\overrightarrow{OB} = (a, b, c) + t(1, 1, 0)$

$\therefore B(a+t, b+t, c)$

선분 $\overline{AB}$의 중점 M은 α위에 있으므로

$a + \dfrac{t}{2} + b + \dfrac{t}{2} = 7 \qquad \therefore t = 7 - (a+b)$

$\therefore B(7-b, 7-a, c)$

$C(p, q, r)$이면 선분 $\overline{AC}$의 중점은 l위에 있다.

$\dfrac{a+p}{2} = \dfrac{b+q}{2} - 3, \ \dfrac{c+r}{2} = 7$

$\therefore \begin{cases} a+p = b+q-6 \\ c+r = 14 \end{cases} \cdots$ (ⅰ)

또한 $\overrightarrow{AC} = (p-a, q-b, r-c) \perp (1, 1, 0)$이므로

$p-a+q-b = 0 \cdots$ (ⅱ)

(ⅰ), (ⅱ)에서 $p = b-3, \ q = a+3, \ r = 14-c$

$\therefore C(b-3, a+3, 14-c)$

2) 선분 $\overline{BC}$의 중점은 $(2, 5, 7)$이므로 직선 BC는 정점을 지난다.

3) $\alpha \perp l$에서 $\angle BAC = 90°$

$c = 7$에서 $\overline{AB} = \sqrt{2}|a+b-7|, \ \overline{AC} = 2|a-b+3|$

$\therefore$ ($\triangle ABC$의 넓이) $= (a+b-7)(a-b+3)$

2006년 05월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]증명의 중략된 곳 채워넣기

은하는 수학 책을 공부하다 다음과 같은 문제와 풀이를 접하게 됐다. 그런데 오래된 책이어서 중략된 부분이 훼손됐다.

$\beta = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ 일 때,

(1) $f(\beta) = 0$을 만족하는 최고차항의 계수가 1인 3차의 정수계수 다항식 $f(x)$를 구하라.

(2) β는 무리수임을 증명하라.

[풀이]

(1) $\beta^3 = 2+4+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ **에서** $\beta^3 - 6\beta - 6 = 0$ $\quad f(x) = x^3 - 6x - 6$

(2) β**가 유리수라 하면** $\beta = \frac{q}{p}$ **(단** p, q**는 서로소인 정수** $p \neq 0$**)라 놓을 수 있다.**

$$f(\beta) = \left(\frac{q}{p}\right)^3 - 6\left(\frac{q}{p}\right) - 6 = 0 \text{에서}$$

양변에 p^3**을 곱하여 정리하면**

…

(중략)

…

따라서 β**는 무리수다.**

중략된 곳에 대해 서술해라.

▶ 전문가 클리닉

정수 성질을 이용해 무리수임을 증명하는 내용입니다. 중요한 주제이므로 이 문제를 진지하게 접근해 보시기 바랍니다.

▶ 학생 예시답안

$f(\beta) = \left(\frac{q}{p}\right)^3 - 6\left(\frac{q}{p}\right) - 6 = 0$의 양변에 p^3을 곱해 정리하면,

$$q^3 - 6qp^2 - 6p^3 = 0$$

$$q^3 = 6(qp^2 + p^3)$$

여기서 $q = 6k$ 즉, q를 6의 배수로 생각할 수 있다.

$q^3 = 6^3k^3$이므로,

$$6^3k^3 = 6(qp^2 + p^3)$$

이때 β가 무리수임을 보이기 위해서 p와 q가 서로소가 아님을 보이면 된다.

$$6^3p^3 = 6qp^2 + 6p^3$$

$$6p^3 = 6^3k^3 - 6qp^2$$

$p^3=6(6k^3-qp^2)$

$\therefore p=6k'$

이와 같이 p가 6의 배수임을 알 수 있다. 결국 p,q 모두 6의 배수이기 때문에 서로소가 아니다.

$\therefore$ β는 무리수다.

▶ 평가 및 첨삭

귀류법을 이용해 β가 무리수임을 잘 찾았으나 중간에 계산오류가 있습니다.

밑에서 다섯째 줄에서

$6p^3=6^3k^3+36kp^2$

$p^3=6(6k^3-kp^2)$

이 옳습니다. 또한 q^3이 6의 배수이므로 q가 6의 배수라는 결론을 얻어내는 과정이 언급되면 더욱 좋은 풀이가 될 것입니다.

$q=6k\pm1,\ q=6k\pm2,\ q=6k\pm3$

인 경우에는 q^3이 6의 배수가 될 수 없습니다. 따라서 q는 6의 배수입니다.

[수학]조난자를 구출하는 최적의 순서는?

남태평양에 있는 어떤 화산섬이 폭발할 것이라는 보고를 받고 한국의 119 구조대가 긴급 출동했다. 이 섬은 정상에서 해안까지의 거리가 4Km인 원뿔모양이다. 용암은 섬 윗부분부터 덮으면서 균일하게 내려오고 용암으로 덮인 넓이는 시간에 비례해 증가하고 있어 얼마 후 섬 전체가 덮일 것으로 예상된다. 구조대가 섬의 해안에 있는 C지점에 도착하니 화산 분출이 시작된 지 이미 25분이 지났고 흘러내린 용암은 정상에서 1Km내려온 지점에 도달했다.

현재 정상에서 2Km내려온 A지점에 조난자 3명과 3Km내려온 B지점에 조난자 12명이 구조를 기다리고 있다. 구조대는 구조선이 대기하고 있는 C지점으로 조난자를 모두 대피시켜야 하는데 구조대의 이동속도는 조난자 운송과 관계없이 항상 분당 100m고 구조대는 한 팀으로 구성돼 있으며 한 번에 한 명씩만 운송할 수 있다. 단 A, B, C지점과 정상은 일직선상에 있다.

이 상황에서 조난자 구출방법을 놓고 A지점의 조난자를 B지점으로 일단 옮기자는 의견, A지점 조난자부터 먼저 구조해야 한다는 의견, 또는 제 3의 지점으로 모두 운송한 후 C지점으로 운송하자는 의견 등 온갖 다양한 의견들이 제시됐다. 이때 구조대장이 취해야 할 합리적인 판단과 그 근거에 대해 논술하시오.

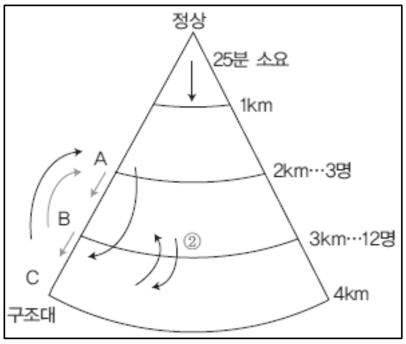
▶ 전문가 클리닉

오답률이 높았던 고려대 수리논술 기출문제입니다. 지문이 길어 언뜻 보기에 어려운 문제일 것 같지만 비례식을 적절히 사용하면 의외로 쉽게 풀 수 있습니다.

그러나 세 가지 방안을 객관식 보기로 생각해 첫 번째, 두 번째 의견이 실패하므로 세 번째 방안을 택해야 한다는 오답이 많았습니다. 아래 예시답안도 그러한 오류를 범하고 있습니다.

▶ 학생 예시답안

먼저 주어진 자료를 바탕으로 용암의 분출 속도를 생각해 보면 1Km지점까지 내려오는 데 25분이 소요됐으므로 A,B,C 각 지점에 도착하는 데 소요된 시간은 면적에 따른 비로 구할 수 있다.



A지점 $1^2 : 25 = 2^2 : a,\ a = 100$ ∴75분 후 도착

(a는 정상에서부터 A지점까지 걸리는 시간이므로 앞선 25분은 제외)

B지점 $1^2 : 25 = 3^2 : b,\ b = 225$ ∴125분 후 도착

(b는 정상에서부터 B지점까지이므로 앞선 A까지의 시간은 제외)

C지점 $1^2 : 25 = 4^2 : c,\ c = 400$ ∴175분 후 도착

(c는 정상에서부터 C지점까지이므로 앞선 B까지의 시간은 제외)

① A지점의 조난자를 일단 B에 옮기자는 의견

C→A→B→A→B→A→B

20+10+10+10+10+10=70분 소요

B→C→B→C→ ……→B→ C

20×11+10=230분 소요.

B→C로 옮기는 도중 용암 B 도달

∴①방법은 부적절

② A지점의 조난자부터 구해야 한다는 의견

C→A→C→A→C→A→C

(20+20)×3=120분 소요.

A지점에 이미 용암 도달

∴②방법은 부적절

따라서 제 3의 지점으로 모두 운송 후 C지점으로 운송해야 모든 조난자를 구할 수 있다.

▶ 평가 및 첨삭

위 논술은 잘못됐습니다. 용암이 흘러내리는 속도와 조난자 구출에 걸리는 시간 등에 대한 분석은 모두 옳습니다. 그러나 세 가지 보기 중 하나를 고르는 객관식 문제가 아니었음에도 불구하고 1, 2번이 답이 아니니 3번이라는 식의 위험한 결론을 내린 것이 문제입니다.

위 문제에서 용암이 A지점에 도착하기 전까지 A지점의 세 명의 조난자를 최대한 해안가 쪽으로 옮기면 정상에서 약 3.3Km지점까지 내릴 수 있습니다. 계산해보면 그 지점까지 B에 있는 12명의 조난자도 옮길 수 있습니다. 그러나 그 지점에서 해안가까지 조난자를 옮기는 중간에 그 지점에 이미 용암이 도착합니다. 그래서 세 번째 방법도 실패합니다.

이 문제를 다시 처음부터 생각해보겠습니다. 조난자들을 구출하는 데 걸리는 시간만 계산해보면 A지점에 있는 조난자 세 명을 구하는 데 각 40분씩, B지점의 열두 명을 구하는 데 20분씩 걸리므로 모두 360분이 걸립니다. 이것은 어떤 방법으로 구조대가 움직이든지 마찬가지입니다. 따라서 해안가에 모든 조난자들이 도착하는 것은 화산분출 이후 385분 후입니다. 반면 용암이 해안가에 도착하는 것은 400분 후입니다. 이것은 조난자들을 모두 구출할 방법이 있을 것이라는 것을 암시합니다.

위 방법들이 실패한 이유는 구조대가 먼 거리를 왕복하는 동안 용암이 윗부분의 조난자들이 있는 곳으로 흘러내려오기 때문입니다. 여기서 우리는 보다 짧은 여러 개의 지점을 나눠 구조대가 짧은 구간을 왕복하면서 조난자들을 점차 해안가 쪽으로 옮기는 방법이 가장 좋은 해결책이라는 직관적 판단을 얻게 됩니다. 여기까지는 물론 직관적 판단이므로 이런 생각이 맞는지 확인해 볼 필요가 있습니다.

우선 A지점의 조난자는 먼저 구출돼야 합니다. 이때 세명 모두를 해안가까지 옮길 시간은 없습니다. 따라서 B지점이든 또는 제 3의 지점이든 우선 세 명을 옮겨놔야 합니다. 여기서는 조난자 모두 모은 다음 차례로 조금씩 더 아래 지점으로 옮기는 과정을 검토하겠습니다.

위치	모든 조난자 도착시간	용암 도착시간
3.0	95	225
3.4	211	285
3.6	269	324
3.7	298	342.25
3.8	327	361
3.9	356	380.25
3.95	370.5	390
4	385	

오른쪽 표는 이런 방법으로 조난자를 옮길 때 조난자 전체와 구조대 그리고 용암이 도착하는 시간을 계산한 것입니다.

이 표는 조난자를 모두 구출하는 한 가지 방법을 제시합니다. 물론 조난자를 구출하는 방법은 이 표에 제시된 방법 외에도 많이 찾을 수 있습니다. 조난자를 꼭 B지점에 모두 모아야 하는 것은 아닙니다. 또 꼭 15명을 동일 지점에 모으면서 내려와야 하는 것도 아닙니다. 게다가 모두를 1m씩 계속 아래로 내려도 구출할 수 있을 것입니다.

실제 논술에서는 문제에서 주어진 세 가지 방법이 실패하는 이유, 총소요시간을 계산해 보았을 때 전원 구출의 가능성을 발견한다는 점, 해결방향, 구체적 방안 제시 등의 내용을 요약하면서 서술하면 됩니다.

[수학] 심층면접01

아래 글은 철수가 연속함수의 기본 성질을 전제로 한 '함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $y=f(x)$는 $x=a$에서 연속이다'를 증명하기 위한 일련의 과정을 보여준 것이다. 아래의 과정 중에서 논리적으로 비약이 있거나 오류가 있는 부분이 있다면 지적하고 그 이유를 설명하시오.

<철수의 증명>

$y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다고 하는 것은

$\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\alpha$ (단, α는 상수)로 나타낼 수 있다. ········· (1)

또 연속이라 함은 $\lim_{x \to a}f(x)=f(a)$다. ········· (2)

즉 주어진 명제는

$\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\alpha$ (단, α는 상수) → $\lim_{x \to a}f(x)=f(a)$다. ········· (3)

주어진 가정을 이용하기 위해

$$\lim_{x \to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) \cdots\cdots\cdots (4)$$

$$=\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x \to a}(x-a) \cdots\cdots\cdots (5)$$

$$=a \times \lim_{x \to a}(x-a) \cdots\cdots\cdots (6)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a}\{f(x)-f(a)\}=0 \cdots\cdots\cdots (7)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a}f(x)-\lim_{x \to a}f(a)=0 \cdots\cdots\cdots (8)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a}f(x)-f(a)=0 \cdots\cdots\cdots (9)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a}f(x)=f(a) \cdots\cdots\cdots (10)$$

∴ 주어진 명제는 참이다.

▶ 전문가 클리닉

함수의 연속성, 미분가능성은 심층면접에서 자주 출제되는 기본적인 질문입니다.

평소 문제 풀이를 할 때도 수학에서 배운 기본 성질을 정확히 알고 논리적인 전개를 해 나가는 연습을 꾸준히 한다면 그것이 바로 심층면접의 훌륭한 준비가 될 것입니다.

▶ 학생 예시답안

(8)번 과정이 잘못됐다.

(7)번 $\lim_{x \to a}\{f(x)-f(a)\}=0$에서 (8)번 $\lim_{x \to a}f(x)-\lim_{x \to a}f(a)=0$으로 전개하기 위해 연속함수의 기본 성질에 의해 $\lim_{x \to a}f(x)$와 $\lim_{x \to a}f(a)$가 각각 존재해야 한다.

여기서 $\lim_{x \to a}f(a)=\lim f(a)$이지만 $\lim_{x \to a}f(x)$가 존재하는지는 알 수 없으므로 바로 (8)처럼 서술하는 것은 논리비약이다.

그러므로 (7)번부터 다시 전개하면

$\lim_{x \to a}\{f(x)-f(a)\}=0$이므로 $x=a$에서 $f(x)-f(a)$의 극한값이 존재하므로 이 식을 $h(x)$라 놓으면,

$f(x)-f(a)=h(x)$이고 $f(x)=h(x)+f(a)$이므로

$$\lim_{x \to a}f(x)=\lim_{x \to a}\{h(x)+f(a)\}$$

$$=\lim_{x \to a}h(x)+\lim_{x \to a}f(a)$$

$$=0+f(a) \quad (\because \lim_{x \to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x \to a}h(x)=0)$$

$$=f(a)$$

$$\therefore \lim_{x \to a}f(x)=f(a)$$

$$\therefore \lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\alpha \Rightarrow \lim_{x \to a}f(x)=f(a)$$

(단, α는 상수)

[수학] 심층면접02

좌표공간에 세 점 P, Q, R이 있다. 각각 매초 1의 속도로 점 P는 원점 (0, 0, 0)을 출발해서 x축 위를 양의 방향으로, 점 Q는 점 (2, 0, 0)을 출발해서 y축과 평행하게 양의 방향으로, 점 R은 점 (2, 2, 0)을 출발해서 z축과 평행하게 양의 방향으로 나간다. 이때 삼각형 $\triangle PQR$의 면적이 최소가 되는 것은 몇 초 후인가?

▶ 예시답안

이 문제는 여러 가지 풀이가 가능합니다. 여기서는 벡터의 내적을 이용해 풀어보겠습니다.

$\triangle OAB$가 있을 때, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 하면, 삼각형의 넓이는

$\triangle OAB=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$다.

한편 $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$이므로

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

으로 나타낼 수 있다.

이것을 이용하기 위해 t초 후 점들이 이루는 삼각형을 $\triangle PQR(t)$라 하면 t초 후 각 점들의 좌표는

$$P(t)=(t,0,0)$$
$$Q(t)=(2,t,0)$$

$R(t)=(2,2,t)$이므로

$$\overrightarrow{QP}(t)=(t-2,-t,0)$$
$\overrightarrow{QR}(t)=(0,2-t,t)$이다.

이때 t초 후 세 점이 이루는 $\triangle PQR(t)$의 넓이를 $S(t)$라 하면

위식에 의해 $S(t)=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{QP}|^2|\overrightarrow{QR}|^2-(\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR})^2}$ 이다.

$$|\overrightarrow{QP}|^2|\overrightarrow{QR}|^2=(t-2)^2+t^2=2t^2-4t+4$$
$(\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR})^2=(t^2-2t)^2$이고

계산을 간편하게 하기 위해 $t^2-2t=u$라 치환하면

$$|\overrightarrow{QP}|^2|\overrightarrow{QR}|^2-(\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR})^2=(2u-4)^2-u^2=3u^2+16u+16=3\left(u+\frac{8}{3}\right)^2-\frac{16}{3}$$

(단, $u=t^2-2t=(t-1)^2-1\geqq-1$)

그러므로 u가 -1일 때 삼각형의 넓이는 최소가 되고 이때 t 값은 1이다.

2006년 06월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]정당의 여론조사, 노령화 사회와 연금

01_정당의 여론조사

어느 정당이 A라는 법안을 국회에 상정하기 전에 성인 1000명을 무작위로 추출해 이 법안에 대한 찬성과 반대여부를 묻는 여론조사를 실시했다. 총 480명이 이 법안에 찬성하는 의견을 보였다. 찬성률이 50% 미만이므로 이 정당은 법안을 철회했다. 연령별로 나타난 여론조사 결과는 다음 표와 같다.

연령세대	인구구성비(%)	표본수	찬성자수
20대	30	100	80
30대	30	200	140
40대	25	300	120
50대 이상	15	400	140

제시된 표에 나타난 여론조사의 문제점을 지적하고 이에 대한 해결방안을 논하시오(2006년 중앙대 기출).

▶ 전문가 클리닉

통계에 대한 비판적 분석능력을 요구하는 문제입니다. 우리는 통계 결과를 무비판적으로 수용하는 경향이 있습니다. 그러나 통계 조사의 과정, 표본의 구성, 설문의 내용, 결과의 해석 등에 있어서 통계는 일정한 목적에 의해 의도적으로 왜곡되거나 과장되는 경우가 흔히 있습니다.

이러한 통계 조사의 과정과 결과에 대한 비판적 분석 능력을 묻는 문제는 앞으로도 출제될 가능성이 높습니다.

▶ 학생 예시답안

주어진 표에서 20대를 보면 인구구성비는 30%를 차지하나 표본수를 100으로 지정했다. 반면 50대 이상의 경우에는 인구구성비가 15%임에도 불구하고 표본수는 400으로 지정했다.

이때 20대의 경우 찬성자수 비는 80%, 50대 이상의 경우에는 35%를 나타낸다. 이는 인구구성비에 비례하지 않는 표본수를 지정해 그에 해당하는 찬성자수를 결과에 반영함으로써 한쪽에 편중되는 의견만 반영할 가능성을 지닌다.

따라서 각 연령세대가 차지하는 인구구성비를 고려해 그에 비례하는 표본수에 따른 찬성자수로서 결과를 도출해야 한다.

연령세대	인구구성비(%)	표본수	찬성자수
20대	30	300	240
30대	30	300	210
40대	25	250	100
50대 이상	15	150	56

(*찬성자수는 주어진 표에서 표본수에 대한 찬성자수의 비율을 바탕으로 새롭게 지정해 표본수에 비례하도록 결정했으며 50대 이상의 경우 55.5이기 때문에 반올림해 56으로 결정했다. 예로 20대의 경우 주어진 표에서 표본수 100, 찬성자 수 80이므로 찬성비율 80%가 된다. 따

라서 표본수 300에 대한 찬성자 수는 240이 된다)

완성된 표를 바탕으로 찬성자수를 살펴보면 총 506명이다. 즉 찬성률은 50.6%로서 50%를 초과했으므로 법안을 통과시킬 수 있다.

▶ 평가 및 첨삭

주어진 문제에서 진행된 통계조사의 문제점을 잘 지적했습니다. 여론 조사는 표본을 어떻게 선택하느냐에 따라 그 결과가 달라집니다. 이러한 문제점을 줄이기 위해서는 합리적인 표본추출이 이뤄져야 합니다. 위 문제에서는 연령별로 찬성율에 차이가 나는 만큼 실제 인구구성비와 비례하도록 표본을 정하는 것이 더 합리적입니다. 해결책으로 표본의 수를 다시 정해 여론조사를 다시 하는 방법과 위 논술에서처럼 찬성률을 이용해 찬성자의 수를 다시 산정해주는 방법이 있습니다.

02_노령화 사회와 연금

노령화 사회의 진입에 따른 노인복지 정책의 수립을 위해 A-J의 10개 국가들의 노인복지 정책과 현황을 조사했다. 다음은 10개 국가의 GDP 대비 노령연금 급여액의 비중과 노령연금 급여 지급 후 조사한 노령인구의 빈곤율에 대한 통계다. 예를 들어 C국가의 GDP대비 노령연금 급여액의 비중은 5.1%이고 연금지급 후 노령인구의 빈곤율은 25%다.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
GDP 대비 노령연금 급여액 비중(%)	3.8	4.9	5.1	5.9	6.1	6.4	7	9.4	9.6	11
연금지급 후 노령인구 빈곤율(%)	29	4	25	22	15	5	5	2.7	2.8	3

위 통계 자료에 근거해 GDP대비 노령연금 급여액의 비중(%)과 연금지급 후 노령인구빈곤율(%) 사이의 관계를 분석하고 노인연금 정책의 수립방향에 대해 논하라.

▶ 전문가 클리닉

각종 데이터의 수리적 분석을 통해 의견을 제시하는 형태의 문제들은 본고사 논란을 피할 수 있는 수리논술의 대표적 유형입니다. 이런 문제를 다룰 때는 수리적 데이터를 객관적으로 분석하고 결론을 제시하는 것이 중요합니다.

▶ 학생 예시답안

① 노령인구의 빈곤율이 10%이하인 나라는 B, F, G, H, I, J이며, 이 6개국의'노령인구 빈곤율'의 평균값은 다음과 같다.

$$\frac{4+5+5+2.7+2.8+3}{6}=3.75\%$$

이에 따른'GDP 대비 노령연금 급여액의 비중'의 평균값은 다음과 같다.

$$\frac{4.9+6.4+7+9.4+9.6+11}{6}=8.05\%$$

② 노령인구의 빈곤율이 10% 이상인 나라는 A, C, D, E이며, 이 4개국의'노령인구빈곤율'의 평균값은 다음과 같다.

$$\frac{29+25+22+15}{4}=22.75\%$$

이에 따른 'GDP대비 노령연금 급여액의 비중'의 평균값을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{3.8+5.1+5.9+6.1}{4}=5.225\%$$

이를 바탕으로 'GDP대비 노령연금 급여액의 비중'값이 클수록 그에 대한 '노령인구빈곤율'이 감소함을 알 수 있다. 또 급여액의 비중이 약 8.05%일 때 3.75%의 빈곤율이 나타나게 됨을 알 수 있다. 그런데 만약 급여액의 비중이 6.4% 이상인 나라 F,G,H,I,J에 대해 분석한다면 노령인구빈곤율은 다음과 같다.

$$\frac{5+5+2.7+2.8+3}{5}=3.7\%$$

또한 GDP대비 노령연금 급여액의 비중은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{6.4+7+9.4+9.6+11}{5}=8.68\%$$

따라서 노령인구빈곤율을 감소시키기 위해서는 GDP 대비 노령연금 급여액의 비중을 증가시켜야 할 것이다(약 9.4%의 비중을 고려한다면 빈곤율이 2.7%의 최소값에 도달할 수 있다).

심층면접 01

다음 각 물음에 대하여 설명하시오.
(1) 등차수열의 합을 구하는 공식에 대하여 설명하시오.
(2) $1+3+5+\cdots+(2n-1)$의 값은 얼마인가?
(3) 두 개의 자연수 m, n에 대하여 n^m은 연속되는 n개의 홀수의 합임을 증명해라. 또 n^m을 이 합의 꼴로 표시했을 때 그 작은 쪽의 제 1항을 m과 n으로 나타내라.

▶ 전문가 클리닉

기본적인 문제에서 시작해 기본 개념, 원리, 이유에 대한 이해를 묻고 보다 심화된 문제로 진행하는 면접문제의 전형적인 패턴입니다.

(1)번은 합공식 유도과정을 알면 쉽고 (2)번은 (1)번 문제를 토대로 풀면 됩니다. (3)번 문제는 자연수를 짝수와 홀수로 분류해 생각해 봅시다.

▶ 예시답안

(1) 등차수열의 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=a+(a+d)+\cdots+\{a+(n-2)d\}+\{a+(n-1)d\}$$

$$S_n=\{a+(n-1)d\}+\{a+(n-2)d\}+\cdots+(a+d)+a$$

위의 두 식을 더하면 다음과 같다.

$$2S_n=\{2a+(n-1)d\}+\cdots\ \{2a+(n-1)d\}+\{2a+(n-1)d\}+\{2a+(n-1)d\}$$

$$\therefore S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

(2) $S_n = 1+3+\cdots+(2n-1)$

$S_n = (2n-1)+\cdots+3+1$

위의 두 식을 더하면 다음과 같다.

$2S_n = (2n)\times n$

$\therefore S_n = n^2$

참고) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\times\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$

(3) 첫째항이 $2k+1$, 공차가 2인 등차수열의 제 n항까지의 합은 다음과 같다.

$(2k+1)+(2k+3)+\cdots+\{2k+(2n-1)\} = 2nk+n^2$

따라서 $2nk+n^2 = n^m\ (m\geq 2)$을 만족하는 k값은 다음과 같다.

$k = \frac{1}{2}(n^{m-1}-n)$

위 식에서 n이 짝수면 n^{m-1}은 짝수다.

$\therefore\ n^{m-1}-n$은 짝수

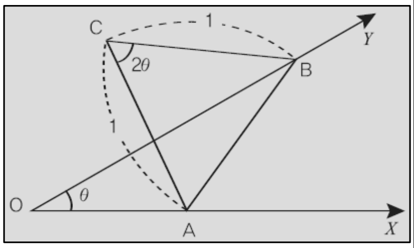
반면 n이 홀수면 n^{m-1}은 홀수다.

$\therefore\ n^{m-1}-n$은 짝수

위의 두 식에 의해 k는 정수다. 따라서 n^m은 연속된 n개의 홀수의 합이다. 또 작은 쪽의 제 1항은 $n^{m-1}-n+1$이다.

심층면접02

오른쪽 그림과 같이 크기가 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$인 각 XOY의 변 $\overrightarrow{OX}$와 $\overrightarrow{OY}$가 있다. 각 변 위에서 움직이는 점 A와 B 및 $\angle XOY$를 포함하는 평면 위에서 움직이는 점 C는 다음 조건을 만족시킨다.



(1) $\overline{AC} = \overline{BC} = 1$

(2) $\angle ACB = 2\theta$

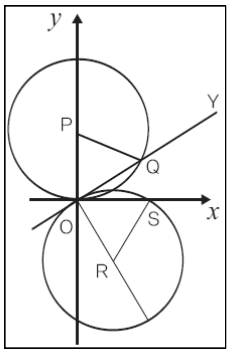
(3) **꼭지점 A, B, C는 그림과 같이 반시계방향으로 위치한다. 이때 C가 이루는 길이를 θ의 식으로 나타내라.**

▶ 전문가 클리닉

벡터의 기본성질을 이용하는 자취문제입니다. 주어진 조건을 활용하면 쉽게 구할 수 있습니다.

▶ 예시답안

원주각과 중심각의 관계를 이용하면 점 C는 점 O를 중심으로 하고 반지름이 1인 원 위를 움직인다. 그 범위는 원 P가 직선 OY에 접할 때, 즉 C=P(△ABC=△OQP)일 때부터 원 R이 직선 OX에 접할 때,즉 C=R(△ABC=△SOR)까지 움직일 수 있다.



따라서 자취의 길이는 중심각이 $\angle POR=\angle POS+\angle ROQ-\angle QOS=\pi-\theta$이고 반지름이 1이므로 $\pi-\theta$이다.

$\angle POS=\angle CAB,\ \angle ROS=\angle CBA,\ \angle POS=\angle ROQ=\pi-2\theta$

($\because$△ABC의 내각의 합은 π이므로)

심층면접03

다음 물음에 답하여라.

(1) 삼각형 ABC 내부 임의의 점 P에서 각 변에 내린 수선의 발을 D, E, F라 할 때 $\dfrac{BC}{PD}+\dfrac{AC}{PE}+\dfrac{AB}{PF}$가 최소가 되는 P의 위치와 최소값을 구하라(단, 삼각형의 면적=S).

(2) $y^2=4px$와 포물선의 초점을 지나는 직선(준선과 만나는)에서 산술평균과 기하평균, 조화평균의 관계를 증명하시오. 또한 산술, 기하, 조화평균은 등비수열을 이룸을 보여라.

▶ 전문가 클리닉

(1)번 문제는 도형에서 산술-기하평균의 관계를 적용할 수 있는 지 묻는 문제입니다. (2)번은 포물선의 방정식을 이용해 사다리꼴을 만든 후 산술, 기하, 조화평균의 관계를 발견해내는 문제입니다.

▶ 예시답안

(1) $ax+by+cz=2S$라 하면

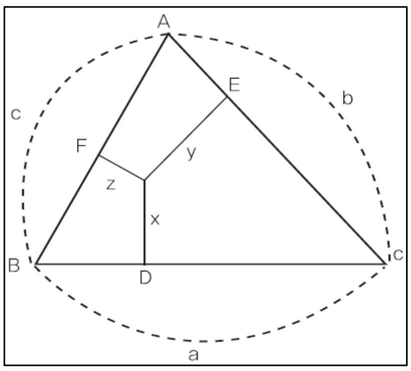
$$\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)(ax+by+cz)=a^2+b^2+c^2+ab\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+bc\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+ca\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)$$

$$\geq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$$

$\therefore$ 내심일 때 최소값 $\dfrac{(a+b+c)^2}{2S}$

(2) 직선이 포물선과 만나는 두 점을 P, Q라 하고 $\overline{PP'}=a$, $\overline{QQ'}=b$라 하자. $\angle PP'F=\angle P'FF'$(엇각), $\angle PP'F=\angle P'FF'$(포물선의 정의에 의한 이등변삼각형)

위와 같은 방법으로 $\angle F'FQ'=\angle FQ'Q=\angle QFQ'$

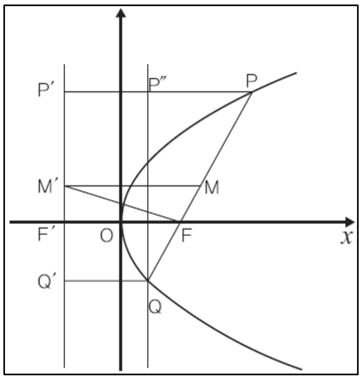


$\therefore \angle P'FQ'=\dfrac{\pi}{2}$

$\overline{P'Q'}$의 중점을 M'라 하면 $\angle P'FQ'$는 직각삼각형이다.

$\overline{P'Q'}=\overline{P''Q}=\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2}=2\sqrt{ab}$이고

$FM' = \dfrac{P'P}{2} = \sqrt{ab}$ 이다($\because$ M'는 직각$\triangle P'FQ'$의 외심). M'가 $\overline{P'Q'}$의 중점이므로 M'을 지나고 x축에 평행한 직선이 선분 $\overline{PQ}$와 만나는 점을 M이라 하자.



그리고 사다리꼴 $PP'QQ'$에서 중선 정리와 닮음비를 이용하면 $\overline{MM'} = \dfrac{a+b}{2}$, $\overline{FF'} = \dfrac{2ab}{a+b}$ 다.

이로써 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$ 임을 각 선분의 길이를 통해 확인할 수 있다.

$(\sqrt{ab}\,^2) = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)\left(\dfrac{2ab}{a+b}\right)$이므로 산술, 기하, 조화 평균은 등비수열의 관계가 있음을 알 수 있다.

2006년 07월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]논리적 추론사고 과정 연습

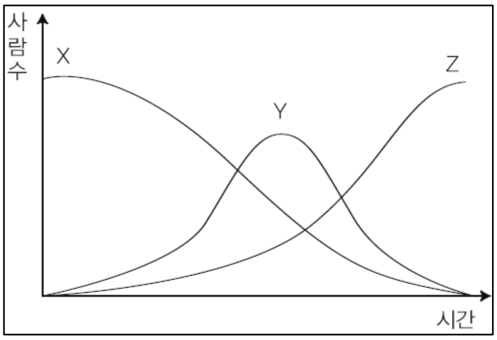
01_마을 사람들의 수 변화 추론

나이트 샤말란 감독의 '빌리지'란 영화는 숲 속에서 외부 세계와 단절된 채 살아가는 마을 사람들의 이야기다. 이처럼 고립된 마을에 아주 쉽게 전염되는 눈병에 감염된 사람이 생겼다고 가정해 보자. 이 눈병은 아주 가벼운 접촉만으로도 쉽게 감염되는 전염성이 강한 질병이지만 일정기간이 지나면 반드시 치유된다. 또 일단 한 번 감염됐던 사람은 치유된 후에는 면역성을 갖게 돼 다시 감염되지 않는다. 이 마을의 의사는 눈병의 진행 상황을 예측하기 위해 전체 마을의 인구를 다음과 같이 세 그룹으로 나눠 생각해 보기로 했다. ● 눈병에 걸리지 않았으나 눈병에 걸릴 가능성이 있는 그룹 X ● 현재 감염자 그룹 Y ● 병에 걸렸다가 회복돼 면역을 갖고 있는 그룹 Z 이 세 그룹 X, Y, Z에 속하는 마을 사람들의 수의 변화를 추론해 그래프로 나타내고 그 근거를 논술하시오(단, 추론에 필요한 구체적 조건들을 각자 자유롭게 설정하는 것이 가능하다).

▶ 전문가 클리닉

정해진 정답이 존재하지 않는 창의력 탐구문제입니다. 조건들을 명확히 하고 그 조건에 맞게 논리적 추론이 이뤄졌는 지 평가하는 문제입니다. 작년 유웨이에듀 온라인 논술 모의고사 문항으로 출제된 바 있는 데 이화여대에서 유사한 문항이 출제됐습니다.

▶ 학생 예시답안



초기: 눈병에 감염된 사람이 생겼으나 그 수는 아직 많지 않고 치유된 사람은 없다. 따라서 감염될 가능성이 있는 사람 수가 가장 많고 눈병이 전염되는 속도 또한 매우 느리다.

중기: 감염자의 수가 증가하면서 그 속도가 점점 빨라지고 상대적으로 감염이 될 가능성이 있는 사람들의 수(X)가 급속도로 줄어든다. 또한 초기에 감염됐던 사람들이 치유되면서 서서히 치유된 사람(Z)의 수가 증가한다.

말기: 이미 많은 사람들이 전염병을 경험해 면역을 갖고 있지 않은 사람들의 수(X)가 적어 전염속도가 둔화된다. 현재 눈병에 걸린 사람들도 치유가 돼 Y그래프는 감소하고 Z그래프는 증가한다.

▶ 평가 및 첨삭

주어진 상황에서 X, Y, Z의 변화를 설득력있게 제시했습니다. 특히 전염속도에 대한 분석은 명확한 논리성을 갖췄습니다.

하지만 위 그래프는 몇 가지 문제점이 있습니다. 첫 번째는 마을 사람의 수가 일정해야 하는

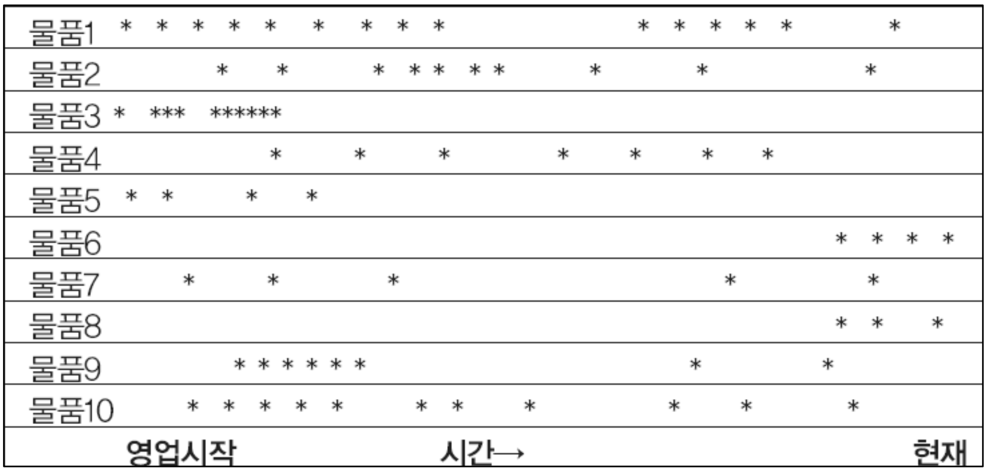
데 이 점이 반영되지 않았습니다.

둘째, 그래프의 개형으로 보면 마을 사람들이 모두 감염된 것으로 나타났는 데 꼭 그렇지 않을 수 있습니다. 경험적으로 확인할 수 있는 것은 강력한 전염병도 구성원 전체에게 확산되지는 않는 다는 점입니다. 셋째, 감염자의 수는 일정기간이 지나 치유된 사람의 수로 나타났는 데 Z의 그래프를 보면 이 점이 정확하게 반영되지 않았습니다.

이런 문제는 정답이 있는 것이 아니라 추론의 논리성과 엄밀성을 보는 것이므로 위 답안보다 논리적이고 분석적인 답안을 찾아 엄밀한 추론을 하도록 연습해 보기 바랍니다.

02_자판기의 신상품 교체

10종류의 물품을 진열할 수 있는 자판기에서 기존의 물품 중 하나를 신상품으로 교체하려고 한다. 아래 그림에 나타난 *는 현재 진열된 각 상품이 판매된 시점이다. 각 상품의 개당 판매이익은 모두 같다(2006년 이화여대 모의논술).



1) 어떤 사업자가 자판기에서 물품 8을 제외시켰다면 그 기준이 무엇이었는 지 추정해 보고 그 기준의 문제점을 논하시오.

2) 어떤 사업자가 자판기에서 물품 3을 제외시켰다면 그 기준이 무엇이었는 지 추정해 보고 그 기준의 문제점을 논하시오.

3) 위 두 가지 제외 기준은 서로 다르지만 동일한 목표를 추구하고 있다. 그 목표가 무엇인지 서술하고 두 기준이 갖는 문제점을 해결하는 새로운 기준을 제시해 보시오.

▶ 전문가 클리닉

수리적 사고력을 일상생활에 적용해 해결하는 내용으로 2006년 이화여대 모의논술 문제입니다. 정답이 없고 문제가 어렵지 않기 때문에 자기 생각을 정확하고 논리적으로 서술하는 것이 중요합니다.

▶ 학생 예시답안

(1) 가장 적게 팔린 물품이다. 그러나 3회 모두 최근에 판매됐으므로 앞으로 판매를 기대할 수 있다.

(2) 현재시점에서부터 판매시점이 가장 오래된 물품이다. 판매개수가 많기 때문에 오히려 다른 물품보다 이익이 크며 앞으로도 많이 판매될 가능성이 있다.

(3) 꾸준히 판매되고 이윤이 높은 물품을 파는 것이 목표다. 꾸준히 판매되는 새로운 물품을 찾거나 특정 시간대에 집중적으로 팔리는 물품을 교대로 판매하는 방법이 있다.

▶ 평가 및 첨삭

(1) '앞으로의 판매가 기대된다'는 표현보다는 구체적으로 '판매개수가 증가할 가능성이 있다'는 표현이 더 좋습니다.

(2) '앞으로도 많이 판매될 가능성'은 추상적인 표현입니다. '이러한 판매양상이 주기적으로 반복될 경우 물품 3이 수익성 높은 상품이 될 가능성'을 제시하는 것이 좋습니다.

(3) 일정한 기간 내에 더 많이 팔리는 물품으로 교체해 수익을 높이는 것이 목표입니다. 새로운 기준을 제시할 때는 어떤 물품을 교체할 것인가를 명확히 해야 합니다. 그러나 여기서 제시한 대안은 구체적인 기준을 제시하지 못했습니다. (1), (2)번에서 제시한 두 가지 기준을 결합하는 방안이 필요합니다. 전체 판매개수와 현재를 기준으로 물건이 팔리지 않았던 기간을 '점수화'해 합산하는 방법이 있습니다. 구체적 방법을 설득력있게 제시해야 좋은 점수를 받을 수 있습니다.

03_골프공의 속력

한 아마추어 선수가 골프를 친다고 하자. 시간, 거리, 높이의 관계는 오른쪽 표와 같다. 이때 t는 골프공을 친 후 경과된 시간이고 x는 골프공과 선수와의 지상거리며 y는 골프공의 높이를 나타낸다 (2006년 중앙대 기출).

t(단위: 초)	x(단위: m)	y(단위: m)
0	0	0
1	10	60
2	20	100
3	30	150
4	40	190
5	50	220

1) t초$(0 \le t \le 5)$에서의 골프공이 날아가는 속력을 가능한 한 정확하게 추정하고자 한다. 위에서 주어진 자료를 활용해 속력을 추정하는 방법을 논리적으로 설명하시오.

2) 위 방법을 이용해 t초에서의 속력을 추정할 때 속력의 실제값과 추정값 사이의 오차를 줄일 수 있는 방법을 제시하시오.

▶ 전문가 클리닉

속력을 구하기 위해서는 시간의 변화량과 움직인 거리가 필요합니다. 위 문제에서는 일정한 시간에서의 위치만 나와 있으므로 속력을 구하기 어렵습니다. 따라서 속력의 근사값을 구하기 위한 합리적 대안이 제시돼야 합니다.

▶ 학생 예시답안

(1) t초에서 골프공이 날아가는 속력은 $(t-1)$에서의 속력과 $(t+1)$에서의 속력의 평균이다.

속력은 거리/시간이므로 거리는 $\sqrt{20^2+\{(t+1)\text{초 때 높이}-(t-1)\text{초 때 높이}\}^2}$ 로 구하고 시간은 2초다.

(2) (1)번에서는 공이 직각삼각형의 빗변을 따라 날아간다고 가정했지만 실제로는 포물선을 그리므로 골프공을 친 후 경과된 시간 t를 자주 측정하면 더 정확한 값을 얻을 수 있다.

▶ 평가 및 첨삭

전체적으로 논리전개가 정확하지 않습니다. t초 후 속력이 $(t+1)$일 때 속력과 $(t-1)$일 때 속력의 평균이라 했는 데 뒷부분의 식과 잘 맞지 않습니다. (2)번 답안은 대안에 대한 논리적 근거가 없습니다.

▶ 예시답안

(1) t초에서 골프공의 속력은 근사적으로 $(t-1)$초에서 $(t+1)$초 동안의 공의 평균속력과 같은데 이는 (공의 이동거리)/(공의 이동시간)이다. 공의 이동거리를 피타고라스의 정리를 이용해 근사하면 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ $(\Delta x=20,\ \Delta y=(t+1)$초일 때의 높이$)$이다. 공의 이동시간은 2초이므로 t초일 때 골프공의 속력은 $\dfrac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{2}$이다.

(2) t초에서 속력의 근사값을 구하기 위해 피타고라스의 공식을 써서 공의 이동거리를 직선의 길이로 계산했는 데 공은 곡선을 따라 움직이므로 오차가 생긴다.

그러므로 거리와 높이를 측정하는 시간단위를 1초 단위보다 더 작은 단위(예: 0.5초)로 하면 공의 이동거리의 실제값과 측정값 사이의 오차는 (1)의 경우보다 줄어든다.

심층면접01

$f(x)$는 x에 대한 n차 다항식$(n\geq 0)$으로 두 변수 x, y에 대해
$f(x+y)=P_0(x)+P_1(x)y+P_2(x)y^2+\cdots+P_n(x)y^n$를 만족한다. 단, $P_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$는 x에 대한 다항식이다.

이때 $P_0(x)=f(x)$, $P_1(x)=f'(x)$, $P_2(x)=\dfrac{1}{2}f'(x)$ 즉 $P_n(x)$는 $f(x)$에서의 x^n의 계수임을 증명해라.

▶ 전문가 클리닉

변수가 두 개인 함수에서 하나의 변수를 중심으로 미분하는 테크닉이 필요합니다. 한 변수를 다른 변수에 대해 고정시켜 상수 취급한 뒤 미분해봅시다.

▶ 예시답안

$f(x+y)=P_0(x)+P_1(x)y+P_2(x)y^2+\cdots+P_n(x)y^n$ …… ①에서 x을 고정시키고 y로 미분하면 식은 다음과 같다.

$$f'(x+y)=P_1(x)+2P_2(x)y+3P_3(x)y^2+\cdots \quad \cdots\cdots \text{②}$$

이 식을 다시 한 번 y에 대해 미분하면

$f''(x+y)=2P_2(x)+6P_3(x)y\cdots$ 이다.

이 식에 $y=0$을 대입하면 다음과 같다.

$$f(x)=P_0(x),\ f'(x)=P_1(x),\ f''(x)=2P_2(x)$$

이것을 반복하면 $f''(x)=6P_3(x),\ \cdots,\ f^{(n)}(x)=n!P_n(x)$로 일반화할 수 있다.

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$이라 하면

$$f^{(n)}(x)=n!\,a_n$$

$$\therefore P_n(x)=a_n$$

그러므로 $P_n(x)$는 x^n의 계수다.

심층면접02

다음 물음에 답하시오. (1) $a,\ b$를 상수로 한다. 함수 $f(x)$를 $f(x)=\begin{cases} ax\ (x \geq 0 \\ bx\ (x < 0 \end{cases}$로 정한다. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하기 위한 필요충분조건은 $a=b$임을 보여라. (2) 임의의 함수 $g(x)$는 모든 점에서 미분 가능하고 $g(0)=g'(0)=0$을 만족한다. 또한 $g'(x)$의 도함수는 $x\neq0$에서 항상 0이다. 이때 항상 $g(x)=0$인 것을 보여라. (3) 모든 점에서 미분 가능한 함수 $h(x)$가 조건 $h(x)=xh'(x),\ h'(0)=0$을 만족한다면 항상 $h(x)=0$이 되는 것을 (2)를 이용해 나타내어라.

▶ 전문가 클리닉

심층면접 문제에서 가장 자주 나오는 미분 가능성 문제입니다. 미분에 관한 기본 개념을 잘 다지면 어떤 문제도 어렵지 않게 해결할 수 있습니다. 문제에 주어진 필요 또는 충분조건에 따라 증명해야 할 방향을 잘 판단해야 합니다.

▶ 학생 예시답안

(1) $a=b$라면 모든 x에 대해서 $f(x)=ax$이다.

이 식의 우극한은 $\lim_{h\to0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{ah}{h}=a$이고 좌극한도 역시

$\lim_{h\to0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{ah}{h}=a$이다. 좌극한과 우극한의 값이 같으므로 $x=0$에서 미분 가능하다.

역으로 $f(x)$가 $x=0$에서 미분 가능하다면 $\lim_{h\to0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}$가 성립해야 한다.

그러나 이 식의 좌변은 a, 우변은 b이므로 앞의 조건이 만족되기 위해서는 $a=b$이어야 한다.

$\therefore$ 미분 가능하기 위한 필요충분조건은 $a=b$다.

(2) $x\neq0$에서 g''(x)=0이므로 a, b, c, d를 상수로 해 $g'(x),\ g(x)$를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g'(x)=\begin{cases} a\ (x>0 \\ b\ (x<0 \end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases} ax+c\ (x>0 \\ bx+d\ (x<0 \end{cases}$$

$g(x)$는 모든 x에서 연속이므로 ($\because$ 미분가능)

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^-}g(x)=g(0)=0$$

$$c=d=0,\ g(\bar{x})=\begin{cases} ax & (x>0) \\ bx & (x<0) \end{cases}$$

또한 $g(x)$는 모든 점에서 미분 가능하므로 (1)에 의해 $a=b$이고 $g'(0)=0$에서 $a=0$이다.

$\therefore\ g(x)=0$

(3) $h'(x)=\dfrac{h(x)}{x}\ (x\neq 0)$이므로

$h'(x)$는 $x\neq 0$에서 미분 가능하다.

$$h'(x)=\frac{xh'(x)-h(x)}{x^2}=0$$

또 조건식에서 $h(0)=h'(0)=0$가 성립하므로 (2)에 의해서 항상 $h(x)=0$이다.

2006년 08월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]시사적 문제를 다룬 수리논술

다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

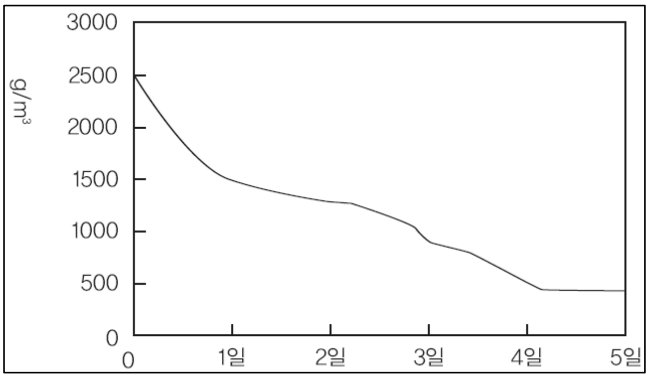
중국은 1978년 개혁 개방정책 시행 이후 고도의 경제성장과 급변한 사회적 변화를 겪고 있다. 양적 경제성장과 대규모 무역흑자라는 긍정적 현상의 이면에는 화석연료의 과다한 사용과 자연적·인위적 요인에 의한 사막화 등 환경문제가 내제되어 있다. 이런 환경문제의 심화는 장기적으로 중국의 경제성장을 저해하는 중요한 요인 중 하나가 되고 있다.

사막화로 인한 황사 등 중국의 환경문제는 자국 내에서만 영향을 미치는 것이 아니라 주변국가 특히 한국과 일본에 막대한 영향을 끼치면서 국제적인 문제로 확대되고 있다.

이런 문제에 공동으로 대처하기 위해 구성된 한·중·일 환경장관회의에서 지금까지의 다자간 환경협력과는 다른 매우 구체적이면서 실천적인 방안을 제시했다. 2002년 2월 공동협력 프로그램인 TEMM 프로젝트로 추진되고 있는 9개 사업이 그 내용이다. 조림사업을포함한 생태환경 복원사업이 그 대표적인 예다.

일차 과제는 피해예측과 비용계산을 위한 기초 자료를 축적하는 것이다. 한 연구소에서 시뮬레이션을 위해 정리한 자료에 따르면, 황사 농도는 몽골과 중국에 걸친 사막지역의 넓이에 비례해 증가하고 있다고 한다. 현재까지 사막지역은 전년에 비해 매년 0.1%씩 확대됐으며 앞으로도 그럴 것으로 추정된다. 또한 고도정밀 산업의 발달과 사회발전으로 인해 미래에는 황사 농도가 2배 증가할 때마다 황사로 인한 전체 피해규모는 8배씩 증가할 것으로 예측된다.

또한 중국의 내몽고 지역에서 발생한 황사먼지구름은 편서풍을 따라 남동쪽으로 이동하면서 베이징, 서울, 도쿄를 지나간다. 이들 각 지점에서 황사먼지구름의 이동속도는 40Km/h, 30Km/h, 20Km/h로 측정됐다. 황사가 발생한 지점에서 베이징, 서울, 도쿄까지 거리의 비는 1:2:3 정도이다. 내몽고에서 베이징까지 황사먼지구름이 도달하는 시간은 대략 하루 정도이며 시간에 따른 황사 중심 부분의 먼지 농도 변화는 그래프와 같다.



시간에 따른 먼지 농도

(1) 이미 <삼국사기>에 '토우'로 기록되어 있고, 조선 태종 때는 그 현상을 관측했다는 기록도 있듯이 황사현상은 오늘날만의 것은 아니다. 제시문에 근거해 각자 과거 일정시점을 정하고 그 시점에서 황사 농도가 어느 정도였을지 현재 시점의 농도를 기준으로 추정하시오. 또한 현재와 같이 사막화가 진행된 경우 앞으로 황사로 인한 피해 규모를 예측하시오.

(2) 생태환경을 복원하려고 매년 일정한 넓이의 사막에 나무를 심는 조림산업을 제시문에 기초해 시행한다. 이 경우 자연발생적인 사막화와 조림사업과의 상관관계를 고려해 황사의 농도가 어떻게 변할지 예측하시오. 또한 황사 피해규모를 현재의 절반 이하로 줄이고자 할 때 매년 어느 정도의 일정한 넓이로 조림사업을 시행해야 할지 추정하시오.

(3) 내몽고에서 발생한 황사는 중국, 한국을 거쳐 일본에까지 영향을 미친다. 황사 먼지는 발원지로부터 멀어짐에 따라 그 농도가 점진적으로 낮아지면서 피해의 정도도 차이를 보인다. 한•중•일 삼국이 공동으로 생태환경 복원을 위해 조림사업을 실시하기로 했는데, 이때 발생하는 배분문제가 의제로 제시됐다. 쌓인 황사 먼지의 총량을 부담금 배분의 기준으로 삼을 때, 제시문에 기초해 가장 합리적이라고 생각되는 배분방안에 대해 논술하시오.

▶ 전문가 클리닉

이번호에서는 고려대 수리논술 예시문항과 기출 문제를 집중적으로 살펴보겠습니다. 이번 문제는 고려대에서 2008년도 통합교과형 논술 예시문항으로 발표한 문제 중 수리논술 부분입니다.

▶ 예시답안

(1) 현재로부터 t년 전 사막지역의 넓이를 S, 현재 사막지역의 넓이를 A라고 가정한다. 사막지역의 넓이가 매년 0.1% 증가하므로 $A=S(1+0.001)^t$이다. 황사 농도는 사막지역의 넓이에 비례하므로 t년 전 황사 농도를 X, 현재의 황사 농도를 Y라 하면 $Y=kA=kS(1+0.001)^t=X(1+0.001)^t$이다. Y를 기준으로 X를 추정하면 $X=\dfrac{Y}{(1+0.001)^t}$이다.

이 식을 이용해 20년 전 황사 농도를 구하면 $\dfrac{Y}{(1+0.001)^{20}}\fallingdotseq 0.98Y$이다. 즉 20년 전에는 황사 농도가 현재의 98%였다.

같은 원리로 t년 후 사막지역의 넓이는 $A(1+0.001)^t$이다. 황사 농도는 사막지역의 넓이에 비례하므로 현재를 기준으로 t년 후 황사 농도를 $h(t)$라 하면 $h(t)=kA(1+0.001)^t$이다.

제시문에 따르면 황사 농도가 2배 증가할 때 황사로 인한 피해규모가 8배씩 증가한다. 그러므로 t년 후 황사로 인한 피해규모를 $H(t)$라 하면

$$H(t)=lh(t)^3=l\{kA(1+0.001)^t\}^3=lk^3A^3\{(1+0.001)^t\}^3 \ \cdots \ ①$$

lk^3A^3은 현재의 피해규모로 H_0로 가정한다. $(1+0.001)^3\fallingdotseq 1.003$이므로 t년 후 피해규모 $H(t)=H_0 1.003^t$이다. 즉 앞으로 황사의 피해규모는 매년 전년도의 약 1.003배이다.

(2) 매년 일정한 넓이의 사막에 나무를 심으면 조림사업을 한 만큼 사막이 줄어든다. 그러나 자연발생적인 사막화가 동시에 진행돼 일정 시점에서 사막의 넓이는 0.1% 증가한다. 이런 관계를 수열의 귀납적 정의에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있다.

조림사업을 시작하는 시점을 현재로 설정할 때 n년 후 사막의 넓이를 a_n, 현재의 넓이를 $a_0=A$라고 가정한다. 이때 매년 나무 심는 넓이를 B라 하고 자연적인 사막화와 조림사업을 고려하면 수열 a_n은 $a_{n+1}=1.001a_n-B$가 성립한다. 이때

$$a_{n+1}-1000B=1.001(a_n-1000B)$$

$$a_n-1000B=(A-1000B)1.001^n$$

$$a_n=1000B+1.001^n(A-1000B) \ \cdots \ ②$$

황사 농도는 사막지역의 넓이에 비례하므로 비례상수를 k라 하면 n년 후 황사의 농도는 ka_n이다. 이때 n년 후 황사 농도를 $h(n)$이라 가정하면,

$$h(n)=ka_n=k\{1000B+1.001^n(A-1000B)\}$$

이다. ②에서 $A-1000B<0$ 즉 조림사업할 넓이가 현재 사막 넓이의 $\dfrac{A}{1000}$보다 크면 사막의 넓이가 줄어 황사 농도가 감소한다.

또한 황사 피해규모를 현재의 절반 이하로 줄이려면 기본적으로 $B>\frac{A}{1000}$가 성립해야 한다. ①에 따르면 $H(t)=lh(t)^3$이므로 황사의 농도와 사막의 넓이를 $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$배 이하로 줄여야 한다.

$$a_n \le \frac{1}{\sqrt[3]{2}}A$$

$$1000B+1.001^n(A-1000B) \le \frac{1}{\sqrt[3]{2}}A \ \cdots \ ③$$

이때 ③을 B에 대해 풀면,

$$B \ge \frac{A}{1000}\frac{1.001^n-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{1.001^n-1}$$

이다. 즉 n년에 황사 피해규모를 현재의 절반 이하로 줄이려면 매년 조림사업을 $\frac{A}{1000}\frac{1.001^n-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{1.001^n-1}$ 이상의 넓이만큼 해야 한다.

(3) 황사가 편서풍을 따라 베이징, 서울, 도쿄로 이동하면서 시간이 경과하기 때문에 각 도시에 도달했을 때 황사 농도는 주어진 그래프에 따라 감소한다. 황사의 먼지 총량을 부담금 배분의 기준으로 삼으려면 황사가 각 도시에 도달하는 데 걸리는 시간을 계산해 황사 농도를 추론해야 한다.

황사가 발생한 지점인 내몽고에서 베이징, 서울, 도쿄까지 거리의 비는 대략 1:2:3이므로 내몽고~베이징, 베이징~서울, 서울~도쿄까지의 거리는 거의 같다고 볼 수 있다. 이제 황사가 이 세 구간에서 이동하는 속도를 생각해보자. 각 도시에서 측정한 황사 속도는 40Km/h, 30Km/h, 20Km/h이다. 각 구간에서의 속도는 주어진 자료로 알 수 없으나 속도가 일정한 규칙으로 변화하고 있기 때문에 내몽고에서 베이징, 베이징에서 서울, 서울에서 도쿄 구간을 이동하는 속도는 45Km/h, 35Km/h, 25Km/h의 근사값을 가질 것으로 추정할 수 있다.

그런데 내몽고에서 발생한 황사가 베이징에 도달하는 데 약 24시간이 소요된다고 했으므로 내몽고에서 베이징까지의 거리는 d≒45Km/h×24h=1080Km로 볼 수 있다. 황사의 중심이 서울에 도착하는 데 걸리는 시간은 내몽고 지역에서 황사가 이동하기 시작한 시점을 기준으로 다음과 같다.

$$t_{\text{서울}}=24\text{시간}+\frac{1080\text{Km}}{35\text{Km/h}} \fallingdotseq 55\text{시간}$$

또한 황사의 중심이 도쿄에 도착하는 시간은 황사이동 시작 시점을 기준으로 다음과 같다.

$$t_{\text{도쿄}}=55\text{시간}+\frac{1080\text{Km}}{25\text{Km/h}} \fallingdotseq 98\text{시간}$$

한편, 일정 시간 동안 쌓이는 먼지량을 시간 t에 대한 함수 $s(t)$라 하고, 황사의 농도를 $h(t)$라 하면 쌓이는 먼지량과 황사 농도는 비례할 것이므로 $s(t)=ph(t)$라 할 수 있다. 이때 p는 비례상수이다. 그러면 일정한 시각 t_1에서 t_2까지 쌓이는 먼지량은 다음과 같다.

$$\int_{t1}^{t2} s(t)\,dt = p\int_{t1}^{t2} h(t)\,dt$$

따라서 황사가 중국을 빠져나가는 시각을 t_1, 황사가 한국에 도착하는 시각과 빠져나가는 시각을 각각 t_2와 t_3, 일본에 도착하는 시각과 빠져나가는 시각을 각각 t_4와 t_5라 하면 각 나라에 쌓인 먼지총량의 비는 다음과 같다.

$$\int_0^{t_1} s(t)dt:\ \int_{t_2}^{t_3} s(t)dt:\ \int_{t_4}^{t_5} s(t)dt = \int_0^{t_1} h(t)dt:\ \int_{t_2}^{t_3} h(t)dt:\ \int_{t_4}^{t_5} h(t)dt \quad \cdots \text{④}$$

(단 $0 < 24 < t_1 < t_2 < 55 < t_3 < t_4 < 98 < t_5$)

한•중•일이 조림사업의 분담금을 각 나라에 쌓이는 황사 먼지총량에 비례해 걷는다면 ④를 분담금 배분의 비율로 하는 것이 가장 합리적이다.

만약 황사의 피해가 인구와 사회시설이 집약돼 있는 '대도시'에 집중될 것으로 보고 한•중•일이 조림사업의 분담금을 베이징, 서울, 도쿄에 쌓이는 먼지총량을 기준으로 정한다고 하자. 이 경우 '각 도시'에서 황사가 도착하고 빠져나가는 시간을 계산해 위와 같은 방법으로 비율을 계산하면 된다.

* $q:r:s$의 값은 주어진 그래프를 이용해 구체적인 숫자로 제시하는 것이 좋다. 여기서는 문제의 그래프가 원 시험지의 그래프 개형과 약간 차이가 날 가능성이 있어서 숫자를 제시하지는 않았다.

이때 황사의 이동속도와 도시의 크기에 따라 황사가 각 도시에 머무는 시간에는 차이가 있을 수 있다. 만약 그 시간이 주어진 그래프에서 상대적으로 작은 값으로 나타나고 그 크기에 차이가 없다면 황사가 각 지점에 도착할 때 농도의 비율을 각 도시에 쌓인 먼지총량의 비율로 볼 수 있다.

그 비율은 앞서 계산한 황사가 각 도시에 도착하는 시간과 제시된 그래프에 근거해 볼 때 약 $q: r: s(*)$가 된다. 만약 각 도시마다 황사가 머무는 시간이 다르고 그 시간비율이 $x: y: z$라면, 또 그 시간의 크기가 주어진 그래프에서 상대적으로 작은 값으로 나타난다면 각 도시에 쌓인 먼지총량은 $qx: ry: sz(*)$의 비율로 추정할 수 있다.

영희와 철수는 '귀납적 추리'와 '수학적 귀납법'을 적용한 논증을 제시하려 하고 있다. 누가 어떤 논법을 적용하고 있는지 판단해 이들의 논증에 문제점이 있으면 지적하고, 각자의 주장을 정당화하기 위한 올바른 논법을 선택한 뒤 합리적인 논증을 제시하시오.

영희 : 태권도가 올림픽 정식종목으로 채택된 첫 번째 대회에서 우리나라는 한 개 이상의 금메달을 획득했어. 지난 2004년 올림픽의 태권도 종목에서 한 개 이상의 금메달을 획득했기 때문에 2008년 올림픽에서도 한 개 이상의 금메달을 획득할 것이 분명해. 이런 경향을 생각하면 앞으로 모든 올림픽의 태권도 종목에서 우리나라는 한 개 이상의 금메달을 획득할 거야.

철수 : 1부터 100까지 자연수의 합은 101을 백 번 더해서 2로 나눈 것과 같고, 1부터 1000까지 자연수의 합은 1001을 천 번 더해서 2로 나눈 것과 같고, 1부터 10000까지 자연수의 합은 10001을 만 번 더해서 2로 나눈 것과 같잖아. 이와 같이 모든 자연수 n에 대해 1부터 n까지 자연수의 합은 $n+1$을 n번 더해서 2로 나눈 수와 같을 거야. 아직까지 이 조건이 성립하지 않는 예를 발견한 사람은 없어.

▶ 전문가 클리닉

수학적 귀납법과 귀납적 추리를 소재로 수학적 사고력을 점검하는 문제입니다.

▶ 예시답안

영희는 수학적 귀납법을 사용해 우리나라가 올림픽 태권도 종목에서 항상 한 개 이상의 금메달을 획득할 것이라는 논리를 전개하려 하고 있다.

영희는 가장 먼저 첫 번째 대회에서 금메달을 획득했다고 지적했다. 이는 n=1일 때 명제가 성립한 것을 의미한다. 그러나 영희는 2004년에 금메달을 획득했다는 근거만으로 2008년에도 금메달을 획득할 것이라고 '예상'하고 있다.

이 논리 전개에는 오류가 있다. 첫째, 실제로 그렇거나 반드시 그럴 수밖에 없는 근거가 없는 한 '예상'은 논증의 토대가 되지 못한다. 둘째, 수학적 귀납법에 따라 증명을 하려면 일반화된 k에 대해 p(k)가 참이면 p(k+1)이 참이어야 한다. 영희의 수학적 귀납법 증명이 완성되려면 k번째 대회에서 금메달을 따면 k+1번째 대회에서도 금메달을 딴다는 사실이 논리적으로 증명돼야 한다.

이런 증명은 비현실적이므로 영희는 귀납적 추리의 논법을 선택해 다음과 같이 말해야 한다.

"우리나라는 태권도가 올림픽 종목으로 채택된 첫 번째 대회와 2004년 대회에서 금메달을 획득했다. 올림픽에서 특정 종목의 강세가 계속 되는 사례가 많다는 점을 감안할 때 앞으로도 우리나라는 태권도 종목에서 금메달을 딸 가능성이 높다."

한편, 철수는 1부터 n까지 자연수를 더하면 $\frac{n(n+1)}{2}$이 됨을 귀납적으로 추리하고 있다.

여러 사례에서 일반화된 규칙을 찾아내는 것을 귀납적 추리라고 한다. 그러나 귀납적 추리는 증명이 아니다. 지금까지 반례가 없었다고 해도 그것으로 증명이 된 것은 아니다.

모든 자연수에 대해 주어진 명제가 참이라는 사실을 보이려면 수학적 귀납법을 이용해야 한다. 1부터 n까지 자연수를 더하면 $\frac{n(n+1)}{2}$이 된다는 것을 수학적 귀납법으로 증명하면 다음과 같다.

$n=1$일 때 이 명제는 성립한다.

$n=k$일 때 이 명제가 성립한다고 가정하면

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

양변에 $k+1$을 더하면

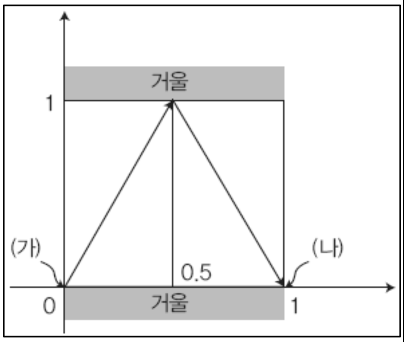
$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

즉 $n=k+1$일 때도 명제는 성립한다. 그러므로 수학적 귀납법의 원리에 의해 1부터 n까지 자연수를 더하면 $\frac{n(n+1)}{2}$이다.

2006년 09월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]일상에서의 수학 원리

한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 장치가 있는데 마주보는 두 변에 그림과 같이 거울이 설치돼 있다. (가)지점에서 발사 각도를 일정한 규칙에 따라 변화시키면서 레이저 신호를 거울에 반사시켜 (나)지점에 도달시키는 실험을 하고 있다. 첫 번째 발사에서 레이저의 궤적은 그림과 같다(2006학년도 고려대 수시 2학기).



이 궤적을 어떤 함수 f의 주어진 구간에서의 그래프라고 하자. n번째 발사에서 레이저의 궤적은 f를 n번 합성한 함수의 그래프와 같다. 이 실험을 통해 다양한 수열을 관찰할 수 있다. 예를 들어 n번째 발사된 레이저의, (가)에서 (나)까지의 궤적 길이를 일반항으로 가지는 수열을 생각할 수 있다.

이와 같이 위의 실험에서 유도할 수 있는 수열을 사용해 수렴하는 무한급수와 발산하는 무한급수의 예를 하나씩 들고 수렴, 발산하는 이유를 설명하시오.

(단, 상수로 이뤄진 수열은 제외한다. 그리고 지문에 있는 예는 사용하지 마시오.)

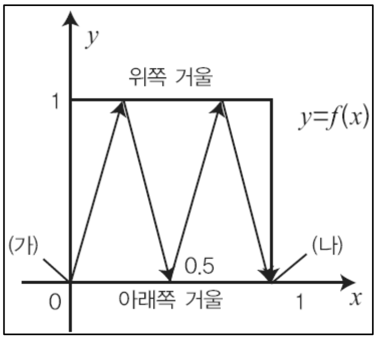
▶ 전문가 클리닉

논술가이드라인 때문에 정답이 정해져 있는 문제는 출제할 수 없습니다.

위 문제는 다양한 답이 나올 수 있도록 구성하려고 한 출제자의 고민이 엿보이는 문제입니다. 다음의 예시답안에서 제시한 수열 외에도 다양한 수열이 존재할 수 있습니다.

▶ 예시답안

(가)지점에서 레이저를 발사해 (나)지점에 도달시킬 때 n번째 발사에서 레이저의 궤적은 f를 n번 합성한 함수의 그래프와 같다. 그러므로 2번째 발사한 레이저의 궤적은 그림과 같다.



이와 같이 합성함수의 그래프를 구해보면 f를 n번 합성한 함수의 그래프는 $\wedge$모양이 2^{n-1}번 나타나는 주기함수의 그래프가 된다.

이때 n번째 발사한 레이저의 궤적이 아래쪽 거울에 처음으로 도달하는 지점과 (가)지점과의 거리를 수열 $\{a_n\}$이라 하자. 이 수열은 첫항이 1이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 무한등비수열이 된다. 공비가 0 이상 1 미만의 범위에 포함되므로 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다. 이때 무한급수는 n항까지의 부분합 $S_n = \frac{1-(0.5)^n}{1-0.5}$의 극한값으로 수렴한다.

또한 n번째 발사한 레이저가 위쪽 거울에 부딪히는 횟수를 수열 $\{b_n\}$이라 하면 이 수열의 일반항 b_n은 2^{n-1}이 된다. 이때 무한급수 b_n은 발산한다.

$\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 발산하는데 $\lim_{n\to\infty} b_n$은 양의 무한대로 발산하기 때문이다.

천칭(대칭저울)을 사용해 두 공의 무게를 비교하는 방법으로 여러 개의 공들 가운데 가장 무거운 것, 두 번째로 무거운 것과 세 번째로 무거운 것을 가려내고자 한다(2006년 서강대 수시 2학기).

1) 공의 수가 많은 경우, 가급적 비교 횟수를 적게 해 세 공을 가려내는 방법을 논리적으로 설명하시오.

2) 가장 무거운 공, 두 번째 무거운 공, 세 번째로 무거운 공을 판정한 뒤 그 판정이 옳다는 것을 검증하려면 적어도 몇 차례의 비교를 시행해야 하는 지 설명하시오. (단, 각각의 공은 무게가 모두 서로 다르다고 가정한다)

▶ 전문가 클리닉

가장 무거운 공과 두 번째, 세 번째로 무거운 공을 골라내는 과정은 다양하게 제안될 수 있습니다. 그러나 검증 비교횟수는 명확하게 제시해야 합니다. 예시 답안 외에 가장 무거운 공과 두 번째로 무거운 공을 토너먼트로 찾아내는 과정도 좋은 방법입니다.

▶ 예시답안

1) 비교횟수를 가급적 적게 하는 다음과 같은 방법을 생각해보자. 이를 위해 우선 n개의 공에 각각 $1 \sim n$까지 임의로 번호를 부여한다.

과정 ① :

처음에 1과 2를 비교해 더 무거운 공을 선택한다. 더 가벼운 공은 오른쪽에 내려놓고, 3번 공과 더 무거운 공을 비교한다. 이렇게 차례대로 n번째 공까지 계속해서 무게를 비교한 뒤 다음과 같은 규칙으로 공을 내려놓는다.

◎ 비교했을 때 더 무거운 공은 남겨두고 더 가벼운 공을 내려놓는다.

◎ 한 번이라도 더 무거웠다고 판정된 공은 오른쪽으로 내려놓고, 첫 번째 비교에서 더 가볍다고 판정된 공은 왼쪽에 내려놓는다.

이렇게 비교해서 끝까지 남아있는 공이 가장 무거운 공이다. 이 공의 숫자를 M이라 하자. 이때의 비교횟수는 $(n-1)$회이다. 이제 M번 공을 제외한 공들 중에 가장 무거운 공을 찾아야 한다.

과정 ② :

비교 횟수를 줄이기 위해 오른쪽에 내려 놓은 공 중에서 숫자가 가장 큰 공을 선택하자. 이 공의 숫자를 a라 하자. a는 M보다 크지 않을 것이다. 그리고 오른쪽에 내려놓은 나머지 공들은 한쪽에 따로 모아놓자. 이 공들을 집단 x라고 하자.

공 a는 M 미만의 다른 모든 공보다 무거울 것이므로 M 미만의 공들과는 비교할 필요가 없다. 따라서 $(M+1)$ 이상의 번호를 가진 공들과 a를 가지고 과정①을 반복하면 두 번째로 무거운 공을 찾을 수 있다. 이때 비교 횟수는 $(n-M)$회다. 단, $M=1$인 경우는 $(n-2)$회가 된다.

이렇게 찾은 두 번째로 무거운 공의 숫자를 N이라고 하자. 이제 이공을 제외한 공들 중에서 가장 무거운 공을 찾아야 한다.

과정 ③ :

$N=a$인 경우, 집단 x의 공 중에서 가장 숫자가 큰 공 b와 (N+1) 이상의 공들에 대해 과정② 와 유사한 시행을 반복하면 세 번째로 무거운 공을 찾을 수 있다.

이때 비교횟수는 공 M이 제외됐으므로 $(n-1-N)$회가 된다.

만일 집단 x에 공이 더이상 존재하지 않는다면, 다시 전체 공을 가지고 과정 ①을 거쳐 세 번째로 무거운 공을 찾아야 한다. 집단 x에 공이 없을 경우 비교 횟수는 $(n-3)$회이다.

N이 a가 아닌 경우, 과정②를 수행한 뒤에도 여전히 오른쪽에 존재하는 공들 중에서 가장 숫자가 큰 공을 선택한다. 이 공의 숫자를 b라 하자. b번공은 N보다 작을 것이다.

이 공은 N 미만의 다른 모든 공보다 무거우므로 N 미만의 공들과는 비교할 필요가 없다. 따라서 이 공과 (N+1) 이상의 공들을 가지고 과정①을 반복하면 세 번째로 무거운 공을 찾을수 있다. 이때 비교 횟수는 $(n-N)$회이다.

과정 ①, ②, ③을 거치면 비교 횟수가 일반적으로 $3n-M-N-2$회 또는 $3n-M-N-1$회이며, 최대의 경우 비교 횟수는 $n-1+n-2+n-3=3n-6$회가 된다.

최소의 경우는 $3n-n-(n-1)-2=n-1$회이다.

2) 과정①, ②, ③을 거쳐 얻은 무거운 공들을 순서대로 M, N, P라고 하자.

비교 과정이 옳음을 검증하려면, P가 이 세 공을 제외한 나머지 $(n-3)$개 공보다 무겁다는 것을 확인해야 한다. 그러므로 $(n-3)$회를 비교해야 한다. 그리고 N이 P보다 무겁다는 점을 확인하기 위해 1회, M이 N보다 무겁다는 점을 확인하기 위해 1회 비교하면, 적어도 $n-3+1+1=n-1$회의 비교가 필요하다.

다음 두 그림을 보고 물음에 답하라(2006학년도 한양대 수시 2학기).

1) 사진의 두 물체가 서로 다른 모양을 갖게 된 이유와 두 물체가 가지고 있는 공통점을 설명하시오.

2) 트리 구조의 개념을 가진 시스템을 예로 들어 설명하고 그 장점과 문제점을 설명하시오.

▶ 전문가 클리닉

원래는 심층면접 문제로 출제됐던문 대입 심층구술면접 대비책제입니다. 심층면접 문제도 통합교과형 논술의 한 유형이 될 수도 있다는 생각에서 수리논술문항으로 다뤄봤습니다.

▶ 예시답안

1) A는 최대한 높은 구조물을 짓기 위해 설계됐고, B는 햇빛에 노출되는 잎사귀의 표면적을 최대화하기 위한 모양을 갖고 있다. 공통점이 있다면 자신의 무게를 안정적으로 지탱할 수 있는 질량분포 구조를 갖추고 있다는 것이다.

A의 경우 밑으로 내려갈수록 넓은 단면을 갖도록 설계해 안정적으로 무게를 배분했다. B는 위쪽으로 갈수록 가지가 가늘어지고 아래쪽으로 갈수록 줄기가 굵어지는 형태로, 실제

적인 질량분포는 안정성을 보인다.

뿐만 아니라 바람이 불 경우 구조물에 끼칠 영향을 고려해 A는 바람에 의한 영향을 최소화할 수 있도록 벽면이 없는 구조를 갖고 있고, B 역시 바람이 잘 통과할 수 있는 형태를 취하고 있음을 알 수 있다.

2) 도스나 리눅스의 디렉토리 체계, 각종 프로그램의 메뉴 체계, 가계도, 계통학 분류 체계 등이 트리 구조를 가진다.

컴퓨터 디렉토리 체계는 사용자가 어떠한 파일에 접근하고자 할 경우, 최상위 디렉토리로부터'가지를 쳐서'그 파일이 들어 있는 하위 디렉토리까지 접근하도록 돼 있다. 각종 프로그램의 사용자 메뉴 역시 트리 구조로, 상위 메뉴로부터 하위 메뉴로 분기(혹은 분류 기준)를 거쳐서 원하는 기능을 실행할 수 있도록 돼 있다.

각종 가계도(전통적인 혈연 가계도를 비롯해 음악, 특정한 기술 혹은 제품, 미술, 학파 등의 가계도) 역시 가계의 시조로부터 가지를 쳐서 계통이 이어져 내려가는 트리 구조를 하고 있다.

생물학의 계통 분류 체계 역시각생물을 계와 그에 포함된 문, 그에 포함된 강, 그에 포함된 목, 그에 포함된 과, 그에 포함된 속, 다시 그에 포함된 종으로 차례로 가지를 쳐나가는 구조로 분류돼 있다.

트리 구조의 장점은 방대한 양의 체계를 적은 양의 분기를 통해 분류하고 관리할 수 있다는 점이다. 나무에 달린 많은 잎에 비해 나무줄기로부터 잎에 접근하기 위해서 해야 하는 선택, 즉 거쳐야 하는 분기점은 훨씬 적다.

그러나 트리 구조의 단점은 모든 대상에 대한 접근도가 같다는 점이다. 즉 자주 참조해야 하는 대상(파일, 메뉴, 가계의 구성원, 계통학에서 지시하는 개체)에 접근하는 데필요한 노력과 거의 참조하지 않는 대상에 접근하는 데 필요한 노력이 같다.

자주 참조하는 대상의 접근도가 자주 참조하지 않는 대상에 대한 접근도보다 높아야 효율성이 높은데, 트리 구조는 이러한 효율성은 갖지 못하는 셈이다.

변의 길이가 각각 4와 3인 직사각형이 한 변의 길이가 1인 12개의 정사각형으로 나누어져 있다. 이들 12개의 정사각형 중에서 임의로 서로 다른 2개의 정사각형을 선택할 때 다음 물음에 답하라.

1) 두 정사각형이 변을 공유하는 확률을 기약분수 $\frac{n}{m}$으로 나타낼 때, m과 n은 각각 얼마인가?

2) 두 정사각형의 각각의 중심(대각선의 교점) 사이의 거리를 s라고 할 때, s가 무리수가 될 확률은 얼마인가>

▶ 예시답안

1) 12개의 정사각형 가운데 2개의 정사각형을 선택하는 경우의 수는 ${}_{12}C_2$이고 내부의 변이 모두 17개이므로 두 정사각형이 변을 공유하는 확률은 $17/{}_{12}C_2=17/66$이 된다.

2) s가 무리수가 될 확률은 두 정사각형이 세로 또는 가로로 배열되는 경우의 여사건의 확률을 구하면 된다. 따라서 확률은 $1-\frac{4\cdot{}_3C_2+3\cdot{}_4C_2}{{}_{12}C_2}=\frac{6}{11}$과 같다.

▶ 추가문제

두 정사각형의 각각의 중심(대각선의 교점) 사이의 거리를 s라 할 때, s>2가 될 확률은 얼마인가?

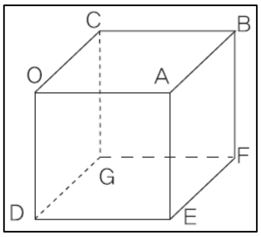
정육면체의 한 꼭지점에 쥐가 있고, 한 번 이동할 때마다 꼭지점에서 이웃한 꼭지점까지 변을 따라서 변 하나의 길이만큼 이동한다. 꼭지점에 도달할 때마다 지나온 변을 포함해 모두 같은 확률로 어느 방향으로 나아갈지를 결정한다.

1) $2n$번 이동해 다시 최초의 꼭지점으로 되돌아갈 확률을 P_n이라 할 때, P_{n+1}을 P_n으로 나타내라.

2) P_n을 n에 관한 식으로 나타내라.

3) $\lim_{n\to\infty} P_n$을 구하라.

▶ 예시답안



1) 처음에 쥐가 출발한 꼭지점을 O라 하면, 2n번 이동한 뒤 쥐의 위치는 O, B, E, G 가운데 하나가 된다.

O에 있던 쥐가 2회 이동으로 O에 돌아오는 것은 O→ A → O, O → C → O, O → D → O로 이동하는 경우이고, 그 확률은 (1/3)²X3=1/3이다.

B에 있던 쥐가 2회의 이동으로 O에 돌아오는 것은 B→A→O, B→C→O 로 이동하는 경우이고, 그 확률은 (1/3)²X2=2/9이다. 이는 쥐가 E, G에 있을 때도 같으므로

$$P_{n+1}=\frac{1}{3}P_n+\frac{2}{9}(1-P_n)$$

$\therefore\ P_{n+1}=\frac{1}{9}P_n+\frac{2}{9}$이다.

2) 1)에서 $P_{n+1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{9}\left(P_n-\frac{1}{4}\right)$이므로

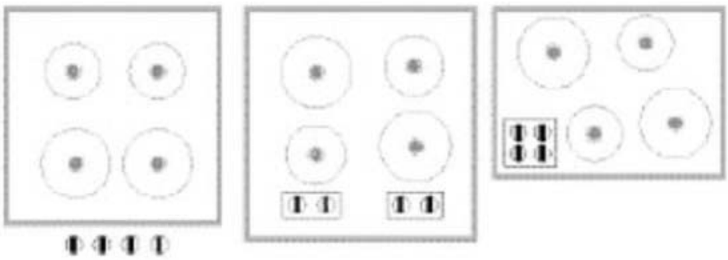
$$\therefore\ P_n=\frac{1}{4}\left\{1+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right\}$$

3) 2)에서 $\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{1}{4}$이 된다.

2006년 10월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]전열스토브의 최적 디자인은?

그림은 가열판과 스위치의 배열이 서로 다른 전열스토브를 나타낸 것이다(2006년 한양대 수시 2학기 건축학부).



1) 각 배열이 지닌 장단점을 설명하고 어떤 배열이 가장 합리적이라고 생각하는 지 근거를 들어 판단하라.
2) 스토브의 전열레인지가 동그란 이유에 대해 설명하라.
3) 부엌에서 전열스토브가 차지하는 면적을 줄이기 위한 대안을 제시하고 이때 부수적으로 고려해야 할 내용을 설명하라.

▶ 전문가 클리닉

각 학교마다 학생들의 다양한 사고력을 측정하기 위해 독특한 수리논술 유형을 개발하고 있습니다. 이 문제는 특히 학생들에게 창의력을 요구하는 유형입니다.

▶ 예시답안

1) A배열은 가열판 사이의 공간이 넓기 때문에 큰 냄비나 긴 손잡이가 달린 프라이팬 등을 비교적 자유롭게 배열할 수 있다. 뿐만 아니라 스위치도 넓은 공간에 배열돼 있으므로 조작하기 편하다.

   그러나 A배열에서는 큰 용기를 앞쪽에만 놓고 작업해야 하는 데, 뒤쪽 가열판은 앞에서부터의 거리가 멀기 때문에 뒤쪽에 위치한 용기를 조작하기가 쉽지 않다.

   B배열은 A배열과 C배열의 중간 형태로 A의 단점과 C의 단점을 조금씩 보완한 형태다. B배열은 A배열보다 공간 효율이 좋으면서 C배열에 비해 냄비나 프라이팬 손잡이에 의한 방해를 덜 받고, 스위치를 조작하기가 편리하다.

   그러나 B배열은 C배열보다 공간 효율이 나쁘며, A배열에 비해 냄비나 프라이팬의 손잡이에 의해 방해를 많이 받고 스위치 조작이 불편하다.

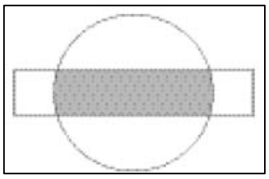
   C배열은 공간을 많이 차지하지 않기 때문에 주방을 넓게 쓸 수 있다. 그러나 C배열은 가열판 사이의 공간이 좁기 때문에 냄비나 프라이팬의 손잡이에 의해 방해를 받기 쉽다. 스위치도 좁게 놓여 있어 조작이 불편하다.

   가장 합리적인 배치는 주방의 특성과 사용자의 성향에 따라 달라진다. 매우 좁은 주방에서 공간 효율성을 극대화해야 하는 경우에는 C배열이 가장 합리적이다. 반면에 손잡이가 튀어나온 용기를 많이 사용한다면 A배열이 가장 적절하다. A배열과 C배열의 장점을 적절히 섞은 전기스토브가 필요하다면 양쪽 배열의 장점을 조금씩 절충한 B배열과 같은 형태가 더 낫다.

2) 스토브의 전열레인지가 동그란 첫 번째 이유는 같은 둘레를 가진 도형 중 원이 가장 면적이 넓기 때문이다. 전열레인지를 원형으로 만들면 같은 열에너지를 이용해 가장 넓은 영역을 가열할 수 있다.

   두 번째 이유는 원이 한 점(중심)에서부터 일정한 거리에 있는 점들의 자취라는 데 있다. 이때문에 원형 전열레인지는 용기를 가열할 때 다른 모양의 전열레인지에 비해 열을 골고루 용기 바닥에 전달할 수 있다.

세 번째 이유는 각종 가열용기가 동그랗기 때문이다. 가열용기의 바닥모양은 실용성을 높이고, 밑바닥에서 가열할 때 열을 효율적으로 전달하기 위해 동그란 경우가 많다. 가열 효과를 높이려면 전열레인지와 용기가 닿는 면적을 최대화해야 하는 데, 이를 위해서는 전열레인지도 원이어야 한다.



만약 그림과 같이 원형 용기에 직사각형 전열레인지가 있다면 에너지 절약과 가열 효과 면에서 매우 비실용적이다.

3) 전열스토브가 부엌에서 차지하는 면적을 줄이는 방법에는 C배열처럼 각각의 전열레인지를 서로 가까이 엇갈려 붙이고 조작스위치도 레인지에 가깝게 장착하는 방법이 있다. 이때 각각의 전열레인지를 얼마나 가까이 붙일 수 있는 가, 격자 구조가 아닌 엇갈린 구조에서 각각의 전열레인지와 스위치의 배선을 어떻게 할 것인가, 스위치와 레인지를 가까이 배치시킬 때 얼마의 거리를 둬야 사용자가 안전하게 사용할 수 있는 가를 고려해야 한다.

다음 물음에 답하시오(2006년 서강대 수시 2학기).

현재 넓이가 A인 호수가 있다. 물의 증발을 무시할 때, 강물의 유입으로 호수의 넓이가 매월 일정하게 B만큼 커진다. 그러나 기후로 인한 물의 증발로 매월 호수 넓이는 1%씩 줄어든다.

1) B가 $\frac{A}{100}$보다 크다고 가정할 때, 시간이 지나면서 호수의 넓이가 어떻게 변할지 논리적으로 설명하라.

2) 호수에 유입되는 물과 똑같은 양의 물을 전력생산, 식수, 농업용수 등으로 사용해 없앤다고 할 때, 오랜 시간이 지난 뒤 호수의 넓이가 어떻게 될지 설명하라.

3) 우리 주변에 실생활에서 접하는 문제들 중에서 1)과 비슷한 수학적 원리로 설명할 수 있는 예를 한 가지 들어라.

▶ 전문가 클리닉

이 문제에서 다뤄진 주제는 2007학년도 고려대 수리논술 예시문항에도 등장했습니다. 이 문제는 자연현상을 수리적으로 모델링할 것을 요구하고 있습니다.

▶ 예시답안

1) n개월 뒤 호수의 면적을 a_n, 처음 호수의 면적을 $A_0 = A$라고 하자.

매월 호수의 넓이는 기후로 인한 물의 증발로 1%씩 줄고, 한편으론 강물의 유입으로 일정하게 B만큼 커진다고 했으므로

$$a_n = \frac{99}{100}a_{n-1} + B$$

가 성립한다. 이 식은 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$a_n - 100B = 0.99(a_{n-1} - 100B) = (0.99)^n(A - 100B)$$

$$a_n = 100B + 0.99^n(A - 100B)$$

B가 $\frac{A}{100}$보다 크면 $(A-100B)$는 음수이나, 전체적으로 볼 때 a_n은 증가수열이므로 호수의

넓이는 계속 증가한다. 이때 $\lim_{n\to\infty} a_n = 100B$이다. 따라서 B가 $\frac{A}{100}$보다 클 경우 호수의 넓이는 계속 늘어나서 $100B$에 접근한다.

2) 호수에 유입되는 물과 똑같은 양의 물을 전력생산, 식수, 농업용수 등으로 사용해 없앤다고 하면,

$$a_n = 0.99a_{n-1}$$

이 되므로 $a_n = 0.99^n A$이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이므로 결국 호수는 다 마를 것이다.

3) 개인의 소득을 생각해 보자. 개인의 현재 보유자산이 A이고, 매년 보유재산의 $r\%$만큼을 소비하고 연소득이 B로 일정하다면 이는 1)과 비슷한 상황이 된다. 이 경우 n년 뒤의 자산을 a_n이라 할 때

$$a_n = \left(1 - \frac{r}{100}\right)a_{n-1} + B$$

이 된다. 만약 B가 $\frac{rA}{100}$보다 크다면 개인의 보유재산은 계속 증가하며 $\frac{100B}{r}$에 점점 가까워질 것이다.

여러 채의 주택이 들어선 평지 마을을 관통하는 직선 도로를 건설하려고 한다. 모든 주택에서 접근하기 가깝도록 최적의 거리에 도로를 건설하고자 할 때, 도로가 놓일 위치를 결정하기 위한 방법을 두 가지 이상 제시하고 그 방법들을 서로 비교하라(2006학년도 서강대 수시 2학기).

▶ 전문가 클리닉

간단한 문제처럼 보이지만 그 방법을 구체적으로 설명하려고 하면 까다롭게 느껴지는 문제입니다. 이 문제는 여러 각도에서 접근할 수 있습니다.

제시된 예시답안의 특징은 단순히 새로운 도로와 각 주택 사이의 물리적 거리만을 고려하지 않고 기존의 도로망과 도로에 이르는 시간까지 분석 대상으로 삼았다는 점입니다. 이 예시답안은 하나의 예일 뿐이니 스스로 다양한 접근방법을 생각해보기 바랍니다.

▶ 예시답안

우선 마을의 집들을 좌표평면 위의 점들로 나타내고 건설할 도로를 직선으로 생각한다. 마을에 있는 집들의 좌표를 (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\cdots$, (x_n, y_n)라 하고 도로를 나타내는 직선방정식을 $y = mx + n$이라 하자. 그러면 도로가 놓일 위치를 결정하는 문제는 직선방정식에서 적절한 m과 n을 찾는 문제가 된다.

[방법 1]

점 $(x_p,\ y_p)$에서 직선 $y = mx + n$까지의 거리는 $\frac{|mx_p - y_p + n|}{\sqrt{m^2+1}}$이므로, 마을에 있는 모든 집에서 직선도로까지의 거리의 합을 의미하는

$$f(m,\ n) = \sum_{p=1}^{N} \frac{|mx_p - y_p + n|}{\sqrt{m^2+1}}$$

의 값이 최소가 되게 하는 m, n을 구하는 방법이 있다.

[방법 2]

이 마을에 기존의 도로망이 존재한다고 가정하자. 만약 새로 건설되는 도로보다 기존의 도로가 더 가까이에 존재한다면 이 새로운 도로를 이용하지 않게 된다. 따라서 새로운 도로를 건설할 때는 이 도로를 직접 이용할 주민들에 대한 접근성을 중심으로 고려해야 한다.

함수 g를 다음과 같이 정의하자.

$$g(x,\ y)=\begin{cases} x\ (x<y\text{일 때}) \\ 0\ (x\geq y\text{일 때}) \end{cases}$$

주민들이 자기 집에서 가장 가까운 도로를 이용한다고 가정하고, 이미 있는 도로 중 p번째 주민의 집에서 가장 가까운 도로까지의 거리를 d_p라 하자.

그렇다면 p번째 주민은 도로 $y=mx+n$까지의 거리가 d_p보다 작을 경우에만 도로를 사용할 것이다. 도로는 그 도로를 사용할 주민들에게 근접하기만 하면 되므로, 그 도로를 사용하지 않을 주민에 대한 접근성은 고려할 필요가 없다. 따라서 이 경우에 다음 식의 값을 최소가 되게 하는 m, n을 구하면 된다.

$$f(m,\ n)=\sum_{p=1}^{N} g\left(\frac{|mx_p-y_p+n|}{\sqrt{m^2+1}},\ d_p\right)$$

[방법 3]

주민들은 자신이 어디로 갈 것이냐에 따라 사용할 도로를 결정한다. 주민 p가 도로 $y=mx+n$을 사용할 확률을 $k_p(m,\ n)$이라고 하자. 또한 이 마을주민들의 평균 자동차 운행속도를 v라고 할때, 한 가구가 도로까지 접근하는 데 걸리는 평균 소요시간의 기대값은

$$\frac{1}{N}\sum_{p=1}^{N} k_p(m,\ n)\frac{|mx_p-y_p+n|}{\sqrt{m^2+1}}\frac{1}{v}=\frac{1}{Nv}\sum_{p=1}^{N} k_p(m,\ n)\frac{|mx_p-y_p+n|}{\sqrt{m^2+1}}$$

이다. 따라서

$$f(m,\ n)=\sum_{p=1}^{N} k_p(m,\ n)\frac{|mx_p-y_p+n|}{\sqrt{m^2+1}}$$

을 최소화하는 m, n을 구하면 된다.

세 가지 방법 중에서 [방법 3]이 가장 정교하고 일반적이다. 특히 [방법 1]은 [방법 3]에서 $k_p(m,\ n)=1$로 정의한 것이다. 즉 모든 주민은 무조건 도로 $y=mx+n$을 사용한다는 가정 하에 k_p를 설정했다.

한편 [방법 2]는 [방법 3]에서

$$k_p(m,\ n)=\begin{cases} 1\ \left(\dfrac{|mx_p-y_p+n|}{\sqrt{m^2+1}}<d_p\text{일 때}\right) \\ 0\ \left(\dfrac{|mx_p-y_p+n|}{\sqrt{m^2+1}}\geq d_p\text{일 때}\right) \end{cases}$$

로 정의한 것이다. 즉 모든 주민들은 무조건 가장 가까운 도로를 이용한다는 가정 하에 k_p를 설정했다.

즉 [방법 1, 2]는 [방법 3]의 특수한 경우이므로, 사전 조사를 바탕으로 k_p를 정교하게 설정해 [방법 3]을 이용하는 것이 가장 이상적이다.

삼차함수 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$는 다음 조건 (ⅰ), (ⅱ)를 모두 만족시킨다.

(단 a, b, c는 실수이다)

(ⅰ) $f'(0)=f'(1)$

(ⅱ) $f'(1)f(1)-f'(0)f(0)\le 0$

(ⅲ) $\int_0^1 f(x)\,dx=0$

이때 다음 물음에 답하라.

1) a의 값과 b가 취하는 값의 범위를 구하라.

2) $f(x)$의 구간 $[0,\ 1]$에서 최대값과 최소값의 합을 구하라.

▶ 예시답안

1) $f'(x)=6x^2+2ax+b$

(ⅰ)에서 $b=6+2a+b$

$\therefore a=-3$

이것을 (ⅱ)의 조건에 대입하면

$-b+b^2\le 0$

$\therefore 0\le b\le 1$

2) $f(x)=2x^3-3x^2+bx+c$

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\left[\frac{x^4}{2}-x^3+\frac{bx^3}{2}+cx\right]_0^1$$

$\therefore b+2c=1$

한편 $f'(x)=6x^2-6x+b$이고 $f'(x)=0$의 판별식에서 $D=12(3-2b)>0$이므로 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 근을 가진다.

이 두 근을 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$라고 놓자.

$f'(0)=f'(1)=b\ge 0$이고, $y=f'(x)$의 축은 $x=\dfrac{1}{2}$이다.

$0\le\alpha\le\beta\le 1$ 증감표에서 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소이다.

그런데 $f(0)=c\ge b+c-1=f(1)$이므로 $[0,\ 1]$에서 최대값은 $f(\alpha)$, 최소값은 $f(\beta)$이다.

근과 계수와의 관계 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=\dfrac{b}{6}$를 이용하면

$$f(\alpha)+f(\beta)=2\alpha^3-3\alpha^2+b\alpha+c+2\beta^3-3\beta^2+b\beta+c$$
$$=2(\alpha^3+\beta^3)-3(\alpha^2+\beta^2)+b+2c$$
$$=2(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-3(\alpha^2+\beta^2)+1$$
$$=-(\alpha+\beta)^2+1=0$$

따라서 $f(x)$의 구간 $[0,\ 1]$에서 최대값과 최소값의 합은 0이다.

▶ 추가문제

다음 조건을 만족하는 사차함수 $f(x)$를 생각하자.

$$f(-1)=0,\ f(2)=0,\ \int_{-1}^{2} f(x)\,dx=0$$

1) $-1<x<2$의 범위에서 $f(x)=0$을 만족시키는 x가 존재함을 증명하라.

2) $f(0)=0,\ f(1)=4$를 만족시킬 때 $f(x)$를 구하라.

3) 이때 $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$를 구하라.

2006년 11월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]영화감독의 체류일정

전 세계적으로 에너지소비량이 급증하는 데 반해 새로운 에너지원을 개발하는 일은 더디게 진행되고 있다. 이 같은 현실에서 에너지절약을 위한 다양한 노력이 요구된다.

프린터를 사용할 때는 예열전력량, 대기전력량, 인쇄전력량이 소모된다. 예열전력량은 프린터가 꺼져 있는 상태에서 전원이 들어올 때 순간적으로 소모되는 전력량, 대기전력량은 전원이 켜진 상태에서 대기하는 시간 동안 소모되는 전력량, 인쇄전력량은 인쇄가 진행되는 동안에 소모되는 전력량이다. 세 종류의 전력량을 적절히 조정하면 에너지를 절약할 수 있다. 특히 인쇄를 하지 않을 경우 프린터를 언제 꺼지도록 설정하느냐는 전력소모량에 큰 영향을 미친다.

사용 후 즉시 꺼지도록 설정된 프린터와 다음번 사용할 때까지 전원이 계속 켜져 있도록 설정된 프린터를 전력소모량 측면에서 비교적 설명하라. 이를 바탕으로 전력소모를 최소화할 수 있도록 프린터를 설정하는 방법을 제안하고 그 방법의 타당성을 논술하라(2007학년도 이화여대 수시 1학기 예시문항).

▶ 전문가 클리닉

일상생활에서 접할 수 있는 소재에 수학적 사고를 적용해 최적화된 문제해결 방법을 요구하고 있습니다. 문제해결의 방향을 잡은 다음 수리적이고 논리적인 분석을 제시해야 합니다.

▶ 예시답안

사용한 다음 즉시 꺼지는 프린터와 전원이 계속 켜져 있는 프린터 사이에는 인쇄전력량이 동일하다. 그러므로 두 프린터 사이의 전력소모량을 비교하고자 한다면 예열전력량과 대기전력량을 살펴보면 된다.

예열전력량을 R, 시간당 대기전력량을 W, 프린터를 켜놓는 대기시간을 t라 하자. 사용 후 즉시 꺼지는 프린터는 다음번에 프린터를 사용하려고 할 때 R만큼의 전력을 소모한다. 전원이 계속 켜져 있는 프린터는 다음번에 프린터를 사용할 때까지 Wt만큼의 전력을 소모한다. 이때 $t < \frac{R}{W}$이면 $R > Wt$이므로 전원을 계속 켜 놓는 것이 전력소모가 적고, $t > \frac{R}{W}$이면 $R < Wt$이므로 전원을 껐다가 다시 켜는 것이 전력소모가 적다.

따라서 전력소모를 최소화하기 위해서는 사용 후 일정한 T시간($T < \frac{R}{W}$) 동안 켜져 있다가 꺼지도록 프린터를 설정한다.

이렇게 하면 사용 후 즉시 껐다가 다시 켤 때 소모되는 예열전력량을 절약할 수 있고, 오랫동안 켜 놓았을 때 불필요하게 소모되는 대기전력량의 낭비를 막을 수 있다.

단 이렇게 프린터를 설정하면 프린터를 사용할 때 대기시간이 T보다 커질 경우 전력소모가 오히려 늘어남을 고려해야 한다.

제주도에서 대학생 단편영화제가 열흘간 개최될 예정이다. 주최측은 전국의 대학생 영화감독을 초청해 각 영화마다 5회씩 시사회를 열 계획이다. 그 중 서울에 사는 5명의 대학생 영화감독이 시사회에 참석하기로 한 일정이 표에 ■로 표시돼 있다.

주최측이 제공하는 경비는 제주도에 머무는 기간 동안의 호텔숙박비와 서울-제주간 왕복항공료다.

주최측은 경비를 줄이기 위해 시사회가 없는 날 해당 대학생을 서울에 갔다 다시 돌아오게 하거나 제주도에 머무르게 할 수 있다.

주최측이 비용을 절감하기 위해서 영화제에 참석한 영화감독 5명의 체류 일정을 어떻게 결정해야 할지 호텔 숙박요금과 항공료를 고려해 논하라(2007학년도 이화여대 수시 1학기 예시문항).

영화감독 \ 행사일	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
감독 A	■	■	■			■	■			
감독 B				■	■	■		■	■	
감독 C			■	■				■	■	■
감독 D		■	■	■	■					■
감독 E		■		■	■	■				■

▶ 전문가 클리닉

1)번 문제와 본질적으로 같은 유형입니다. 그러나 많은 학생이 두 문제가 사실상 같다는 점을 잘 파악하지 못합니다. 그러므로 다양한 상황을 수리적으로 분석할 줄 아는 능력을 길러야 합니다.

▶ 예시답안

주최측이 제공할 항공료와 5일간의 숙박비는 체류일정과는 관련이 없다. 주최측이 비용을 절감하기 위해 판단해야 하는 점은 시사회가 없는 날 해당 대학생을 서울에 갔다 다시 돌아오게 할 것인가, 아니면 제주도에 머무르게 할 것인가이다.

서울-제주간 왕복항공료를 S라 하고 하루 호텔숙박비를 P, 각 감독의 시사회가 없는 연속된 날의 수를 n이라 할 때, $S<nP$, 즉 $n>\frac{S}{P}$이면 항공료가 싸므로 서울에 갔다 다시 돌아오게 하고, $S=nP$, 즉 $n=\frac{S}{P}$이면 비용이 동일하므로 해당 대학생이 스스로 선택하게 하고, $S>nP$, 즉 $n<\frac{S}{P}$이면 숙박비가 싸므로 제주도에 머무르게 하면 비용을 절감할 수 있다. 따라서 항공료와 숙박비를 조사한 다음 감독 A, B, C, D 각각의 시사회가 없는 날의 수에 대해 앞의 판단기준에 따라 체류일정을 정한다.

이때 감독 E는 3일째에도 시사회가 없고 7일부터 9일까지도 시사회가 없으므로 두 기간에 대해 각각 같은 기준으로 판단해 체류일정을 정하면 된다.

준기는 먼 도시에 살고 계신 할머니 댁을 방문했다. 준기가 집으로 돌아갈 때 기차를 타기 위해서는 할머니 댁으로부터 각각 2시간 거리에 있는 두 도시 A 또는 B의 기차역에서 출발해야 한다.

도시 A의 기차역과 도시 B의 기차역 사이의 거리는 120Km이고, 도시 B의 기차역과 준기네가 있는 목적지 C의 기차역 사이의 거리는 240Km이다. 목적지 C의 기차역에 서는 기차는 모두 도시 A에서 출발하며, 완행과 급행 두 종류의 열차가 운행되는 데, 두 종류 열차는 모두 같은 시각에 출발한다고 한다.

완행열차는 시간당 60Km의 속력으로 고시 A의 기차역을 출발해 도시 B의 기차역에 잠시 정차한 뒤 도시 C의 기차역으로 가고, 급행열차는 시간당 90Km의 속력으로 도시 A의 기차역으로 출발한 뒤 도시 B의 기차역을 거치되 정차하지 않고 바로 도시 C에 가서 정차한다. 준기는 할머니 댁을 출발해 가능한 빨리 집에 도착하려고 한다. 열차의 배차간격은 3시간이다. 준기가 도시 A의 기차역과 도시 B의 기차역 중 어디로 가서 무슨 열차를 타는 것이 좋을지를 알아보기 위해 고려해야 할 조건을 열거하고, 조건에 따른 최선의 선택이 무엇인지 설명하라. 또한 나머지 조건이 같고 배차간격만 달라질 경우 준기의 선택이 어떻게 변할지 논하라(2007학년도 이화여대 수시 1학기 예시문항).

▶ 전문가 클리닉

이화여대 수시 논술은 길지 않은 답변을 요구합니다. 예시답안은 이해를 돕기 위해 자세하게 작성했지만 실제로는 훨씬 간결하게 내용을 서술해야 합니다.

▶ 예시답안

우선 열차는 일정한 배차간격으로 24시간 운행된다고 가정한다. 도시 A의 기차역과 도시 B의 기차역 중 어디로 갈지를 결정할 때 고려해야 할 조건은 ▲준기가 출발하는 시간 ▲역에 도착하는 시간 ▲배차간격에 따라 열차가 출발하는 시간 ▲그 시간의 차이, 즉 기차역에서 기다리는 시간이다.

준기가 A역으로 간다면 빨리 집에 도착하고자 할 때 급행열차를 타야 한다. A역에서 출발하는 기차는 도시 C까지 가는 데 $\frac{120(\mathrm{Km})+240(\mathrm{Km})}{90(\mathrm{Km/h})}=4$시간이 걸린다.

만약 준기가 B역에 가서 완행열차를 타면 도시 C까지 가는 데 $\frac{240(\mathrm{Km})}{60(\mathrm{Km/h})}=4$시간이 걸린다.

준기가 할머니 댁을 출발해 도시 A의 기차역과 B의 기차역으로 가는 데 걸리는 시간은 2시간으로 같다. 그러므로 준기가 A역에 가서 급행열차를 타든지 B역에 가서 완행열차를 타든지 목적지 C까지 가는 데 걸리는 시간이 똑같다. 두 방법은 배차간격에 따라 각 역에서 열차를 기다리는 시간이 차이가 나므로 이를 단축시켜야 집에 빨리 도착할 수 있다.

도시 A를 출발한 완행열차는 두 시간 뒤 도시 B에 정차한다. 이때 도시 A에서 급행열차가 출발하는 시각을 a시라 하면, 도시 B에서 완행열차가 출발하는 시각은 정차시간을 무시할 때 $a+2$시다. 만약 준기가 도착하는 시간이 a시와 $a+2$시 사이라면 B역에서 완행열차를 타는 편이, $a+2$시와 $a+3$시 사이라면 A역에서 급행열차를 타는 편이 열차를 기다리는 시간을 단축할 수 있다.

각 역에 가는 데 걸리는 시간은 두 시간으로 같으므로 준기가 할머니 댁을 출발하는 시각이 열차가 A역에서 출발한 지 1시간에서 3시간 사이라면 B역에 가서 완행열차를 타는 편이 낫다. 반면 1시간이 지나지 않았다면 A역에 가서 급행열차를 타는 편이 낫다.

배차간격을 T라 할 때 T가 2시간 이상이라면 앞과 마찬가지로 판단한다. 즉 도시 A에서 급행열차가 출발하는 시각을 a시라 할 때, 준기가 도착하는 시각이 a시와 $a+2$시 사이라면 B역에 가서 완행열차를 타는 편이 빠르고 $a+2$시와 $a+T$시 사이라면 A역에 가서 급행열차를 타는 편이 빠르다.

한편 배차간격이 2시간의 약수라면 두 역에서 동일한 시간대에 각각 급행열차와 완행열차가 출발하므로 이때는 어느 역으로 가더라도 도시 C까지 가는 데 걸리는 시간이 같다.

그러나 배차간격 T가 2시간보다 작고 2시간의 약수가 아니라면 $nT<120<(n+1)T$ (단위는 분, n은 자연수)이다.

준기가 각 역에 도착하는 시각이 도시 A에서 열차가 떠난 지 0분에서 $(120-nT)$분 사이라면 B역에 가서 완행열차를 타는 편이 낫고, $(120-nT)$분에서 T분 사이라면 A역에 가서 급행열차를 타는 편이 낫다.

다음은 한 신문기사를 요약한 내용이다.

일본 전자업체의 움직임이 심상치 않다. 2000년대 들어 한국의 대표업체인 ○○전자에 짓밟혀 '전자왕국의 맏형'의 페면을 구겼던 일본 전자업체가 이제 칼날을 갈고 반격에 나서고 있다.

일본 전자업체들의 가격할인 공세에 시달리던 ○○전자는 지난해 말부터 비장의 무기를 준비했다. 그것은 바로 '디자인'이다.

○○전자의 기획팀에서는 젊은 소비층을 공략하기 위한 디자인을 갖춘 제품을 출시하기 위해 네 가지 모델 A, B, C, D를 시험적으로 준비해 소비자의 반응을 조사한 뒤 주력 상품을 결정하기로 했다. 이를 위해 예비 소비자 100명을 대상으로 선호도를 조사한 결과는 표와 같다.

제품 모델 A, B, C, D에 대한 선호도 조사 결과

선호도 \ 예비 소비자 수	30명	28명	17명	14명	11명
1위	A	C	A	B	D
2위	D	D	C	C	C
3위	B	A	D	D	A
4위	C	B	B	A	B

위의 선호도 조사 결과를 근거로 다음 질문에 답하라(2007학년도 서강대 수시 1학기).

1) 모델 A를 주력 상품으로 결정할 수 있는 타당한 이유를 제시하라.

2) 모델 A가 반드시 주력 상품이 될 필요가 없는 이유를 설명하고, 그렇다면 어떤 대안이 가능한지 서술하라.

3) 선호도 조사 결과를 바탕으로 회사의 주력상품을 결정하는 가능한 방법을 예로 들어 논하라.

▶ 전문가 클리닉

다양한 사람들의 의견을 어떻게 반영할 것인지를 묻는 문제입니다. 다수결에 의한 의사결정이 가져올 수 있는 한계를 파악한 뒤 대안을 모색하도록 요구하고 있습니다.

▶ 예시답안

1) 47명의 소비자가 선호도 1위로 A를 선택했다. 그에 비해 B, C, D를 선호도 1위로 여긴 사람의 수는 각각 14명, 28명, 11명이다.

사람들이 제품을 살 때는 가장 마음에 드는 물건을 하나 사므로 선호도 1위로 선택한 사람이 가장 많은 모델 A를 주력상품으로 결정하는 것이 바람직하다.

2) 모델 A를 1순위로 선호하는 사람이 47명으로 가장 많기는 하지만 그 외의 사람들은 모델 A에 대한 선호도가 낮은 편이다. 이는 모델 A의 상품성에 있어서 약점이 된다. 예를 들어 모델 A와 C 두 모델에 대한 사람들의 선호도를 비교해보자.

모델 A를 C보다 더 선호한 사람은 47명이다. 그런데 나머지 사람은 A보다 C 모델을 더 선호했다. 즉 두 가지 모델이 판매된다면 A보다 C가 더 많이 팔리게 된다. 따라서 두 가지 모델에 대해 어느 제품의 선호도가 더 높은지를 조사해 주력상품을 결정하는 방법이 있다.

3) 선호도 조사 결과를 바탕으로 주력상품을 결정하는 데는 여러 가지 방법이 있다. 먼저 선호도 1위로 가장 많이 선택된 제품을 주력상품으로 결정하는 방법이다. 이에 따르면 A가 주력상품으로 결정된다.

두 번째 방법은 두 모델씩 각각에 대해 선호도가 높은 모델을 조사해 최종 주력상품을 결

정짓는 방식이다. 즉 A와 B, A와 C, A와 D, B와 C, B와D, C와 D 각각에 대해 예비 소비자가 어떤 모델을 더 선호하는 지를 분석한다. 이런 방법에 따르면 선호도 사이에 A>B, C>A, D>A, C>B, D>B, C>D가 성립해 C가 주력상품으로 선정된다.

세 번째로 선호도를 점수화해 1위에 4점, 2위에 3점, 3위에 2점, 4위에 1점을 부여하고 총점을 계산해 주력상품을 결정짓는 방법이다. 이에 따르면 A는 280점, B는 172점, C는 268점, D는 280점이 돼 A와 D가 같은 점수를 받는다. 따라서 두 모델 가운데 하나를 주력상품으로 선택한다.

삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c**라 하고** $s=\dfrac{a+b+c}{2}$**라 할 때, 삼각형의 넓이** S**는** $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ **이다. 이를 증명하라.**

▶ 예시답안

$s=\dfrac{a+b+c}{2}$라 하면 코사인 제2법칙 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$에서 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$이므로

$$\begin{aligned}\sin^2 A &= 1-\cos^2 A=(1+\cos A)(1-\cos A)\\ &=\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\\ &=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}\cdot\frac{(a+b+c)(a-b+c)}{2bc}\\ &=\frac{2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c)}{4b^2c^2}\\ &=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}\end{aligned}$$

$$\therefore \sin A=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$$

따라서 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

2006년 12월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]만족도를 높이는 방법

주어진 예산으로 휴대전화, MP3플레이어, 전자수첩을 각각 하나씩 사고자 한다. 각 물품의 만족도는 가격이 상승함에 따라 증가한다고 가정하자. 다음 표는 휴대전화, MP3플레이어, 전자수첩의 가격별 만족도를 나타낸다. 90만원의 예산으로 총 만족도가 최대가 되도록 구매하고자 할 때, 구매할 물품들의 가격을 결정하는 방법을 설명하라.

<물품의 가격별 만족도>

물품 \ 가격	10만원	20만원	30만원	40만원	50만원
휴대전화	-	30	42	50	55
MP3플레이어	20	30	37	41	-
전자수첩	10	19	25	28	30

이 표와는 달리 각 물품의 단위가격 당 만족도 증가량이 일정한 경우를 생각해 보자. 단위가격 당 만족도는 휴대전화가 가장 많이 증가하고, 그 다음은 MP3플레이어, 전자수첩 순이다. 총 만족도가 최대가 되도록 하려면 임의의 주어진 예산으로 어떻게 물품들을 구매해야 하는지 설명하라(2007학년도 이화여대 수시 1학기).

▶ 전문가 클리닉

제한된 자원을 어떻게 활용해야 최대의 행복을 얻을 수 있는 가 하는 경제학의 주제를 수리분석적 문제로 단순화시킨 경우입니다.

문제를 출제한 대학에서는 만족도를 '경제에서의 효용과 동일한 개념'이라 설명했습니다. 즉 '단위가격 당 만족도의 변화가 제일 큰 물품에 단위비용을 지불해 최대 만족도를 얻는 방법을 찾도록 했다'는 것입니다.

▶ 예시답안

세 물품을 하나씩은 사야 하므로 휴대전화, MP3플레이어, 전자수첩에 최소한 각각 20, 10, 10만원씩 지출해야 한다. 이때 남는 50만원을 어떻게 지출해야 총 만족도가 최대가 되는 지 찾아야 한다. 50만원을 지출하는 것은 10만원을 다섯 번 지출하는 것으로 볼 수도 있는 데, 10만원씩 추가 지출할 때 어떤 물품에 지출하는 것이 만족도 증가량이 큰지를 판단한다.

예를 들어 휴대전화에 대한 지출을 20만원에서 30만원으로 늘리는 것이 MP3플레이어나 전자수첩에 대한 지출을 10만원 늘리는 것보다 만족도를 크게 증가시킨다.

마찬가지 원리로 만족도의 증가량이 큰 쪽으로 단위가격 10만원씩 지출을 늘려나가면 가격이 40만원인 휴대전화, 30만원인 MP3플레이어, 20만원인 전자수첩을 구매할 때 총 만족도는 최대값 106을 갖는다.

단위가격 당 만족도 증가량이 일정하고 그 크기가 휴대전화, MP3플레이어, 전자수첩 순인 경우도 이 같은 원리를 적용해 총 만족도가 최대가 되는 물품 구매 방법을 결정하면 된다. 즉 각 물품에 대한 최소지출 비용을 제외한 나머지 예산으로 단위가격 당 만족도의 증가량이 가장 큰 휴대전화를 가장 비싼 제품으로 구입하고, 남는 예산으로 가능한 비싼 MP3플레이어를 구입하며, 나머지 예산으로 가능한 비싼 전자수첩을 구입하면 총 만족도는 최대가 된다.

다음 제시문을 읽고 물음에 답하라(2007학년도 서강대 수시 1학기).

고대 그리스인은 어떤 숫자는 그보다 작은 숫자에 의해 나뉠 수 있는 반면에 다른 숫자들은 이런 특성이없다는 사실을 관찰했다. 자연수 중에서 1과 자신을 제외한 어떤 숫자로도 나뉠수 없는 숫자를 소수(소수)라 한다. 또한 소수가 아닌 자연수 중에서 1이 아닌 수를 합성수라 한다. 언뜻 생각하기에는 소수와 합성수의 구분이 아무런 의미가 없는 것처럼 보인다. 그러나 수학자들이 소수에 대해 더 많은 사실을 발견할 수록 그 중요성은 더 높이 평가되고 있다. **① 소수가 이처럼 중요한 이유 준 하나는 자연수에서 소수가 하는 역할이 화학에서 원자의 역할과 같기 때문이다.**

그렇다면 도대체 얼마나 많은 소수가 있는 것일까? 유클리드는 그의 저서 '기하학 원론'에서 소수 개수가 무한하다는 사실을 증면했다. 그의 증명을 간단히 서술하면 다음과 같다.

"유한 개의 소수만 존재한다고 가정하자. 이 유한 개의 소수들을 모두 곱한 값에 1을 더하면 그것 역시 소수이다. 그러나 이렇게 새로 생긴 소수는 처음에 가정한 유한한 소수 집합에 속하지 않는다. 그러므로 이는 소수가 유한하다는 가정과 모순된다."

어떤 자연수 N이 소수인지 여부를 검사하는 가장 확실한 방법은 소인수분해를 하는 것이다. **② 이를 위해서는 $\sqrt{N}$ 이하의 모든 소수들로 $\sqrt{N}$을 나눠야 한다. 이때 N이 실제로 소수일 때가 가장 큰 문제다.** 소인수분해를 사용해 소수인지 여부를 검사하는 방법은 $\sqrt{N}$이 아주 큰 수라면 최고 성능의 컴퓨터로 계싼한다고 하더라도 매우 큰 시간이 걸릴 수 있다. 그렇지만 수학자들은 소수의 패턴을 연구함으로써 여러 대안적 검사방법을 고안해냈다.

실제로 현재의 대형컴퓨터와 ARCLP와 같은 소수 검사방법을 사용하면 100자리에 이르는 소수 두 개를 쉽게 찾을 수 있다. 이 두 소수를 곱하면 200자리 수인 합성수 하나가 만들어진다. 그러나 반대로 이 200자리 숫자가 매우 큰 두 개의 소수 곱이라는 점을 알고 있고, 현재 가장 빠른 컴퓨터를 사용한다고 하더라도 이 정도 크기의 합성수를 소인수분해하는 일은 실질적으로 불가능하다고 한 만큼 오랜 시간이 걸린다.

한편 소수 검사가 가능한 수의 크기와 소인수분해가 가능한 수의 크기 사이에 있는 이 커다란 불균형을 이용해 수학자들은 '공유 열쇠'(public key) 암호체계를 고안했다.

곤충 매미는 식물의 조직 속에 알을 낳는 데, 우리나라에서 잘 알려진 유지매미와 참매미는 산란한 해부터 치면 7년째에 성충이 된다. 또 늦털매미는 5년째에 성충이 된다고 알려져 있다. 매미탑이라고 불리는 북아메리카에 사는 매미는 산란에서부터 성충이 되기까지 13년이 걸리는 종과 17년이 걸리는 종으로 나뉘고, 그 형태와 울음소리에도 차이가 있다는 사실이 확인됐다. 살펴본 것처럼 여러 종류의 매미가 산란에서 성충이 되기까지 걸리는 시간은 보통 5년, 7년, 13년, 17년이다. 이 같은 매미의 생활주기에서 발견할 수 있는 공통점은 주기가 모두 소수라는 점이다.

매미는 왜 하필 소수 주기의 삶을 살까 하는 의문에 대한 설명으로는 유력한 두 가지 학설이 있는 데, 한 가지는 소수 주기를 따르면 매미가 천적을 피하기 쉽다는 것이고, 또 다른 학설은 동종간의 경쟁을 피하기 위한 스스로의 조정이라는 것이다.

1) 밑줄 친 ①의 논리와 ②의 근거에 대해 각각 논술하라.

2) 소수 개수가 무한하다는 유클리드의 증명을 부연해 논술하라.

3) 매미가 소수를 주기로 생활하는 이유를 설명하는 두 가지 학설에 대해 각각의 근거와 예를 사용해 논술하라.

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 소수와 원자의 성질, 귀류법, 매미의 생활주기 등을 다룬 통합교과형 문제입니다.

▶ **예시답안**

1) ①의 논리 : 소수는 자기 자신과 1이외의 다른 자연수에 의해 나눠 떨어지지 않는다. 이 성질은 원자는 화학반응에 의해 쪼개지지 않는 물질의 최소입자라는 점과 유사하다. 또한 모든 자연수는 소수 또는 소수의 곱으로 표현된다. 이는 다른 종 또는 같은 종의 원자가 결합해 분자를 이루고 물질을 구성하는 것과 비슷하다. 이런 이유로 원소가 물질을 이루는 가장 기본적인 구성단위이듯 소수는 자연수의 가장 기본이 되는 수라 할 수 있다.

②의 근거 : $\sqrt{N}$이하의 모든 소수로 N을 나눴을 때 나눠떨어지지 않는다면 N은 소수다. 만약 $\sqrt{N}$ 이하의 모든 소수로 N을 나눴을 때 나눠떨어지지 않는 데, N은 소수가 아닌 합성수라고 하자. 그렇다면 N은 $\sqrt{N}$보다 큰 소수 두 개이상의 곱으로 표현돼야 한다.

그런데 $\sqrt{N}$보다 큰 소수 두 개 이상의 곱은 N보다 크다. 이는 모순이다. 따라서 $\sqrt{N}$ 이하의 모든 소수로 N을 나눴을 때나눠떨어지지 않는다면 N은 소수다. 이 방법을 이용하면 어떤 수가 소수인지 아닌지 간편하게 판단할 수 있으나 N이 매우 큰 수일 때는 계산이 복잡해진다.

2) 소수 개수는 무한하다. 만약 소수 개수가 유한하다고 하고 그 소수들을 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$이라 하자. 이때 이 모든 소수를 곱해 1을 더한 수를 P라 하자. 즉 $P=p_1p_2\cdots p_n+1$이라 하면 P는 소수가 아닌 합성수가 돼야 한다.

합성수는 소수의 곱으로 표현되므로 P는 소수로 나눠떨어져야 한다. 그런데 소수는 2보다 크거나 같은 자연수이므로 P는 소수 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$으로 나눴을 때 나머지가 1이 된다. 다시 말해 소수로 나눠 떨어지지 않는다.

이는 모순이므로 소수 개수는 유한하다 할 수 없다. 즉 소수 개수는 무한하다.

3) 생활주기가 소수가 되면 천적과 만나는 간격이 길어지고 천적을 피하기 쉬워진다. 만약 천적의 주기가 2년, 3년, 4년이라 하자. 매미의 생활주기가 6년이라면 매미와 천적이 만나는 주기는 각각 6년, 6년, 12년이다. 그런데 매미의 생활주기가 5년이라면 천적과 만나는 주기는 10년, 15년, 20년이다. 일반적으로 매미의 생활주기가 소수가 되면 천적의 생활주기와의 최소공배수가 더 커져 천적과 만나는 간격이 길어진다.

매미의 생활주기가 소수가 되면 동종간의 경쟁도 줄어든다. 여러 종의 매미가 출현하는 주기가 겹치면 매미들 사이에 먹이를 둘러싼 경쟁이 치열해질 것이므로 가능하면 여러 종의 매미가 동시에 출현하지 않도록 조정하는 것이 유리하다.

예를 들어 13년 매미와 17년 매미가 동일 지역에 살면 동시에 활동하는 시기는 221년마다 한 번씩 돌아온다. 만약 매미의 생활주기가 소수가 아닌 15년, 18년이라면 매미의 생활주기는 더 크지만 최소공배수는 90이어서 더 자주 만나 생존경쟁을 해야 한다.

함수 $f(x)=\dfrac{e^{3x}-3e^x}{e^{2x}-1}$ $(x>0)$일 때 다음 물음에 답하라.

1) 임의의 실수 a에 대해 $f(x)=a$를 만족하는 근이 $x>0$에서 유일하다는 것은 보여라.

2) $(0,\ \infty)$에서 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$ (단 $-\infty<x<\infty$)라고 할 때 $\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{9}{4}} g(x)dx$를 구하라.

▶ 전문가 클리닉

1)에서는 문제 의미를 정확히 파악하고 그것을 어떤 수학적 사실로 접근할 것인지 정해야 합니다. 2)는 역함수의 정적분 값을 구하는 방법을 이용해 접근해야 합니다. 이 문제는 정적분 과정이 쉽지 않아 다소 어렵게 느껴질 수 있습니다.

까다로운 문제들도 끈기를 가지고 연습을 꾸준히 해야 실력이 길러집니다.

▶ 예시답안

1) 모든 실수 a에 대해 $f(x)=a$를 만족하는 x값이 1개씩 존재하는 지를 증명하려면 이것이 주어진 구간에서 일대일대응이라는 점을 보이고, 또한 이 함수의 치역이 $(-\infty,\ \infty)$임을 보여야 합니다.

우선 이 함수의 분모와 분자의 모든 항은 미분 가능한 연속함수(지수함수와 상수함수)로 이뤄져 있습니다. 또 $x>0$인 구간에서는 분모가 0이 아니므로 불연속인 점도 없습니다.

그러므로 이 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 주어진 구간에서 항상 증가하거나 항상 감소하면 됩니다.

$f(x)$의 도함수를 구하면 $f'(x)=\dfrac{e^{5x}+3e^{x}}{(e^{2x}-1)^2}$이고 이것은 $x>0$에서 항상 양수입니다. 즉 이 함수는 x > 0에서 항상 증가하는 일대일대응 함수입니다. 한편

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \ \operatorname{Lim}_{x\to+0} f(x)=-\infty$$

이므로 치역은 $(-\infty,\ \infty)$입니다.

그러므로 모든 실수 a에 대해 $f(x)=a$를 만족하는 x값이 1개씩 존재합니다.

2) $f^{-1}(x)=g(x)$이고 증가함수이며 $f(a)=c,\ f(b)=d$일 때

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_c^d g(x)\,dx=bd-ac$$

여기서 $a,\ b,\ c,\ d$는 모두 양수입니다. 문제에서 $f(\ln 2)=\dfrac{2}{3},\ f(\ln 3)=\dfrac{9}{4}$이므로

$$\int_{\ln2}^{\ln3} f(x)\,dx+\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{9}{4}} g(x)\,dx=\frac{9}{4}\ln 3-\frac{2}{3}\ln 2\text{입니다.}$$

한편 $g(x)$는 그대로 적분하기에 쉽지 않으므로 부분분수 형태로 바꾼 뒤 적분합니다.

$$\int_{\ln2}^{\ln3} f(x)\,dx=\int_{\ln2}^{\ln3}\left(e^x-\frac{e^x}{e^x-1}+\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$$

$$=\left[e^x-\ln|e^x-1|+\ln|e^x+1|\right]_{\ln2}^{\ln3}$$

$$=(1-\ln2+\ln4-\ln3)=\ln\left(\frac{2}{3}e\right)$$

$$\therefore \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{9}{4}} g(x)\,dx=\frac{9}{4}\ln3-\frac{2}{3}\ln2-\ln\left(\frac{2}{3}e\right)$$

$$=\frac{13}{4}\ln3-\frac{5}{3}\ln2-1$$

함수 $f:[0,\ 3]\to[0,\ 2]$에 대해 적분값 $\int_0^3 |f(x)-\log_2(x+1)|dx$가 최대가 되는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리고, 이때의 최대값을 구하라. 단 함수 f가 연속함수일 필요는 없다.

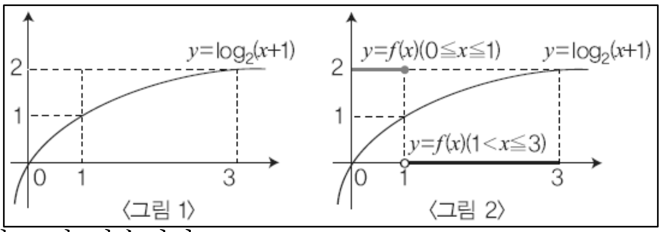
▶ 전문가 클리닉

이 문제의 핵심 개념은 2005학년도 포스텍 심층면접 기출문제와 유사합니다. 그래프를 이용해 정적분의 의미를 직관적으로 이해할 수 있다면 어렵지 않게 풀 수 있는 좋은 문제입니다.

▶ 예시답안

$|f(x)-\log_2(x+1)|$은 $f(x)$와 $\log_2(x+1)$의 차이를 나타내므로 그 차이가 가장 클 때

$$\int_0^3 |f(x)-\log_2(x+1)|dx$$



가 최대값을 가집니다. 그런데 $f(x)$는 $f:[0,\ 3]\to[0,\ 2]$이므로 함수 $f(x)$가 정의된 구간에서 $y=\log_2(x+1)$의 그래프를 그려보면 <그림1>과 같습니다.

$f(x)$와 $\log_2(x+1)$의 차이가 주어진 구간에서 가장 크려면 $f(x)$가 $[0,\ 1]$에서는 2를 가지고 $[1,\ 3]$에서는 0을 가져야 합니다. 이를 그래프로 그리면 <그림2>와 같습니다. 이때 최대값은

$$\int_0^1 \{2-\log_2(x+1)\}dx+\int_1^3 \log_2(x+1)dx$$

$$=2-\frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \ln(x+1)dx+\frac{1}{\ln 2}\int_1^3 \ln(x+1)dx$$

$$=2-\frac{1}{\ln 2}\left[(x+1)\ln(x+1)-(x+1)\right]_0^1+\frac{1}{\ln 2}\left[(x+1)\ln(x+1)-(x+1)\right]_1^3$$

$$=6-\frac{1}{\ln 2}$$

20007년 01월-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]무한의 신비

[제시문 가] 힐베르트는 무한대가 가지는 기묘한 성질을 잘 보여주는 하나의 예제를 만들어냈다. '힐베르트의 호텔'이라고 훌리는 이 유명한 예제 속 이야기는 힐베르트가 종업원으로 있는 가상의 호텔에서 시작된다.

이 호텔에는 무한 개의 객실이 있다. 어느 날 한 손님이 호텔로 찾아왔는데, 객실이 무한 개가 있음에도 불구하고 방마다 모두 투숙객이 들어 있어 빈방을 내줄 수가 없었다. 그런데 호텔 종업원인 힐베르트는 잠시 생각하던 끝에 새로 온 손님에게 빈방을 마련할 수 있노라고 호언장담을 했다.

그는 객실로 올라가 모든 투숙객들에게 정중하게 부탁을 했다. '죄송하지만 손님들께서는 옆방으로 한 칸씩만 이동해 주시기 바랍니다." 이해심많은 투숙객들은 힐베르트의 성가신 부탁을 발 들어 주었다. 1호실 손님은 2호실로, 2호실 손님은 3호실로…, 잠시 뒤 이동은 끝났다.

기존의 투숙객들은 모두 옆방으로 옮겨 갔으며, 자기 방을 못 찾아 헤매는 사람도 없었다. 그리고 새로 온 손님은 비어있는 1호실로 여유있게 들어갔다. 이것은 무한대에 1을 더해도 여전히 무한대임을 말해 주는 좋은 예제다.

그런데 다음날밤, 호텔에는 더욱 곤란한 문제가 발생했다. 투숙객이 방을 모두 차지하고 있는 상황에서 무한히 긴 기차를 타고 온 무한대의 손님들이 새로 도착한 것이다. 그런데 할베르트는 당황하기는 커녕, 무한대의 숙박료를 더 받을 수 있다며 혼자서 쾌재를 불렀다.

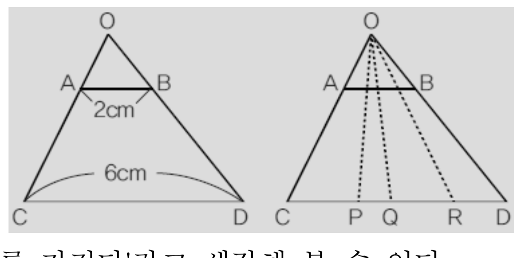
그는 곧 객실에 안내방송을 내보냈다."손님 여러분, 죄송하지만 현재 묵고 계신 객실 번호에 2를 곱하신 뒤 그 번호에 해당하는 객실로 모두 옮겨 주시기 바랍니다. 감사합니다."

이번에는 1호실 손님은 2호실로, 2호실 손님은 4호실로 움직이는 식으로 모두 이동을 마쳤다.

자기 방을 빼앗긴 손님이 하나도 없는데도 어느새 호텔에는 무한 개의 빈 객실리 생긴 것이다. 힐베르트의 재치 덕분에 새로 도착한 무한대의 손님들은 홀수 번호가 붙어있는 무한 개의 객실로 모두 배정돼 편히 쉴 수 있었다. 이 이야기는 무한대에 2를 곱해도 여전히 무한대임을 말해준다.

[제시문 나] 칸토어는 집합을 다음과 같이 정의했다.

"집합이란 직관 또는 사유로써 잘 구별할 수 있는 대상(이것을 집합의 요소라고 한다)을 하나의 전체로 묶어 놓은 것이다."



두 개의 무한집합 A와 B를 비교하기 위해서는 일단 A와 B의 원소들을 일대일대응시킨다. 그 다음 두 무한집합의 원소들 사이에 대응이 성립하면 A와 B는 같은 수라고 판단하는 것이다. 이 원리에 따르면 '자연수 전체의 집합과 그 일부분인 짝수 전체가 일대일대응이 된다. 즉 같은 개수를 가진다'라고 생각해 볼 수 있다.

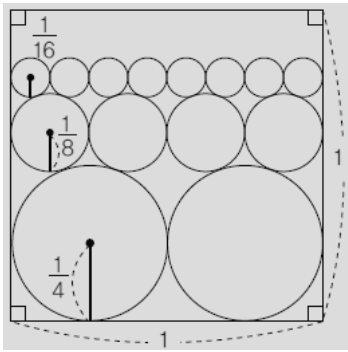
$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots\cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2, & 4, & 6, & 6, & \cdots\cdots \end{array}$$

한 가지 더 생각해 보자. 2cm짜리 선분 AB 위의 점 개수와 6cm짜리 선분 CD 위의 점 새수 중 어느 쪽이 더 많을까? 3배나 더 긴 선분 CD 위에 당연히 3배만큼 많은 점이 있다고 생각하기 쉽다.

그러나 각 선분의 양끝을 이은 반칙선 CA와 반칙선 DB가 만나는 점을 O라 하면 다음과 같이 두 선분 위의 점들 사이에도 일대일대응 관계가 성립한다. 이처럼 길이가 2cm이든 6cm이든 100cm이든 상관없이 모든 선분, 나아가 직선 위의 점의 개수(농도)는 모두 같다. 이것이 바로 칸토어가 밝혀낸 무한집합의 신비로운 성질 중 하나이다.

[제시문 다] 고대 그리스의 철학자 제논이 파르메니데스의 설을 지지하기 위해 다(多)와 운동의 존재를 인정하면 자기모순에 빠지게 된다는 사실을 귀류법으로 증명했다. '아킬레우스와 거북'을 예로 들면 아킬레우스는 거북을 앞지르기 못한다. 왜냐하면 그는 우선 거북이 출발한 지점에 도달해야 하지만 거북은 그때 이미 제2의 지점으로 전진했고, 그가 제2의 지점에 도달하면 거북은 벌써 제3의 지점에 도달해 있기 때문이다. 이런 일은 한없이 되풀이돼 아킬레우스는 거북을 앞지르지 못한다.

[제시문 라] 프랙탈이라는 용어는 '파편의', '부서진'이라는 뜻의 라틴어 'fractus'에서 유래했는데, 폴란드 태생 수학자 베노이트 만델브로트가 만들었다. 1975년에 소개된 이래 이 도형의 개념은 새로운 기하학 체계를 일으켜 수학뿐 아니라 물리, 화학, 생리학, 유체역학에 큰 영향을 끼쳤다. 모든 프랙탈이 자기유사성을 가지는 것은 아니지만 대부분은 이 특성을 나타낸다. 자기유사체란 자기유사성을 가지는 개체로 구성 부분이 전체와 닮은 것을 말한다. 자기유사체에서는 불규칙한 세부나 무늬가 더 작은 크기로 반복된다. 순수하게 추상적인 경우라면 세부가 무한히 계속 반복되므로, 각 부분을 확대하면 전체와 근본적으로 같다.



실제로 자기유사체는 크기를 바꿔도 변하지 않는다. 즉 크기에 대해 대칭을 이룬다. 프랙탈 현상은 눈송이와 나무껍질 같은 물체에서 쉽게 볼 수 있다. 수학적 프랙탈이나 이런 자연현상의 프랙탈은 통계적이나 임의적이다. 프랙탈을 응용한 다음과 같은 수학 문제가 있다.

변의 길이가 1인 정사각형에서 오른쪽 그림과 같이 원을 한없이 그릴 때 이 <u>원 넓이의 합과 원둘레의 길이 합을 생각해 보자.</u>

1) (가), (나)의 제시문을 참조해 유리수와 자연수가 일대일대응이 되는 것에 대해 자연수와 유리수를 어떤 방법으로 대응시켜야 모든 유리수를 자연수에 대응시킬 수 있는지 논하라.

2) (라)의 밑줄친 부분의 답을 생각해 보고 이를 이용해 (다)의 해결 방안에 대해 논하라.

▶ 전문가 클리닉

1) 서강대 수리논술 유형의 문제입니다. 이 문제는 자연수와 유리수를 일대일대응시키려면 어떤 방법이 가능한지에 대해 묻고 있습니다.

   유리수와 자연수를 일대일대응시키는 증명을 여러분 스스로 찾아보길 바랍니다. 그리고 예시답안에서 제시한 유명한 방법과 자신이 고안해낸 방법을 비교해 보세요. 중요한 점은 유리수를 빠짐없이 나열하는 방법이 선행되면, 언제든 유리수를 자연수와 일대일대응시킬 수 있다는 점입니다. 자연수는 순서수이니까요.

2) 극한의 개념을 이용한 제논의 역설이 가진 문제점을 극복한 예는 많습니다. 이 문제는 그 중 하나로서 프랙탈의 유한 속 무한성과 제논이 발표한 역설의 유사점을 찾아 그 논리적 모순을

끌어내는 논리력을 평가하는 문제입니다. 무한과 유한의 문제는 아직 완전히 풀렸다고 할 수 없습니다. 중요한 점은 여러분이 유한과 무한에 접근하는 과정과 그 과정의 논리성입니다.

▶ 예시답안

1) 유리수를 분모가 1인 것, 2인 것, 3인 것, …, n인 것의 방식으로 위에서부터 나열하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{4}{1},\ \cdots$$
$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{2},\ \cdots$$
$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{3},\ \cdots$$
$$\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4},\ \cdots$$

이렇게 하면 모든 양의 유리수를 빠짐없이 나열할 수 있다. 이제 나열된 유리수를 좌측 위의 부터 시작해

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$$

처럼 사선으로 지그재그로 번호를 붙여나가면 모든 유리수를 빠짐없이 셀 수 있다.

한편 이 방법에 추가로 0을 먼저 세고 다음에 양과 음의 유리수를 번갈아 센다면 유리수 전체를 자연수와 일대일대응시킬 수 있다.

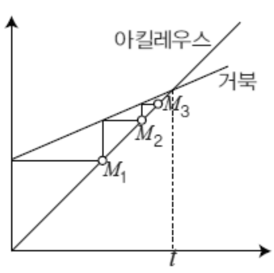
2) 우선 크기별 원의 반지름과 원의 개수를 표를 이용해 나타내면 다음과 같다.

반지름	개수	넓이의 합	둘레의 길이
$\frac{1}{4}$	2	$\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2\times 2=\frac{\pi}{8}$	$2\pi\left(\frac{1}{4}\right)\times 2=\pi$
$\frac{1}{8}$	4	$\pi\left(\frac{1}{8}\right)^2\times 2^2=\frac{\pi}{16}$	$2\pi\left(\frac{1}{8}\right)\times 2^2=\pi$
$\frac{1}{16}$	8	$\pi\left(\frac{1}{16}\right)^2\times 2^3=\frac{\pi}{32}$	$2\pi\left(\frac{1}{16}\right)\times 2^3=\pi$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{1}{2^{n+1}}$	2^n	$\pi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2\times 2^n=\frac{\pi}{2^{n+2}}$	$2\pi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\times 2^n=\pi$

따라서 전체 원의 넓이는 $S=\frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{4}$이고 전체 둘레의 길이는 $\lim_{n\to\infty}n\pi=\infty$이다.

즉 유한한 넓이 안에서 무한히 많은 도형의 넓이 합은 유한하고 그 둘레의 길이 합은 무한하다.

이처럼 유한 속에는 무한과 유한이 공존할 수 있다. 하지만 제논은 유한한 시간에서 일어나는 사건 속에서 무한을 찾아내 유한을 말하지 않고 무한만 강조해 서로 만나지 않는다는 역설을 만들어냈다. 이를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



한편 유한한 시간 t에 무한 점 $M_1, M_2, \cdots, M_n$이 존재한다. 제논은 이 무한한 점의 개수에만 집착하고 있다.

하지만 M_1 지점이 아킬레우스와 거북의 최초 거리 차 100m 지점이라 하고, 아킬레우스가 100m 지점에 도착하는 데 1분이 걸리고 그 1분 동안 거북이 10m를 갈 수 있다고 가정하면, 처음 100m에 도달했을 때 1분, 그 다음 10m에 도달하면 $\frac{1}{10}$분, 그 다음 1m에 도달하면 $\frac{1}{100}$분, …이 된다.

결국 이것이 무한히 계속된다면 걸린 시간의 합은 초항을 1, 공비를 $\frac{1}{10}$로 하는 무한 등비급수가 돼 그 합은 $\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}$이 되고 결국 $\frac{10}{9}$분 뒤에는 거북을 따라잡게 된다.

즉 어떤 위치의 차 $M_n - M_{n-1}$을 따라잡는 데 걸리는 시간이 실질적으로 0에 가까워지므로 위치가 같아지는 순간이 오게 된다.

$7n$개의 제비 중 당첨제비가 n개 있다.
1) 제비 7개를 뽑았을 때 1개만 당첨제비일 확률 P_n을 구하라.
2) $\lim_{n\to\infty} P_n$을 구하라.

▶ 전문가 클리닉

학생들에게 수학적 확률의 개념과 극한의 계산을 묻는 기본적 면접 문제입니다. 하지만 2)번은 풀이를 다르게 요구해 극한에서 확률 개념 변화를 물어보는 심층면접 문제로 출제될 수 있는 유형입니다.

▶ 예시답안

1) 총 $7n$개이므로 그 중 7개를 뽑는 경우의 수는 ${}_{7n}C_7$이고, 이 중 1개만 당첨제비이므로 나머지 6개는 '꽝'이어야 합니다. 이를 식으로 나타내면

$$P_n = \frac{{}_{6n}C_6 \cdot {}_nC_1}{{}_{7n}C_7} = \frac{6n(6n-1)(6n-2)\cdots(6n-5)\cdot n \cdot 7!}{6!\cdot 7n(7n-1)\cdots(7n-6)}$$

입니다.

2) $\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\frac{6n(6n-1)(6n-2)\cdots(6n-5)\cdot n\cdot 7!}{6!\cdot 7n(7n-1)\cdots(7n-6)} = \frac{6^6\cdot 7!}{7^7\cdot 6!} = \frac{6^6}{7^6} = \left(\frac{6}{7}\right)^6$

한편 이 문제에서는 제비의 총 개수가 무한하므로 (∵ n→∞)유한 개의 제비를 뽑아도 당첨제비와 꽝의 비율은 변하지 않는 것으로 봐도 무방합니다.

즉 독립시행이 돼 각각의 시행에서 꽝이 뽑힐 확률이 $\frac{6}{7}$이고 당첨제비가 뽑힐 확률이 $\frac{1}{7}$이라고 생각할 수 있어 꽝이 6번 뽑히고 당첨제비가 1번 뽑힐 확률은 독립시행의 확률에서처럼 ${}_7C_1\cdot\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^6$이라고 계산할 수도 있습니다.

양의 정수의 부분집합인 $X=\{1, 2, 3, \cdots, 80\}$에서 복소수의 부분집합인 $Y=\{a, b, c, d\}$로의 함수가 있다. a, b, c, d는 서로 다른 수이고 등비수열을 이룰 때 다음 물음에 답하라(2007학년도 건국대 수시1학기).

1) a+b+c+d=0일 때 Y집합을 구하라.

2) $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(80)=0$이라고 할 때 $\{f(1)\}^3+\{f(2)\}^3+\{f(3)\}^3+\cdots+\{f(1)\}^3$의 값을 구하라.

▶ 전문가 클리닉

복소수에 대한 개념은 '수학 10-가' 단원에서 배웁니다. 이에 덧붙여 7차 교육과정에서 빠진 복소평면의 개념에 대해 어느 정도 알고 있다면 더 다양한 풀이가 가능한 문제입니다.

▶ 예시답안

1) 원소들이 등비수열을 이루며 복소수 네 개의 합이 0이 되는 복소수 집합의 예로는 $\{i, -1, -i, 1\}$이 대표적이라고 할 수 있습니다.

서로 다른 네 수가 등비수열을 이루며 그 합이 0인 예는 이처럼 복소평면에서 원점을 기준으로 네 개의 복소수가 서로 90°씩 각을 이루고 있고, 절대값이 1이며 각 복소수가 축에 대해 서로 대칭인 경우뿐입니다.

2) $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(80)=0$이라 했으므로 80개의 함수값은 원점대칭인 복소수끼리 서로 짝을 이뤄야 합니다. 즉 1이 n개라면 -1도 n개, i가 m개라면 $-i$도 m개여야 하고 $n+m=40$ (단 n, m은 음이 아닌 정수)이어야 합니다.

한편 $1^3=1$, $(-1)^3=-1$이고 $i^3=-i$, $(-i)^3=i$이므로

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(80)=n\times(1)+n\times(-1)+m\times(i)+m\times(-i)=0$$

이라 할 수 있고, 이때

$$\{f(1)\}^3+\{f(2)\}^3+\cdots+\{f(1)\}^3=n\times(1)+n\times(-1)+m\times(-i)+m\times(i)=0$$

입니다. 원소들이 등비수열을 이루며 복소수 네 개의 합이 0이 되는 또 다른 예로는

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i,\ \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right\}$$

가 있습니다.

2007년 02월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]극한의 특성

다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

[제시문 가] 18세기 유럽 수학은 아이작 뉴턴과 고트프리트 라이프니츠가 미적분을 개발하면서 활기를 찾았다. 미적분의 다양한 활용 가능성에 매료된 수학자들은 그 기초에 대한 면밀한 탐문은 뒤로 한 채 미적분의 응용에만 힘을 기울였다.

미적분에는 무한 개념이 내포된다. 가령 구분구적법을 생각해 보면 전체 면적은 부분 면적을 무한히 더해 얻어진다. 이때문에 이적분을 연구할 때 무한급수가 많이 논의됐는데, 당시에는 극한에 대한 정확한 개념이 정착되지 않았기 때문에 무한급수의 합에 대해 많은 논쟁이 있었다. 그 중 1703년에 있었던 그랜디와 라이프니츠의 논쟁은 ① <u>나눗셈으로 얻어지는 급수</u>

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

에 관련된 것으로 두 사람은 각각 다음과 같은 주장을 펼쳤다.

그랜디의 주장 :

식 ②에 $x=1$을 대입하면

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+\cdots \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

을 얻을 수 있고, 이것은 다시

$$\frac{1}{2}=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

이므로 이것은 세계가 무에서 형성될 수 있음을 증명한 것이다.

라이프니츠의 주장 :

식 ③에서 $1-1+1-1+\cdots$의 합이 $\frac{1}{2}$이 되는 이유는 짝수 항까지의 합은 0, 홀수 항까지의 합은 1이므로 그 두 합의 평균값인 $\frac{1}{2}$이 그 결과로 나온 것이다.

[제시문 나] 장 달랑베르는 1754년 극한 이론이 필요하다는 사실을 지적하며 불완전한 해석학의 기초에 대한 실제적인 구제책을 처음으모 제시했다.

19세기에 이르러 어거스틴 코시는 극한 개념을 수학적으로 엄밀하게 정의했다. 그는 '어떤 변수의 값들과 어떤 수 사이의 차가 우리가 원하는 만큼 작아질 때 그 수는 극한이라 부른다'라고 정의했다. 이런 극한 개념은 칼 바이어슈트라스나 게오르그 리만에 의해 발전해 왔다.

1) **[제시문 가]에서 밑줄 친 ①에 의한 등식 ②의 성립여부를 논하고, 그 설명을 바탕으로 그**

랜디의 주장에 대해 논하라.

2) **문제1)에서와는 다른 방법으로 등식 ②의 성립조건에 대해 논하고, [제시문 나]에서 언급한 극한 개념을 이용해 라이프니츠의 주장에 대해 논하라.**

▶ 전문가 클리닉

수리논술에서 중요한 점은 문제에서 요구하는 사항에 충실하게 답하는 것입니다.

문제1)처럼 등식 ②를 밑줄 친 ①의 내용을 가지고 설명하라고 했을 때는 반드시 ①의 내용을 바탕으로 설명해야 합니다. 마찬가지로 문제2)에서는 제시문에 언급된 극한 개념을 이용해 라이프니츠의 주장에 대해 분석하고, 등식 ②를 문제1)과 다른 방향으로 해석해야만 올바른 답안이라고 볼 수 있습니다.

▶ 예시답안

1) 등식 ②가 나눗셈에 대한 급수가 되는지 판정하기 위해서는 $\frac{1}{1+x}$를 변형시켜보는 것이 편합니다. 즉

$$\frac{1}{1+x}=\frac{(1+x)-x}{1+x}=1-\frac{x}{1+x}$$

이고, 이는 다시

$$1-\frac{x}{1+x}=1-\frac{x(1+x)-x^2}{1+x}=1-x+\frac{x^2}{1+x}$$ 입니다.

이와 같은 과정을 계속하면

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-x)^{n-1}+\frac{(-x)^n}{1+x} \quad \cdots\cdots\cdots ⓐ$$

와 같습니다.

이러한 전개를 무한히 계속한다면

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

를 얻을 수도 있습니다.

하지만 이것은 식 ⓐ에서 알 수 있듯이 마지막 항 $\frac{(-x)^n}{1+x}$을 생략한 표현이라고 봐야 합니다. 그러므로 등식 ②는 $\lim_{n\to\infty}\frac{(-x)^n}{1+x}=0$일 때에만 등호가 성립하므로 항등식은 아닙니다.

한편 그랜디는 등식 ②에 $x=1$을 대입해 논리를 전개했습니다. 그러나 이 방법은 마지막 항 $\frac{(-x)^n}{1+x}$의 n→∞일 때 극한값이 0으로 수렴할 때만 성립하므로 이런 논리 전개는 의미가 없습니다.

즉 그랜디는 등식 ②가 $x=1$을 대입했을 때도 성립한다고 가정했지만 $x=1$일 때 마지막 항은 1/2(n이 짝수일 때), 또는−1/2(n이 홀수일 때)이므로 등식 ④는 다음과 같은 등식으로 고쳐야 합니다.

● n이 짝수일 때 $n=2k$이므로

$$\frac{1}{2}=(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\frac{(-1)^{2k}}{1+1}=0+0+\cdots+0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

● n이 홀수일 때 $n=2k+1$이므로

$$\frac{1}{2}=(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+1+\frac{(-1)^{2k+1}}{1+1}=0+0+\cdots+1+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

결과적으로 그랜디의 주장은 수학적 오류를 바탕으로 한 잘못된 주장입니다.

2) 먼저 무한급수를 이용해 등식 ②의 성립조건을 조사하면 다음과 같습니다. 등식 ②의 우변은 첫째항이 1이고 공비가 $-x$인 무한등비급수라 할 수 있으므로 그 값은

$$1-x+x^2-x^3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-x)^{k-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(-x)^n}{1+x}=\frac{1}{1+x}\ (\text{단 } -1<x<1)$$

입니다. 그러므로 x가 $-1<x<1$의 범위 내에 있을 때만 이 무한급수의 합이 존재해 등식 ②가 성립합니다. 특히 $x=1$일 때는 무한급수의 결과가 1과 0의 두 값을 진동하므로 급수의 합이 존재하지 않아 등식 ②가 성립하지 않습니다.

한편 [제시문 나]에서 코시는 '어떤 변수의 값들과 어떤 수 사이의 차가 우리가 원하는 만큼 작아질 때 그 수를 극한이라 부른다'고 극한을 정의했습니다. 이것은 우리가 알고자 하는 변화하는 값 f가 어떤 수 α와 한없이 가까워질 때 'α를 f의 극한이라 한다'는 사실을 의미합니다.

라이프니츠의 주장에서 그가 언급한 식 1−1+1−1+⋯의 값을 f라 하면 이 값은 어떤 특정한 하나의 값에 가까워지는 것이 아니라 0과 1을 계속 번갈아서 나타내므로 코시가 말한 극한값을 가질 수 없습니다. 따라서 [제시문 나]에서 나타난 극한 개념에 비추어 라이프니츠의

1−1+1−1+⋯=1/2

이라는 주장은 타당하지 않습니다.

다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

[제시문 가] A 산부인과에서는 하루 평균 5명의 산모가 아이를 낳고, B 산부인과에서는 하루 평균 50명의 산모가 아이를 낳는다고 한다. 어느 날 A 산부인과에서 태어난 5명의 아이 중 3명이 아들이었고, B 산부인과에서 태어난 52명의 아이 중 27명이 아들이었다.

[제시문 나] 고등학교 학생들의 수학과 영어 가운데 어느 과목을 더 좋아하는지 알아보기 위해 설문조사를 했다. A 과학고와 B 과학고 학생 300명을 조사한 결과, 영어보다 수학을 좋아하는 학생이 수학보다 영어를 좋아하는 학생보다 훨씬 많았다고 한다.

[제시문 다] 맛나 제과에서는 당사의 신제품 아이스크림 '아이조아'의 2007년 총 판매량을 예측하기 위해 당해연도 8월의 총판매량을 조사해 추정하기로 결정했다.

[제시문 라] 미국에서 이상한 일이 벌어졌다. 미국 대통령 선거에서 전례 없는 대접전을 보여 CNN을 포함한 미국 언론들은 양 후보의 득표현황을 고무줄처럼 줄였다 늘였다 해가며 개표기간 내내 우왕좌왕했다. 대통령 당선자를 발표했다가 번복하고 재검표가 진행되는 와중에 급기야 선거가 잘못됐다는 소송이 제기되기에 이른 것이다. 혼란에 빠진 독자들의 문의전화가 빗발쳤다. 질문은 제각각이었지만 독자들이 의아해하는 점은 똑같았다.

"미국 같은 나라에서 정보의 시대라는 21세기에, 도대체 어떻게 이런 일이 일어날 수 있는가?"

그러나 미국의 '이상한 대선'은 이번이 처음은 아니었다.

1936년 미국 대선에서 프랭클린 루즈벨트 현직 대통령과 공화당 후보로 지명된 알프레드 랜든이 경합을 벌일 때였다. 리터러리 다이제스트 잡지사는 전화번호부, 자동차등록부를 이용한 조사와 다이제스트 잡지구독자를 대상으로 한 선거 여론조사 결과 57%의 지지율로 랜든이 압승할 것이라고 예측했다. 다이제스트사의 예측은 1000만장의 설문지 중 회수된 240만 장(237만 523장)의 응답에 바탕을 뒀으므로 가히 사상 최대의 여론조사라고 할 만 했다.

그러나 'The American Institude of Public Opinions'라는 여론조사 기관을 설립해 각관받던 갤럽은 과학적 표본추출 방법에 바탕을 둔 여론조사 방법으로 이보다 훨씬 적은 표본으로 루즈벨트의 당선을 예측했다.

선거 결과는 루즈벨트가 62%, 랜든이 38%의 지지로 루즈벨트가 압승이었다. 다이제스트사의 조사결과는 선거 여론조사의 역사상 가장 크게 빗나간 조사였고, 결국 다이제스트 잡지사는 문을 닫고 말았다.

한편 1948년에는 민주당의 해리 트루먼 대통령이 공화당의 듀이 후보를 누르고 대통령에 선출됐다. 미국 언론들은 '듀이의 우세'라는 투표 전 갤럽의 여론조사 결과만 믿고 듀이의 승리를 전하는 기사를 내보냈다. 성거일인 11월 2일 저녁, 시카고 트리뷴지는 '듀이, 트루먼 물리치고 승리'라는 선정적인 제목을 1면 머리기사에 달았다. 그러나 결과는 트루먼의 압승이었다.

여러 언론기관은 이처럼 개표결과를 신중히 보도하지 않은 채 여론조사 결과만 믿고 듀이 후보의 승리를 선언했다가 곤경에 처했다. 그때부터 선거 여론조사는 출구조사가 중요한 위치를 차지하게 됐다.

1) [제시문 가]에서 나타난 결과를 보고 A병원에서 아들을 낳을 확률이 B병원보다 높다고 할 수 있겠는가?

   [제시문 나]에서 나타난 결과를 보고 우리나라의 고등학교 학생들은 영어보다 수학을 좋아한다고 할 수 있겠는가?

   [제시문 다]에서 구한 예측은 어느 정도로 정확할까?

   이에 대해 논거를 들어 자신의 의견을 말하고 세 가지 사례에서 파악할 수 있는 통계조사의 진실성에 대한 필요조건을 논하라.

2) [제시문 라]에서 1936년의 리터러리 다이제스트사와 1948년에 갤럽이 한 예측이 빗나간 이유를 문제1)에서 언급한 통계조사의 진실성과 관련해 논리적으로 추론하라.

▶ 전문가 클리닉

"세상에는 세 가지 거짓말이 있다. 선의의 거짓말, 새빨간 거짓말, 그리고 통계가 바로 그것이다."

지금 우리는 통계 없는 세상은 상상도 할 수 없을 만큼 많은 통계자료를 접하고 이용하며 살고 있습니다. 시간이 지날수록 통계의 역할은 더욱더 커질 것입니다. 그러므로 통계를 거짓말

이라고 제쳐놓는 것보다 어떻게 하면 통계의 의미를 정확하게 받아들일 수 있을지 올바르게 판단하는 능력을 기르는 편이 현명한 길입니다.

▶ 예시답안

1) 첫째로 [제시문 가]를 통해서는 A병원에서 아들을 낳을 확률이 B병원에서보다 높다고 할 수 없습니다. 그것은 B병원은 평균을 내기 위한 조사자료의 수가 52로 부족하기는 해도 어느 정도 만족할 만한 표본의 크기를 갖춘 데 반해 A병원의 조사자료의 수는 5로 모집단의 특성을 대표할 만한 표본 크기를 갖고 있지 않기 때문입니다.

   둘째로 [제시문 나]에서의 조사 결과로는 전체 고등학생의 성향을 올바로 판단할 수 없습니다. 조사대상 학교가 모두 과학고라 특정한 성향을 가질 수 있는 편중된 표본이기 때문입니다.

   셋째로 아이스크림은 제품의 특성상 계절별로 판매량의 차이가 큽니다. 그러므로 [제시문 다]처럼 우리나라에서 한 해 중 가장 더울 때인 8월의 판매량으로 한 해의 총 판매량을 예측한다면 '당해연도 8월의 판매량과 그 해의 총 판매량'에 대한 축적된 데이터가 없는 한, 예측된 총 판매량이 실제보다 과장되게 나타날 가능성이 크다고 볼 수 있습니다.

   마지막으로 주어진 세 제시문을 통해 추정할 수 있는 통계조사에서의 필요조건은 충분한 표본의 크기 확보와 모집단을 대표할 만한 대표성을 갖추기 위해 편중되지 않은 표본이 무작위로 추출돼야 한다는 점입니다. 또한 [제시문 라]에서 알 수 있듯이 조사 시기도 정확한 통계조사를 얻기 위한 필요조건이라 할 수 있습니다.

2) 리터러리 다이제스트사에서 시행한 조사의 문제점은 전화번호부, 자동차 등록부를 이용한 조사와 다이제스트 잡지구독자를 대상으로 한 선거 여론조사였다는 데 있습니다.

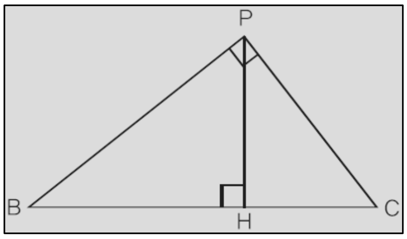
   1936년 당시 미국은 1929년 대공황의 여파가 그대로 남아 있었을 것이고 요즘처럼 전화나 자동차가 필수품은 아니었으리라 생각해볼 수 있습니다. 즉 전화와 자동차를 가지고 있고 잡지를 정기적으로 구독할 수 있는 사람은 어느 정도 부유한 계층으로 볼 수 있고, 더구나 그 잡지를 구독한다는 사실은 어느 정도 정치적 성향이 비슷하다고 볼 수 있습니다.

   한편 1948년 갤럽의 예측이 빗나간 이유는 조사 시기에 문제점이 있다고 추론해볼 수 있습니다. 갤럽의 조사가 투표 전에 이뤄졌고, 이 조사가 잘못된 예측을 불러온 사건 이후에 출구조사 형태가 중요한 위치를 차지한 것으로 미뤄 볼 때 선거 전 유권자들의 마음과 투표 당시의 선택이 변할 수도 있다고 추측됩니다. 즉 [제시문 다]와 같이 통계조사의 필요조건에서 '적절한 시기'가 결여된 예측이었기 때문에 오류가 발생했다고 추론할 수 있습니다. 다가오는 12월 대통령 선거에서 이런 사실을 확인해보기 바랍니다.

2007년 03월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]피타고라스 정리

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.



(가) 직각삼각형은 다음과 같은 성질을 가지고 있다.

첫째, 피타고라스 정리가 성립한다.

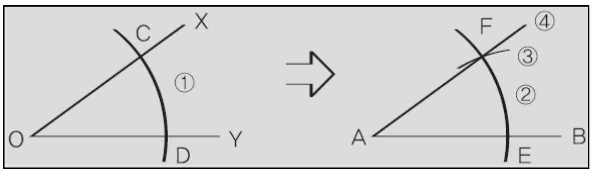
$\overline{BC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$

둘째, 닮음의 성질을 이용해 각 변의 길이에 대한 다음의 사실을 알 수 있다.

$\overline{PB}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$　　$\overline{PH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{CH}$

$\overline{PC}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{CB}$　　$\overline{PB} \cdot \overline{PC} = \overline{PH} \cdot \overline{BC}$

셋째, 빗변의 중심이 직각삼각형의 외심이 된다.



(나) 눈금이 없는 자와 컴퍼스만을 사용해 도형을 그리는 일을 '작도'라고 한다. 이때 자는 두 점을 연결해 선분을 연장하는데 사용하고, 컴퍼스는 원을 그리거나 주어진 크기의 선분을 다른 직선 위로 옮기는 데 사용한다.

예를 들어 주어진 ∠XOY와 크기가 같은 각을 반직선 AB를 한 변으로 해 다음과 같이 작도할 수 있다.

① 주어진 각의 꼭지점 O를 중심으로 적당한 반지름의 원을 그려 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$와의 교점을 각각 C, D라 한다.

② 점 A를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{OC}$인 원을 그려 $\overrightarrow{AB}$와 만나는 점을 E라고 한다.

③ 점 E를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{CD}$인 원을 그려 ②에서 생긴 원과의 교점을 F라고 한다.

④ 점 A와 F를 잇는 반직선을 그으면 구하는 각이 ∠FAE로 나온다.

(다) 고대 그리스 시대부터 내려온 세 가지 작도 문제가 있다. 오랫동안 많은 사람들이 풀이를 구하려고 했으나 성공하지 못했고, 19세기에 들어와서 세 가지 문제 모두 작도가 불가능하다는 사실이 증명됐다. 이 세 가지 문제는 다음과 같다.

- 주어진 각을 삼등분하는 문제
- 주어진 정육면체의 2배 부피를 가지는 정육면체를 작도하는 문제
- 주어진 원과 같은 넓이를 가지는 정사각형을 작도하는 문제

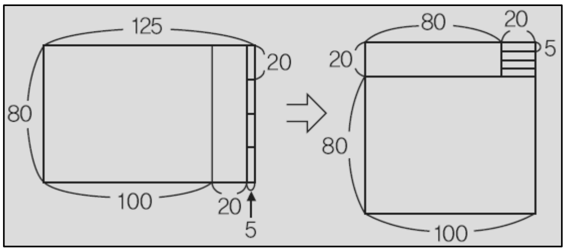
첫째, 주어진 각을 삼등분하는 문제에 대해 생각해 보자. 각의 삼등분 문제는 절대값이 1인 임의의 복소수의 삼중근을 구하는 문제와 같으므로 눈금없는 자와 컴퍼스를 이용해 작도할 수 없다.

둘째, 주어진 정육면체의 2배 부피를 가지는 정육면체를 작도하는 문제는 흔히 '델로스의 문제'라고도 부른다. 전설에 따르면 기원전 430년, 아테네 시민들이 전염병을 없애려면 어떻게 해야 하냐고 델로스의 아폴로신탁에 물었을 때 '제단을 두 배로 만들라'는 답을 들었다고 한다. 이에 아테네 시민들이 제단의 각 변을 두 배로 만들었는데도 전염병이 수그러들지 않았다. 왜냐하면 신탁의 답변은 제단 길이를 두 배로 늘리라는 것이 아니라 제단

의 부피를 두 배로 늘리라는 것이었기 때문이다. 그 이유는 ⓐ ________는 작도가능한 수가 아니므로, 이 문제는 눈금 없는 자와 컴퍼스로 해결할 수 없다.

셋째, 주어진 원과 같은 넓이를 가지는 정사각형을 작도하는 문제는 눈금 없는 자와 컴퍼스를 이용해서는 $1:\sqrt{\pi}$ 같은 비율을 만들 수 없기 때문에 이 문제는 해결이 불가능하다.

(라) 직사각형을 같은 넓이의 정사각형으로 잘라 붙이려고 한다. 예를 들어 80×250인 직사각형을 100×100인 정사각형으로 만드는 방법은 다음 그림과 같이 잘라 붙이는 방법이 있다.



1) [제시문 가]의 피타고라스 정리를 두 가지 이상의 방법으로 증명하고 수직이등분선의 작도 방법과 ⓐ에 대해 논하라.(ⓐ의 힌트 : '작도가능한 수'는 대수적 수의 일부다. 유리수에 루트와 사칙연산을 유한 번 작용한 것이 바로 작도가능한 수다. 특히 다항식을 이루는 가장 작은 치수의 항이 짝수 차수를 가져야 한다. 왜야 하면 작도는 본질적으로 일차식(직선)과 이차식(원)의 연립방정식 해를 찾는 과정이기 때문이다. 따라서 삼차식이나 오차식이 나오면 당연히 작도할 수 없다. 이것을 작도할 수 없다는 사실은 교과과정을 넘어서기 때문에 자세한 설명은 생략한다.

2) [제시문 다]의 주어진 원과 같은 넓이를 가지는 정사각형을 작도하는 문제는 불가능하지만 직사각형과 같은 넓이를 가지는 정사각형은 작도할 수 있다. [제시문 라]와 같은 방법으로 직사각형과 같은 넓이를 가지는 정사각형을 만드는 방법도 있지만 작도를 이용하는 방법도 있다. 이 방법에 대하여 논하라. 만약 컴퍼스가 없다면 어떤 방법을 사용해야 하는가?

▶ 전문가 클리닉

대다수의 학생이 알고 있는 피타고라스 정리의 증명을 요구하는 문제입니다. 많은 학생이 증명방법을 배워서 알고 있다고 생각하나 실제로 쓰라고 하면 그리쉽지만은 않을 것입니다. 또한 여러 증명법에 대해 물어보면 당황하는 경우도 있습니다. 교과서에 나오는 증명법을 꼭 한 번씩 증명해 보십시오.

여기서는 세 가지 증명법을 제시하며 이 밖에도 다양한 증명법이 있습니다. 더불어 이번 기회에 작도법에 대해 정리해두기 바랍니다.

▶ 예시답안

1) 피타고라스 정리를 증명하는 방법에는 유클리드 증명법과 피타고라스 증명법이 대표적이며, 그 밖에 야니의 증명법이 있습니다.

● 유클리드의 증명

<그림1>과 같이 ∠C=90°인 직각삼각형 ABC에 대해 세 변의 길이를 각각 한 변의 길이로 하는 정사각형 ADEB, ACHI, BFGC를 그립니다.

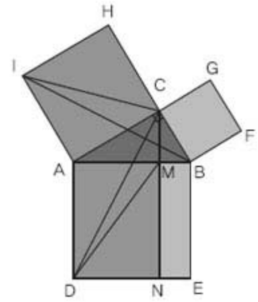
점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 M, 그 연장선과 변 DE가 만나는 점을 N이라고 합니다.

이때

$ACHI = 2\triangle ACI$ …… ①

또 밑변의 길이와 높이가 각각 같으므로

$\triangle ACI = \triangle ABI$ …… ②



〈그림 1〉 유클리드의 증명

두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 각각 같으므로

$\triangle ABI \equiv \triangle ADC$ …… ③

밑변의 길이와 높이가 각각 같으므로

$\triangle ADC = \triangle ADM$ …… ④

또 $\square ADNM = 2\triangle ADM$ …… ⑤

①, ②, ③, ④, ⑤에서

$ACHI = \square ADNM$ …… ⑥

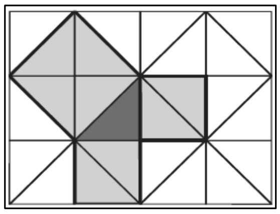
같은 방법으로

$BFGC = \square MNEB$ …… ⑦

⑥, ⑦에서 $\square ADEB = \square ACHI + \square BFGC$

$\therefore\ \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$

● 피타고라스의 증명



피타고라스는 당시 사원의 보도블록을 보고 이 정리의 힌트를 얻었다고 합니다. 어둡게 칠해진 직각삼각형의 주위를 유심히 보면, 빗변 위에 그려진 정사각형에는 보도블록 4개가 들어가고 다른 변 위에 그려진 정사각형에는 각각 2개씩 들어갑니다. 이것은 직각이등변 삼각형의 경우이지만 피타고라스는 이것을 더욱 일반화해 일반적인 직각삼각형의 경우까지 적용한 것으로 추측됩니다.

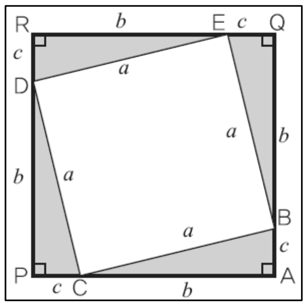
<그림2>에서 $\triangle ABC \equiv \triangle QEB \equiv \triangle RDE \equiv \triangle PCD$이므로 $\square BEDC$는 정사각형입니다.

$\therefore\ \square AQRP = \square BEDC + 4\triangle ABC$

$$(b+c)^2 = a^2 + 4\times\frac{bc}{2}$$

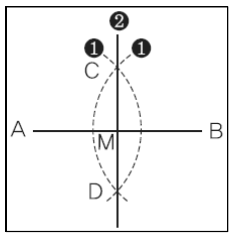
$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$$

$$\therefore\ b^2 + c^2 = a^2$$



<그림2> 피타고라스의 증명

● 야니의 증명

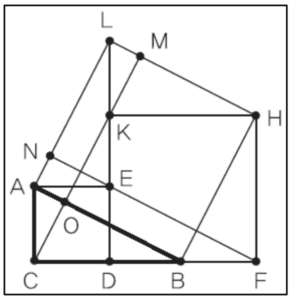


야니의 증명은 슬라이딩법(미끄러지기)를 이용했습니다. <그림3>에서

$\square LMQA = \square LKCA = \square ACDE = \overline{AC}^2$

$\square HMOB = \square HKCB = \square HKDF = \overline{BC}^2$

$\therefore\ \overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\square LMOA+\square HMOB=\square HLAB=AB^2$



<그림3> 야니의 증명

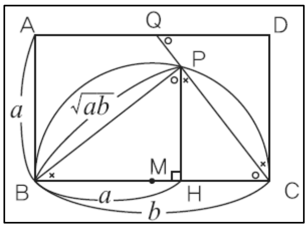
1)번 문제의 수직이등분선의 작도법은 다음과 같이 두 단계로 설명할 수 있습니다.

① 점 A, B를 각각 중심으로 해 같은 크기의 원을 두 점에서 만나도록 그린 뒤 이 원들이 만난 점을 C, D라고 합니다.

② 두 점 C, D를 지나는 직선을 그으면 직선 CD는 $\overline{AB}$의 수직이등분선입니다.

이제 ⓐ의 이유를 살펴보면 다음과 같습니다. 원래 정육면체의 부피를 V라고 한다면 ($a^3=V$), $2V$의 부피를 가지는 정육면체는 원래 정육면체보다 변의 길이가 $\sqrt[3]{2}$배가 돼야 합니다($x^3=2V=2a^3$에서 $x=\sqrt[3]{2}a$). $\sqrt[3]{2}$는 작도가능한 수가 아니므로 이 문제는 눈금없는 자와 컴퍼스로 해결할 수 없습니다.

2) 주어진 직사각형과 같은 넓이를 가지는 정사각형은 다음의 방법으로 작도합니다.



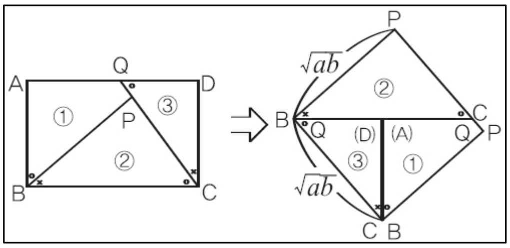
<그림4>

① 직사각형 ABCD에서 $\overline{AB}$와 같은 길이가 되게 $\overline{BC}$ 위에 점 H를 잡습니다.

② 점 H에서 $\overline{BC}$에 수선을 긋습니다.

③ $\overline{BC}$의 중점 (M)을 작도합니다(수직이등분선의 작도법 이용).

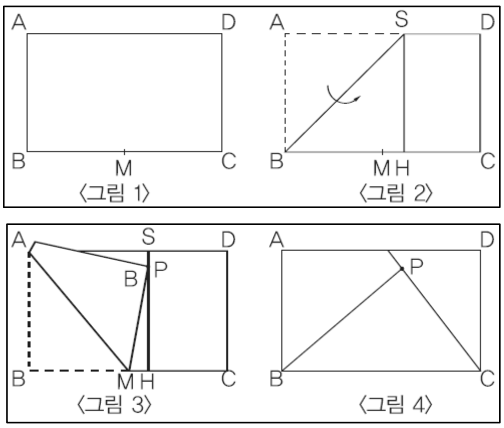
④ M을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{b}{2}$인 원을 그린 뒤 ②의 직선과 만나는 점 P를 찾습니다(직각삼각형의 외심은 빗변의 중심이라는 성질을 이용).



<그림5>

⑤ C와 P를 연결해 $\overline{AD}$와의 교점을 Q라 합니다. 이 방법으로 작도하면 <그림 4>를 얻을 수 있습니다. 이것을 <그림 5>와 같이 잘라 붙이면 정사각형이 만들어집니다.

컴퍼스가 없을 때 주어진 직사각형과 같은 크기의 정사각형을 만드는 방법은 다음과 같습니다.



① B를 C에 포개 접어서 $\overline{BC}$의 중점 M을 찾습니다.

② A를 변 BC에 포개지도록 접고 A의 포개진 점 H를 찾습니다.

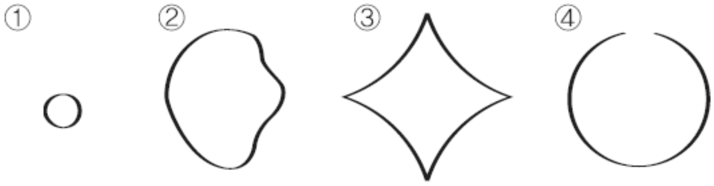
③ $\overline{HC}$와 $\overline{HB}$가 같은 선 위에 있도록 접어 $\overline{HS}$를 찾습니다.

④ M을 중심으로 해서 B가 $\overline{HS}$ 위에 오도록 $\overline{MB}$를 접어서 B의 포개진 점 P를 찾습니다.

⑤ B와 P를 연결해 $\overline{BP}$를 얻습니다.

⑥ C와 P를 연결해 나머지 선분을 얻습니다.

다음 중에서 나머지 하나와 다른 그림을 찾고 그 이유를 설명하라.



▶ 전문가 클리닉

학생들은 수학이 하나의 답을 정형화된 풀이에 의해 찾는 과목이라고 생각하는 경향이 있습니다. 그래서 단순히 풀이법을 암기하는 방식이 수학공부라고 생각합니다.

칸토어는 '수학의 본질은 자유에 있다'라는 말을 남겼습니다. 수학은 사고의 자유를 진리의 가장 소중한 원천으로 생각합니다.

이 문제의 답이 하나라는 생각은 사고의 자유를 막는 일입니다. 이 문제는 기준에 따라 여러 답이 나올수 있는 문제입니다. 다양한 관점에서 문제를 풀어봅시다.

▶ 예시답안

이 문제는 관점에 따라 답이 달라질 수 있습니다.

①번 그림이 답이 되는 경우는 크기를 분류의 기준으로 사용할 때입니다. 왜냐하면 이 도형은 다른 도형보다 상대적으로 작기 때문입니다.

②번 그림이 답이 될 수 있는 경우는 대칭성(선대칭 또는 점대칭)을 기준으로 하거나 원호를 만들 수 있는가를 기준으로 할 때입니다.

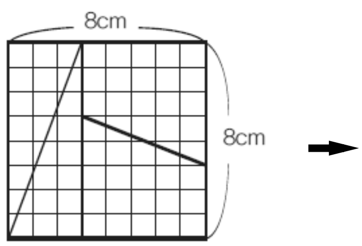
③번 그림이 답이 되는 경우는 뾰족한 부분이 존재하는가 여부를 기준으로 할 때입니다.

④번 그림이 답이 되는 경우는 폐곡선인가 여부를 기준으로 삼을 때입니다. 이것은 임의의 영역을 두 개로 나눌 수 있는가를 기준으로 삼은 것과 같습니다.

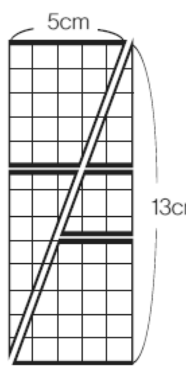
이와 같이 어떤 기준을 가지고 문제에 접근하느냐에 따라 같은 문제라도 답이 여러 개 나올 수 있습니다.

반짝 퀴즈

한 변이 8cm인 정사각형을 오른쪽 그림과 같이 네 조각으로 잘라서 그 위치를 바꿔 5cm×13cm인 직사각형을 만들었다. 이때 오른쪽 직사각형의 넓이는 $5\times13=65\text{cm}^2$이다. 어떻게 1cm^2이 늘어난 것일까?



<그림1>



<그림2>

2007년 05월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]코끼리 수의 변화

다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 밀렵꾼 탓에 코끼리의 수가 줄어드는 현상을 염려해 설정한 코끼리보호구역에서 있었던 일입니다. 우리가 코끼리를 보호하기 시작한 지 얼마 지나지 않아 코끼리의 수는 엄청나게 불어났습니다.

상황이 이렇게 되자 이번에는 다른 문제가 생겼습니다. 무리를 지어 다니는 코끼리가 그 지역의 식물을 모조리 파괴하기 시닥한 것입니다. 코끼리 무리가 지나가고 나면 마치 탱크 군단이 지나간 것처럼 숲이 파괴됐습니다.

예를 들어 지난 수만 년 동안 비오밥나무는 건기에 코끼리들에게 먹이와 물을 공급하는 역할을 해왔습니다. 코끼리들은 어금니를 비오밥나무 줄기 속에 박아넣어 껍질을 벗겨내고, 수분이 있는 펄프를 꺼내 먹지요. 그런데 코끼리의 수가 급격하게 늘자 보호구역 내에 서식하는 비오밥나무가 차츰 사라졌습니다. 숲 속의 다른 나무들도 마찬가지였습니다.

그러자 동료들 사이에서 코끼리를 쏴 죽여 개체 수를 줄여야 한다는 주장이 나오기 시작했습니다. 그래야만 코끼리와 그들의 먹이 사이에 균형이 잡히고 결과적으로는 코끼리들에게도 도움이 된다는 것입니다.

그 말에 일리가 있다고 생각한 우리는 그동안 한 번도 해보지 않았던 코끼리 추려내기를 시작했습니다. 그 결과 단시일내에 수백 마리의 코끼리가 몰살됐습니다.

하지만 우리는 생각을 바꿔 그 일을 일단 중단했습니다. 설사 코끼리가 그들의 먹이를 모두 소비해 언젠가는 굶어죽는 한이 있더라도 그때까지는 그냥 내버려두기로 했던 것입니다. 어찌 보면 무책임해 보이기도 했지만, 이런 결정이 현명했다는 사실은 얼마 지나지 않아 밝혀졌습니다.

그 뒤 일 년도 지나지 않아 혹독한 가뭄이 그 지역을 휩쓸었기 때문입니다.

평원과 숲은 바싹 타들어가 푸른 잎이 모두 사라져 버렸습니다. 굶주린 코끼리들은 나무를 통째로 먹어치우며 견뎠지만, 그 가뭄 때문에 최소한 1만 마리의 코끼리가 사라졌습니다.

사람들이 직접 관여하지 않아도 자연이 스스로 코끼리를 추려낸 셈입니다. 그 뒤 코끼리들이 파괴한 삼림은 얼룩말이나 영양 같은 다른 동물의 새로운 서식지가 된다는 사실도 밝혀졌습니다.

(나) 제시문 (가)에 나타난 코끼리 개체 수의 변화 양상을 이해하기 위해 한 연구자가 다음과 같이 두 가지 조건을 가정하고 설명 모형을 만들었다.

- 먹이가 풍부하고 코끼리 개체 수가 극히 적은 이상적인 상황에서는 코끼리 개체 수가 매년 50%로 늘어난다.
- 코끼리 개체 수가 지나치게 많으면 다음 해에는 굶어죽어 개체 수가 오히려 줄어들고, 극단적으로 개체 수가 20000이면 그 다음 해에는 코끼리가 모두 죽는다.

일반적으로 생태계에서 어떤 종의 개체 수 변화를 연구할 때 포물선 평태가 활용된다. 이 연구자는 이 점에 착안해 앞의 두 조건을 모두 반영하는 간단한 설명 모형으로 $y=rx\left(1-\dfrac{x}{20000}\right)$형태의 포물선을 제시했다. 여기서 x는 어떤 해의 코끼리 개체 수를, y는 그 다음 해의 코끼리 개체 수를, r은 개체 수 증가비율과 관계된 상수를 의미한다.

제시문 (나)에 제시된 포물선 모형이 두 조건을 모두 잘 반영하고 있는지 검토하라. 그리고 어떤 해에 코끼리 1만6000마리가 있었다면 해가 지남에 따라 코끼리 수가 궁극적으로 어떻게 변할지 설명하고, 제시문 (가)에서 '코끼리가 굶어 죽더라도 그냥 내버려 두기로 한 결정'의 타당성을 평가하라.

▶ 전문가 클리닉

이 문제를 통해 제시된 모형을 그대로 수용하지 않고 유효성을 검증하는 연습과 근거를 들어 주어진 관점을 평가하는 연습을 해보기 바랍니다. 자연계 학생이라면 이처럼 어떤 현상을 접했을 때 수학적 지식이 필요없는 간단한 모형을 설정하고 논리적인 추론을 해 현상을 이해하는 능력이 꼭 필요합니다.

▶ 예시답안

초기의 코끼리 개체 수를 A라 하고 매년 코끼리의 소멸률을 P라 가정하자.

매년 코끼리 개체 수의 증가율은 50%이므로 다음 해의 코끼리 개체 수는 $A+0.5A-PA=A(1.5-P)=A\left(1.5-\frac{P}{A}A\right)=1.5A\left(1-\frac{P}{1.5A}A\right)$이다. 이때 $\frac{P}{1.5A}$를 k라 하고 어떤 해의 개체 수를 A_n, 다음 해의 개체 수를 A_{n+1}이라 하면

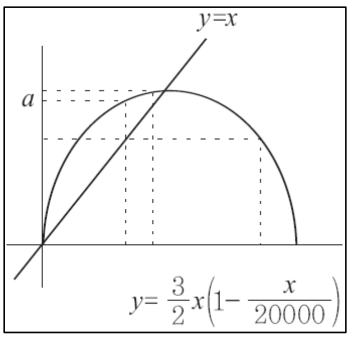
$$A_{n+1}=\frac{3}{2}A_n(1-kA_n)$$

을 얻을 수 있다.

이제 $kA_n \approx X_n$이라 하면 $X_{n+1}=\frac{3}{2}X_n(1-X_n)$이 돼 $y=rx\left(1-\frac{x}{20000}\right)$ 꼴을 얻을 수 있다.

$\lim_{n\to\infty}X_{n+1}=\lim_{n\to\infty}X_n$이므로 그 값을 α라 하면 $\alpha=\frac{3}{2}\alpha(1-\alpha)$이므로 $\alpha=0$ 또는 $\alpha=\frac{1}{3}$이다. 따라서 주어진 식 $y=rx(1-\frac{x}{20000})$에서 $r=\frac{3}{2}$이고 코끼리 수는 $x=\frac{1}{3}A$인 지점에서 수렴한다.

x가 매우 작을 때 $\frac{x}{20000}$도 매우 작으므로 이 식은 대략 $x=rx$이다. 또한 $r=\frac{3}{2}=1.5$이므로 첫 번째 조건을 잘 반영하고 있다.

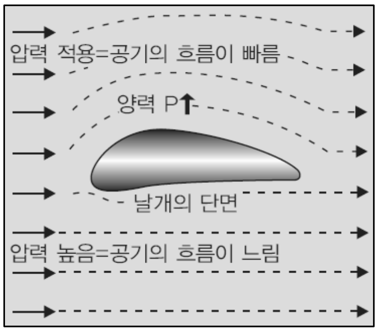


한편 x가 20000에 가까울 수록 $1-\frac{x}{20000}$는 0에 수렴하고 y의 변화량은 작아진다. 따라서 이 식은 두 번째 조건 역시 잘 반영하고 있다.

어떤 해에 코끼리가 1만6000마리라면 주어진 식에서 x가 $\frac{16000}{3}$으로 수렴하고 y도 일정한 값 a로 수렴한다. 0~2만 마리의 범위 내에서 코끼리의 개체 수는 결국 a로 수렴하므로 코끼리가 굶어 죽더라도 그냥 내버려 두기로 한 결정은 타당하다.

다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

베르누이 정리란 '유체의 흐름이 있을 때 속도가 빠른 곳일수록 압력이 낮아진다'라는 내용이다. 이 정리를 이용하면 비행기가 하늘을 나는 이유를 간단히 설명할 수 있다. 이 정리를 이용하면 비행기가 하늘을 나는 이유를 간단히 설명할 수 있다. 우측 그림을 보면 날개 위쪽의 압력이 적어 날개가 양력 P를 받음을 알 수 있다. 이 양력 P가 중력에 대항해 비행기를 공중에 띄우는 역할을 한다.



비행기와 비슷한 동체에는 헬리콥터가 있다. 많은 사람이 학생용 고무동력 글라이더처럼 헬리콥터도 선충기가 바람을 밀어내듯 강하게 프로펠러를 회전시키면서 바람을 밀어내는 힘만으로 공중에 부양한다고 잘못 알고 있다. 하지만 실제로 공붕으로 부양하는 데 주로 작용하는 힘은 비행기 날개처럼 유선형을 이루는 헬리콥터의 날개에 작용하는 양력이다.

회전하는 헬리콥터의 날개에는 양력과 원심력이 발생한다. 헬리콥터의 날개가 회전할 때 양력은 회전날개에 대해 수직 방향으로 작용하고, 원심력은 회전축에 수직 방향으로 작용한다. 또 본체의 대형 프로펠러에 달려 있는 피스톤은 날개의 각도를 조절해 진행방향과 속도를 제어할 수 있도록 해준다.

즉 회전하는 헬리콥터의 날개에는 원심력과 양력이 발생하는데, 양력과 원심력의 합력이 바로 헬리콥터를 들어 올리는 힘이다. 이 힘이 중력보다 크면 헬리콥터는 뜰 수 있다. 양력이 두 배일 때 헬리콥터는 뜰 수 있다. 양력이 두 배일 때 원심력은 네 배라고 한다.


정지시 날개가 아래로 처짐 비행시 날개가 위로 올라감 비행하는 모습

우측 그림은 각각 헬리콥터가 정지했을 때와 비행을 시작할 때, 그리고 방향을 바꿀 때 날개 모양을 나타내고 있다.

1) **벡터의 합성을 이용해 헬리콥터가 공중으로 떠오르는 원리를 부연해 설명하라.**

2) **헬리콥터에 작용하는 중력이 10N이라고 가정할 때 헬리콥터를 공중에 띄우기 위해 필요한 한쪽 날개의 양력 값을 추정하라.**

▶ 전문가 클리닉

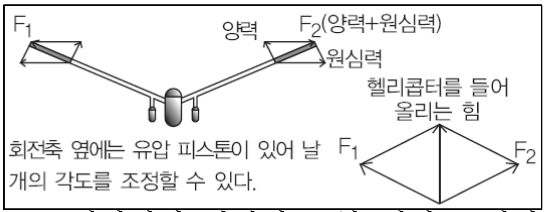
1)번은 학생들이 비교적 쉽다고 느끼는 유형으로, 벡터의 덧셈과 힘의 합성을 이용해 푸는 문제입니다. 최근 자연계 통합논술은 과학과 수학을 이용해 일상생활에 적용하는 내용을 주로 다루므로 교과서를 기본으로 해 자신의 생각을 자유롭게 펼치는 연습을 해보기 바랍니다.

2)번은 1)번에서 힘을 합성해 한쪽 날개의 힘을 구하고, 또 제시문을 바탕으로 양력과 원심력의 비율을 정해 다른 한쪽 날개의 힘을 구하는 것이 핵심입니다. 이를 통해 양쪽 날개가 받는 힘을 합성해 헬리콥터를 공중에 띄우는 데 필요한 힘을 추정하는 문제입니다.

▶ 예시답안

1) 회전하는 헬리콥터의 날개에는 양력과 원심력이 발생한다. 원심력과 양력의 합 벡터를 구해 각 날개가 받는 힘을 정한다. 다음으로 한쪽 날개가 받는 힘을→F1이라 하고 다른 쪽 날개가 받는 힘을→F2라고 해 합 벡터→F1+→F2를 구하면 이것이 곧 헬리콥터를 들어 올리는 힘이다. 즉 헬리콥터를 들어 올리는 힘은 양력과 원심력의 합이다.

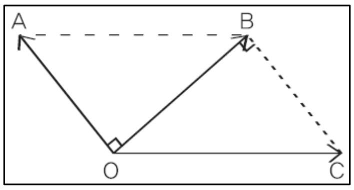
아무리 헬리콥터가 무거워도 날개가 빠른 속도로 회전하면 작용-반작용의 원리에 의해 헬리콥터가 회전하려는 힘이 생긴다.



이런 이유로 종종 헬리콥터의 뒷부분에 프로펠러를 추가로 장착하기도 한다. 헬리콥터의 뒷부분에 달린 프로펠러에서 형성되는 합 벡터는 헬리콥터가 회전하는 현상을 막아준다.

헬리콥터가 뜨는 힘과 중력의 합력을 조정하면 진행방향도 조정할 수 있다.

2) 양력이 두 배일 때 원심력은 네 배가 된다. 이런 사실을 바탕으로 양력과 원심력의 비를 $k:2k$라고 가정한다. 양력은 헬리콥터의 날개에 수직으로 작용한다는 점을 이용하여 양력을 $\overrightarrow{OA}$라 하고, 한쪽 날개가 받는 힘을 $\overrightarrow{OB}$, 원심력을 $\overrightarrow{OC}$라고 가정하면, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$일 때 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{CB}|$이기 때문에 $\angle \mathrm{BOC}=30°$라 할 수 있다.



이로써 한쪽 날개가 받는 힘을 $\overrightarrow{OB}=\sqrt{3}\,kN$으로 구할 수 있다. 또한 각 날개가 받는 힘을 $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$라 해 벡터를 합성하면 헬리콥터를 들어 올리는 힘을 구할 수 있다.

'$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=$헬리콥터를 들어 올리는 힘'이라는 관계를 이용하면 $\overrightarrow{OC}=\sqrt{3}\,k$이고 $\sqrt{3}\,k>10$일때 헬리콥터가 뜨기 시작하므로 양력을 $k>\dfrac{10}{\sqrt{3}}$이라고 추정할 수 있다.

2007년 06월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

수리논술 글쓰기의 원칙 (1)

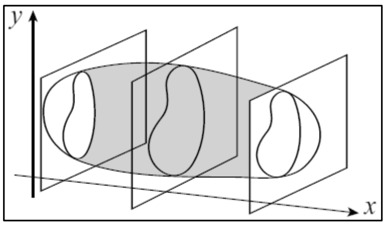
여러 대학에서 논술 모의고사를 실시하면서 2008학년도 입시에서 수리논술이 어떻게 출제될지에 대한 윤곽이 드러나고 있다. 자연계열 통합논술은 수리논술과 과학논술이 중심이 되고 인문계열 통합논술은 수리논술이 약화되는 가운데 언어?수리통합형 또는 자료해석형 논제가 출제될 것으로 보인다.

연세대는 지난 2월 모의 논술고사를 치른 뒤 "논술은 자신의 주장을 논리적인 글로 서술하는 것이다. 수리논술에도 이 기본 원칙에는 변함 없다. 학생들은 논리적으로 문장을 구성하는 연습을 해야 한다"고 밝혔다. 이에 자연계열 학생에게 '논리적 글쓰기'의 방향을 제시하는 일이 꼭 필요하다고 판단해 2회에 걸쳐 글쓰기 원칙을 다룬다.

글쓰기에 대한 설명이 추상적 언급에 그치지 않으려면 실제 논제를 바탕으로 이야기하는 방법이 좋기 때문에, 최근 실시한 고려대 자연계 모의 논술고사 문항을 예로 들어 설명하겠다. 이 논제에 대해 여러 학생이 작성한 답안을 통해 수리논술 글쓰기의 원칙을 짚어보겠다.

다음의 제시문에서 불순물의 부피를 정확하게 얻는 방법을 제안하고 부피를 추정하고 그 타당성에 대해 논술하라(2008학년도 고려대 자연계 모의 논술고사).

X선 컴퓨터 단층촬영(X선 CT)은 물질 안에 있는 불순물의 크기를 밝히는 데 사용되기도 한다. 모 회사 연구소에서 세라믹 내부에 크기를 알 수 없는 금속 불순물 덩어리 하나가 발견됐다. 이 불순물의 부피를 알기 위해 x축을 따라가며 10mm 간격으로 단층 촬영을 한 결과 불순물 단면의 넓이가 아래 표와 같이 주어졌다.



x축 단면 위치(mm)	0	10	20	30	40	50
불순물의 단면적(mm^2)	0	2	6	3	2	0

측정을 더 정확히 하기 위해 7mm 간격으로 단층촬영을 한 번 더 해 아래의 표를 얻었다.

x축 단면 위치(mm)	0	7	14	21	28	35	42	49
불순물의 단면적(mm^2)	0	2	8	6	6	4	2	0

1. 수리논술도 '논술'임을 이해하라

수리논술도 논술이라는 점이 여러 대학에서 밝히고 있는 기본 원칙입니다. 수리논술을 단순히 수학 문제로 생각해서는 안 됩니다.

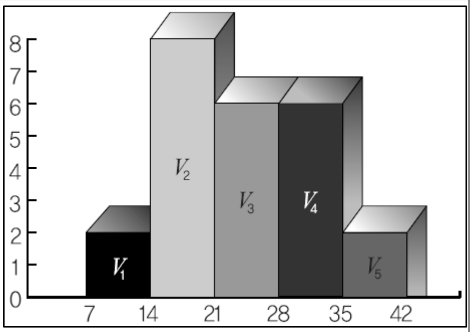
학생 예시답안

(불순물의 부피)$= V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$

$V_1 = 2\times7,\ V_2 = 8\times7,\ V_3 = 6\times7,\ V_4 = 6\times7,\ V_5 = 2\times7$

(불순물의 부피)=14+56+42+42+14=168mm^3

불순물의 부피를 정확하게 측정하고자 한다면 CT 촬영 시 촬영 간격을 더 조밀하게 해 단면적을 더 정확하게 구해야 한다.



▶이 답안을 보면 풀이에 대한 설명이 거의 없다는 점을 발견할 수 있습니다. 이 답안을 쓴 학생은 수리논술의 논술적 성격을 이해하지 못했다고 볼 수 있습니다. 7mm 간격의 촬영 결과만 이용한 점도 한계로 지적됩니다.

수식과 그래프로만 답안을 시작했다는 점도 아쉽습니다. 수식이나 그림, 그래프는 상황을 설명하는 훌륭한 도구지만 논술 답안은 글로 시작하는 방식이 더 자연스럽습니다. 또 그림과 그래프를 제시할 때에는 그것이 무엇을 의미하는지 명확히 설명해야 합니다. 수리논술에서도 자신의 생각을 논리적으로 서술해야 합니다. 학생들 중에는 수리논술 답안을 작성할 때 단순한 서술식 풀이 과정만 쓰는 경우가 더러 있습니다. 그러나 단순히 수학식을 나열하거나 논리 전개 과정을 생략한 채 결론만 쓰는 방식은 삼가야 합니다. 여러 대학에서 자연계 학생들에게 글쓰기를 강조하는 이유가 여기에 있습니다.

2. 수리논술은 '수리'논술임을 명심하라

학생 예시답안
x의 간격을 더 잘게 나눠 단면의 넓이를 더 촘촘히 구할 수록 불순물의 부피를 더 정확하게 측정할 수 있다. 적분을 이용한 입체도형의 부피를 구하기 위해선 x축을 무수히 작게 간격을 만들어, 구간의 면적들을 더해 총 부피를 구하는 구분구적법을 이용해야 한다. 제시된 자료를 보면 x축의 단면 위치 간격이 10mm일 때보다 7mm일 때 단면적의 넓이를 더 많이 얻을 수 있다. 이보다 정확한 부피를 재기 위해선 더 정확한 물체의 넓이가 필요하다. 입체도형의 부피공식은 $V=\int_a^b S(x)\,dx$이다. 이를 적용하기 위해선 우선 불순물의 x축 범위인 0~50mm 안에서 x구간을 무수히 잘게 나눠 수많은 단면 넓이를 얻어야 한다. 이렇게 얻어진 단면 넓이를 입체도형의 부피공식에 대입하면 $V=\int_a^b S(x)\,dx$로 불순물의 부피를 측정해 볼 수 있다.

수리논술은 논술이지만 '수리'논술입니다. 때때로 논술은 글로 이뤄져야 한다는 강박관념 때문에 수학적 내용까지 무리하게 글로 풀어쓰는 경우가 있습니다. 이에 대해 서울대에서는 "자신의 생각을 전달하는 수단으로 수식, 그림을 적절히 활용할 수 있다"고 조언했으며, 연세대에서는 "수리논술이라고 해서 단순히 글로만 자신의 생각을 전달하려는 답안이 다수 있었는데 이는 잘못된 생각"이라고 지적했습니다.

▶이 답안에는 논제에서 요구한 부피 추정이 빠져 있습니다. 이 학생은 부피를 추정하는 방법만 제시하고 답안 작성을 끝냈습니다. 게다가 수식이나 그래프, 그림을 사용하지 않고 주어진 내용을 설명하고 있습니다. 부피를 구하는 적분식을 제시하긴 했으나 주어진 논제를 구체적으로 분석하는 수식, 그래프, 그림은 보이지 않습니다.

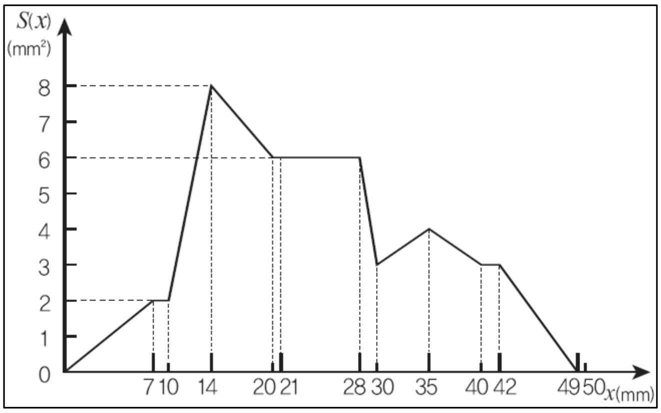
수리적인 내용을 논리적으로 서술할 때 꼭 글로만 표현할 필요는 없습니다. 수식이나 그래프 역시 하나의 언어이며 생각을 전달하는 수단입니다. 주어진 상황을 수리적으로 분석하고 수리적 표현을 활용해 자신의 생각을 밝힐 수 있도록 연습하기 바랍니다.

3. 엄밀한 논리력으로 승부하라

수리논술이 '논술'임을 이해하지 못할 때 범하기 쉬운 가장 흔한 오류는, 논리 전개를 생략하고

판단 결과만 쓰는 것입니다. 다음 답안의 사례를 같이 봅시다.

학생 예시답안
x값에 따른 불순물의 단면적 넓이를 $S(x)$라 하고 이것을 그래프로 나타내면 다음과 같다. 이 불순물의 길이는 총 49mm다. 이 불순물의 길이를 의미하는 x축 값의 구간을, 넓이를 측정한 단면 위치에 따라 나눈다. 이제 불순물의 총 길이 범위 안에서 불순물의 단면적 넓이 $S(x)$를 적분하면 불순물의 전체 부피를 알 수 있다. 이 부피를 $V(x)$라 하면 $V=\int_0^{49} S(x)\,dx$로 나타낼 수 있다. 이때 각 부분마다 넓이가 다르므로 구간을 나눠 생각하면



$$V(x)=\int_0^7 S(x)dx+\int_7^{10} S(x)dx+\int_{10}^{14} S(x)dx+\int_{14}^{20} S(x)dx+\int_{20}^{28} S(x)dx+\int_{28}^{30} S(x)dx$$
$$+\int_{35}^{40} S(x)dx+\int_{40}^{42} S(x)dx+\int_{42}^{49} S(x)dx$$
$$=7+6+20+42+48+9+\frac{35}{2}+15+457=\frac{351}{2}\text{이다.}$$

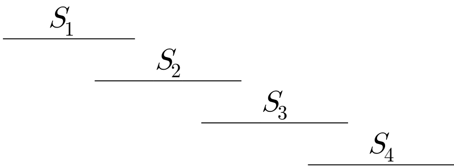
따라서 이 불순물의 부피는 $\frac{351}{2}$로 추정된다. (이하 타당성에 대한 논술은 생략)

▶ 이 답안을 제시한 학생은 논제가 요구하는 내용을 비교적 잘 이해하고 있다고 볼 수 있습니다. 하지만 이 논술은 논리적으로 엄밀하다고 할 수 없습니다. 이해를 돕기 위해 '서울대 논술 모의고사 평가자료'의 내용을 소개합니다.

서울대 자연계열 모의 논술고사에는 DNA 조각의 재배열과 행렬 표현과의 연관성을 분석하는 문제가 출제됐습니다. 그 중 (1)번 문항은 인간의 DNA는 원형이 나올 수 없는데, 논제에 주어진 행렬은 원형 DNA를 나타내므로 인간의 DNA가 아니라는 점이 요지입니다. 서울대에서 발표한 모의 논술고사 평가 결과에는 다음과 같은 학생답안이 소개돼 있습니다.

학생 예시답안

"문제에서 주어진 행렬 중 (1, 4)성분과 (4, 1)성분을 제외한 나머지 성분으로 S_1, S_2, S_3, S_4의 배열을 생각해 보면 다음과 같다.



그런데 (1, 4)성분과 (4, 1)성분을 고려하면 S_1과 S_4의 끝부분이 일치하므로 이들은 폐곡선을 이룬다. 인간의 DNA는 한 개의 선형 DNA로 이뤄져 있기 때문에 양끝의 염기서열이 일치해서는 안 된다. 만약 문제에서 주어진 행렬처럼 결과가 나온다면 그것은 박테리아의 원형 DNA를 분석한 결과라 할 수 있다."

여기서는 이 문제를 자세히 설명하는 게 목적이 아니므로 서술 흐름에 초점을 맞추기 바랍니

다. 제시된 학생의 답안은 논제에서 요구한 결론에 도달했습니다. 그런데 서울대는 이 논술을 논리적 설명이 부족한 예로 제시하고 있습니다.

서울대에서는 S_1~S_4의 배열 모양을 제시하면서 그 이유를 설명하지 않았다는 점을 지적했습니다. 찾아낸 사실이 맞으면 됐지 그 이유까지 꼭 써야 하느냐고 묻는 학생들도 있을 것입니다. 하지만 수리논술에서는 논리적 근거가 생명입니다. 논리 전개의 각 단계에는 충분한 설명이 포함돼 있어야 합니다.

다시 고려대 모의 논술고사에 대한 학생 예시답안 3을 살펴봅시다.

이 예시답안에서 학생은 제시문에 주어진 두 자료를 합쳤습니다. 두 자료를 합쳤을 때는 합쳐야 된다고 판단한 이유가 있었을 것이므로 반드시 그 이유를 써야 합니다. 왜냐하면 이 논제에서 두 자료를 동시에 이용한다는 점은 부피를 추정하는 데 중요한 과정이기 때문입니다. 그 이유가 길든 짧든 중요한 논리 전개 과정의 이유는 밝혀야 합니다.

더군다나 이 학생은 측정된 위치 사이에서 단면적의 함수를 직선으로 추정했습니다. 이것은 가능한 추론일 수는 있으나 실제로 그러할지는 의문입니다. 그러므로 자신의 논리 전개의 타당성을 입증하기 위해 이렇게 추정한 이유를 꼭 설명해야 합니다.

단면적의 함수를 직선 모양으로 추정한 데는 나름의 이유와 근거가 있었을 것입니다. 이러한 이유와 근거를 논리적으로 서술해야 합니다.

창의적인 답안은 다른 학생과 구별되는 독특한 시각, 신선한 접근방식, 창의적 표현을 포함합니다. 그러나 창의성은 논제에 대한 정확한 이해와 객관적이고 치밀한 논리 전개를 통해 이뤄져야 합니다. 논리를 엄밀하게 전개할 때만 창의적인 답안이 설득력을 갖게 됩니다.

2007년 07월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]수리논술 글쓰기의 원칙(2)

지난 호에 이어 수리논술 답안 작성의 원칙에 대해 살펴본다. 지금까지 살펴본 세 가지 원칙은 같다.

첫째, 수리논술은 '논술'임을 이해하라.

둘째, 수리논술은 '수리'논술임을 명심하라.

셋째, 엄밀한 논리력으로 승부하라.

이번 호에서도 지난 호와 마찬가지로 고려대 자연계열 모의논술 논제에 대한 학생들의 답안을 함께 살펴본다. 고려대 자연계열 모의논술 논제는 단층촬영 결과를 이용해 세라믹 내 불순물의 크기를 추정하라고 요구하는 내용이었다. 이번 호에서 제시할 원칙은 다음과 같다.

넷째, 창의적으로 해결하라.

다섯째, 문제의 제시와 요구에 충실하라.

여섯째, 정확하게 표현하라

일곱째, 답안을 깔끔하게 작성하라

4. 창의적으로 해결하라

학생들의 답안을 살펴보면 대부분 비슷합니다. 따라서 독특한 답안은 우선 눈에 띕니다. 그 독특함이 신선한 창의성으로 인정된다면 좋은 점수를 얻을 수 있습니다. 하지만 독특하다고 모두 창의적인 것은 아닙니다. 논제에 대해 다음과 같은 학생 답안을 살펴봅시다.

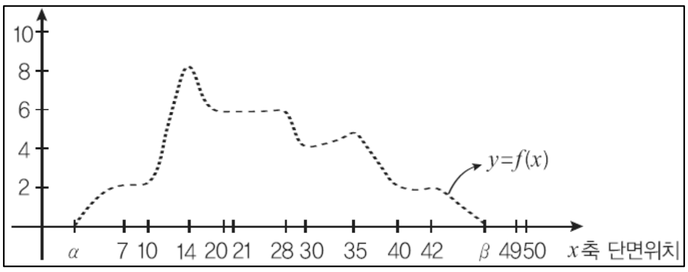
▶ 학생 예시답안
불순물이 들어갈 수 있는 수조에 물을 가득 채운 뒤 더 큰 수조에 그 수조를 담는다. 물을 최대한 담고 큰 수조에는 물이 담기지 않도록 한다. 그런 뒤 금속을 수조에 넣는다. 작은 수조를 꺼낸 뒤 큰 수조로 흘러넘친 물의 부피를 측정한다. 작은 부피를 밖으로 꺼낼 때 수조 밖에 묻은 물방울은 무시한다. 금속 덩어리의 부피는 흘러넘친 물에 비례한다.

▶이 학생은 이것이 창의적인 문제해결이라고 생각했을지 모르지만 출제의도에서 벗어나는 답안입니다. 아마 이와 같은 답안을 염두에 두고 "세라믹 속에 금속 불순물이 발견됐다"는 조건을 설정한 것 같습니다. 이 학생은 이 설정의 의미를 제대로 이해하지 못했습니다.

창의적인 답안은 다른 학생과 구별되는 독특한 시각과 해석, 새로운 표현방식을 포함합니다. 그러나 창의성은 논제에 대한 정확한 이해와 객관적이고 치밀한 논리 전개를 통해 실현돼야 합니다. 주관적인 생각과 창의성은 다릅니다. 다음 사례를 함께 봅시다.

학생 예시답안

주어진 자료를 이용해 불순물의 단면적에 대한 그래프를 그려보면 다음과 같다. 측정값이 없는 부분을 임의의 점선으로 표현해 나타낸다. 이때 불순물의 시작점을 α라 하고 끝점을 β라 하자.



주어진 부분 이외의 측정값을 알 수 없으므로 불순물의 정확한 부피를 측정할 수 없다.

그러나 불순물 표면이 대체로 고르다고 가정하면 7mm와 10mm를 제외한 부분에서 그 값이 7mm와 10mm 측정값을 직선으로 연결한 값에 근접한다고 볼 수 있다. (중략)

이와 같은 방법으로 각 구간의 부피값을 구하면 불순물의 부피를 추정할 수 있다.

$$\begin{aligned}\therefore\ V &= \int_{\alpha}^{7} 1dx + \int_{7}^{10} 2dx + \int_{10}^{14} 7dx + \int_{14}^{20} 7dx + \int_{20}^{21} 6dx \\ &+ \int_{20}^{28} 6dx + \int_{28}^{30} \frac{9}{2}dx + \int_{30}^{35} \frac{7}{2}dx + \int_{35}^{40} 3dx + \int_{40}^{42} 2dx + \int_{42}^{\beta} 1dx \\ &= \beta - \alpha + 126.5\end{aligned}$$

$35 \le \beta - \alpha \le 50$ $\therefore 161.5 \le V \le 176.5$ (이하 생략)

▶이 답안이 모든 점에서 만족스러운 것은 아닙니다. 다만 대부분의 학생이 첫 번째 구간의 시작을 0, 마지막 구간의 끝을 49로 보고 그래프를 그린 반면 이 학생은 처음 시작하는 위치와 끝나는 위치를 알 수 없다고 판단하고 미지수 α, β로 설정한 점이 독특합니다. 또 이 착상을 끝까지 논리 전개에 반영해 부피를 추정하는 데 적용했다는 점에서 창의적입니다. 쉽게 발견하지 못하는 부분을 찾아내 논리적으로 깊이 파고들었기 때문에 창의적인 답변이 된 것입니다.

5. 문제의 제시와 요구에 충실하라

대입 설명회에서 수리논술 채점자들이 공통으로 하는 이야기가 있습니다. 학생들이 물어본 내용에 전부 답하지 않는다는 점입니다. 몰라서 답하지 않는 경우도 있겠지만 꼭 그런 것만은 아닙니다. 수리논술 문항은 질문이 복잡합니다. 논제에서는 "불순물의 부피를 가급적 정확하게 얻는 방법을 제안해 부피를 추정하고 그 타당성에 대해 논술하시오"라고 했습니다. 이 논제에 대해 논술한다면 '방법을 제안'하고 '부피를 추정'해 '타당성에 대해 논술'해야 합니다. 그런데 학생들은 대개 세 가지 질문에 모두 답하지 않습니다. 방법은 제안하고 부피를 추정하지 않거나 부피는 추정하고 방법에 대한 설명은 부족합니다. 방법에 대해 쓴 글로 타당성 검토는 끝났다고 생각해 타당성에 대한 논술을 빠뜨립니다. 논제의 요구에 대해 전부 답하지 않고는 좋은 평가를 기대할 수 없습니다. 복잡한 구조의 질문에 익숙해져야 합니다. 다음 학생 답안을 살펴봅시다.

학생 예시답안

어떤 물체의 부피를 측정하고자 할 때 정확한 단면적과 그 물체의 시작부터 끝까지의 단면적에 수직인 길이를 알면 부피를 알 수 있다.

먼저 단면적이 균일할 때를 생각해보자. 단면적을 s, 높이를 h라고 할 때 부피는 sh이다. 주의할 점은 높이 h가 가장 밑부분의 단면적과 가장 윗부분의 단면적을 수직으로 이은 길이여야 한다는 점이다. A4 용지를 쌓을 때 똑바로 쌓는 경우와 흩뜨려 쌓는 경우를 생각해 볼 수 있다. 그러나 만약 쌓은 종이의 수가 같다면 위에 말한 두 경우의 부피는 같다. 즉 처음 종이와 맨 윗 종이에 수직인 거리가 같기 때문이라고 생각할 수 있다. 이렇듯 단면적과 수직인 거리를 알면 모양에 상관없이 부피를 구할 수 있다.

그러나 만약 단면적이 계속 바뀌는 상황이라면 상황은 달라진다. 제시문처럼 물체를 x축에 놓고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면적의 함수를 $S(x)$, 자르는 한 평면과 그 다음 평면까지의 거리를 Δx, 단면적의 처음을 $S(a)$, 끝을 $S(b)$라 하자.

이때 부피는 물체를 잘게 자른 기둥을 더한 값이라 생각할 수 있다. x축 방향과 단면적이 수직이므로 부피 $V_i = \sum_{x=a}^{b} S(x) \times \Delta x$라 할 수 있고 Δx가 작아질수록 V_i는 실제 부피 V에 가까워진다. 즉 $\lim_{\Delta x \to 0} V_i = V$라고 할 수 있다.

▶이 답안은 구분구적법과 적분의 개념을 잘 설명하고 있으나 문제의 제시와 요구에 충실하지 않은 점이 아쉽습니다. 개념을 글로 잘 표현했음에도 불구하고 매우 낮은 점수를 받을 답안입니다. 우선 주어진 불순물의 부피를 추정할 수 있는 구체적 방법을 논제의 요구에 맞게 제시하지 않았습니다. 기본 개념에 대한 정확한 이해는 논술의 출발입니다. 그렇지만 어떤 논제가 나왔을 때 관련된 개념을 자세히 설명할 필요는 없습니다. 개념에 대한 이해는 논제 해결 과정에 녹아들어야 합니다. 앞 답안처럼 원론적인 개념만 설명하고 끝내선 곤란합니다. 더구나 이 답안은 논제에서 요구한 구체적인 부피 추정을 하지 않았고 그 추정에 대한 타당성 검토도 하지 않았습니다. 논제에서 요구한 사항에 정확히 답변하는 일이 좋은 논술의 기본입니다.

6. 하나를 써도 정확하게 써라

수리논술의 첫걸음을 내딛는 학생에게 '하나의 표현이라도 정확하게 하라'고 하면 매우 부담스러워 합니다. 하지만 논술은 글로 자신의 생각을 표현하는 일이기 때문에 정확하게 표현하지 않으면 좋은 점수를 얻을 수 없습니다.

학생 예시답안
"부피를 가진 물체를 아주 작은 구간으로 무수히 자르면 무수히 많은 단면이 나온다. 그러므로 단면 넓이의 합은 이 물체의 부피와 같다."

▶ 무수히 많은 단면 넓이의 합이 부피가 될 수는 없습니다. 만약 군이 무수히 많은 단면 넓이의 합을 생각한다면 그 합은 양의 무한대로 발산할 것입니다. 수학의 개념을 설명하기 위해 때로는 비유적 표현이 사용되기도 합니다. 그러나 비유적 표현과 개념적 논술을 구별할 줄 알아야 합니다. 수리적 개념과 원리를 정확히 표현하고 싶다면 먼저 정확히 알아야 합니다. 또 하나의 사례를 보겠습니다.

학생 예시답안
그러나 앞의 제시문에서는 x축 단면의 위치당 단면적을 알 수 없으므로 정확하지 않더라도 제시문에서 나온 최소 단위로 나눠 그 사이의 값은 최소 단위 수의 변화율이 같다는 가정하에 부피를 구할 수 있다.

▶ 이 학생의 글은 잘 이해되지 않습니다. 미루어 짐작하면 학생의 대략적인 의도는 "주어진 위치에서 단면적을 좌표평면 상에 점으로 표시한다. 나머지 위치에서 단면적 함수의 그래프는 직선으로 추정한다. 이를 적분하면 불순물의 부피를 구할 수 있다"로 생각됩니다.

이 글은 표현이 정확하지 않아 이해하기 어려운 글이 됐습니다. 또 이 답안을 쓴 학생은 "단면적의 함수를 직선으로 추정하는 일은 $a \le x \le b$인 모든 x에서 단면적 변화율을 구간 [a, b]의 평균변화율과 같다고 가정하는 것이다"는 점을 설명하고자 했습니다.

이는 이 논제에서 충분히 가능한 설명이지만 정확하게 표현하지 못했습니다. 자신의 생각을 제대로 표현하지 못하면 논리적인 답안으로 인정받을 수 없습니다.

7. 답안을 깔끔하게 작성하라

마지막 원칙은 조심스럽습니다. 채점자가 답안이 깔끔한지 아닌지를 채점하는 것은 아니기 때문입니다. 물론 지저분한 답안 속에도 번뜩이는 아이디어가 담겨 있을 수 있습니다. 채점자는 답안을 면밀히 검토해 학생들의 아이디어를 정확하고 세심하게 평가하기 때문입니다.

하지만 깔끔하게 정돈된 답안은 좋은 인상을 줍니다. 이것이 점수에 어느 정도 영향을 줄지 단언할 수는 없지만 논리적 표현력과 깔끔한 답안은 분명 상관관계가 있습니다. 평소에 수리논술 문제를 풀면서 답안을 깨끗하게 작성하는 훈련을 한다면 분명 유익한 결과가 있을 것입니다.

2007년 08월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]평균속도와 이동거리

문제1 다음을 참고해 물음에 답하라(2008학년도 성균관대 모의논술).

함수 $y=f(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 함수 $f(x)$를 a에서 b까지 정적분한 값은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \ (\text{단 } \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x)$$

1) 홍길동은 장난감 자동차를 사서 4초간 1차원 운동을 시키고, 속도를 5회 측정해 오른쪽 표와 같은 실험 결과를 얻었다. 이 표로부터 장난감 자동차의 4초간 평균속도 $\overline{v}$와 이동거리(변위) $\overline{x}$를 논리적으로 추정하라.

측정시간	0.4초	1.2초	2.0초	2.8초	3.6초
속도(m/s)	0.05	−1.16	4.00	−6.34	4.00

2) 홍길동은 장난감 자동차를 제작한 회사에 성능을 의뢰했다. 장난감 자동차 제작 회사는 정지해 있다가 출발한다면 속도 $v(t)=t^2\cos(\pi t)$라는 답신을 보냈다. 그렇다면 이 회사에서는 장난감 자동차의 첫 4초간 평균속도 $\overline{v}$와 이동거리(변위) $\overline{x}$를 얼마로 예상하는지 논리적으로 추정하라.

3) 1)번과 2)번에서 얻은 결과 사이에 발생하는 오차를 줄이기 위해서는 실험을 어떻게 개선해야 할까?

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 그동안 여러 대학에서 중요하게 다뤘던 정적분과 구분구적법을 속도와 변위 관계로 발전시킨 것입니다. 난이도는 높지 않지만 이렇듯 자주 출제되는 주제에 대해 서술하는 연습을 꾸준히 하기 바랍니다.

▶ 예시답안

1) 4초 동안 장난감 자동차의 평균속도 v는 $\frac{\text{4초 동안 움직인변위}}{\text{4초}}$로 구할 수 있다. 하지만 논제에 주어진 표는 0.4초부터 0.8초 간격으로 조사한 각 시각에서의 속도이므로 속도 변화로 4초 동안의 위치 변화량(변위)을 추정해야 한다. 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 위치를 $x(t)$라 하면 $\frac{dx}{dt}=v$와 같은 식이 성립한다.

양변을 시간 t에 대해 적분하고 t에 0부터 4초까지 대입하면

$$\int_0^4 \frac{dx}{dt}dt=\int_0^4 v\,dt$$

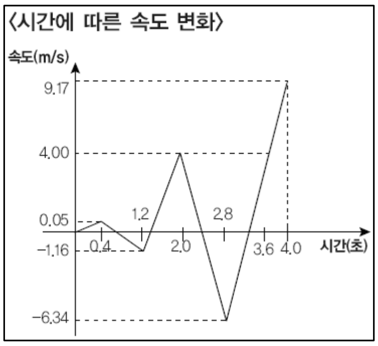
라 할 수 있고, 이 식의 좌변을 다시

$$\int_{x(0)}^{x(4)} dx=x(4)-x(0)$$

로 나타낼 수 있다. 이때 '$x(4)-x(0)$'이 바로 4초 동안의 변위이다. 즉 $\int_0^4 v\,dt$가 $\overline{x}$이고

$\dfrac{\int_0^4 v\,dt}{4}$가 $\bar{v}$이다. 그러므로 주어진 표를 통해 $v(t)$를 어느 정도 추정한 뒤 그것을 t에 대해 적분하면 $\bar{x}$와 $\bar{v}$를 모두 구할 수 있다.

논제에 주어진 표를 시간-속도 그래프로 나타내면 오른쪽 그래프와 같다. 표에서 주어진 시각 사이의 구간은 직선으로 추정했다. 4초일 때 순간 속력이 점차 증가하는 것으로 봐서 2.8초와 3.6초 사이의 개형 연장선에 두고 9.17m/s로 가정했다. 이 그래프에서 $\int_0^4 v\,dt$는 각 구간을 아래 표와 같이 나누면 더 쉽게 구할 수 있다.



2) 장난감 자동차의 실제 속도가 주어졌으므로 $\int_0^4 v\,dt$와 $\dfrac{\int_0^4 v\,dt}{4}$를 통해 $\bar{x}$와 $\bar{v}$를 구할 수 있다.

$$v(t)=t^2\cos(\pi t)$$
$$\bar{x}=\int_0^4 v\,dt=\int_0^4 t^2\cos(\pi t)dt$$

부분적분에 의해

$$\int t^2\cos(\pi t)dt=\frac{1}{\pi}t^2\sin(\pi t)+\frac{2}{\pi^2}t\cos(\pi t)-\frac{2}{\pi^3}\sin(\pi t)$$

이므로, 4초간 이동거리(변위)는

$$\bar{x}=\left[\frac{1}{\pi}t^2\sin(\pi t)+\frac{2}{\pi^2}t\cos(\pi t)-\frac{2}{\pi^3}\sin(\pi t)\right]_0^4=\frac{8}{\pi^2}$$ 이고 평균속도 $\bar{v}=\dfrac{2}{\pi^2}$이다.

3) 1)번과 2)번에서 얻은 결과에서 발생한 오차를 줄이기 위해서는 더욱 정확한 시간-속도 그래프가 필요하므로 정적분을 활용한다. 즉 1)번 문제에서 언급했듯이

$\int_0^4 v\,dt$가 $\bar{x}$이고 $\dfrac{\int_0^4 v\,dt}{4}$가 $\bar{v}$이다.

한편 제시문에서

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x\left(\text{단 } \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$

라 했으므로 $\int_0^4 v\,dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}v(t_k)\Delta t$이다.

이 식의 우변에서 $n\to\infty$일 때 $\Delta t\to 0$는 '측정하는 시간 간격을 작게 할 수록 정확한 변위와 평균속도를 얻을 수 있다'는 의미이다. 그러므로 측정 간격을 더 작게 나눠야 한다. 또 시간-속도 그래프를 직선이 아닌 미분 가능한 곡선으로 예측해 구한다면 실제 값에 더 가까운 값을 얻을 수 있다.

<표> $\int_0^4 v\,dt$의 구간별 변화량

구간	0~0.4초	0.4~1.2초	1.2~2.0초	2.0~2.8초	2.8~4.0초
변위의 변화량	0.01	−0.444	1.136	−0.936	1.698

문제2 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라(2008학년도 건국대 모의논술).

(가) 담배연기에는 수천 가지의 유해한 물질이 섞여 있으며 이 중에서 발암물질로 알려진 것은 60종 이상이다. 이 모든 유해물질은 동시에 폐를 통해 체내로 흡수되기 때문에 우리의 건강을 심각하게 해칠 수 있다. 특히 니코틴은 담배의 주요성분으로 쉽게 체내로 흡수되며 뇌신경과 자율신경계에 영향을 주고 마침내는 중독을 유발해 담배를 계속해서 피우게 만든다.

흡연은 폐암 이외에도 여러 종류의 암, 다른 질병들을 유발하지만, 우리 몸에서 담배연기에 가장 많이 노출되는 부분은 폐이다. 따라서 흡연양이 많고 흡연기간이 긴 사람일수록 폐암에 걸릴 확률이 높아진다. 폐암은 다른 암에 비해 조기진단이 힘들고 발병한 뒤에도 치료가 어려운 암으로 알려져 있다.

2001년도 이전의 연구보고에 의하면 남성의 흡연율이 여성의 흡연율보다 훨씬 높았으나, 최근 보고에 의하면 남성 흡연율은 서서히 감소하고 여성과 청소년 흡연율은 빠른 속도로 증가하는 것으로 나타났다. 한 예로 국내 남녀공학 고등학교에서 학생 흡연율을 조사한 결과, 남학생은 흡연자 100명, 비흡연자 250명으로 대단히 높게 나타났으며, 여학생도 전체 300명 여학생 중 흡연자가 80명으로 조사됐다. 흡연에 의한 질병은 담배를 직접 피우는 흡연자에게만 나타나는 것은 아니다. 담배를 피우지 않는 사람이 담배연기를 들이마셔도 담배를 피우는 것과 같은 효과가 나타난다. 즉 간접흡연은 담배연기 속의 모든 독성물질, 발암물질을 거르지 않고 그대로 들이마시기 때문에 독성이 강해 몸에 해롭다.

(나) 중앙암등록본부에서는 우리나라의 모든 암 등록자료를 통합해 국가 암 발생 데이터베이스를 구축했다. 다음 자료는 1999~2001년의 전국 암발생률과 2005년 암사망률을 암의 종류별로 산출한 값이다.

암종별 (가나다순)	연평균 암발생률(1999~2001)				암사망률(2005)			
	남성		여성		남성		여성	
	발생자수	상대분율(%)	발생자수	상대분율(%)	사망자수	상대분율(%)	사망자수	상대분율(%)
간암	10,002	17.0	3,275	7.4	8,253	19.9	2,709	11.2
난소암	-	-	1,330	3.0	-	-	754	3.1
담낭암	1,594	2.7	1,575	3.5	1,699	4.1	1,637	6.8
대장암	5,784	9.8	4,647	10.4	3,293	8.0	2,778	11.5
식도암	1,675	2.8	-	-	1,319	3.2	-	-
위암	13,976	23.7	7,295	16.4	7,183	17.4	3,651	15.1
유방암	-	-	6,083	13.7	-	-	1,581	6.6
자궁경부암	-	-	4,361	9.8	-	-	1,067	4.4
전립선암	1,425	2.4	-	-	909	2.2	-	-
췌장암	1,572	2.7	1,130	2.5	1,872	4.5	1,517	6.3
폐암	10,049	17.0	3,565	8.0	10,154	24.5	3,651	15.1
전 체	59,010	100.0	44,561	100.0	41,375	100.0	24,104	100.0

-통계청 통계연보

1) 제시문 (가)의 고등학생 흡연율 조사 결과를 토대로 조사에 참여한 전체 학생 중에서 임의로 남학생 21명, 여학생 15명을 뽑은 다음 2명의 학생을 조사했더니 모두 비흡연자였다면, 그 학생이 모두 여학생일 확률을 구하라. 단 남학생 21명의 흡연율과 여학생 15명의 흡연율은 각각 조사에 참여한 남학생과 여학생의 흡연율과 일치한다고 가정한다.

2) 제시문 (나)의 통계자료에서 남성과 여성 간 차이, 암발생률과 사망률의 차이가 나타나는 원인을 폐암의 관점에서 분석해 논하라.

▶ 전문가 클리닉

통계자료가 주어진 논제는 출제의도가 크게 두 가지로 분류됩니다. 하나는 자신의 의견을 논술할 때 통계자료의 수치를 적절히 논리적 근거로 사용할 수 있는지를 측정하는 것이고, 또 하나는 자료에 내포돼 있는 의미를 개연성 있게 논리적으로 해석해내는 능력을 측정하는 데 목적을 두고 있습니다. 학생들은 이를 염두에 두고 자료해석형 문제에 미리 대비하는 연습을 해야 합니다.

▶ 예시답안

1) 남학생은 전체 350명 중 100명, 여학생은 전체 300명 중 80명이 흡연자이므로 남학생의 흡연율은 $\frac{2}{7}$, 여학생의 흡연율은 $\frac{4}{15}$이다. 따라서 주어진 표본에서 흡연자인 남학생은 6명, 여학생은 4명이고 비흡연자인 남학생과 여학생은 각각 15명과 11명이라 추정된다.

   한편 학생 2명을 조사했는데, 그 학생이 모두 비흡연자였을 때, 2명 모두 여자일 확률은 총 비흡연자 중 2명을 뽑는 경우의 수에 대한 여성 비흡연자 중 2명을 뽑는 경우의 수의 비와 같다. 이 값은 $\frac{{}_{11}C_2}{{}_{26}C_2}=\frac{11}{65}$이다.

2) 제시문 (나)의 자료에서는 전체 인구나 남녀의 인구수를 알 수 없으므로 폐암발생률을 직접 구할 수 없다. 단지 남자의 인구를 N, 여자의 인구를 Y로 놓고 남녀의 폐암발생률을 각각 $\frac{10049}{N}$과 $\frac{3565}{Y}$로 추정하거나, 전체 암 발생자 중 폐암 발생자의 상대비율만 알 수 있다.

   먼저 이 자료를 통해 알 수 있는 남녀 간 차이를 살펴보자. 남녀의 3년간 연평균 폐암발생률을 추정해 보면 각각 $\frac{10049}{N}$, $\frac{3565}{Y}$로 나타낼 수 있다. 이때 N이 Y의 $\frac{10049}{3565}=2.82$배 이상이 아니라면 남자의 폐암발생률이 여자보다 더 크다고 할 수 있다. 그런데 실제로 남자와 여자의 인구는 거의 같을 것이므로 남자의 폐암발생률은 여자의 발생률보다 2배 이상 높은 셈이다. 같은 논리로 폐암 사망률도 남자가 여자보다 2배 이상 높다고 볼 수 있다.

   왜 남자의 폐암발생률과 사망률이 여자보다 높을까. 외부적(환경적) 요인으로는 폐암의 주된 원인인 담배에 남자가 여자보다 더 많이 노출되고, 폐암을 유발할 수 있는 석면 같은 물질에 남자가 많이 노출돼 있기 때문이라고 볼 수 있다. 한편 내부적(생물학적)으로는 여자가 남자보다 암에 대한 방어능력이 크다고 추론할 수 있다. 하지만 이런 가능성은 실제 인과 관계를 과학적으로 규명하기 전까지는 추론에 불과하다.

   두 번째로 폐암발생률과 사망률 간 차이가 나타나는 원인에 대해 살펴보자. 1999년부터 2001년까지 연평균 암 발생자 중 폐암 발생자의 비율을 연평균 남녀 발생자수의 합을 이용해 구하면 $\frac{13614}{103571}=0.13$이다. 2005년에 암에 의한 총 사망자 중 폐암으로 인한 사망자 비율을 같은 방법으로 구하면 13805/65479=0.21이다. 시간에 따른 암 발생과 사망에서의 종류별 상대분율이 비슷하다고 가정하면 폐암 사망자의 상대분율은 발생보다 1.6배 크다. 이는 폐암을 조기에 진단하기가 어렵고 치료도 어려워 치료율이 다른 암에 비해 상대적으로 낮다는 점을 반영한다. 즉 남녀의 폐암발생 상대분율은 각각 2위, 5위였지만 사망 상대분율은 모두 1위이므로 성별에 상관 없이 치료가 힘들다.

   마지막으로 3년간 연평균 전체 암 발생자수와 2005년 사망자수의 차는

103571−65479=38092인데, 폐암의 경우 그 차이가 13614−13805=−191로 나타난다. 이를 해석하면 전체 암 발생자수는 사망자수보다 많지만, 폐암은 사망자수가 발생자수보다 더 많다는 결론이 나온다. 이런 결론은 크게 두 가지 원인 때문이라고 볼 수 있다. 하나는 폐암 치료율이 낮고 발견이 어려워 사망자수가 발견자수보다 많다는 점이고, 또 다른 하나는 발생률과 사망률의 조사 시기가 5년 정도 차이가 나는 만큼 그 시간 동안 폐암발생률이 더욱 높아져 2005년 사망률이 5년 전 발생률보다 높아졌다는 점이다.

2007년 09월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]쌍곡선의 성질 이용한 배의 위치 추정

문제1. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 항해 중인 배는 A, B, C 세 기지로부터 전파를 받아 자신의 위치를 파악한다. 이때 세 기지의 위치는 정확하게 알려져 있어야 하고, 세 기지에서 전파를 동시에 보내야 한다. 전파가 배에 도달하는 시간 차를 이용하면 배의 위치를 정확히 알 수 있다. C의 전파발생기가 고장나서 전파를 보내지 못하고 A와 B에서만 전파를 보낸다고 하자. 이 경우 A와 B에서 동시에 보낸 전파가 배에 도달한 시간 차와 A, B의 위치에 관한 정보로부터 배의 위치를 다음과 같은 방법으로 추정할 수 있다. A, B에서 동시에 보낸 전파가 도착한 시간 차를 Δt, 전파 속도를 v라 하면 A와 B로부터의 거리 차는 $\Delta t \bullet v$가 된다. 이제 A와 B의 중점을 원점으로 하고 A와 B를 x축 위에 올려놓은 좌표평면을 생각하자. A, B의 좌표를 $A(f,\ 0)$ $B(-f,\ 0)$, 배에서 A와 B에 이르는 거리 차를 $\Delta t \bullet v = 2a$라 할 때 배의 위치 $P(x,\ y)$는 그래프 $\left|\sqrt{(x-f)^2+y^2} - \sqrt{(x+f)^2+y^2}\right| = 2a$ 위의 점이 된다. 이 식을 다시 쓰면

$$\sqrt{(x-f)^2+y^2} - \sqrt{(x+f)^2+y^2} = \pm 2a$$

양변을 제곱해 정리하면

$$-4fx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x+f)^2+y^2}$$

양변을 4로 나누고 다시 제곱하면

$$(f^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(f^2-a^2)$$

이때 $f^2 - a^2 = b^2$이라 하고 양변을 a^2b^2으로 나누면 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$이 된다. 따라서 배는 x축을 축으로 하고 두 점 $A(f,\ 0)$ $B(-f,\ 0)$를 초점으로 하는 쌍곡선 위에 위치한다.

한편 A, B에서부터 동시에 출발한 전파 중 어느 하나에 배가 위치하는지 알게 돼 배가 있음직한 범위를 좁힐 수 있다. 즉 A가 보낸 신호가 먼저 도착했다면 배는 점 A쪽에 가까운 쌍곡선의 한 부분에 위치하며, B가 보낸 신호가 먼저 도착했다면 배는 점 B쪽에 가까운 쌍곡선의 한 부분에 위치한다. -2006학년도 고려대 수시2학기 기출 응용

(나) 한 정점으로부터 같은 거리에 있는 평면 위 점들의 집합을 원이라고 한다. 또 중심이 O인 원 위의 점 A, B가 주어질 때 ∠AOB를 호 AB의 중심각이라 하고, 호 AB 위에 있지 않은 원 위의 한 점 P를 잡을 때 ∠APB를 호 AB에 대한 원주각이라 한다. 원의 성질에는 다음과 같은 네 가지가 알려져 있다.

첫째, 한 호에 대한 중심각의 크기는 그 호에 대한 원주각 크기의 2배다.

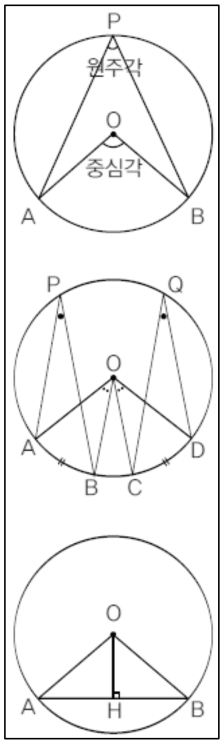
둘째, 한 원에서 길이가 같은 호에 대한 중심각의 크기는 같고, 역으로 크기가 같은 중심각에 대한 호의 길이는 같다.

셋째, 한 원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같고, 역으로 크기가 같은 원주각에 대한 호의 길이는 같다.

넷째, 원의 중심에서 현에 내린 수선은 이 현을 수직 이등분한다.

1) 제시문 (가)에서는 전파 속도를 이용해 쌍곡선의 위치를 함수로 표현했다. A, B의 위치와 두 지점 사이의 거리를 알고 있을 때 두 지점 A, B를 중심으로 하는 동심원을 이용해 쌍곡선의 개형을 찾는 방법을 설명하라.

2) 섬 사이에서 배가 갑자기 기관 고장을 일으켰다. 현재의 위치를 정확히 알아내기 위해 선장은 배의 갑판에서 세 지점 A, B, C를 관측했고 배에서 각 두 지점 사이의 각을 알아냈다. 그 다음 선장은 지도에서 A, B, C의 세 지점을 찾아내 배의 정확한 위치를 찾아낼 수 있었다. 배는 세 지점을 연결한 △ABC 내부에 존재한다. 제시문 (나)를 참고해 선장이 어떻게 배의 위치를 찾아냈는지 설명하라.



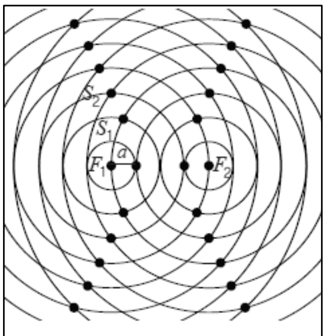
▶ 전문가 클리닉

GPS의 동작 원리는 세 개의 인공위성에서 보낸 데이터로 정확한 위치를 추적하는 것입니다. 이처럼 서로 다른 세 지점에서 보내온 신호의 전달 속도 차이를 이용해 움직이는 배나 자동차의 위치를 알 수 있습니다. 또 각 인공위성 사이의 각을 알 때도 배나 자동차의 위치를 알 수 있습니다. 반지름의 길이가 일정하게 증가하는 동심원을 그린 뒤 두 동심원의 교점에서 원의 중심까지의 거리를 이용해 대략적인 쌍곡선의 개형을 추론할 수 있습니다. 첫 번째 문제를 해결하기 위한 열쇠는 반지름의 길이가 일정하게 증가하는 동심원을 그리는 방법입니다.

한편 두 점을 지나는 원은 무한히 많지만 세 점을 지나는 원은 유일합니다. 두 점과 그 두 점의 대각을 알 때도 원이 유일하게 결정된다는 성질을 이해하고, 이를 이용해 배의 위치를 찾는 방법을 알아봅시다.

▶ 예시답안

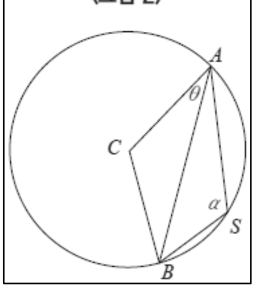
1) 쌍곡선은 평면상에서 초점인 두 고정 점까지의 거리 차가 일정한 점들의 자취이다. <그림1>처럼 각 초점을 중심으로 하고 반지름이 같은 동심원을 그렸을 때, 동심원이 만나는 곳을 연결하면 두 초점 상에서 여러 개의 쌍곡선 무리를 볼 수 있다.



〈그림 1〉

예를 들어 F_1, F_2 사이의 거리를 4등분하고 반지름이 $\frac{1}{4}\overline{F_1F_2}(=a)$ 인 동심원을 그리고, 이때 생기는 교점 S_1과 S_2를 생각해 보자. 길이 $\overline{S_1F_1}$은 $2a$이고 $\overline{S_1F_2}$는 $5a$이다. $|\overline{S_1F_1}-\overline{S_1F_2}|=|\overline{S_2F_1}-\overline{S_2F_2}|=2a$라는 식을 만족하는 S_i를 찾은 뒤 이런 점을 연결하면 쌍곡선을 찾아낼 수 있다. A, B 사이의 거리를 $2n$등분한 뒤 $n\to\infty$로 보내는 극한을 생각하면 더 정확한 곡선을 찾을 수 있다.

2) 두 점과 두 점을 연결한 선분의 대각이 정해지면 원은 유일하게 결정된다. 그 이유는 다음과 같다. <그림2>의 호 위에 점 S가 존재하면 AB의 대각 α와 ∠ASB가 같지만, 점 S가 호 내부에 존재하면 ∠ASB가 α보다 커지고, 점 S가 호 외부에 존재하면 ∠ASB가 α보다 작아지기 때문에 각이 정해지면 원이 유일하게 결정된다. 반지름과 두 점을 연결한 선분이 이루는 각 θ의 크기는 '원주각−90°'로 정해지는데 그 이유는 다음과 같다.

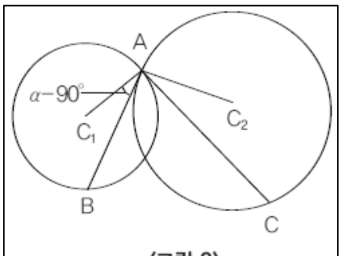
〈그림 2〉


다시 <그림2>와 같은 원을 생각하자. $\angle ASB=\alpha$라 하면 중심각은 2α가 되고 $\angle ACB=360°-2\alpha$가 된다.

△ACB는 이등변삼각형이므로 ∠CAB=θ라 하면 $360°-2\alpha+2\theta=180°$에서 $\theta=\alpha-90°$가 된다. 이런 성질을 이용해 배의 위치를 추정하면 다음과 같다.

점 A를 지나며 $\overline{AB}$와 $\alpha-90°$의 각을 이루는 직선과 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 교점이 배가 위치한 점과 A, B 지점을 지나는 원의 중심이 된다. 단 α는 배에서 A, B를 바라본 각이다. 이 원을 C_1이라 하자.

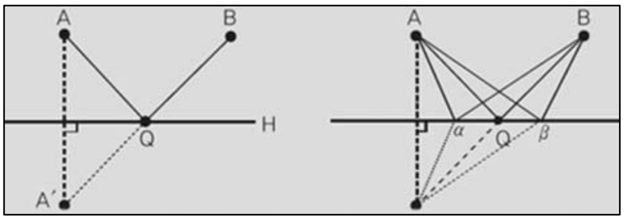
같은 방법으로 배가 위치한 점과 A, C 지점을 지나는 원을 찾을 수 있는데, 이 원을 C_2라 하면 C_1과 C_2는 두 점에서 만난다. A를 제외한 나머지 점이 배의 위치가 된다(<그림3> 참조).



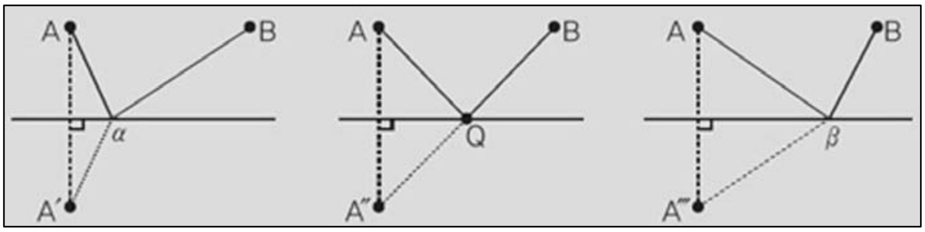
〈그림 3〉

문제2. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

점 A에서 점 B까지 가려면 직선 H 위의 점을 반드시 거쳐야 한다고 가정하자. 이때 점 A′를 직선 H에 대한 점 A의 대칭점이라 하고, 점 Q를 직선 A′B와 직선 H의 교점이라 할 때, 경로 A→Q→B가 H 선상에 있는 다름 점을 거치는 방법보다 더 짧다는 사실을 오른쪽과 같이 생각할 수 있다. 점 Q보다 왼쪽에 있는 임의의 점을 α, 점 Q보다 오름쪽에 있는 임의의 점을 β라 하자. 점 A에서 직선 H를 거쳐 점 B로 갈 때 경로의 총 길이는 이 경로가 거쳐 가는 각각의 점에 따라 다음과 같다.



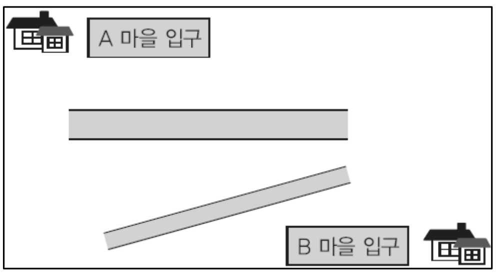
① α의 경우　② Q의 경우　③ β의 경우



경로 길이=$\overline{A'\alpha}+\overline{\alpha B}$　경로 길이=$\overline{A'\alpha}+\overline{\alpha B}$　경로 길이=$\overline{A'\alpha}+\overline{\alpha B}$

이때 두 선분의 합은 A의 대칭점과 B를 직선으로 이을 때 최소이므로 최단 경로는 Q점을 지날 때다.−2008학년도 경기대 모의논술 응용

오른쪽 그림과 같이 두 개의 강을 사이에 둔 두 마을이 있다. 두 마을을 최단거리로 이동할 수 있게 도로와 다리를 건설하려면 어떻게 해야 하는가. 단 다리는 강과 직각을 이루도록 건설해야 한다.

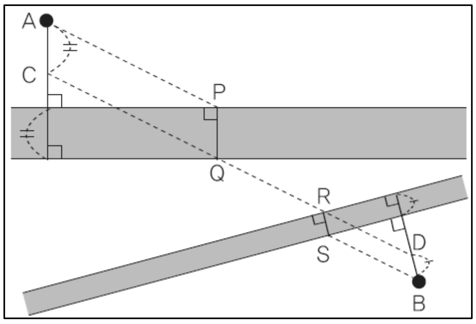


▶ 전문가 클리닉

합동인 삼각형을 이용해 같은 길이의 경로를 만들듯이 평행사변형의 대변 길이를 이용해도 같은

길이의 경로를 만들 수 있습니다.

▶ 예시답안



다리는 강에 수직으로 놓아야 하므로 이를 고려해 두 마을을 연결하는 가장 적당한 다리의 위치를 찾아야 한다. A 마을과 B 마을을 잇는 경로에서 두 강폭만큼의 길이는 항상 포함된다. 마을에서 강에 도달한 뒤 수직으로 강을 건널 때의 길이는 A마을에서 수직으로 강폭만큼 내려온 뒤 그 지점에서 강 건너편 지점까지 간 직선거리와 같다.

우선 두 마을에서 강까지 직각으로 직선거리를 그린다. 그런 다음 두 마을로부터 각각 다리 길이만큼 강에 대해 수직으로 나아간 위치에 점 C와 D를 잡은 뒤 점 C와 D를 직선으로 연결한다. 그러면 A→C→D→B가 최단 경로가 된다. 이제 그림에서 CQ와 평행한 선분을 점 A로부터 그려 강과 만나는 위치를 찾고, 그 점을 P라 하면 □ACQP는 평행사변형이 된다. 마찬가지로 점 B를 한 점으로 갖는 평행사변형 BDRS를 만든다. 이로부터 경로 A→C→D→B와 길이가 같은 최단거리의 도로를 건설할 수 있다. 이때의 경로는 A→P→Q→R→S→B이다.

2007년 10월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]합리적인 선거 방식

문제1. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 다음은 케네스 애로우의 '불가능성 정리'의 내용이다. 불가능성 정리는 총 다섯 가지 원리로 구성된다.

① 파레토 원리:모두가 A보다 B를 원하면 사회적 선택도 A가 아닌 B가 돼야 한다.

② 이행성 원리:A>B이고 B>C이면 A>C가 돼야 한다.

③ 독립성 원리:A와 B를 비교할 때 이들과 무관한 대안(C)의 존재는 이들의 비교에 아무런 영향을 주지 않아야 한다. 즉 무관한 선택 대안으로부터 영향을 받지 않고 결정돼야 한다.

④ 선호의 비제한성 원리(완비성 원리):모든 사회적 상태를 비교하고 평가할 수 있어야 한다. 개개인의 모든 선호가 충분히 고려되고 이들 선호의 우선순위에 대해서도 아무런 제한이 없어야 하며, 자신의 선호에 일치하는 대안을 선택할 수 있는 자유가 보장돼야 한다.

⑤ 비독재성 원리:사회적 의사결정이 한 사람에 의해 이뤄져서는 안 된다.

(나) 이화네 반 100명이 반장 선거를 했다. 학급학생 모두에게 투표용지를 한 장씩 나눠주고 자기가 좋아하는 네 명의 반장 후보 A, B, C, D를 선호하는 순서대로 적게 했다. 반장을 선출할 방법을 결정하기 위해 다섯 학생은 다음과 같이 각자 자신의 의견을 말했다.

투표용지	투표용지	투표용지	투표용지	투표용지
1위 A	1위 C	1위 D	1위 B	1위 C
2위 B	2위 B	2위 C	2위 D	2위 D
3위 C	3위 D	3위 B	3위 C	3위 B
4위 D	4위 A	4위 A	4위 A	4위 A
14표	10표	8표	4표	1표

① 이화:1위를 가장 많이 차지한 학생을 반장으로 선출하자.

② 창훈:1위를 차지한 득표수가 전체의 절반이 넘는 사람을 선출하자.

③ 봉수:1위에게 4점을, 2위에게 3점을, 3위에게 2점을, 4위에게 1점을 주고 점수가 가장 높은 후보를 선출하자.

④ 철주:선거 결과에서 1위를 가장 적게 차지한 후보를 지운 뒤 다시 작성하는 방법을 반복해 마지막에 남는 후보를 선출하자.

⑤ 은향:임의의 두 후보끼리 서로 비교해 우세한 후보를 1점, 열세한 후보는 0점, 비겼을 경우엔 양쪽에 0.5점을 주고 가장 높은 점수를 얻은 후보를 선출하자.

(다) A지역에 쓰레기소각장을 설치하는 안건을 가지고 주민자치단체에서 지역대표를 뽑아 결정하기로 했다. 주민 수가 각각 100명, 200명, 300명, 400명인 네 지역으로 구분돼있는 자치단체가 있다. 이 자치단체의 한 위원회는 각 지역을 대표하는 위원 a, b, c, d로 구성되는데, 주민 수에 비례해 a는 1표, b는 2표, c는 3표, d는 4표의 투표 권한을 갖기로 한다. 쓰레기소각장설치안이 통과되려면 적어도 6표 이상을 받아야 한다.

1) 제시문 (나)의 선거 결과와 학생들의 의견에 따른 결과를 예측하고, 가장 민주적이고 합리

적인 선출 방법에 대한 자신의 의견을 논술하라.

2) 갑은 제시문 (다)에서 위원 a, b, c, d의 투표 결과에 대한 영향력이 각 위원의 투표수에 비례해 1:2:3:4가 될 것이라고 예상했다. 그러나을은 투표 결과에 대한 영향력이 투표 수에 비례한다고 볼 수 없으며 각 위원의 표결이 결과에 미치는 실질적인 영향을 분석해야 한다고 주장했다. 수리적 논리에 근거해 갑과 을의 주장에 대한 자신의 의견을 논술하라.

▶ 전문가 클리닉

선거의 의미와 구성 방식을 논하는 문제입니다. 올 12월에는 우리나라에서 대통령 선거가 치러집니다. 많은 사람이 대통령 선거에 관심을 갖고 지켜보고 있습니다. 선거에 관한 문제가 입시에서 출제될 가능성이 높으므로 다양한 유형을 찾아 풀어보기 바랍니다.

▶ 예시답안

1) 이화:A가 당선된다.

창훈:1위를 가장 많이 차지한 A의 득표수가 절반이 안 되므로 당선자를 결정할 수 없다.

봉수:1위는 B, 2위는 C, 3위는 D, 4위는 A가 된다.

철주:D가 당선된다.

은향:다음과 같은 분석 결과 C가 당선된다.

A:B=14 : 23, A는 0점, B는 1점

A:C=14 : 23, A는 0점, C는 1점

A:D=14 : 23, A는 0점, D는 1점

B:C=18 : 19, B는 0점, C는 1점

B:D=28 : 9, B는 1점, D는 0점

C:D=25 : 12, C는 1점, D는 0점

따라서 A는 0점, B는 2점, C는 3점, D는 1점이다.

창훈의 방식으로 당선된 후보는 항상 이화의 방식으로도 당선된다. 그러나 봉수의 방식으로는 항상 당선된다고 보기 어렵다. 예를 들어 전체 37표 중 A가 1위 20표, 4위 17표를 얻고, B는 1위 17표, 2위 20표를 얻는다고 가정하자. $A=4\times20+1\times17=97$, $B=4\times17+3\times20=128$이 돼 B가 당선된다.

개표 결과가 같아도 당선자 결정 방법에 따라 당선자가 달라질 수 있다. 그러므로 선거를 하기 전에 그 선거에 맞는 당선자 결정 방법을 정해야 한다. 일반적으로 공정한 선거에서 당선자를 결정할 때는 다음 사항을 고려한다.

찬성	찬성표 수	통과 또는 부결	찬성	찬성표 수	통과 또는 부결
없음	0	부결	b, c	5	부결
a	1	부결	b, d	6	통과
b	2	부결	c, d	7	통과
c	3	부결	a, b, c	6	통과
d	4	부결	a, b, d	7	통과
a, b	5	부결	a, c, d	8	통과
a, c	6	부결	b, c, d	9	통과
a, d	7	부결	a, b, c, d	10	통과

① 1위를 차지한 후보의 득표수가 전체 투표수의 절반을 넘으면 그 후보를 당선자로 한다.

② 두 후보끼리만 선호도를 비교할 때, 한 후보 X가 다른 어떤 후

보보다 항상 더 선호되면 X는 그 선거의 당선자가 된다.

③ 몇 명의 투표자가 이전보다 X에게 더 유리하게 투표하고, 나머지 투표자는 이전과 동일한 후보에게 투표한 재선거에서도 기존 당선자 X가 당선된다.

④ 당선자 X는 한 낙선자가 사퇴해 그 낙선자를 제외한 뒤 재검표해도 다시 당선된다.

2) a, b, c, d 위원들이 투표할 때 개표 결과로 올 수 있는 모든 경우를 다음 표에 나타내고 각 경우에 안건이 통과될 것인지 또는 부결될 것인지를 결정했다.

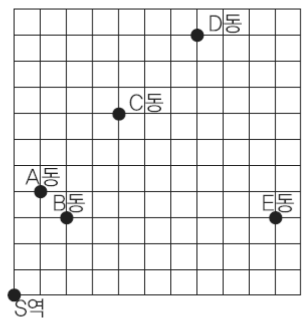
을은 투표에 대한 영향력이 투표수에 비례하지 않는다고 생각했다. 을은 각 위원의 표결이 결과에 미치는 실질적인 영향을 분석하기 위해 대표위원 한 명이 찬성해 통과된 안을 반대로 투표하면 부결로 바뀌는 경우를 다음 표처럼 구했다.

	통과에서 부결로 바뀌는 경우의 수	비율
a	1	$\frac{1}{12}$
b	3	$\frac{3}{12}$
c	3	$\frac{3}{12}$
d	5	$\frac{5}{12}$
합계	12	1

같은 투표수를 갖고도 안건이 통과에서 부결로 바뀌는 경우는 a:1/12, b:3/12, c:3/12, d:5/12이다. 대표위원의 투표권한은 주민 수에 비례하지만,을의 의견처럼 이것이 투표결과에 미치는 영향력은 반드시 주민 수에 비례하지는 않는다고 결론내릴 수 있다.

문제2. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

님비는 마이클 헤어가 그의 논문에서 처음 사용한 이래로, 혐오시설의 입지계획을 반대하는 지역주민의 슬로건으로 쓰였다. 님비는 기본적으로 혐오시설의 적정입지를 제한해 발생하는데, 그 원인으로는 비민주적인 방법에 의한 입지결정과정, 미흡한 환경영향평가, 주민의견수렴 미약이 꼽힌다. 핵폐기물 처리장, 쓰레기 처리장, 화장시설, 장애자 수용시설, 교도소처럼 심리적 혐오감을 주는 시설과 대규모 댐, 고속도로나 공항처럼 쾌적한 주거환경에 손상을 미치는 공공시설이 님비 대상에 포함된다.



한 지방자치단체에서 경전철의 도입을 추진했으나 특정 지역의 주민들이 반대했다. 경전철 사업담당자는 다음 그림에서 S역을 지나는 직선 선로를 건설하려 한다. 경전철 사업담당자는 주민들을 설득하기 위해 이 지역 내 주요 지점 5곳인 A, B, C, D, E와 경전철 정거장 5곳을 각각 연결하는 무료 셔틀버스를 운영한다는 계획을 발표했다.

지역 내 주요 지점 5곳과 경전철 정거장 건설에 적절한 위치는 각각 남북방향의 도로로 연결돼 있어 무료 셔틀버스는 남북방향의 도로를 왕복하면 된다. 각 지점과 도로를 그림으로 나타내면 그림과 같다.

셔틀버스를 운영하는 데 필요한 운영비용은 주요 지점에서 경전철 정거장에 이르는 거리 제곱의 총합에 비례한다. 셔틀버스의 운영비용을 최소로 하기 위해서는 직선 경전철을 어떤 방향으로 설계해야 하는지 논하라. 단 어떤 방향의 직선 경전철도 건설하는 데 따르는 기술적 어려움은 없다고 가정한다.

▶ 전문가 클리닉

사회적 이슈를 수리적으로 타당성 있게 분석할 것을 요구하는 문제입니다. 수리적인 방법으로

이견을 절충하고, 집단 간의 이기주의를 해결해봅시다.

▶ 예시답안

S역을 중심으로 하는 좌표계를 생각해보자. S역에서 동쪽으로 뻗어나가는 도로를 x축이라 하고 북쪽으로 뻗어나가는 도로를 y축이라 하면 각 동의 좌표를 정할 수 있다. 한 교차로에서 다음 교차로까지의 거리를 1이라고 한다면, A동의 좌표는 (1, 4), B동은 (2, 3), C동은 (4, 7), D동은 (7, 10), E동은 (10, 3)으로 나타낼 수 있다.

경전철은 S역, 즉 좌표 (0, 0)을 지나는 직선 형태이므로 좌표 상에 $y=ax$로 그릴 수 있다. 셔틀버스는 각 동에서 경전철까지 남북방향을 왕복하므로, 각 셔틀버스가 경전철에서 출발하는 정거장을 각각 (1, a), (2, 2a), (4, 4a), (7, 7a), (10, 10a)라고 둘 수 있다.

셔틀버스 운행비용 $f(x)$는 각 지점에서 정거장에 이르는 거리 제곱의 총합에 비례한다고 했으므로 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$f(x)=k\{(4-a)^2+(3-2a)^2+(7-4a)^2+(10-7a)^2+(3-10a)^2\}\ (\text{k:비례상수})$$

이 식을 간단히 하면 $f(x)=k(170a^2-276a+183)$이고, 도함수를 구하면 $f'(x)=k(340a-276)$이며 $a=\frac{276}{340}=\frac{69}{85}$가 되는 점에서 극소값, 즉 최소값을 가진다.

따라서 경전철은 기울기가 $\frac{69}{85}$인 직선 형태로 설계해야 한다.

2007년 11월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]미적분과 삼각함수의 응용

문제1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx$ 　단 $\Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+\Delta x\cdot(k-1)$

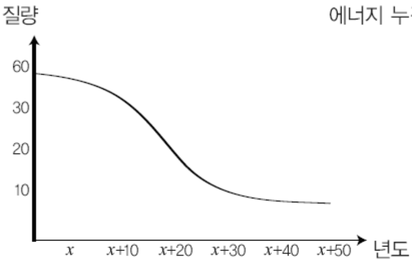
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$

(나) 온실효과는 대기가 복사에너지를 선택적으로 흡수하기 때문에 일어난다. 수증기와 이산화탄소는 태양복사에너지인 자외선을 투과시키지만 지구복사에너지인 적외선을 흡수한다. 대기를 통과한 자외선은 지구를 가열시켜 지구는 새로운 에너지를 복사한다.

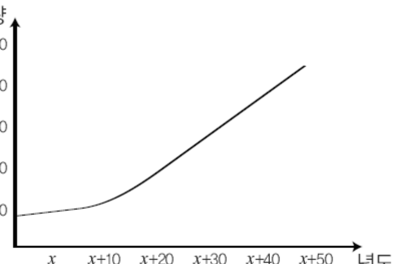
전세계 환경 전문가들은 과도한 온실효과가 여러 부작용을 낳을 수 있다고 주장한다. 즉 지표면의 사막이 늘어나고, 극지방과 높은 산의 빙하가 녹아 해수면이 상승하고, 불균등한 지역적 가열로 거센 바람과 태풍의 발생빈도가 높아진다. 이때문에 대표적인 온실가스인 이산화탄소량을 줄이는 노력이 시급하다.

이산화탄소는 주로 석탄이나 석유 같은 화석연료에서 배출된다. 동일한 연료를 사용한다면 이산화탄소 발생량은 에너지 소비량에 비례한다. 전문가들은 단위에너지소비당 이산화탄소 발생량을 줄이는 기술을 활발히 연구하고 있다.

1) A국 정부는 단위에너지소비당 이산화탄소 발생량을 감소시키기 위한 기술을 연구하는 B 연구소를 지원하고 있다. B연구소의 개발 성과를 적용하면 A국에서는 앞으로 50년간 단위에너지소비당 이산화탄소 발생량이 <그림1>처럼 줄어들 것이라는 관측이 나왔다. 에너지 소비의 총 누적량이 <그림2> 처럼 증가한다고 가정할 때, 향후 50년 동안 이산화탄소 발생량을 추정할 수 있는 수리적 모델을 제시하고 간략히 설명하라. 단 그래프에서 x는 현재 시점을 의미한다.



〈그림 1〉



〈그림 2〉

2) 특정 기간 동안 발생한 이산화탄소의 총량을 1)번에서 제시한 수리적 모델을 이용해 표현하라.

▶ 전문가 클리닉

올해 각 대학의 예시문항에서 정적분을 이용해 부피나 넓이를 추정하는 방법이 중요한 주제로 떠올랐습니다. 이번 문제는 정적분뿐 아니라 도함수의 정의를 이용해 두 함수 간 특정한 관계 변화를 분석하는 방법을 제시하는 문제입니다. 이 문제에서 학생들이 처음으로 부딪히는 어려움은 주어진 그래프의 함수를 정확히 식으로 표현할 수 없다는 점입니다. 이럴 때는 먼저 f(t)나 g(t) 같은 일반적인 함수로 놓고 서술하는 방식이 문제해결의 중요한 실마리가 될 것입니다.

▶ **예시답안**

1) 이산화탄소 총 발생량은 'α(단위에너지소비당 이산화탄소 발생량)×(총 에너지 소비량)'으로 구할 수 있다(α:비례상수). 하지만 단위에너지소비당 이산화탄소 발생량이 <그림1>처럼 점차 줄기 때문에 매 순간마다 에너지 소비량에 대한 이산화탄소 총 발생량을 계산하고 그것을 모두 합하면 50년간 발생된 이산화탄소 총 발생량이 된다.

먼저 <그림1>에서 t년의 단위에너지소비당 이산화탄소 발생량을 $f(t)$, <그림2>에서 t년까지의 에너지 총 소비량 그래프를 $g(t)$라 가정하자. 현재 (x)부터 $\frac{x+50}{n}$년까지(첫 번째 기간: t_1) 에너지 소비량은 $g(\frac{x+50}{n})-g(x)$, 해당 기간 동안 이산화탄소 발생량은 $\alpha \cdot f(x)$라 근사할 수 있다.

이런 방법으로 k번째 기간의 이산화탄소 발생량은 $\alpha \cdot f(t_k) \cdot \{g(t_k+\Delta t-g(t_k)\}$라 할 수 있으므로 50년간 이산화탄소 총 발생량은 다음과 같은 무한급수로 표현할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha \cdot f(t_k) \cdot \{g(t_k+\Delta t)-g(t_k)\} \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

단 $\lim_{n\to\infty} t_n = x+50,\ t_1 = x,\ \Delta t = \frac{50}{n}$

식 ①은 제시문 (가)에서 정적분과 도함수의 정의를 이용해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha \cdot f(t_k) \cdot \frac{\{g(t_k+\Delta t)-g(t_k)\}}{\Delta t} \cdot \Delta t$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha \cdot f(t_k) \cdot g'(t_k) \cdot \Delta t$$

$$=\int_x^{x+50}\alpha \cdot f(t) \cdot g'(t)\,dt$$

즉 $\alpha \cdot \int_x^{x+50} f(t) \cdot g'(t)\,dt$가 현재부터 50년간 발생하는 이산화탄소의 총 발생량이다.

2) 특정 기간을 $a \sim b$라 하면(단 $x \leqq a < b \leqq x+50$) 이산화탄소 총 발생량은 $\alpha\int_a^b f(t) \cdot g'(t)\,dt$이다.

문제2 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 기원전 3세기에 창안된 아르키메데스의 다각형 법을 이용하면 이론적으로는 원주율 π를 소수점 아래로 계속 구해나갈 수 있으나, 이를 실제로 계산하기엔 어려움이 있다. 16세기 독일의 루돌프 쿨렌이 평생 동안 원주율을 계산해 소수점 아래 35자리까지 구했다는 예가 이를 뒷받침한다. 다각형 법으로는 π를 소수점 아래 40자리까지 계산한 게 고작이었다. 17세기에 아이작 뉴턴과 고트프리드 라이프니츠는 미적분학과 π를 무한급수로 나타내는 식을 발견했다. 이 식을 이용하면 다각형 법을 이용할 때보다 더 쉽게 π의 근사값을 계산할 수 있었다. 무한급수를 이용해 값을 처음 계산한 사람은 바로 제임스 그레고리였다.

그는 $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$라는 무한급수를 발견했다.

이 식은 $\frac{\pi}{8}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\cdots$과 같이 바꿔 쓸 수 있다.

아무리 소수점 아래로 계속 구해나간다 하더라도 근사값일 뿐 정확한 π를 구할 수 없다. 왜냐하면 π는 순환하지 않는 무한소수, 즉 무리수이기 때문이다.

(나) 현대수학에서 π를 계산하는 방법은 고전적인 방법과 다르다. 가장 대표적인 방법은 함수를 이용하는 것이다. 예를 들어 $\tan\frac{\pi}{4}=1$이다. 만약 탄젠트 함수의 역함수를 구할 수 있다면 $\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}1$이므로 π를 계산할 수 있다. 탄젠트 함수의 역함수는, 탄젠트 함수의 역함수의 도함수를 구해 그것을 무한급수 형태로 바꾼 뒤 적분하면 구할 수 있다.

(다) $f(x)=1-x^2+x^4-x^6+x^8\cdots$로 표현되는 함수 $f(x)$를 다르게 나타내면 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(-x^2)^n}{1-(-x^2)}$이다. 이때 x값의 범위에 따라 극한값은 수렴하기도 하고 발산하기도 한다. $-1<x<1$일 때 이 함수는 수렴하고 폐구간 $[-1,\ 1]$에서 연속함수라는 점이 밝혀졌다.

1) 고대인은 π를 정확히 구하기 전에 이미 원주율과 원넓이의 관계를 알았다고 한다. 삼각비를 사용하지 않고 어떻게 이 관계를 알았는지 추론하라. 단, 원주율 $=\frac{\text{원의 둘레}}{\text{지름}}$이라는 관계를 이용하라.

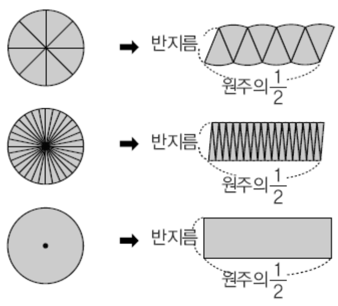
2) 제시문 (가)~(다)를 읽고 삼각함수를 이용해 π를 구하는 방법을 추론하라.

▶ 전문가 클리닉

1)번 문제는 교과서에 자주 등장하는 내용입니다. 삼각비를 알 수 없는 상황에서 원넓이를 추정해야 하기 때문에 원넓이를 직사각형 모양으로 만들 수 있는 방법을 생각해야 합니다. 주어진 예시답변과 다른 내용의 추론도 가능합니다. 2)번 문제는 삼각함수의 역함수를 그 역함수의 도함수를 이용해 찾아야 합니다.

▶ 예시답안

1) <그림3>처럼 반지름 r인 원을 2n등분해 번갈아가며 나열해보자. n값이 커질수록 직사각형 모양에 가까워짐을 알 수 있다. 한없이 n값이 커져 직사각형이 되면 이 넓이로 원의 넓이를 구할 수 있다. 직사각형의 높이는 원의 반지름 r과 같고 밑변의 길이는 원둘레의 반과 같다. 윗변과 밑변의 합이 원둘레의 길이와 같기 때문이다. 이렇게 만들어진 직사각형 넓이는 '$r\times\frac{1}{2}$원둘레'이고, 원주율 π는 지름 $2r$에 대한 원둘레의 비율이므로 원의 넓이는 '$r^2\times\pi$'이다.



<그림3>

2) 제시문 (나)에는 π가 $4\tan^{-1}1$이며, 탄젠트 함수의 역함수를 구하면 π를 추정할 수 있다고 나와 있다. 또 탄젠트 함수의 역함수는 그 역함수의 도함수를 이용해 구해야 한다. 하지만 이를 직접 구할 수는 없다. 따라서 역함수의 정의를 이용해 탄젠트 함수를 미분하면 탄젠트 함수의 역함

수를 구해야 한다. 그 과정을 간략히 나타내면 다음과 같다.

탄젠트 함수의 역함수를 $y=\tan^{-1}x$라 하면 탄젠트 함수의 역함수의 도함수는 $\frac{dy}{dx}$이다.

역함수의 정의를 따르면

$x=\tan y$ ········· ①

이다. 이 식을 x에 대해 미분하면

$$1=\sec^2 y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec^2 y}=\cos^2 y\ \left(\because \cos y=\frac{1}{\sec y}\right)$$ ········· ②

이다. 식 ①에서 각 y에 대한 탄젠트 값이 x이므로 $\cos y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$이고, 이 결과를 식 ②에 적용하면 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

이를 제시문 (다)의 무한급수 형태로 나타내면

$$\frac{dy}{dx}=1-x^2+x^4-x^6+x^8\cdots$$

을 얻을 수 있다. 다시 양변을 x에 대해 적분하면

$$y+C=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{11}x^{11}+\cdots$$

(단 C는 적분상수)

이다. 이때 $x=0$이면 $y=0$이므로 적분상수 C는 0이다. 결국

$$\tan^{-1}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{11}x^{11}+\cdots$$

이므로, $\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}1$에 의해

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$$

이다. 이렇게 탄젠트 함수의 역함수를 이용해 π를 구할 수 있다.

문제3 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 통신로가 불량하거나 전파 방해가 심한 경우에는 통신문이 제대로 전송되지 않고 오류가 발생한다. 즉 0과 1 중 한 숫자를 송신자가 정해 전달하는 경우 중간 경로에서 잡음이 발생해 다른 값이 전달될 수도 있다. 예를 들어 송신자가 0 또는 1로 이뤄진 10자리 수를 전달할 때 중간 경로에서 잡음이 발생해 0은 1로, 1은 0으로 잘못 전달될 확률이 각각 0.02라고 하자. 수신자가 송신자 수를 정확하게 받을 확률은 0.9810이고, 상용로그표를 이용해 이 값을 계산하면 0.81이다. 따라서 수신자가 송신자의 10자리 수를 정확하게 받을 확률은 약 81%다.

자리수가 커질수록 정확하게 받을 확률은 더욱 낮아진다. 이를 극복하기 위해 메시지에 여분의 자리(0과 1로 된)를 덧붙여 원래 메시지 대신 부호화된 메시지를 전송한다. 부호화된 메시지는 채택된 '부호'의 원소이며, 부호는 일정한 길이를 갖는 0, 1 수열의 집합이다. 그러면 오류가 발생해도 대부분 수정이 가능해 원래 의도한 메시지를 제대로 전달할 수 있다.

(나) 통신로는 '메시지→부호기→통신로→수신된 메시지→복호기→메시지' 같은 도식으로 표현

할 수 있다. 메시지가 단순히 0과 1이고 부호기에서 0은 000으로, 1은 111로 전환해 전송한다고 가정하자. 이 경우 채택된 부호는이다. 통신로가 1개 이하의 오류만 발생한다고 고려하면, 통신로에서 잡음으로 111이 101로 수신돼도 복호기는 이를 111로 바르게 복호해 원래 메시지 1을 전달할 수 있다. 이때 메시지는 1→111→잡음→101→111→1의 단계를 거친다. 복호 알고리즘은 단순히 '수신된 메시지에서 0과 1의 개수를 센다'와 'x(0 또는 1)가 더 많이 나타나면 이를 x로 전달한다'가 된다.

(다) 다음 표는 '봄' '여름' '가을' '겨울'의 네 가지 정보를 두 자리 이진수를 이용해 세 가지 방법 D1, D2, D3로 부호화하는 방법의 예다.

	봄	여름	가을	겨울
D1	00	01	10	11
D2	000	011	101	110
D3	0000	01101	10110	11011

세 가지 방법 중 D1은 오류 검출이 불가능하며, D2는 1개의 오류를 검출할 수 있고, D3는 2개 이하의 오류를 검출할 수 있다.

1) 제시문 (가)와 (나)를 읽고 제시문 (나)의 통신방법이 부호화되지 않는 통신방법보다 효과적임을 보여라.

2) 제시문 (다)에서 밑줄 친 부분의 내용이 성립하도록 D2와 D3의 부호화 방법을 추론하라.

3) 1개의 오류가 발생했을 때 D2와 D3 방식의 복호가능성에 대하여 논하라.

▶ 전문가 클리닉

자연계열뿐 아니라 인문계열의 수리논술 문항으로도 출제될 수 있는 내용입니다. 1)번 문제에서는 '효과적인 통신방법'이 무엇을 뜻하는지 정확히 파악하고 메시지 숫자의 개수와 숫자 1개가 정확히 전달될 확률을 일반화해 논술하는 편이 바람직합니다. 2)번 문제에서는 각 부호화 방법을 여러 각도에서 생각해보고 밑줄 친 내용에 부합되는 방법을 선택하는 편이 중요합니다. 3)번 문제에서 학생들이 주로 범하는 실수는 단순히 몇 개의 경우로 복호가능하다고 성급하게 결론짓는다는 점입니다.

▶ 예시답안

1) 제시문 (가), (나)를 참고할 때 효과적인 통신방법이란 정확한 통신방법을 의미한다. 즉 제시문 (나)에서 설명하는 통신방법이 부호화되지 않은 통신방법보다 더 정확하다는 점을 보이면 된다. n개의 숫자로 이뤄진 메시지를 제시문 (나)의 방법대로 부호화하면 $3n$개의 숫자로 이뤄진 메시지가 된다. 한 개의 숫자가 정확히 전송될 확률을 p라 하면 부호화되지 않은 n개 메시지가 정확히 전달될 확률은 p^n이다.

같은 숫자를 3번 반복해 부호화된 $3n$개 숫자로 이뤄진 메시지가 정확히 전달될 확률은 수신자가 복호과정을 거쳐 원래 메시지를 정확히 알 수 있는 확률을 말한다. 1개 숫자를 3번 반복해 정확히 전달될 확률을 Q라 하면 $3n$개 메시지가 정확히 전달될 확률은 Q^n이라 할 수 있고, $p^n < Q^n$이라는 점을 보이면 부호화된 메시지가 더 효율적임을 알 수 있다.

Q는 세 숫자가 원래 숫자로 복호될 확률이므로 세 숫자가 정확히 전송될 확률 p^3과 두 숫

자가 정확히 전송될 확률 $3p^2(1-p)$을 포함한다. 즉 $Q=p^3+3p^2(1-p)$이다. 여기서 $p^n < Q^n$는 p, Q가 모두 0과 1 사이의 양수이므로 $p<Q$와 같은 조건이다.

$p<Q \Leftrightarrow p<p^3+3p^2(1-p)$이고, 이것을 정리하면 $p(2p-1)(p-1)<0$이다. 이는 $\frac{1}{2}<p<1$일 때 $p<Q$이므로 $pn<Qn$이다. 이 결과는 부호화된 방법이 정확도 면에서 더 효과적임을 뜻한다. 그런데 제시문 (가)에서 알 수 있듯 숫자 1개가 정확히 전송될 확률은 보다 크므로 제시문 (나)에 설명된 부호화 방법이 더 효과적이다.

2) D1에서 두 개의 숫자를 x_1, x_2라 하면 D2는 x_1, x_2, x_3이고 x_3는 '$x_1+x_2+x_3=$짝수'가 되도록 부호화한다. x_1, x_2, x_3 중 한 개 숫자만 오류가 발생하면 원래 합 $x_1+x_2+x_3$과 항상 1만큼 차이가 난다. 그러면 홀수가 돼 오류가 발생했다는 사실을 알 수 있다.

D3는 D2의 숫자에 D1을 이어붙여 부호화했다. 즉 D3를 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5라 할 때 앞의 세 숫자 x_1, x_2, x_3는 D2이고 뒤의 두 숫자 x_4, x_5는 $x_1=x_4$, $x_2=x_5$가 성립하도록 부호화했다. 이렇게 부호화된 D3를 이용하면 두 개 이하의 오류를 항상 검출할 수 있다. 이를 보이면 다음과 같다. 단 '$x_1+x_2+x_3=$짝수'가 성립하는 조건을 A, '$x_1=x_4$'가 성립하는 조건을 B, '$x_2=x_5$'가 성립하는 조건을 C라 하고 각각이 성립하지 않는 조건을 A^c, B^c, C^c이라 한다.

먼저 한 개의 오류가 생겼을 때는 D1, D2, D3에서 오류를 모두 검출할 수 있다.

- x_1, x_2, x_3 중 한 개의 오류가 있으면 A^c가 돼 오류 검출.
- x_4가 오류이면 B^c가 돼 오류 검출.
- x_5가 오류이면 C^c가 돼 오류 검출.

두 개의 오류가 생겼을 때를 경우별로 살펴보면 다음과 같이 오류를 모두 검출할 수 있다.

- x_1, x_2, x_3 중 두 개의 오류가 있으면 A는 만족하지만 B와 C 중 적어도 한 개 이상의 조건에서 B^c 또는 C^c가 돼 오류 검출.
- x_1, x_2, x_3 중 한 개와 x_4, x_5 중 한 개에 오류가 있으면 A^c가 돼 오류 검출.
- x_4, x_5 모두 오류이면 B^c와 C^c가 돼 오류 검출.

3) 복호가능하다는 점은 다른 오류 형태에서 발생하는 검출 형태가 서로 달라야 한다는 점을 뜻한다. 즉 오류 형태의 경우보다 검출 형태의 경우의 수가 작아서는 안 된다. D2 방법에서는 한 개의 오류가 발생하는 형태는 3개인데, 검출 형태는 1개(A^c)이므로 복호가 안 된다. D3 방법에서 발생할 수 있는 5가지 경우의 오류와 검출 형태의 대응 관계를 표로 나타내면 다음과 같다.

D3에서의 오류 형태	검출 형태(조건)
x_1 오류	A^c, B^c, C^c
x_2 오류	A^c, B, C^c
x_3 오류	A^c, B, C
x_4 오류	A, B^c, C
x_5 오류	A, B, C^c

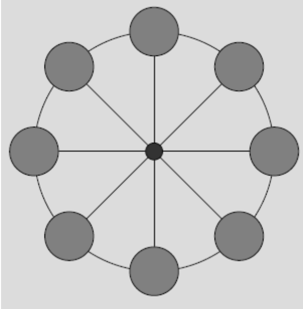
표에서 알 수 있듯 오류 형태에 대한 검출 형태가 모두 다르므로 D3 방법의 부호화 메시지는 1개의 오류에 대해서는 모두 복호가능하다.

2007년 12월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

놀이공원의 회전관람차는 출발 직후와 멈추기 직전을 제외하고 움직이는 동안에는 등속 원운동을 한다. 회전관람차에는 구 모양의 곤돌라가 달려있어 그 안에 사람이 탈 수 있는 구조라 가정하자.

하늘이는 휴일을 맞아 부모님과 놀이동산에 갔다. 회전관람차를 비롯해 여러 가지 놀이기구를 타다보니 벌써 저녁 무렵이었다. 관람차 중심에는 조명이 설치돼 사방을 밝게 비췄고 그 주위를 8개가 돌고 있었는데, 곤돌라에 의해 지면에 생긴 그림자가 인상적이었다.



〈8개의 곤돌라가 점광원을 중심으로 도는 회전관람차의 단면〉

곤돌라 그림자를 유심히 보던 하늘이는 낮에 햇빛 때문에 생긴 곤돌라 그림자의 모양과, 밤에 회전관람차 중심의 점광원으로 인해 생긴 곤돌라 그림자의 모양이 다르다는 것을 알았다. 햇빛 때문에 생긴 그림자의 모양은 곤돌라의 위치가 달라져도 크게 변하지 않았지만, 점광원 때문에 생긴 그림자는 곤돌라의 위치에 따라 다양한 모양을 나타냈다.

1) 하늘이가 낮에 본 곤돌라는 어떤 모양인지 곤돌라가 회전함에 따라 그 모양은 어떻게 바뀔지 설명하라. 단 빛의 회절이나 굴절, 반사에 의한 영향은 없다고 가정한다.

2) 하늘이가 밤에 본 곤돌라 그림자는 어떤 모양이며, 낮에 본 모양과 다른 이유는 무엇인지 설명하라. 또 곤돌라가 회전함에 따라 그 모양은 어떻게 변할지 추론하라.

3) 하늘이는 그림자의 모양에 대한 자신의 추론을 확인하기 위해 공간좌표에 점광원과 곤돌라를 표현했다. 점광원 S의 좌표를 (0, 0, 3), 곤돌라 중심 C의 좌표를 (0, 2, 2)라 할 때 그림자의 경계선이 나타내는 모양에 대해 논하라. 단 곤돌라의 반지름은 1이다.

▶ 전문가 클리닉

이차곡선의 출제 경향은 주로 원뿔 곡선의 기하학적인 증명이나 광학적 성질에 집중돼 있습니다. 이 문제는 원뿔곡선을 공간좌표에 나타내고 벡터를 이용해 해석하는 내용을 담고 있습니다. 벡터의 내적을 이용해 수식을 전개하면 됩니다.

▶ 예시답안

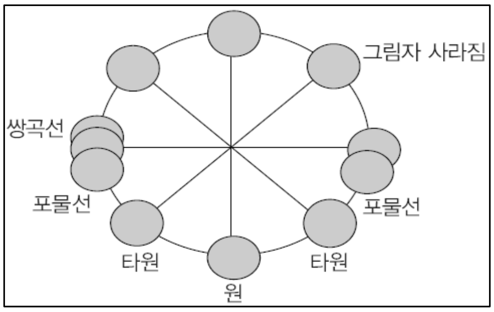
1) 태양은 지면을 기준으로 곤돌라보다 높은 곳에 위치하므로 곤돌라 그림자의 모양은 적도지역을 제외하곤 항상 타원이다. 하지만 태양 고도가 높아짐에 따라 장축 길이는 서서히 짧아지고, 태양 고도가 일정하다면 곤돌라 높이에 따른 그림자의 모양에 변화는 없을 것이다. 그 이유는 햇빛은 지구에 도달할 때까지 거의 평행하게 들어오고, 곤돌라에 의해 가려지는 공간이 원통 모양(이하 '그림자공간')이 되기 때문이다. 적도지역이 아니라면 '그림자공간'의 원통 모양이 지면에 대해 수직으로 향하지 않는다. 따라서 낮동안 태양으로 생긴 곤돌라 그림자는 원통을 비스듬하게 잘랐을 때의 단면인 타원 모양이 된다. 또 태양 고도가 일정할 때는 곤돌라의 위치가 높아지더라도 '그림자 공간'의 원통이 지면에 대해 이루는 각이 변하지 않기 때문에 그림자 모양에 변화가 거의 없고, 태양 고도가 높아지면'그림자

공간'과 지면이 이루는 각이 달라져 장축 길이는 짧아진다.

2) 밤에 하늘이가 본 곤돌라 1개에 의한 그림자의 모양은'원→타원→포물선→쌍곡선→그림자 사라짐→쌍곡선→포물선→타원'을 하나의 주기로 해 계속 반복된다.' 그림자 공간'은 점광원과 곤돌라의 중심을 연결한 직선을 중심축으로 하는 원뿔 모양의 공간을 만든다. 따라서 지면에 의한 그림자의 경계선은 원뿔을 잘랐을 때 생기는 원뿔곡선이 된다.

그림과 같이 곤돌라가 가장 아랫부분에 있을 때 '원뿔 모양 그림자 공간의 중심축'(이하 '중심축')이 지면과 수직이므로 그림자 경계선은 원이 되고, 중심축이 지면과 비스듬하고 곤돌라의 가장 높은 부분이 점광원의 높이보다 낮을 때 타원이 되며 같을 때(이 상태를 '모선 수평'이라 한다) 포물선이 된다. 또 곤돌라의 가장 높은 부분이 점광원의 높이보다 높을 때 쌍곡선이 되며, 곤돌라의 가장 낮은 부분까지 점광원보다 높으면 그림자는 사라진다.

참고로 '모선 수평'은 지면에 대해 원뿔공간의 모선이 점광원과 곤돌라의 가장 높은 부분을 연결한 직선이 될 때이고, 이때 곤돌라 그림자경계선의 모양은 포물선이 된다.



이렇듯 그림자의 모양이 낮과 밤에 다른 이유는 광원에서 나와 곤돌라를 지나 지면에 투영되는 '그림자 공간'이 원통 모양(낮의 평행한 빛에 의한)과 원뿔 모양(점광원−빛이 점점 퍼지는 것에 의한)으로 서로 다르기 때문이다. 또 곤돌라가 회전함에 따라 그림자의 모양이 바뀌는 이유는 모양의 중심축과 지면이 이루는 각도가 변하기 때문이다.

3) 곤돌라의 중심 C에서 점광원 S까지의 거리를 R, 곤돌라의 반지름을 r이라 하면, $R=\sqrt{5}$, $r=1$이다. 또 점광원에서 구에 접하는 임의의 직선을 l이라 하고, 점광원을 기준으로 직선 l과 평행한 벡터를 $\vec{l}$이라 하면 두 벡터 $\vec{l}$과 $\overrightarrow{SC}$를 내적한 결과는 다음과 같다. θ는 두벡터 사이의 각도다.

$$\vec{l}\circ\overrightarrow{SC}=|\vec{l}|\cdot|\overrightarrow{SC}|\cdot\cos\theta$$

여기서 $\overrightarrow{SC}=(0,2,-1)$, $|\overrightarrow{SC}|=R=\sqrt{5}$, $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

이다. S를 시점으로 하는 벡터 $\vec{l}$의 임의의 종점을 (x,y,z)라 하면 $\vec{l}=(x,y,z-3)$이므로 식 ①은

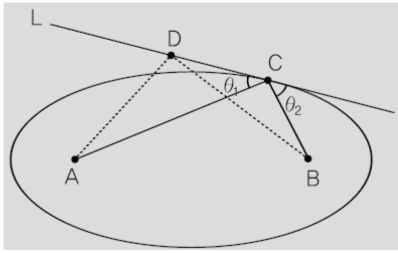
$$2y-(z-3)=2\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}\ \cdots\ ②$$

로 나타낼 수 있다. 이는 점광원을 지나고 구에 접하는 원뿔 모양의 곡면을 나타내는 방정식이다. 이 곡면과 $x-y$ 평면의 교선이 바로 지표면에 생긴 그림자의 경계곡선이다. $z=0$을 식 ②에 대입해 정리하면 $3\left(y-\dfrac{9}{4}\right)=x^2$이 돼 경계곡선은 포물선임을 알 수 있다. 즉 2)번 문제에서 '모선 수평' 상태에서 포물선이 된다고 추론했듯이 S의 좌표가 (0, 0, 3)이고, C의 좌표를(0, 2, 2)이라 할 때 곤돌라의 최고 높이는 3이 돼 지면에 대해 점광원과 곤돌라의 최고 높이는 평행하다. 이때 그림자의 경계선이 만드는 모양은 포물선이다.

▶ 추가문제

2)번 문제에서 추론한 내용을 공간좌표에서 확인하는 방법에 대해 논하라. 그리고 곤돌라가 회전하면서 만드는 그림자 모양의 변화를 수학적으로 모델링하라.

다음 제시문을 읽고 물음에 답하라(연세대 2008학년도 자연계 논술 2차 예시).



평면 위의 두 점 A, B로부터 거리의 합이 일정한 점으로 이뤄진 곡선을 타원이라 하고, 이 두 점을 타원의 초점이라 한다. 라틴어로 초점은 불을 지피는 장소를 의미하는데, 그 이유는 타원의 모양을 따라 거울을 설치하고 한 초점에 불을 지피면 불빛이 타원표면에 설치한 거울에 반사돼 다른 초점으로 가기 때문이다.

타원 위의 점 C에서 그은 접선을 L이라 하면, 타원은 이차곡선이므로 타원과 직선 L은 점 C에서 만난다. 또 C를 제외한 직선 L 위의 임의의 점 D는 타원의 밖에 있다. 이때 초점 A, B부터 D에 이르는 거리 합이 초점 A, B부터 C까지 이르는 거리 합보다 크다. 즉 $\overline{BD}$와 타원의 교점을 E라 하면 $\triangle ADE$의 두변 길이의 합($|\overline{AD}|+|\overline{DE}|$)은 다른 한 변의 길이($|\overline{AE}|$)보다 크므로 $|\overline{AD}|+|\overline{DB}|=|\overline{AD}|+|\overline{DE}|+|\overline{EB}|>|\overline{AE}|+|\overline{EB}|$가 성립한다. 또 E는 타원 위의 점이므로 타원의 정의에 의해 $|\overline{AE}|+|\overline{EB}|>|\overline{AC}|+|\overline{CB}|$이므로

$$|\overline{AD}|+|\overline{DB}|>|\overline{AC}|+|\overline{CB}|$$

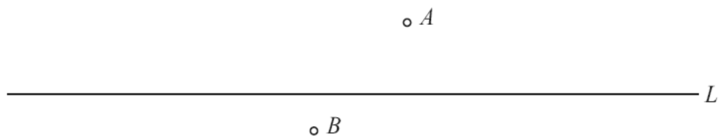
이다. 즉 A에서 직선 L의 한 점을 지나 B로 가는 최단경로는 점 C를 지나는 방법이다.

최적의 점 C는 다른 방법으로 구할 수도 있다. 점 B를 직선 L에 대해 반사시킨 점 B'와 A를 직선으로 연결할 때 직선 L이 만나는 점이 바로 그 최적의 점이다. 이 최적의 점이 C이므로 $\overline{AC}$와 접선 L 사이의 각 θ_1과 $\overline{BC}$와 접선 L 사이의 각 θ_2가 같다.

$$\theta_1=\pi-\angle B'CD=\theta_2$$

빛이 A에서 출발해 점 C에 도달하면, 빛이 반사할 때 입사각 $\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)$과 반사각 $\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)$가 같기 때문에 C에서 반사된 빛은 B로 향한다.

1) 다음 그림처럼 직선 L을 사이에 두고 두 점 A, B가 있다고 하자. 직선 위의 점 C로부터 두 점 사이의 거리 차이인 $||\overline{AC}|-|\overline{BC}||$가 최대이려면 점 C가 어디에 놓여야 하는지 설명하라.



2) 평면 위의 두 점 A, B로부터 거리 차가 일정한 점들로 이뤄진 곡선을 쌍곡선이라 하고, 두 점 A, B를 쌍곡선의 초점이라 한다. 쌍곡선의 모양을 따라 거울을 설치하고 한 초점에 불을 지폈을 때 쌍곡선 표면에 설치한 거울에 반사된 불빛이 어느 방향으로 진행할지 설명하라. 단 타원의 광학적 성질을 설명하는 앞의 제시문처럼 기하학적인 논리와 빛의 성질에 근거해야 한다.

▶ 전문가 클리닉

최근 각 대학의 기출문제를 보면 이차곡선의 여러 성질들, 즉 정의, 광학적 특징, 작도를 주제

로 하는 경우가 많습니다. 그만큼 이차곡선은 논술에서 출제 가능성이 높은 주제입니다. 제시문에서 소개한 논증 방법을 그대로 이용한다면 각 논제에서 요구하는 사항을 모두 해결할 수 있습니다. 제시문의 내용을 정확히 이해한 뒤 그 방법대로 논제에 접근해보기 바랍니다.

▶ 예시답안

1) $||\overline{AC}|-|\overline{BC}||$가 최대이려면 C는 점 A의 직선 L에 대한 대칭점 A'과 B를 동시에 지나는 직선과, 직선 L의 교점에 있어야 한다. 이때의 최대값은 $|\overline{A'B}|$이다. 이를 설명하면 다음과 같다.

직선 L에 대한 점 A의 대칭점을 A'라 하면 $||\overline{A'C}|-|\overline{BC}||=||\overline{AC}|-|\overline{BC}||$이다.

또 직선 L 위의 임의의 점 C에 대해 점 A', B, C가 하나의 직선에 있지 않다면 $\triangle A'BC$의 두변 길이의 합은 한 변의 길이보다 항상 커야 한다.

$|\overline{A'B}|+|\overline{BC}|>|\overline{A'C}|$ … ①

$|\overline{BC}|+|\overline{A'C}|>|\overline{A'B}|$

$|\overline{A'C}|+|\overline{A'B}|>|\overline{BC}|$ … ②

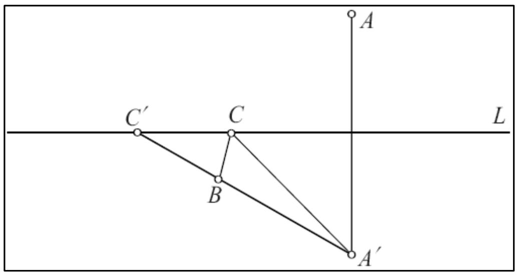
앞의 연립 부등식에서 $||\overline{AC}|-|\overline{BC}||$의 범위를 구하면 식 ①에 의해

$|\overline{A'B}|>|\overline{A'C}|-|\overline{BC}|$

이고, 식 ②에 의해

$|\overline{A'B}|>|\overline{BC}|-|\overline{A'C}|$

$||\overline{A'C}|-|\overline{BC}||<|\overline{A'B}|$ … ③

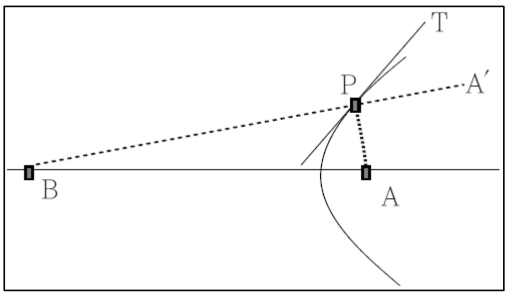


이다. 즉 다음 그림에서 $\overline{A'B}$의 연장선과 직선 L의 교점을 C'이라 할 때 식 ③에 의해 다음과 같은 식이 성립한다.

$|\overline{A'C'}|-|\overline{BC'}|=|\overline{A'B}|>||\overline{A'C}|-|\overline{BC}||=||\overline{AC}|-|\overline{BC}||$

이 식은 점 C가 C'의 위치에 있을 때 $||\overline{A'C}|-|\overline{BC}||$가 최대값 $|\overline{A'B}|$를 가지므로 $||\overline{AC}|-|\overline{BC}||$이려면 $C=C'$이다.

2) 두 초점 A, B 중 A에 불을 지폈다고 하면, 초점 A에서 나와 쌍곡선 위의 임의의 점 P에서 반사된 빛은 마치 초점 B에서 나온 빛처럼 직선 BP의 경로를 따라 그림과 같이 $A \to P \to A'$으로 진행한다. 그 이유를 기하학적 논리와 빛의 성질에 근거해 설명하면 다음과 같다.



제시문에 나와 있듯 빛은 최단거리로 진행하며, 반사면의 수직면과 이루는 입사각과 반사각이 같다. 그림에서 초점 A에서 나온 빛이 쌍곡선 위의 임의의 점 P에서 반사되고, 점 P에서 쌍곡선에 접하는 직선을 T라고 하자. 빛이 A에서 나와 P에서 반사돼 점 A'으로 진행할 때, $|\overline{AP}|+|\overline{A'P}|$가 최소값이 되는 A'에 대한 P의 관계를 찾으면 빛의 진행방향을 알 수 있다.

우선 쌍곡선의 정의에 의해 $|\overline{BP}|-|\overline{AP}|=\alpha$(단 α는 상수)이므로

$|\overline{AP}|-|\overline{A'P}|=|\overline{BP}|-|\overline{A'P}|-\alpha$

라고 나타낼 수 있고, 여기서 α는 상수이므로 $|\overline{BP}|+|\overline{A'P}|$가 최소값을 가질 때 $|\overline{AP}|-|\overline{A'P}|$도 최소값을 갖는다. 이때 A'과 P의 관계는 그림에서 알 수 있듯 세 점 B, P, A'이 일직선 위에 있을 때다. 만약 P가 쌍곡선 위의 다른 점 P'에 있다면 $\triangle BA'P'$의 세 변에 대해 다음과 같은 식이 성립한다.

$$|\overline{BP'}|+|\overline{A'P'}|>|\overline{BA'}|=|\overline{BP}|+|\overline{A'P}|$$

즉 $|\overline{BP'}|+|\overline{A'P'}|$는 $P=P'$일 때 최소값을 갖는다. 그러므로 세 점 B, P, A'이 일직선 위에 있을 때 $|\overline{AP}|+|\overline{A'P}|$도 최소값을 갖는다. … ①

결과적으로 초점에서 나온 빛이 쌍곡선에서 반사되면 최단거리로 진행한다는 특성 때문에 마치 다른 초점에서 나온 것처럼 진행한다.

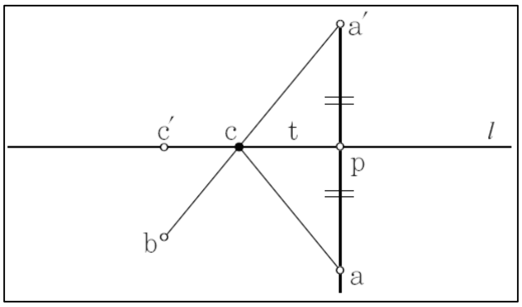
마지막으로 점 P에서 접선 T에 대해 입사각과 반사각이 같다는 점을 부연설명하면 다음과 같다.

점 P에서 접선 T 위의 다른 점을 Q라 한다면 앞에서와 같은 방법으로 $\triangle BA'Q$에서

$$|\overline{BQ}|+|\overline{A'Q}|>|\overline{BA'}|=|\overline{BP}|+|\overline{A'P}|$$

이므로 두 고정점 B, A'에 대해 B, P, A'이 일직선 위에 있을 때, 즉 $P=Q$일 때 $|\overline{BP}|+|\overline{A'P}|$가 최소값을 갖는다. … ②

한편 임의의 직선 l이 있을 때 한쪽에 있는 서로 다른 두 점 a, b와 직선 위의 점 t에 대해 $|\overline{at}|+|\overline{bt}|$의 최소값은 다음 그림에서 알 수 있듯 $|\overline{a'b}|$의 길이와 같고, 이때 직선 위의 점 t는 점 c 한 개로 정해진다. (단 a'는 직선 l에 대한 a의 대칭점)



그림에서 △acp≡△a′cp(∵ 직선 l은 $\overline{aa'}$를 수직이등분)이므로 ∠acp=∠a′cp, ∠bcc′=∠a′cp(∵ 맞꼭지각)이고 ∠bcc′=∠acp이다. 즉 점 a에서 c로의 입사각을 θ라 하면 $\theta=\frac{\pi}{2}-\angle \mathrm{acp}$이고, 그 반사각을 ε이라 하면 $\varepsilon=\frac{\pi}{2}-\angle \mathrm{bcc'}$이므로 $\theta=\varepsilon$이 돼 입사각과 반사각은 같다. 이는 $|\overline{at}|+|\overline{bt}|$가 최소인 점 t가 $c=t$일 때이고 이때 ∠bcc′=∠acp이다. … ③

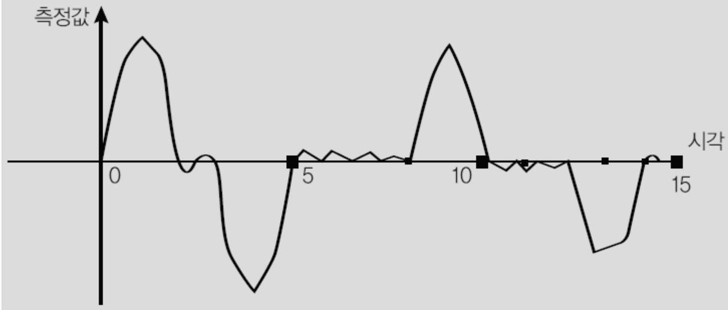
결국 ①, ②, ③에 의해 P가 $|\overline{A'B}|$ 위에 있을 때 $|\overline{AP}|+|\overline{A'P}|$가 최소이고, 접선 T 위 임의의 점 P에서도 최소이므로 접선 T에 대한 $A\to P\to A'$의 입사각과 반사각은 같다.

다음 제시문을 읽고 물음에 답하라(고려대 2006학년도 수시 2학기 자연계 기출).

식수 공급부족을 해결하기 위해 도시 근교의 한 호수가 새로운 상수원 후보로 대두됐다. 이에 따라 수질 조사팀은 호수의 수질 오염도를 조사하기로 했다. 이 팀은 이번 조사에서 수심의 변화에 대한 수질 오염도의 변화율을 측정하는 기기를 사용하기로 했다.

이 측정기는 수면의 특정한 지점에서 물속으로 수직으로 내려가면서 측정하는데, 내려간 거리는 시간의 제곱에 비례해 늘어난다. 즉 측정기의 위치를 나타내는 수심은 시간의 제곱에 비례한다. 이 측정기로 매 시각마다 측정해 오른쪽과 같은 그래프를 얻었다.

그래프를 바탕으로 식수로 취수하기에 적절한 수심과 부적절한 수심을 제시하고 그렇게 판단한 근거를 설명하라.



▶ 전문가 클리닉

이 문제는 언어·수리 통합형으로 출제된 것이지만, 올해 고려대에서 발표한 불순물의 부피를 추정하는 수리논술 예시문항과 형태가 비슷합니다.

주어진 그래프는 시간에 대한 측정값(수심의 변화에 대한 수질 오염도의 변화율)의 대응관계를 나타내고 있습니다'. 수심에 따른 오염도'를 구하기 위해서는 주어진 그래프를 적분해야 하는데, 이때 가장 중요한 점은 주어진 그래프가 수심에 따른 함수의 그래프가 아니라는 점에 있습니다.

이것을 파악하지 못한다면 이 논제를 단순한 그래프 해석 문제로 착각하고 쉽게 보아넘기게 될 것입니다.

수리논술 문제에 접근하고 이를 해결해나갈 때는 주어진 조건을 정확히 파악한 뒤에 이를 차근차근 수리적으로 표현하고, 논리를 전개할 때도 정확한 수리적 개념 위에서 논술이 이뤄질 수 있도록 교과서의 중요 개념과 정의를 숙지해 서술하는 연습을 해야 합니다.

2008년 02월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]기대수명 구하는 방법

문제1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라(2008학년도 이화여대 수시 2-2 응용).

최근 통계청은 2005년 기준 한국인의 기대수명이 남자는 75세, 여자는 82세라고 발표했다. 이를 위한 계산에는 기준연도에 각 연령별로 조사한 인구 수, 사망자 수, 사망률(=연령별 사망자 수/연령별 인구 수)을 정리한 표가 활용된다. 기대수명과 기대여명은 모두 기준연도의 연령별 사망률이 기준연도 수준으로 지속된다는 가정 하에 계산한 값이다. 기대수명은 기준연도에 태어난 아이의 수명 기대값을 말하고, 기대여명은 각 연령별로 기준연도 동일연령 사람들의 수명 기대값에서 기준연도 나이를 뺀 값이다.

역사 자료에 의하면 1930년 기준 한국인의 기대수명은 남자 32세, 여자 35세였다고 한다. 1930년에 비해 오늘날 기대수명이 크게 늘어난 데는 영양 상태와 위생, 보건, 의료 개선이 주요하게 작용했을 것이다. 특히 영아 사망률이 낮아진 점이 빼놓을 수 없는 요인이다. 1930년에는 0세(생후 12개월 미만)의 남녀별 사망률이 약 25%에 달했다.

1) 특정 연도의 기대수명을 구하는 방법을 설명하라.

2) 1930년 당시 1세 여아의 기대여명을 구하는 방법을 설명하고 그 값을 구하라.

3) 이 방법을 바탕으로 2005년 현재 62세인 한국인 여성은 평균 20년보다 더 오래 생존할 수 있음을 수리적으로 증명하라.

▶ 전문가 클리닉

'기대수명'과 '기대여명'의 정의를 수학적으로 정확히 파악해 기대값을 구할 때 필요한 확률과 제시문에 주어진 사망률 사이의 관계를 찾아야 합니다. 이런 형태의 문제는 언제든 출제 가능합니다. 따라서 이러한 유형의 문제를 자주 다뤄보며 익숙해진다면 실전에서 큰 도움이 될 것입니다.

▶ 예시답안

1) 제시문에 따르면 기대수명이란 기준연도에 태어난 아이(0세)를 기준으로 한 수명 기대값이다. 특정연도의 사망률은 기준연도의 연령별 사망률과 동일하게 지속된다고 가정했으므로 연령별 사망률에 따른 확률을 가진 수명을 확률변수로 하는 확률분포를 구하면 다음 표와 같다.

0세 아이의 수명	0	1	2	$\cdots$	n
확률	S_0	$(1-S_0)S_1$	$(1-S_0)(1-S_1)S_2$	$\cdots$	$(1-S_0)(1-S_1)\cdots(1-S_{n-1})S_n$

이 표에서 나타난 것처럼 0세 아이의 수명이 0세일 확률은 0세 때 사망해야 하므로 S_0와 같다. 또 수명이 1세일 확률은 0세 때 살아남고 1세 때 사망해야 하므로 $(1-S_0)S_1$로 나타낼 수 있다. 이런 식으로 0세 아이의 수명이 n세일 확률은 $(1-S_0)(1-S_1)\cdots(1-S_{n-1})S_n$이다. 즉 기대수명을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$(1-S_0)S_1+2(1-S_0)(1-S_2)S_2+\cdots+n(1-S_0)(1-S_1)\cdots(1-S_{n-1})S_n$$

앞의 식에서 S_n이 반드시 최고령자의 사망률을 나타내는 것은 아니다. 당시 최고령자가 그해에 사망했다면 최고령자의 사망률이 되지만, 당시 최고령자가 사망하지 않았다면 S_n은 최고령자보다 1살 많은 나이의 사망률로 가정해 그 값을 1이라고 해야 확률분포에서의 확률을 만족한다.

2) 1세 여아의 기대여명이란 1930년 당시 1세 아이의 수명을 당시 연령별 사망률로 추정한 수명 기대값에서 연령 1을 뺀 값이다. 따라서 다음의 확률분포를 이용해 수명 기대값을 구해 1을 빼면 된다.

0세 아이의 수명	0	1	2	$\cdots$	n
확률	0	S_1	$(1-S_1)S_2$	$\cdots$	$(1-S_1)(1-S_2)\cdots(1-S_{n-1})S_n$

즉 1세 여아의 수명 기대값을 l_1이라 하면

$$l_1=1S_1+2(1-S_1)S_2+3(1-S_1)(1-S_2)S_3+\cdots+n(1-S_1)(1-S_2)\cdots(1-S_{n-1})S_n$$

이고, 이때의 기대수명(0세 수명의 기대값, 즉 l_0)은 35세이다. 따라서

$$l_0=(1-S_0)S_1+2(1-S_0)(1-S_1)S_2+\cdots+n(1-S_0)(1-S_1)(1-S_2)\cdots(1-S_{n-1})S_n=35$$

이고 0세 여아의 사망률 S_0는 $\frac{1}{4}$이라 했으므로 이때 l_1을 l_0로 나타내면

$$l_1=\frac{l_0}{1-S_0}=\frac{35}{1-\frac{1}{4}}=46.7$$

이므로 1세 여아의 기대여명은 $l_1-1 \fallingdotseq 45.7$이다.

3) 주어진 논제는 62세의 기대여명이 20세보다 더 크다는 점을 증명하는 것이다. 제시문에서 당시 여성의 기대수명을 82세라 했으므로 연령이 k인 여성의 수명 기대값을 l_k, k세 여성의 기대여명을 a_k라 하면

$$a_{62}=l_{62}-62,\ a_0=l_0=82$$

이므로 $a_{62}>20$은 $l_{62}>82=l_0$임을 보이면 된다. 단, l_0는 당시 0세 여아의 수명 기대값이므로 당시의 기대수명 82세를 의미한다.

$l_{62}>l_0$임을 보이기 위해 모든 k에 대해 $l_{k+1}>l_k$임을 보이자.

우선 2)번 질문에서와 같은 방법으로 k세 여성의 수명 기대값을 구하면

$$l_k=kS_k+(k+1)(1-S_k)S_{k+1}+(k+2)(1-S_k)(1-S_{k+1})S_{k+2}+\cdots+n(1-S_k)(1-S_{k+1})\cdots(1-S_{n-1})S_n$$

이고 $k+1$세 여성의 수명 기대값은

$$l_{k+1}=(k+1)S_{k+1}+(k+2)(1-S_{k+1})S_{k+2}+\cdots+n(1-S_{k+1})\cdots(1-S_{n-1})S_n$$

이므로 $l_{k+1}=\frac{l_k-kS_k}{1-S_k}$라고 나타낼 수 있다. 따라서 $l_{k+1}>l_k$를 보이는 것은 $\frac{l_k-kS_k}{1-S_k}-l_k>0$를 보이는 것과 같다.

이 식을 정리하면

$$\frac{l_k-kS_k}{1-S_k}-l_k=\frac{S_k}{1-S_k}(l_k-k) \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

이다. 여기서 S_k는 사망률이므로 $k\neq n$일 때 항상 1보다 작은 양수이고 l_k는 당시 k세 여성의 수명 기대값이므로 $l_k>k$이다. 따라서 식 ①의 값은 항상 양수이다.

결국 모든 k에 대해 $l_{k+1}>l_k$이므로

$$l_0<l_1<l_2<\cdots<l_{62}$$

이고 $82<l_{62}$이다. 이것은 2005년 62세의 기대여명이 20세보다 크다는 결론과 같다.

문제2 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라(2008학년도 서강대 수시 2-2 기출).

(가) 19세기 후반 독일의 수학자 조지 칸토어는 '한 집합의 원소들을 다른 집합의 원소들과 일대일 대응시킬 수 있다면 두 집합의 크기는 같다'고 정의했고, 이런 아이디어를 바탕으로 무한을 향한 첫발을 내딛었다. 부분의 개수를 합하면 전체 개수가 된다는 논리로 비춰 볼 때 짝수인 자연수의 집합은 자연수 전체 집합 크기의 절반일 것이라 추측할 수도 있다. 그러나 각각의 자연수를 그 수의 두 배가 되는 수에 대응시키는 방법을 이용하면 자연수 전체의 집합과 짝수인 자연수 집합 사이에 일대일 대응이 성립하므로 두 집합이 동일한 크기를 갖는다고 칸토어는 결론지었다. 더불어 ① <u>칸토어는 수열 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \cdots$에서 임의의 자연수 m, n에 대하여 $\frac{n}{m}$은 $\frac{1}{2}(n+m-2)(n+m-1)+n$번째에 나타난다는 사실에 착안해 자연수 집합과 양의 유리수 전체의 집합은 크기가 같음을</u> 발견했다. 한 걸음 더 나아가 칸토어는 실수의 집합은 크기에서 유리수 집합과 훨씬 차이가 난다는 점을 보였다. 칸토어의 무한집합 이론은 큰 논란을 불러일으켰지만, 수학의 영역을 크게 확장시켰고 결국 많은 수학자에게 순수 인간 이성 활동의 최고 성과라는 찬사와 함께 큰 환영을 받았다.

(나) 형식주의와 플라톤주의는 수학 세계에서 늘 대립을 보였던 두 개의 철학이다. 힐베르트와 같은 형식주의자들은 수학이야말로 순수한 인간의 의식이 창조한 것으로 믿고 있는데, 이들에 따르면 수학의 공리와 정리는 현실에 실재하는 어떤 것을 의미하지 않는다. 따라서 어떤 가설을 증명했다는 것은 마치 하늘을 날아다니는 비행기 같은 어떤 구체적인 사물을 창조한 것과 같다. 반면 괴델과 같은 플라톤주의자들에게 수학은 자연과학과 같아 인간의 의식과는 독립적으로 존재하는 진리를 발견하는 확실한 수단이다. 특히 괴델은 "수학에 적합한 어떤 형식 체계든 참이면서도 증복불가능한 명제가 반드시 존재한다. 따라서 수학에 적합한 형식 체계의 무모순성은 그 체계 안에서 증명할 수 없다"고 발표한 바 있다. 그들에게 수학적 정리란 진리로서의 실재적 사물을 의미하는데, 이를 증명한다는 것은 지동설과 같은 과학적 가설을 검증하는 것과 같다.

(다) '골드바흐의 추측'은 "2보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다"라고 알려져 있다. 이는 그 자체가 분명히 참 아니면 거짓이지만 지난 265년 동안 증명되지도 반증되지도 못한 채 시간이 흘러가면서 수학자들의 관심에서 서서히 멀어지고 있다.

1) 제시문 (가)에서 밑줄 친 ①의 이유와 논리를 논술하라.

2) 제시문 (다)에서 언급한 '골드바흐의 추측'처럼 논리만으로 참과 거짓을 결정하기 힘든 수학적 가설에 대해 제시문 (나)에서 설명한 형식주의자와 플라톤주의자의 견해가 어떻게 다를지 논하라.

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 수학 전반에 걸친 이해와 관심을 요구하는 문제입니다. 수학 교과서에 나오는 수학사를 평소에 눈여겨본다면 큰 도움이 될 것입니다. 물론 논제풀이에 대한 중요한 요소들은 모두 제시문 속에 담겨있습니다.

▶ 예시답안

1) 먼저 $\dfrac{n}{m}$이 주어진 수열 중 $\dfrac{1}{2}(n+m-2)(n+m-1)+n$번째 항인 이유는 다음과 같다.

$$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{1}\right)\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}\right)\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}\right)\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}\right)\cdots$$

이와 같이 주어진 수열을 분모와 분자의 합이 같게 괄호로 묶어 이를 하나의 군이라 하자. 각 군에 있는 수(항)의 개수는 첫 번째 군부터 1, 2, 3, …으로 증가하고 k번째 군에 속해 있는 수들은 그 분모와 분자의 합이 $k+1$이다. 그러므로 $\dfrac{n}{m}$은 $(n+m-1)$군에 속한 수 중 하나이며 이때 $(n+m-1)$군의 첫 항은 $\dfrac{1}{n+m-1}$, 둘째 항은 $\dfrac{2}{n+m-2}$이므로 $\dfrac{n}{m}$은 $(n+m-1)$군의 n번째 항이다.

한편 $(n+m-2)$군까지의 모든 항의 개수는 $(n+m-2)\cdot\left(\dfrac{n+m-1}{2}\right)$이므로 $\dfrac{n}{m}$은 전체 수열 중 $(n+m-2)\cdot\left(\dfrac{n+m-1}{2}\right)+n$번째 항이다.

이를 이용한 제시문에서의 논리는 다음과 같다.

$\dfrac{n}{m}$은 자연수인 $(n+m-2)\cdot\left(\dfrac{n+m-1}{2}\right)+n$번째에 반드시 존재하고 m, n의 조합이 다르면 $(n+m-2)\cdot\left(\dfrac{n+m-1}{2}\right)+n$값도 반드시 다르므로 자연수와 양의 유리수는 일대일 대응할 수 있다. 이러한 이유로 자연수와 양의 유리수 집합은 그 크기가 같다. 단 주어진 유리수 수열에서 중복된 값을 제외하면 자연수와 양의 유리수는 정확히 일대일 대응을 이룰 수 있다.

2) 형식주의자 입장에선 수학 체계에서 증명되는 정리만을 의미가 있는 참인 것으로 받아들일 수도 있고, 수학 형식에서 참과 거짓이 증명되지 않기 때문에 최초 형식에 어떤 오류나 빠진 것이 있었는지 다시 살펴볼 수도 있다.

반면에 플라톤주의 입장에선 골드바흐의 추측에 대한 진실이 참이든 거짓이든 반드시 존재한다고 믿고, 언젠가는 그것이 참이나 거짓으로 증명될 수 있을 것이라고 생각한다.

더 나아가서 플라톤주의의 입장을 고수한다면 골드바흐의 추측을 증명하지 못한 상태이더라도 그것의 반증이 계속해서 발견되지 않는다면, 그것은 진실인데도 불구하고 증명하지 못하고 있다고 생각돼 참인 것으로 받아들일 여지도 있다.

2008년 03월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]삼각함수의 기하학

문제1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

직교좌표에서는 평면 위의 한 점을 두 실수의 순서쌍 $(x,\ y)$로 나타낸다. 그런데 평면 위의 한 점을 좌표로 나타내는 다른 방법도 생각할 수 있다. 좌표평면 위의 점 P에 대해 원점으로부터 이 점까지의 거리를 r, 원점과 이 점을 잇는 선분이 x축과 이루는 각을 θ라고 하자. $(r,\ \theta)$를 점 P의 극좌표라고 한다. 이때 $r \geq 0$이지만 $r<0$일 때를 $(r,\ \theta)=(-r,\ \theta+\pi)$와 같이 정의한다. 즉 극좌표 표현에서 $r<0$일 때에는 θ가 가리키는 방향과 반대방향으로 거리 $-r$만큼 떨어진 점을 뜻한다. 예를 들어 직교좌표로 $(1,\ \sqrt{3})$인 점 P의 극좌표는 $(2,\ \frac{\pi}{3})$이고 극좌표 $(-2,\ \frac{4\pi}{3})$로 표현할 수도 있다. 또한 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 a인 원의 방정식은 $r=a$처럼 나타낼 수 있다.

직교좌표에서는 $y=f(x)$와 x축 사이의 넓이를 구할 때 구간 $\alpha \leq \theta \leq \beta$를 n등분하고 각 구간의 넓이 합을 구한 뒤 이 합의 극한값을 이용한다. 이러한 원리를 극좌표에서 응용하면 $r=f(\theta)$, $(\alpha \leq \theta \leq \beta)$로 표현되는 도형의 넓이를 구할 때 구간 $\alpha \leq \theta \leq \beta$를 n등분하고 각 구간의 넓이 합을 구한 뒤 이 합의 극한값을 이용할 수 있다. 이때 극좌표에서 각 구간의 넓이는 부채꼴의 넓이로 구할 수 있다.

1) 제시문에 정의된 극좌표의 개념을 이용해 극좌표에서 $r=\cos 3\theta$가 나타내는 도형의 개형을 $x-y$ 직교좌표평면 위에 나타내라.

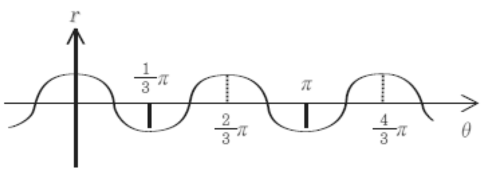
2) 문제1)에서 주어진 도형의 내부 넓이를 제시문을 참조해 구하는 방법을 설명하라.

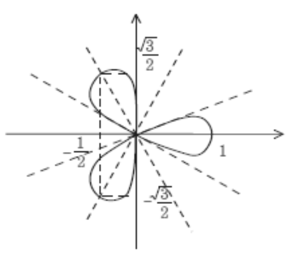
▶ 전문가 의견

최근 치러진 2008학년도 자연계 논술의 특징 가운데 하나는 고교 교육과정에 포함돼 있지 않은 내용을 다뤘다는 것입니다. 제시문에서 그 정의와 활용방법을 설명한 뒤 문제에서 정확한 이해와 응용을 요구하는 형태였습니다. 이 문제는 이러한 경향을 비추어 보았을 때 충분히 출제될 수 있는 내용인 극좌표와 그것으로 표현된 도형 방정식을 다루고 있습니다. 이런 문제를 풀려면 제시문 속에 있는 정의와 설명을 꼼꼼히 살피고 스스로 하나하나 예를 들어 보며 완전히 이해하는 일이 중요합니다.

▶ 예시답안

1) 먼저 $r=\cos 3\theta$의 그래프를 $\theta-r$직교좌표에 나타내면 다음과 같다. 이것을 토대로 해 $x-y$ 직교좌표평면에 나타내면 r이 원점에서부터의 거리이고 θ가 x축 양의 방향과 이루는 각이므로 다음과 같이 표현된다.

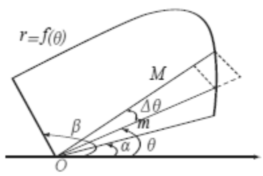




2) $\alpha \leq \theta \leq \beta$에서 연속인 곡선 $r=f(\theta)$와 동경에 의해 둘러싸인 영역의 면적을 구하는 방법을 제시문에서 언급한 방법대로 설명하면 다음과 같다.

곡선 $r=f(\theta)$와 동경 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$로 둘러싸인 넓이를 A라 하고 이를 θ에

대하여 n등분하면 사이각이 △θ(=β−α/n)인 n개 부분으로 나눌 수 있다. 이때 동경 θ_{i-1}과 θ_i(단 $\theta_i = \theta_{i-1} + \Delta\theta,\ \theta_0 = \alpha,\ \theta_n = \beta,\ \Delta\theta > 0$, i=1, 2, 3...)에 의해 둘러싸인 면적을 $\Delta A(\theta_i)$라 하고 구간 $[\theta_{i-1},\ \theta_i]$에서 $f(\theta)$의 최소값과 최대값을 각각 $m_i,\ M_i$이라 두면



$$\frac{1}{2}{m_i}^2\Delta\theta \le \Delta A(\theta_i) \le \frac{1}{2}{M_i}^2\Delta\theta$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}{m_i}^2\Delta\theta \le \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta A(\theta_i) = A \le \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}{M_i}^2\Delta\theta$$

이고 $n\to\infty$이면 $m_i\to f(\theta_i),\ M_i\to f(\theta_i)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta A(\theta_i) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\{f(\theta_i)\}^2\Delta\theta = \int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r^2 d\theta$$

이다.

즉 이 결과를 문제1)에서의 $r = \cos 3\theta$에 적용하면 전체 곡선으로 둘러싸인 넓이는 구간 $\left[0,\ \frac{1}{6}\pi\right]$에서 넓이의 6배라 할 수 있으므로

$$A = 6\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\cos^2 3\theta\, d\theta = \frac{3}{2}\left[\theta + \frac{1}{6}\sin 6\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{4}$$

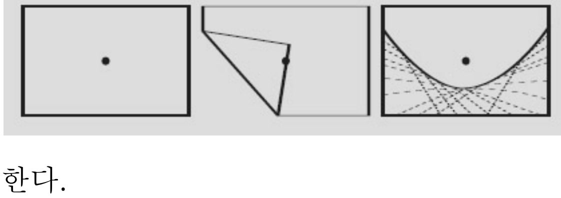
라 구할 수 있다. 결국 도형 $r = \cos 3\theta$에 의해 둘러싸인 넓이는 $\frac{\pi}{4}$이다.

문제2 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 다음 순서로 종이를 접어보자.

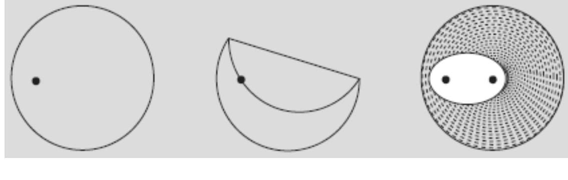
- 직사각형 모양의 종이를 준비해 가운데에 점을 찍는다.
- 그림과 같이 종이를 접어 점이 가로선 위에 놓이도록 한다.
- 약간의 간격을 두고 종이를 계속 접어 점이 가로선 위에 놓이는 과정을 되풀이한다.
- 이때 종이를 접은 자국에서 도형의 모습이 나타난다.

(나) 다음 순서로 그림을 그려보자.



- 타원 위 임의의 점 P에서 접선을 작도한다.
- 그 접선에 수직인 타원의 접선을 긋는다.
- 이 수선과 접선의 교점을 표시한다.
- 이와 같은 과정을 반복하며 교점의 자취를 구한다.

(다) 다음 순서로 종이를 접어보자.



- 원의 내부에 임의의 점을 찍고 원이 이 점 위에 놓이도록 접는다.
- 약간의 간격을 두고 원을 한 바퀴 돌리면서

위와 같은 방식으로 계속 접는다.

- 종이를 접은 자국에서 도형의 모습이 나타난다.

1) 제시문 (가)에서 나타나는 도형의 모양이 포물선임을 증명하라.

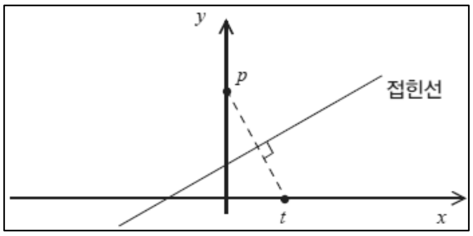
2) 제시문 (나)에서 나타나는 도형의 모양을 추론하고 그 이유를 설명하라.

3) 제시문 (다)에서 나타나는 도형의 모양을 추론하고 그 이유를 설명하라.

▶ 전문가 의견

포락선이란 일정한 조건을 만족하는, 한 무리의 직선이나 곡선에 접하는 곡선을 말합니다. 한 정점에서 직선거리가 같은 직선군의 포락선은 원입니다. 이 문제를 통해 포락선의 형태를 증명하는 방법을 스스로 고민해 보고 예시답안과 다른 방법도 가능하므로 여러 방법으로 증명해 보길 바랍니다.

▶ 예시답안



1) 다음 그림과 같이 직사각형 모양의 종이의 밑변을 x축이라 하고 가운데 점의 좌표를 $(0, p)$라 하자.

이때 직사각형을 접어 점 $(0, p)$와 만나는 밑변 x축의 좌표를 $(t, 0)$이라 하면 접힌 선의 방정식은 $y=\frac{t}{p}\left(x-\frac{t}{2}\right)+\frac{p}{2}$

이다. 이 직선은 점 $(0, p)$)와 점 $(t, 0)$을 이은 선분의 수직이등분선이므로 기울기가 $\frac{t}{p}$이고 선분의 중점 $\left(\frac{t}{2}, \frac{p}{2}\right)$를 지난다.

이 직선은 모든 실수 t에 대하여 항상 존재해야 한다. 이 등식을 t에 관한 이차방정식으로 정리하면 $t^2-2xt-p^2+2py=0$이고, 반드시 실근이 존재해야 하므로 $D=x^2+p^2-2py\geq 0$이다. 이 부등식이 존재하는 경계선의 방정식을 y에 대해 정리하면 $y=\frac{1}{2p}x^2+\frac{p}{2}$이고 이것은 포물선이다.

2) 제시문 (나)의 방법으로 그려진 점의 자취는 원이다. 장축과 단축의 길이가 각각 2a, 2b이고 원점에 중심이 있는 타원 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ (단 c는 초점이고 $b^2=a^2-c^2$)

이라 하고, 이 타원에서 서로 직교하는 두 접선의 기울기를 m, $-\frac{1}{m}$이라 하면 두 접선의 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

$$y=-\frac{1}{m}x\pm\sqrt{a^2\frac{1}{m^2}+b^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

이때 식 ①을 정리하면

$$y-mx=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

이고 식 ③의 양변에 m을 곱해 정리하면

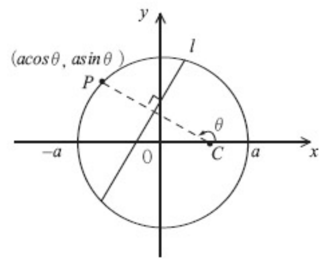
$$my+x=\pm\sqrt{a^2+m^2b^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{④}$$

이다. 또한 식 ②와 ④를 각각 제곱해 변끼리 더한 뒤 정리하면

$$(1+m^2)y^2+(1+m^2)x^2=(1+m^2)(a^2+b^2)$$

이므로 다음과 같은 원의 방정식을 얻을 수 있다.

$$x^2+y^2=a^2+b^2 \quad (\because 1+m^2\neq 0)$$



타원의 접선 중 y축과 평행한 것은 기울기 m과 $-\dfrac{1}{m}$로 나타낼 수 없다. 이때문에 y축과 평행한 접선과 x축과 평행한 접선의 교점을 직접 구해보면 장축의 양 끝점과 단축의 양 끝점에서 접선의 교점이므로 $y=\pm b$와 $x=\pm a$의 네 교점 $(a,\ b)$, $(a,\ -b)$, $(-a,\ b)$, $(-a,\ -b)$이고 이 점들 또한 앞에서 구한 원의 방정식 $x^2+y^2=a^2+b^2$을 만족한다.

결국 제시문 (나)에 나타나는 도형은 타원의 장축과 단축의 길이가 각각 $2a, 2b$일 때 반지름이 $\sqrt{a^2+b^2}$인 원이다.

3) 다음 그림처럼 중심을 원점으로 하는 원의 내부에 고정점 $C(c,0)$가 있고 이 원을 접었을 때 원과 점 C가 접하는 원 위의 어떤 점이 $P(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$라면 접힌선 l의 방정식은 선 $\overline{CP}$의 중점을 지나며 직교한다.

직선 l은 기울기가 $\dfrac{c-a\cos\theta}{a\sin\theta}$이고 $\overline{CP}$의 중점 $\left(\dfrac{c+a\cos\theta}{2},\ \dfrac{a\sin\theta}{2}\right)$를 지나는 직선으로 다음과 같이 표현된다.

$$y=\frac{c-a\cos\theta}{a\sin\theta}\left(x-\frac{a\cos\theta+c}{2}\right)+\frac{a\sin\theta}{2}$$

앞 식에 $a\sin\theta$를 곱해 x와 y에 대해 정리하면

$$a(x\cos\theta+y\sin\theta)=cx+\frac{a^2-c^2}{2}$$

$$a\sqrt{x^2+y^2}\,\sin(\theta+\alpha)=cx+\frac{a^2-c^2}{2}$$

이고 이 식이 모든 θ에 대하여 성립해야 하므로

$$-a\sqrt{x^2+y^2}\le cx+\frac{a^2-c^2}{2}\le a\sqrt{x^2+y^2}$$

이다. 다시 양변을 제곱하고 정리하면

$$c^2x^2+(a^2-c^2)cx+\left(\frac{a^2-c^2}{2}\right)\le a^2x^2+a^2y^2$$

$$1\le\frac{(x-\frac{c}{2})^2}{\frac{a^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{(a^2-c^2)}{4}}$$

으로 표현되는데, 이것의 경계선이 나타내는 도형은 장축의 길이가 a이고 단축의 길이가 $\sqrt{a^2-c^2}$인 타원이다.

2008년 04월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]적분을 이용해 질량중심 찾기

문제 01 다음 제시문을 읽고 각 논제에 답하라.

(가) 좌표평면 위에 질량이 $m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n$인 n개의 질점이 각각 점 $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\cdots,\ (x_n,\ y_n)$에 놓여있을 때

$$M_x = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

를 이 질점계의 x축에 관한 제1차 능률(first moment) 또는 능률이라 하고

$$M_y = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

를 y축에 관한 제1차 능률 또는 능률이라 한다. 이때 방정식

$$M\bar{x} = M_y,\ M\bar{y} = M_x \ \cdots\cdots\cdots\cdots \ ①$$

로 정의되는 점 $(\bar{x},\ \bar{y})$를 이 질점계의 중심(center of gravity)이라 한다. 여기서 M을 전 질량(total mass)으로 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$을 나타낸다.

앞의 식 ①에서 전 질량 M이 중심$(\bar{x},\ \bar{y})$에 집중되어 있다고 생각할 때 x축과 y축에 관한 질량 M의 능률 $M\bar{x},\ M\bar{y}$는 각각 총 능률 $M_y,\ M_x$와 같음을 알 수 있다.

(나) 좌표평면 위에 질량이 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$인 n개의 질점이 정직선 l로부터 각각 $d_1 + d_2 + \cdots + d_n$인 거리에 놓여 있을 때

$$I_l = m_1 {d_1}^2 + m_2 {d_2}^2 + \cdots + m_n {d_n}^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i {d_i}^2$$

을 이 질점계의 직선 l에 관한 제2차 능률(second moment) 또는 관성능률(moment of inertia)이라 한다. 또 이 질점계의 전 질량을 M이라 할 때

$$M\rho^2 = I_l \qquad 즉\ \ \rho = \sqrt{\frac{I_l}{M}}$$

로 정의되는 양수 ρ를 주어진 질점계의 직선 l에 관한 회전반지름(radius of gyration)이라 한다.

(다) 함수 f가 폐구간 $[a,\ b]$에서 정의되었다고 하자. 구간 $[a,\ b]$의 양 끝점 a와 b 사이에 있는 임의의 $n-1$개의 점 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}$을

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

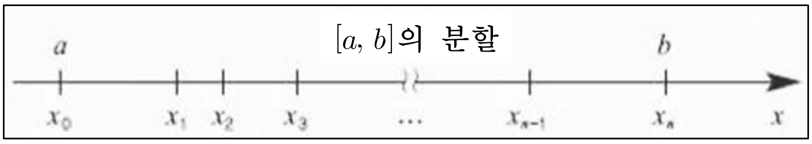
가 되도록 잡고 $n+1$개의 점 $a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n = b$를 설정한다. 이때 구간 $[a,\ b]$를 n개의 소구간 $[x_0,\ x_1],\ [x_1,\ x_2],\ \cdots,\ [x_{n-1},\ x_n]$으로 나눈다. 이들 n개의 소구간 집합

$$P = \{[x_0,\ x_1],\ [x_1,\ x_2],\ \cdots,\ [x_{n-1},\ x_n]\}$$

를 $[a,\ b]$의 분할이라 하고 $[a,\ b]$를 P의 소구간으로 나누는 점 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$을 P의 분할점이라 한다. 분할 P의 각 소구간 $[x_{i-1},\ x_i]$의 길이를

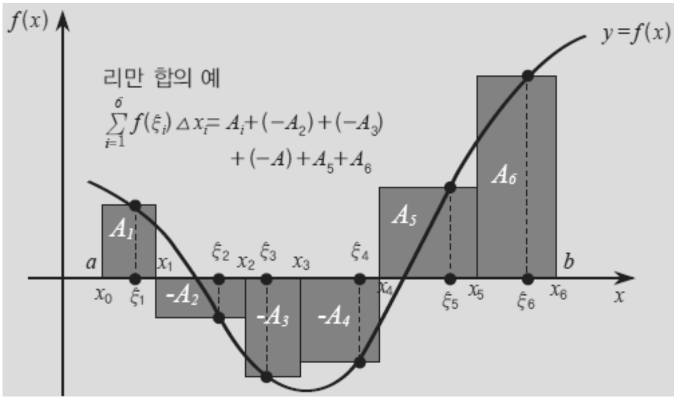
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

로 표시했을 때 Δx_1, Δx_2, $\cdots$, Δx_n중에서 가장 큰 값을 P의 놈(norm)이라 하고 $|P|$로 나타낸다. 특히 각 소구간의 길이 Δx_i가 모두 같으면 P를 정칙 분할이라 한다. 이때 $|P|$는 $\dfrac{b-a}{n}$가 된다.



분할 P의 각 소구간 $[x_{i-1},\ x_i]$에서 임의의 점 ξ_i를 택해 만든 합

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi)\Delta x_i \ \cdots\cdots\cdots \ ②$$



를 함수 f의 분할 P와 점 ξ_i에 대한 리만 합이라 한다.

이 합은 주어진 함수 f에 대하여 구간 $[a,\ b]$의 분할방법과 점 ξ_i의 선택방법에 따라 달라짐을 알 수 있다.

함수 f가 폐구간 $[a,\ b]$에서 정의되었다고 하자. 리만 합인 식 ②에서 $|P|$가 0에 가까이 갈 때 점 ξ_i의 선택에 상관없이 일정한 극한값

$$\lim_{\xi_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

가 존재하면 이 값을 f의 $x=a$에서 $x=b$까지의 정적분 또는 리만 적분이라 하고

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

로 표시한다. 또 $\int_a^b f(x)\,dx$가 존재하면 함수 f는 $[a,\ b]$에서 적분가능하다고 말한다,

이러한 정의로부터 주어진 함수 f가 $[a,\ b]$에서 적분가능하면 $[a,\ b]$의 $|P|$가 한없이 0에 가까워지도록 분할 P를 잡아가면 P의 각 소구간 $[x_{i-1},\ x_i]$에서 점 ξ_i를 어떻게 선택하든 f의 P에 대한 리만 합은 항상 일정한 값에 수렴함을 알 수 있다.

1) 점 $(6,-1)$, $(2,\ 3)$, $(-4,\ 2)$, $(-7,\ 4)$, $(2,-2)$에 각각 1, 4, 2, 3, 2 단위의 질량이 놓여 있을 때 x축에 관한 능률과 y축에 관한 능률을 구하고 이를 이용해 질점계의 중심 좌표를 구하라.

2) 함수 f가 $[a,\ b]$에서 연속일 때 곡선 $y=f(x)$, x축과 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 영역의 모양을 갖는 균질(밀도가 일정)한 평판 L이 주어졌다고 하고 그 밀도를 k라 하자. 이 평판의 능률과 중심을 구하는 방법을 제시문을 이용해 설명하라.

3) 논제 2)를 이용해 영역 $R=\{(x,\ y)\,|\,0 \le x \le 1,\ 0 \le x^3 \le y \le \sqrt{x}\}$의 중심을 구하라.

4) 논제 2)와 같은 조건에서 평판 L의 y축에 관한 관성 능률에 대해 제시문을 이용해 설명하라.

▶ 전문가 의견

한양대는 지난해 입시에서 무게중심에 관련된 내용을 출제한 적이 있습니다. 이것을 참고해 이

와 비슷한 유형의 문제를 출제했습니다. 제시문에 주어진 사실을 이용해 이산적인 면을 연속적인 면으로 확장하는 방법에 대해 생각해보기 바랍니다. 낯선 용어가 나온다 하더라도 제시문에 충분히 설명돼 있으므로 부담을 느낄 필요는 없습니다.

▶ 예시답안

1) x축에 관한 능률은

$$M_x = \sum_{i=1}^{5} m_i y_i = 1(-1)+4(3)+2(2)+3(4)+2(-2)=23$$

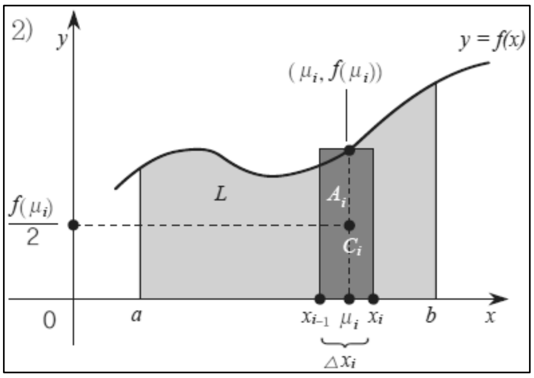
이고 y축에 관한 능률은

$$M_y = \sum_{i=1}^{5} m_i x_i = 1(6)+4(2)+2(-4)+3(-7)+2(2)=-11$$

이다. 또 전 질량 $M=1+4+2+3+2=12$단위이고 이 질점계의 중심 좌표는

$$\overline{x}=\frac{M_y}{M}=-\frac{11}{12},\ \overline{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{23}{12}$$ 이다.

2) 구간 $[a, b]$의 임의의 분할을 P라 하고 P의 각 소구간 $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \cdots, n$의 중심점을 μ_i라 하자. 이때 그림과 같이 면적이 $A_i=|f(\mu_i)|\Delta x_i$인 평판조각의 질량은 $k|f(\mu_i)|\Delta x_i$이고 중심은 $C_i\left(\mu_i, \frac{1}{2}f(\mu_i)\right)$이다. y축에 관한 능률은 $\mu_i k|f(\mu_i)|\Delta x_i$이므로 리만 합 $k\sum_{i=1}\mu_i|f(\mu_i)|\Delta x_i$는 n개 평판조각의 y축에 관한 능률 합이다. 따라서 평판 L의 y축에 관한 능률은



$$M_y = k\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu_i|f(\mu_i)|\Delta x_i = k\int_a^b x|f(x)|dx$$

로 정의할 수 있다. 마찬가지로 평판 조각의 x축에 관한 능률은

$$\frac{1}{2}kf(\mu_i)|f(\mu_i)|\Delta x_i$$

이므로 평판 L의 x축에 관한 능률은

$$M_x = \frac{1}{2}k\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\mu_i)|f(\mu_i)|\Delta x_i = \frac{1}{2}k\int_a^b f(x)|f(x)|dx$$

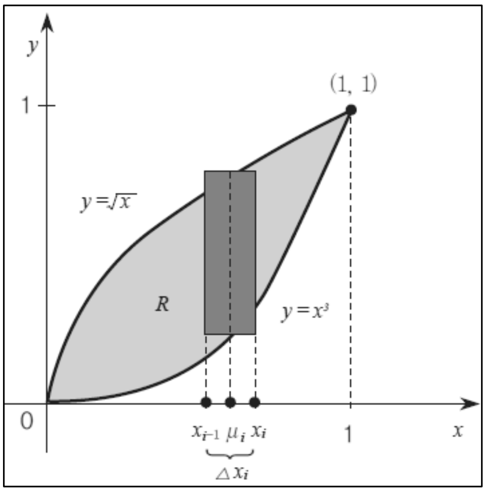
로 정의할 수 있다. 이것을 정리하면 평판 L의 x축, y축에 관한 능률은 각각

$$M_x = \frac{1}{2}k\int_a^b f(x)|f(x)|dx,\ M_y = k\int_a^b x|f(x)|dx$$

으로 정의할 수 있다. 또 한 평판 L의 전 질량은 밀도가 k로 일정하므로 $M=k\int_a^b|f(x)|dx$로 주어진다. 따라서 평판 L의 질량중심 좌표는

$$\overline{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\int_a^v x|f(x)|dx}{\int_a^b|f(x)dx|}$$

3) 구간 $[0,\ 1]$의 임의의 분할을 P라 하고 P의 각 소구간 $[x_{i-1},\ x_i]$의 중점을 μ_i라 할 때 그림에서 직사각형의 면적은 $\Delta A_i = (\sqrt{\mu_i} - {\mu_i}^3)\Delta x_i$이고 중심은 $\left(\mu_i,\ \frac{1}{2}(\sqrt{\mu_i} + {\mu_i}^3)\right)$이다.



x축, y축에 관한 능률은 각각

$$\frac{1}{2}(\sqrt{\mu_i} - {\mu_i}^3)\Delta A_i = \frac{1}{2}(\mu_i - {\mu_i}^6)\Delta x_i,$$

$$\mu_i \Delta A_i = \mu_i(\sqrt{\mu_i} - {\mu_i}^3)\Delta x_i$$

로 주어진다. 따라서 영역 R의 면적은

$$A = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\mu_i} - {\mu_i}^3)\Delta x_i = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)dx = \frac{5}{12}$$

이고 x축, y축에 관한 능률은 각각

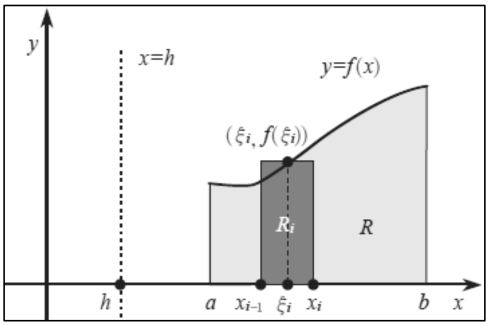
$$M_x = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(\mu_i - {\mu_i}^6)\Delta x_i = \frac{1}{2}\int_0^1 (x - x^6)dx = \frac{5}{28}$$

$$M_y = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\sqrt{\mu_i} - {\mu_i}^3)\Delta x_i = \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^3)dx = \frac{1}{5}$$

로 주어진다. 그러므로 R의 중심 $(\overline{x},\ \overline{y})$는

$$\overline{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{12}{25},\ \overline{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{3}{7}$$

4) 평판 조각 R_i의 질량은 $\Delta m_i = k\Delta A_i = kf(\xi_i)\Delta x_i$이고 ρ_i를 R_i의 y축에 관한 회전반지름이라고 하면 리만 합의 극한값



$$I_y = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} {\rho_i}^2 \Delta m_i = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k{\rho_i}^2 f(\xi_i)\Delta x_i$$

이 평판의 y축에 관한 관성능률이다.

ρ_i는 x_i가 되므로 앞의 극한값은 $k\int_a^b x^2 f(x)dx$와 같다.

▶ 추가문제

광속은 모든 관측자에게 일정하다는 사실을 적용하면 움직이는 기차 안에서 빛이 바닥에서 천장으로 움직일 때 기차 안과 밖의 관측자가 측정한 시간 차이에 대하여 논하라.

2008년 05월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학] 상대성원리 유도하기

문제 01 다음 제시문을 읽고 각 논제에 답하라.

(가) 두 변수 x와 y를 포함하는 2차 다항식이 있다.

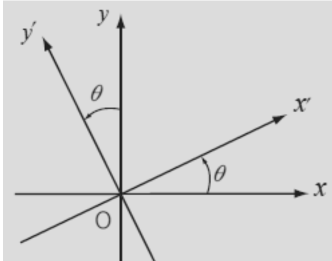
$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

이때 $B=0$인 경우를 생각해보자. A와 C가 동시에 0이 될 수는 없다고 할 때, 방정식 $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$은

① $AC=0$이면 포물선

② $AC>0$이면 타원(또는 원)

③ $AC<0$이면 쌍곡선을 정의한다.



〈그림 1〉

(나) 좌표평면에서 원점을 중심으로 x축과 y축을 각 θ만큼 양의 방향으로 회전시켜 보자. 이때 x축과 y축의 새로운 위치를 <그림1>에 나타낸 것처럼 각각 x', y'로 표시한다. 그러면 다음의 <정리 1>을 얻는다.

<정리 1> (x, y)를 xy평면에서 점 P의 좌표라 하자. (x', y')는 x축과 y축이 각 θ만큼 회전한 결과 새로 생성된 x'축과 y'축으로 이뤄진 평면에서 점 P의 좌표라 하자. 그러면 다음 식이 성립한다. $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$ ………… ②

1) <정리 1>을 증명하라.

2) 제시문 (나)의 방법대로 방정식 $xy=1$을 45°만큼 회전한 결과를 새로운 $x'y'$ 좌표에 나타내고, 이 새로운 방정식에 대해 논하라.

3) $B\neq0$인 ①의 식을 축을 회전시켜 $x'y'$ 항이 없는 x'와 y'의 2차 방정식으로 변형하기 위한 조건을 논하라.

▶ 전문가 의견

고교과정에서 다루는 이차곡선을 회전이동으로 확장해 생각할 수 있습니다. 주어진 식을 변형시켜 곡선의 성질을 파악하는 방법을 연습해봅시다.

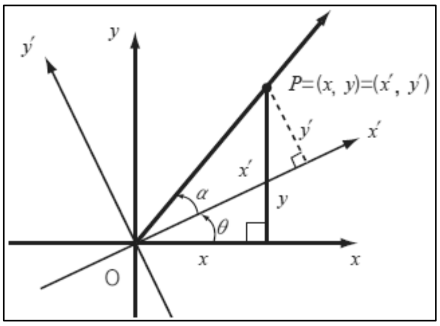
▶ 예시답안

1) 아래 그림에서 r은 원점 O에서 P까지 거리를 나타내고 α는 양의 x′축과 O에서 P를 지나는 반직선 사이의 각이라 하자. 사인과 코사인의 정의를 따르면 다음 식이 성립한다.

$$x'=r\cos\alpha,\ y'=r\sin\alpha$$

$$x=r\cos(\theta+\alpha),\ y=r\sin(\theta+\alpha)$$

이 식을 변형하면



$$x = r\cos(\theta+\alpha) = r(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha)$$

$$= (r\cos\alpha)(\cos\theta) - (r\sin\alpha)(\sin\theta) = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

같은 방법으로

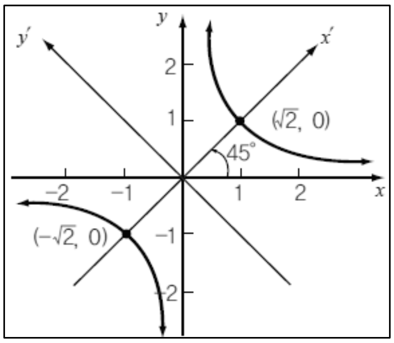
$$y = r\sin(\theta+\alpha) = r(\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha)$$

$$= x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

2) $x = x'\cos45° - y'\sin45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')$

$$y = x'\sin45° - y'\cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$$

이 식을 $xy=1$에 대입한다. 그러면



$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')\right\}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')\right\}=1,\ \ \frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{2}=1$$

이것은 중심이 (0, 0)이고 가로지르는 축이 x'축을 따라 있는 쌍곡선 방정식이다. 꼭지점은 x'축 위에 있는 $(\pm\sqrt{2},\ 0)$이고 점근선은 원래의 x축과 y축이다. 즉 $y' = \pm x'$이다.

3) 축의 회전으로 $x'y'$항이 없다고 가정하자.

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$에 $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$, $y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$를 대입하면 다음과 같다.

$$A(x'\cos\theta-y'\sin\theta)^2+B(x'\cos\theta-y'\sin\theta)(x'\sin\theta+y'\cos\theta)+C(x'\cos\theta+y'\sin\theta)$$

$$+D(x'\cos\theta-y'\sin\theta)+E(x'\sin\theta+y'\cos\theta)+F=0$$

식을 전개하고 같은 항을 묶으면

$$(A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\cos^2\theta)x'^2+\{B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2(C-A)(\sin\theta\cos\theta)\}x'y'$$

$$+(A\sin^2\theta-B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta)y'^2+(D\cos\theta+E\sin\theta)x'+(-D\sin\theta+E\cos\theta)y'+F=0$$

에서 $x'y'$의 계수는 $B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2(C-A)(\sin\theta\cos\theta)$이고 가정에서 $x'y'$항이 없다고 했으므로

$$B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2(C-A)(\sin\theta\cos\theta)=0$$

$$B\cos2\theta+(C-A)\sin2\theta=0$$

$$\cot2\theta=\frac{A-C}{B}\ (B\neq0)$$

이다. 즉 A, B, C계수들을 제시문에서 조건에 맞게 회전시키면 $x'y'$이 없는 방정식을 만들 수 있다.

문제 02 다음 제시문을 읽고 각 논제에 답하라.

(가) 우리가 어떤 내용을 서술할 때 그것이 옳다고 인정받으려면 증명을 해야 한다. 그런데 어떤 서술이 옳다는 증명을 하려면 그 서술보다 먼저 옳은 것으로 인정된 다른 서술을 이용해야 한다. 하지만 증명은 무한히 반복될 수 없다. 따라서 우리는 가장 근본적인 어떤 사실들에 대해서는 증명 없이 옳다고 인정해 사용할 필요가 있다. 이렇게 인정된 근본적 사

실을 공리라고 한다.

수학에서는 공리라는 표현을 쓰지만 다른 분야에서는 '가정'이란 표현도 많이 사용한다. 기본적인 가정의 개수는 이론이나 학문의 특성과 종류에 따라 다르다. 유클리드의 기하학원론의 가정(공리)은 10개이지만 아인슈타인의 특수 상대성이론에 쓰인 가정은 단지 2개뿐이다. 그것은 바로 ① "물리법칙은 어떤 관성계에서나 동일하게 표현된다"라는 상대성원리와 ② "진공 중의 광속은 일정하다"라는 광속 일정원리인데, 이로부터 몇 단계의 수학적 과정을 거치면 $E=mc^2$이라는 질량에너지 동등원리가 유도된다.

(나) 뉴턴의 운동 제2법칙 $F=ma$(m이 일정할 때 $F=m\frac{dv}{dt}=ma$)이다. 정지한 물체에 힘을 가해 얻는 에너지 $K=\int_0^s Fds$ … ⓐ다. v의 속도로 움직이는 물체의 운동량은 mv이고, 움직이는 물체의 운동에너지는 $\frac{1}{2}mv^2$이다. 이를 이용해 질량증가 관계식을 $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ … ⓑ와 같이 쓸 수 있다.

1) 진공 중의 광속은 일정불변이다. 광속은 모든 물체가 가질 수 있는 속도의 궁극적 한계이기도 하다. 밑줄 친 부분을 ①과 ②를 이용해 설명하라.

2) 제시문 (가)의 밑줄 친 부분을 제시문 (나)의 공식들을 참조해 나타내라.

▶ 전문가 의견

1)번은 공식이나 방정식이 주어졌을 때 그 안에 들어있는 의미를 파악할 수 있는 지를 알아보는 문제입니다.

2)번은 자연과학 분야를 통틀어 가장 유명한 공식인 $E=mc^2$을 고교과정 수준의 미적분으로 유도할 수 있음을 직접 보이는 문제입니다.

참고로 $v>c$일 수 있다고 가정한다면 분모가 허수가 되며, 물체의 질량 m도 '허질량'이 됩니다. 이처럼 진공 중 광속보다 빠르게 움직이는 가상의 입자를 '타키온'이라 합니다.

▶ 예시답안

1) 질량증가 관계식에서 물체의 속도 v가 차츰 빨라지면 질량 m도 증가한다. 어떤 물체의 속도가 광속도에 접근하면 질량은 무한대로 커지는데, 이 경우 물체를 가속하려면 무한대의 에너지가 필요하다. 하지만 이는 불가능한 일이므로 언제나 $c \geq v$이다.

2) 정지한 물체에 힘을 가하면 $K=\int_0^s Fds$와 같은 에너지를 얻는다. 이때 질량이 변하지 않는다면

$$F=\frac{d(mv)}{dt}=m\frac{dv}{dt}=ma$$

가 된다. 그러나 특수상대성이론에서는 질량도 상수가 아니므로 $F=\dfrac{d(mv)}{dt}$라는 형태를 그대로 유지해야 하며 이를 앞 식에 대입한 결과는 다음과 같다.

$$K=\int_0^s Fds=\int_0^s \frac{d(mv)}{dt}ds$$

$\dfrac{d(mv)}{dt}ds=\displaystyle\int_0^s d(mv)\frac{ds}{dt}$이고, $\dfrac{ds}{dt}$는 거리를 시간에 대해 미분한 값이므로 속도 v가 된다. 그 결과 K의 식은 다음과 같이 바꿔 쓸 수 있다.

$$K=\int_0^s \frac{d(mv)}{dt}ds=\int_0^s d(mv)\frac{ds}{dt}=\int_0^{mv} d(mv)v=\int_0^{mv} vd(mv)$$

(단, 거리(s)에 대해 적분할 때는 적분구간이 0부터 s까지지만 운동량(mv)에 대해 적분할 때는 적분구간도 0부터 mv까지가 된다.)

질량은 속도에 따라 변하므로 앞 식의 질량 m에 질량증가 관계식을 대입하면

$$K=\int_0^{mv} vd(mv)=\int_0^v vd\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

로 바뀐다. 마지막 식의 적분은 결국 속도(v)에 대한 형태이므로 적분구간도 [0, v]로 바뀠다. 처음에는 정지 상태였지만 최종 상태에서는 속도가 v이기 때문이다. 이 결과는 부분적분의 형태이므로 부분적분의 공식 $\displaystyle\int x\,dy=xy-\int y\,dx$를 이용할 수 있다.

이때 v는 x, $\left(\dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$는 y에 해당한다. 이 공식에 따라 적분하면 다음과 같다.

$$K=\int_0^v vd\left(\frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=\frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\int_0^v \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dv$$

여기서 두 번째 항 $-\displaystyle\int_0^v \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dv$를 구해야 한다. $\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$는 v에 대한 합성함수 형태다.

$1-\dfrac{c^2}{v^2}=z$라 하면

$$\frac{d}{dv}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{d\left(z^{\frac{1}{2}}\right)}{dz}\frac{dz}{dv}=\left(\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{2v}{c^2}\right)=-\frac{v}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

이다. 따라서 $-\dfrac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$을 적분하면 $c^2\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$임을 알 수 있다. 그러므로 두 번째 적분은

$$-\int_0^v \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dv=m_0\int_0^v\left(-\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)dv=m_0c^2\left[\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right]_0^v$$

이 결과를 이용하면

$$K=\frac{m_0v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+m_0\left[c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right]_0^v=\frac{m_0v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-m_0c^2$$

$$=\frac{m_0v^2+m_0c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_0c^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_0c^2$$

$$=mc^2-m_0c^2$$

이렇게 $K=mc^2-m_0c^2$이므로 $mc^2=K+m_0c^2$이 된다. K는 운동에너지이고 m_0c^2은 정지 상태의 물체가 갖는 정지에너지다. 따라서 어떤 물체의 총에너지는 mc^2이라는 결론이 나온다. 그러므로 $E=mc^2$이라 할 수 있다.

▶ 추가문제

같은 종류를 포함하는 원형 배열의 경우의 수는 두 가지로 나눠 생각할 수 있다. 만약 같은 종류가 a개, b개, c개로 이뤄진 구슬을 원형으로 배열할 때 a, b, c의 최대공약수가 1인 경우에는 대칭꼴이 만들어지지 않는다. 따라서 같은 것을 포함한 수열로 생각해 문제를 풀 수 있다.

그러나 a, b, c의 최대공약수가 1이 아닌 경우에는 대칭인 원순열을 만들 수 있으며 이는 대칭의 한쪽 부분으로 경우의 수를 나타낸다. 대칭이 아닌 꼴은 기준이 되는 공과 같은 색깔의 다른 공도 기준이 될 수 있으므로 (전체의 수)-(대칭인 꼴의 수)를 기준이 되는 종류의 공의 개수로 나눈 수로 나타내며, 대칭과 비대칭의 각 경우의 수의 합으로 문제를 풀 수 있다.

1) 같은 모양의 흰 공 4개, 검은 공 2개, 빨간 공 2개를 원형으로 나열하는 방법의 수를 구하라.

2) 흰 공 2개, 파란 공 4개, 빨간 공 1개를 실에 꿰어 목걸이를 만드는 방법의 수를 구하라.

2008년 06월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]미적분을 이용한 함수 추론

문제1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라(2008학년도 연세대 수시 논술 기출).

17세기 아이작 뉴턴과 고트프리드 라이프니츠는 적분의 기본 개념과 원리를 독립적으로 체계화했고 바이런 코시와 지지 리만이 극한의 개념을 도입하면서 적분에 관한 수학적 정의가 완성됐다. 적분의 기본원리인 구분구적법은 어떤 도형의 넓이나 부피를 구할 때, 그 도형을 여러 개의 간단한 도형으로 세분화해 이들 도형의 넓이나 부피의 합을 구한 뒤 이 합의 극한값으로 원래 도형의 넓이나 부피를 구하는 방법이다. 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대해 정적분을 다음과 같이 구분구적법의 형태로 정의할 수 있다.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \ \ \left(\Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x\right)$$

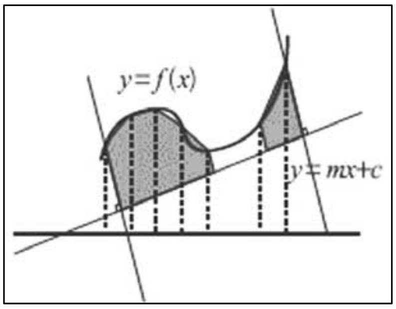
다음 (가)와 (나)는 적분의 기본 개념과 원리를 바탕으로 유도한 결과이다.

(가) 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때 다음 등식이 성립하는 $p_1,\ p_2,\ p_3$와 $q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4$가 무한히 많이 존재한다.

㉠ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(p_1 f(x_{2k}) + p_2 f(x_{2k-1}) + p_3 f(x_{2k-2})\right)\Delta x\,\left(\Delta x = \frac{b-a}{2n}\right)$

㉡ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(q_1 f(x_{3k}) + q_2 f(x_{3k-1}) + q_3 f(x_{3k-2}) + q_4 f(x_{3k-3})\right)\Delta x\,\left(\Delta x = \frac{b-a}{3n}\right)$

(나) 그림과 같이 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속 함수 $y=f(x)$와 직선 $y=mx+c(m\neq 0)$가 주어질 때, 곡선 $y=f(x)$와 세 직선 $y=mx+c,\ \ y=-\dfrac{1}{m}(x-a)+f(a),\ \ y=-\dfrac{1}{m}(x-b)+f(b)$로 둘러싸인 넓이를 구하고자 한다. 그림에서 색칠된 부분의 사다리꼴 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때 다음 등식이 성립한다.



㉢ $\displaystyle S_n = \frac{1}{1+m^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2} - m\frac{x_k + x_{k-1}}{2} - c\right)\left(1 + m\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{\Delta x}\right)\Delta x$

따라서 적분의 개념으로부터 다음과 같은 공식이 얻어진다.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1+m^2}\int_a^b (f(x)-mx-c)(1+mf'(x))dx$$

1) 등식 ㉠이 성립하기 위한 $p_1,\ p_2,\ p_3$의 조건과 등식 ㉡이 성립하기 위한 $q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4$의 조건을 구하고 그 이유를 논리적으로 설명하라.

2) 모든 2차 다항함수 $f(x) = Ax^2 + Bx + c$에 대해 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx = p_1 f(-1) + p_2 f(0) + p_3 f(1)$을 만족하는 $p_1,\ p_2,\ p_3$를 구하라.

3) 2)번에서 구한 $p_1,\ p_2,\ p_3$는 모든 2차 다항함수 $f(x)$에 대해

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{10}(p_1 f(x_{2k}) + p_2 f(x_{2k-1}) + p_3 f(x_{2k-2}))\Delta x \,(\Delta x = \frac{b-a}{20})$$ 을 만족시킴을 논리적으로 설명하라.

4) 등식 ㉢이 성립함을 증명하라.

▶ 전문가 의견

이 문제는 최근 논술시험의 새로운 경향을 대표하는 논제입니다. 적분 이론의 정확한 개념을 이해하고 있어야 해결할 수 있는 문제이기도 합니다. 문제의 일부는 고교과정을 벗어나고 있으나 고교수학에서 다루는 기본 개념을 알고 있다면 어렵지 않게 풀 수 있습니다.

▶ 예시답안

1) 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때 ㉠ $\Delta x = \frac{b-a}{2n}$에 대해 식의 우변은 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(p_1 f(x_{2k}) + p_2 f(x_{2k-1}) + p_3 f(x_{2k-2}))\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{p_1\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k})\Delta x + p_2\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})\Delta x + p_3\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-2})\Delta x + \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{p_1}{2}\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k})2\Delta x + \frac{p_2}{2}\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})2\Delta x + \frac{p_3}{2}\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-2})2\Delta x\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{p_1}{2}\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k})2\Delta x + \lim_{n\to\infty}\frac{p_2}{2}\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})2\Delta x + \lim_{n\to\infty}\frac{p_3}{2}\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-2})2\Delta x
\end{aligned}$$

여기서 $n\to\infty$일 때 $x_{2k-1}\to x_{2k}$, $x_{2k-2}\to x_{2k}$이므로

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{p_1}{2}\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k})2\Delta x = \lim_{n\to\infty}\frac{p_2}{2}\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})2\Delta x = \lim_{n\to\infty}\frac{p_3}{2}\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-2})2\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

이다. 그러므로 앞의 식은 다음과 같이 변형된다.

$$\frac{p_1}{2}\int_a^b f(x)dx + \frac{p_2}{2}\int_a^b f(x)dx + \frac{p_3}{2}\int_a^b f(x)dx = \frac{p_1+p_2+p_3}{2}\int_a^b f(x)dx$$

식 ㉠과 비교할 때 $p_1+p_2+p_3=2$이다.

같은 방법으로 ㉡을 생각하면 $\Delta x = \frac{b-a}{3n}$에 대해

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(q_1 f(x_{3k}) + q_2 f(x_{3k-1}) + q_3 f(x_{3k-2}) + q_4 f(x_{3k-3}))\Delta x = \frac{q_1+q_2+q_3+q_4}{3}\int_a^b f(x)dx$$

따라서 $q_1+q_2+q_3+q_4=3$이다.

2) 모든 2차 다항함수 $f(x) = Ax^2+Bx+C$에 대하여

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = p_1 f(-1) + p_2 f(0) + p_3 f(1)$$

이 성립한다고 할 때 식의 좌변은

$$\int_{-1}^{1}(Ax^2+Bx+C)\,dx=2\int_{0}^{1}(Ax^2+C)\,dx=2\left[\frac{A}{3}x^3+Cx\right]_0^1=\frac{2A}{3}+2C \;\cdots\cdots\; ①$$

로 나타낼 수 있다. 또 식의 우변은

$$p_1(A-B+C)+p_2C+p_3(A+B+C)=(p_1+p_3)A+(-p_1+p_3)B+(p_1+p_2+p_3)C \;\cdots\cdots\; ②$$

이때 식 ①과 ②는 임의의 $A,\ B,\ C$에 대해 같은 값이어야 하므로

$$p_1+p_3=\frac{2}{3},\ -p_1+p_3=0,\ p_1+p_2+p_3=2$$

이 성립한다. 이 연립방정식을 풀면 다음과 같다.

$$p_1=p_3=\frac{1}{3},\ p_2=\frac{4}{3}$$

3) 모든 2차 다항함수 $f(x)$에 대해

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{3}f(x_{2k})+\frac{4}{3}(x_{2k-1})+\frac{1}{3}f(x_{2k-2})\right)\Delta x\ \left(\Delta x=\frac{b-a}{20}\right)$임을 보이기 위해서는

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}}f(x)\,dx=\left(\frac{1}{3}f(x_{2k-2})+\frac{4}{3}f(x_{2k-1})+\frac{1}{3}f(x_{2k})\right)\Delta x$$

임을 보이면 된다. 즉 모든 2차 다항함수 $f(x)=Ax^2+Bx+C$에 대해 $\displaystyle\int_{a-h}^{a+h}(Ax^2+Bx+C)dx=\left\{\frac{1}{3}f(a-h)+\frac{4}{3}f(a)+\frac{1}{3}(a+h)\right\}h$임을 보이면 된다. 이 식의 좌변과 우변은 각각 다음과 같다. 먼저 좌변은

$$\left[\frac{A}{3}x^3+\frac{B}{2}x^2+Cx\right]_{a-h}^{a+h}$$
$$=\frac{A}{3}\{(a+h)^3-(a-h)^3\}+\frac{B}{2}\{(a+h)^2-(a-h)^2\}+C\{(a+h)-(a-h)\}$$
$$=A(2a^2h+\frac{2}{3}h^3)+B(2ah)+C(2h)$$

이고, 우변은

$$\left[\frac{1}{3}\{A(a-h)^2+B(a-h)+C\}+\frac{4}{3}(Aa^2+Ba+C)+\frac{1}{3}\{A(a+h)^2+B(a+h)+C\}\right]h$$
$$=A(2a^2h+\frac{2}{3}h^3)+B(2ah)+C(2h)$$

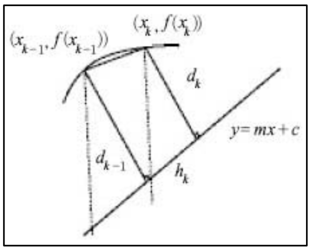
이다. 즉 좌변과 우변은 임의의 $A,\ B,\ C$에 대해 항상 같다. 그러므로 모든 2차 다항함수 $f(x)=Ax^2+Bx+C$에 대해 $\displaystyle\int_{a-h}^{a+h}(Ax^2+Bx+C)dx=\left\{\frac{1}{3}f(a-h)+\frac{4}{3}f(a)+\frac{1}{3}(a+h)\right\}h$가 성립한다.

4) 왼쪽 여백의 그림과 같이 k번째 사다리꼴의 넓이를 구하려면 d_k와 h_k를 알아야 한다.

d_k는 직선 $y=mx+c$와 $(x_k,\ f(x_k))$ 사이의 거리이므로 거리공식을 이용하면

$d_k=\dfrac{|f(x_k)-mx_k-c|}{\sqrt{1+m^2}}$이다. $f(x_k)>mx_k+c$이므로 $d_k=\dfrac{f(x_k)-mx_k-c}{\sqrt{1+m^2}}$이다. 마찬가지 방법으로 $d_{k-1}=\dfrac{f(x_{k-1})-mx_{k-1}-c}{\sqrt{1+m^2}}$이다.

h_k는 직선 $y=-\frac{1}{m}(x-x_{k-1})+f(x_{k-1})$과 점 $(x_k,\ f(x_k))$ 사이의 거리이므로 이를 계산하면



$$h_k=\frac{[k_k+mf(x_k)-\{x_{k-1}+mf(x_{k-1})\}]}{\sqrt{1+m^2}}$$

이다. $x_k-x_{k-1}=\Delta x$라 하면 h_k는

$$\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\left\{1+m\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{\Delta x}\right\}\Delta x$$

이다. k번째 사다리꼴 넓이는 $\frac{1}{2}(d_{k-1}+d_k)h_k$이므로 앞의 식을 대입해 정리하면

$$\frac{1}{1+m^2}\left(\frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2}-m\frac{x_k+x_{k-1}}{2}-c\right)\times\left(1+m\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{\Delta x}\right)\Delta x$$

가 된다. 따라서 다음 등식이 성립한다.

$$S_n=\frac{1}{1+m^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2}-m\frac{x_k+x_{k-1}}{2}-c\right)\times\left(1+m\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{\Delta x}\right)\Delta x$$

문제_02 계단함수 $F:[-1,\ 1]\to R$을 다음과 같이

$$F(x)=\begin{cases}1 & (x=1)\\ 0 & (0\le x<1)\\ -1 & (-1\le x<0)\end{cases}$$

로 정의하면 $G'(x)=F(x)$를 만족하는 함수 $G:[-1,\ 1]\to R$이 존재하는지 논하라.

▶ 전문가 의견

이 문제는 미분을 공부하면서 학생들이 자주 질문하는 주제입니다. 도함수가 모든 x에 대해 함수값을 가지는 함수 중 어떤 x에서 불연속인 함수가 있을까요?

다음과 같은 함수를 생각해 봅시다.

$$h(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & (x\ne 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

이 함수의 도함수를 생각해보면 $x\ne 0$일 때는

$$h'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\times(-\frac{1}{x})=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

입니다. 문제는 $x=0$일 때 미분계수가 존재하느냐입니다. 미분계수의 정의에 따르면 $x=0$일 때 미분계수는 존재합니다.

$$h'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(0+\Delta x)-h(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}=0$$

입니다. 즉 $h'(x)$ 함수는 다음과 같이 모든 x에 대해 정의됩니다.

$$h'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & (x\ne 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

$h'(x)$는 $x=0$에서 불연속입니다. $h'(x)$는 $x=0$에서 함수값이 정의돼 있으나 극한값

$\lim\limits_{n\to 0}(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x})$은 존재하지 않습니다. 따라서 도함수는 모든 x에 대해 함수값을 가지면서 불연속인 경우가 나타납니다. 앞의 논제에 나타난 형태의 불연속함수는, 어떤 구간에서 도함수의 함수값은 존재하나 불연속인 함수의 예가 될 수 있을까요? 이와 같은 함수 G는 존재하지 않습니다. 그 이유는 다음과 같은 일반적 정리로 나타낼 수 있습니다.

[정리] 함수 f가 $[a,\ b]$에서 미분가능하고 $f'(a)\neq f'(b)$라고 하자. 임의의 실수 $k\in R$에 대해 $f'(a)<k<f'(b)$ 또는 $f'(b)<k<f'(a)$이면 $f'(c)=k$를 만족하는 점 $c\in(a,\ b)$가 적어도 한 개 존재한다.

[증명] $f'(a)<k<f'(b)$인 경우를 생각하자.

함수 $g:[a,\ b]\to R$을 $g(x)=kx-f(x)$로 정의하면 함수 g는 $[a,\ b]$에서 연속이며 미분 가능하다. 또 최대−최소 정리에 의해 $x=c$에서 최대인 c가 폐구간 $[a,\ b]$에 존재한다.

$g'(a)=k-f'(a)>0$이므로 g는 $x=a$에서 최대값을 가질 수 없다. 또 $g'(b)=k-f'(b)<0$이므로 g는 $x=b$에서도 최대값을 가질 수 없다. 따라서 $a<c<b$이다. 이때 $x=c$에서 함수 g가 최대값을 가진다면 $g'(c)=0$이다.

만약 $g'(c)\neq 0$라면 $g'(c)>0$ 또는 $g'(c)<0$이다. $g'(c)>0$라면 함수 g는 $x=c$에서 증가상태에 있으므로 $x=c$에서 최대라는 점에서 모순이다. $g'(c)<0$라면 함수 g는 $x=c$에서 감소상태에 있으므로 역시 $x=c$에서 최대라는 점이 모순이다. 그러므로 $g'(c)=0$이다. 따라서 $g'(c)=k-f'(c)=0$, $f'(c)=k$를 만족하는 c가 개구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

▶ 예시답안

$F:[-1,\ 1]\to R$을

$$F(x)=\begin{cases}1 & (x=1)\\ 0 & (0\le x<1)\\ -1 & (-1\le x<0)\end{cases}$$

로 정의하면 $G'(x)=F(x)$를 만족하는 함수 $G:[-1,\ 1]\to R$은 존재하지 않는다.

만약 함수 G가 존재한다면 $G'(-\frac{1}{2})=-1$, $G'(\frac{1}{2})=0$이다. 이때 함수 $H(x)$를

$$H(x)=-\frac{1}{3}x-G(x)$$

라 하면 함수 $H(x)$는 폐구간 $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$에서 연속이고 미분 가능하다. 따라서 이 구간에서 최대값과 최소값을 갖는다. 이때 $H'(x)=-\frac{1}{3}x-G'(x)$이므로

$$H'(-\frac{1}{2})>0,\ H'(\frac{1}{2})<0$$

이고 함수 $H(x)$는 폐구간 $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$에서 최대값을 가져야 한다. $x=c$에서 함수 $H(x)$가 최대값을 갖는다면 이 구간에서 $H(x)$가 미분 가능하므로 $H'(c)=0$이다. 즉 $H'(c)=-\frac{1}{3}-G'(c)=0$을 만족하는 c가 폐구간 $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$에 존재해야 한다. 그런데 $G'(c)=-\frac{1}{3}$인 c는 주어진 함수에서 존재하지 않는다. 이는 모순이므로 $G'(x)=F(x)$를 만족하는 함수 $G:[-1,\ 1]\to R$은 존재하지 않는다.

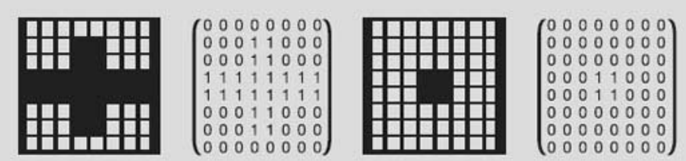
2008년 07월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]컴퓨터 정보 전달 과정- 모니터 표시의 원리와 정보 전달의 과정

문제 01 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라(2008학년도 서강대 정시 자연계 기출 응용).

(가) 우리는 컴퓨터를 이용해 많은 정보를 얻고 저장한다. 컴퓨터의 본체와 연결된 모니터는 정보를 (상호) 전달하는 수단이다. 1980년대에는 단색의 흑백 CRT 모니터를 많이 사용했으나 1990년대에 들어오면서 LCD 모니터 사용이 크게 늘었다. 모니터를 자세히 확대해보면 작은 액정(화소)들이 조밀하게 밀집돼 있음을 알 수 있다.

모니터 표시의 원리는 무엇일까? 간단한 모델을 통해 이해해보자. 지금부터 논의하는 각 액정은 단색이고 일정량의 전기가 흐름에 따라 액정은 켜지거나 꺼지기만 하며 모든 액정의 밝기가 동일하다고 가정하자. 이를 바탕으로 <모니터 1>처럼 8×8 크기의 간단한 LCD 장치를 구현한다. 이 그림에서 작은 사각형은 액정을 나타낸다. <모니터 1>과 <모니터 2>에서 검은색과 흰색은 각각 켜진 액정과 꺼진 액정을 나타낸다. <숫자배열 1>과 <숫자배열 2>는 각각 <모니터 1>과 <모니터 2>의 화면을 숫자의 조합으로 표시한 것이다. 각 행렬에 나타난 1과 0은 <모니터 1>과 <모니터 2>에서 그 위치의 화소가 켜지거나 꺼진 형태를 나타낸다. 이런 규칙에 따라 LCD 모니터에 나타난 임의의 화면은 화면의 각 행렬에 대응된 숫자 배열표에 대응시킬 수 있다.



〈모니터 1〉 〈숫자 배열 1〉 〈모니터 2〉 〈숫자 배열 2〉

(나) 1990년대 이후 인터넷이 점차 발전함에 따라 우리는 인터넷을 통해 개별 정보를 전송하고 다른 사람이 제공한 정보를 받기도 한다. 인터넷을 통한 여러가지 정보 전송 방법 중에서 다음과 같은 경우를 생각해보자. 먼저 화면에 표시된 정보를 숫자 배열로 바꿔 각 열에 대한 행을 순차적으로 전송한다. 다시 말해 1행1열, 2행1열, …, 8행1열, 1행2열, 2행2열, …, 8행8열 순으로 화소에 대응하는 값, 0 또는 1을 차례로 전송한다. <숫자배열 1>의 경우에는

0001100000011000000110001111110011111100001100000011000000011000

형태로 왼쪽에서 오른쪽으로 차례로 전송한다. 이를 ' 기본 코드'라 하자. 이때 0과 1을 표시하기 위한 화소는 최소 1비트씩 할당돼 예시와 같은 임의의 LCD 화면은 항상 64비트의 저장 매체가 필요하다.

기본 코드를 자세히 관찰해보면 숫자 0이 많이 나타날 뿐만 아니라 연속적으로 등장한다. 이에 착안해 기본 코드를 다음과 같이 변환한다. 처음 값 0을 시작으로 다음에 이어 나오는 0 또는 1의 개수 1부터 7까지를 나타내기 위해 필요한 최소 비트수는 3이다. 연이어 나오는 0 또는 1의 수는

0 3 3 2 6 2 6 2 4 6 2 6 4 2 6 2 6 2 3

과 같이 바꿔 전송한다. 이를 '변환 코드'라 하자. 변환 코드로 바꾸면 결국 $1+3+3\times17=55$비트가 돼 전송량이 9비트 줄어든다.

중심점을 나타내는 <모니터 2>의 경우 <숫자배열 2>를 이용하면 변환 코드는

0 5 27 2 6 2 27

이 돼 전송량은 1+3+5×5=29비트가 된다. 많은 경우에 이 방법으로 전송량을 줄인다. 이는 곧 네트워크 사용 부하를 줄이므로 비용 절감으로 이어진다.

1) 제시문 (나)의 변환 코드를 <예시화면 1>과 <예시화면 2>에 적용하면 기본 코드에 비해 얼마나 효율적인지 설명하라.

2) 어떤 네트워크에서 일정한 비율로 두 예시화면이 변환 코드 방식으로 번갈아 전송된다고 가정하자. 이 네트워크의 효율성에 대해 논하라.


〈예시화면 1〉


〈예시화면 2〉

3) 제시문 (나)에서 전송 도중에 발생하는 오류를 고려할 때 나타나는 변환 코드의 단점에 대해 <모니터 2>의 전송을 예로 들어 설명하라.

▶ 전문가 클리닉

1)번 문제에서는 효율성의 의미를 파악하는 것이 무엇보다 중요합니다. 효율성은 보통 '이익의 극대화'나 '시간의 최소화', '공간의 최적화'를 의미할 수 있지만 이 문제에서 효율성은 '하나의 화면이 전송될 때 필요한 비트수의 최소화'입니다. 그러므로 <예시화면 1>과 <예시화면 2>의 변환 코드에서 비트수를 먼저 정확히 찾아 그 효율성을 논해야 합니다.

2)번의 경우 일정한 비율을 미지수로 둬 평균비트 수를 갖고 네트워크 전체의 효율성을 판단할 수 있는지를 묻는 문제입니다. 3)번에서는 <모니터 2>의 예를 들어 설명하라고 했으므로 반드시 구체적인 예를 제시해야 합니다. 서강대 자연계논술은 각 문제마다 주어진 시간이 상대적으로 짧고 요구하는 답안의 양도 길지 않습니다. 그러므로 서강대를 목표로 하는 학생들은 간단명료하게 작성하는 연습을 해야 합니다.

▶ 예시답안

1) <예시화면 1>에서 연속된 0 또는 1의 개수는 0을 시작으로 해 28 1 27 8이다. 이 수를 표현하는 최소비트 수는 5이므로 변환 코드로는 0 5 28 1 27 8이 돼 전송량은 1+3+5×4=24비트가 된다. 즉 기본 코드에 비해 41비트가 줄어들어 더 효율적이다.

   또 <예시화면 2>에서 연속된 0 또는 1의 개수는 0을 시작으로 해 17 1 3 4 3 1 2 2 2 1 3 1 1 2 4 1 16이다. 이 수를 표현하는 최소비트 수는 5이므로 변환 코드는 0 5 17 1 3 4 3 1 2 2 2 1 3 1 1 2 4 1 16이 돼 전송량은 1+3+5×17=89비트가 된다. 그러므로 <예시화면 2>를 변환 코드 방식으로 전송할 때에는 기본 코드에 비해 25비트가 늘어나 덜 효율적이다.

2) 네트워크의 전체 효율성에 대해 논하려면 평균전송량을 측정해야 한다.

   네트워크에서 <예시화면 1>이 나타나는 비율을 P라 하면 <예시화면 2>가 나타나는 비율은 1−P이므로 평균전송량은 24P+89(1−P)=89−65P이다. 이때 89−65P가 64보다 작다면 기본 코드 방식에 비해 효율적이고, 반대 경우엔 비효율적이다.

   즉 <예시화면 1>이 네트워크에서 나타나는 비율이 $\frac{5}{13}$보다 크다면 기본 코드 방식에 비해 더 효율적이고 그 때 줄어드는 평균비트 수는 65P−25이다.

3) 기본 코드 방식에서는 전송 중 오류가 발생된 수의 개수와 잘못 표현되는 화소의 수가 일치하므로 하나의 전송 오류에 대해 하나의 화소 오류만 나타난다. 반면 변환 코드 방식에서는 전송 중 발생한 오류의 개수보다 화소의 오류가 상대적으로 클 수 있다. 제시문 (나)

의 <모니터 2>를 예로 들면 기본 코드로 전송할 때에는

0000000000000000000000000001100000011000000000000000000000000000

의 64개 데이터가 전송된다. 그러나 변환코드로 전송할 때에는 0 5 27 2 6 2 27을 이진수로 변환시킨 다음 29개의 데이터가 전송된다.

0 101 11011 00010 00110 00010 11011

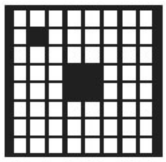
만일 전송 도중 기본 코드와 변환 코드 모두 10번째 데이터에 오류가 발생해 0이 1로 바뀐다면 기본코드는

0000000001000000000000000001100000011000000000000000000000000000

로 전송되고 변환코드는

0 101 11011 10010 00110 00010 11011

로 전송된다. 기본 코드에서는 <그림1>처럼 화소 1개에만 오류가 생기지만 변환 코드에서는 처음으로 나타나는 1의 개수가 2개에서 18개로 늘어나고 그 다음 화소는 16개씩 밀려서 나타난다. 따라서 <그림2>가 출력되거나 한 화면에 표현해야 할 화소 수 64개를 초과해 화면이 표현되지 않을 수 있다. 즉 기본 코드에서는 전송 중 오류가 한두 개 발생해도 원래 화면을 가늠할 수 있지만 변환 코드에서는 단 한 개의 오류도 원래 화면을 알 수 없을 정도의 큰 차이를 낳는다.


〈그림 1〉


〈그림 2〉

문제 02 다음 물음에 답하라(2008학년도 서울대 특기자전형 심층면접).

1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^{1/n}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=0$**임을 보이고** $\lim_{n\to\infty}n^k\dfrac{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^{1/n}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$**이 0이 아닌 극한값을 갖는** $k>0$**를 구하라(참고 : 만일** $0<a<1$**이면** $1+ax-\frac{1}{2}a(1-a)x^2\le(1+x)^a\le 1+ax$**이다.)**

2) $0<a<b<c$**일 때** $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}-c}{B_n}$**가 0이 아닌 극한값을 갖는 수열** $B_n=\frac{1}{n}r^n$**에서 상수** r**을 구하라.**

▶ 전문가 클리닉

요즘 자연계논술형 문제가 심층면접으로 바뀌고 있습니다. 따라서 지금까지 출제된 심층면접문제를 논술 문제라고 생각하고 서술하거나 그 반대로 연습해봐야 합니다. 주어진 조건을 잘 활용하면 쉽게 문제를 풀 수 있습니다.

▶ 예시답안

1) '참고'에 주어진 내용을 활용하기 위해 $x=(\frac{1}{2})^n$, $a=\frac{1}{n}$이라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}(\frac{1}{2})^n-\frac{1}{2n}(1-\frac{1}{n})(\frac{1}{2})^{2n}-1}{(\frac{1}{2})^n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{(1+(\frac{1}{2})^n)^{\frac{1}{n}}-1}{(\frac{1}{2})^n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}(\frac{1}{2})^n-1}{(\frac{1}{2})^n}$$

이 성립한다. 좌변의 극한은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2n^2}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$$

이고, 우변의 극한은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=0$$

이므로 극한값의 성질(샌드위치 정리)에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=0$$

이다. 0이 아닌 극한값을 갖는 k를 찾기 위해 주어진 부등식을 다시 이용하면

$$\lim_{n\to\infty}n^k\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\le\lim_{n\to\infty}n^k\frac{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\le\lim_{n\to\infty}n^k\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

이다. 좌변과 우변의 극한값이 같아야 하므로

$$\lim_{n\to\infty}n^k\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2n^2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}n^k\frac{1}{n}$$

이다. 우변의 0이 아닌 극한값은 $k=1$일 때 1이며, 좌변도 같은 극한값을 갖는다.

2) c가 가장 큰 수이므로 우선 준식을 1)번처럼 변형하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c\left(\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n+1\right)^{\frac{1}{n}}-c}{B^n}$$

이다. 문제2)에서 '참고'를 이용하기 위해 $x=\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n$, $a=\frac{1}{n}$이라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{c}{n}\left(\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n\right)-\frac{c}{2n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n\right)^2}{B_n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{c\left(\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n+1\right)^{\frac{1}{n}}-1}{B_n}$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{c\left(\frac{1}{n}\right)\left(\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n\right)}{B_n}$$

이다. $B_n=\frac{1}{n}r^n$을 이용해 우변의 식을 정리하면

$$\lim_{n\to\infty}\left\{c\left(\frac{a}{cr}\right)^n+c\left(\frac{b}{cr}\right)^n\right\}$$

이다. 이것이 0이 아닌 극한값을 갖기 위해서는 $r=\frac{b}{c}$여야 하고 극한값은 c이다. 좌변도 $r=\frac{b}{c}$일 때 극한값 c를 가지므로 상수 r은 $\frac{b}{c}$이다.

2008년 08월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]원뿔의 정사영 구하는 법

문제 01 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) $Ax^2+By^2=1$ ($A>0$, $B>0$) 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서 곡선에 접하는 접선방정식은 다음과 같다.

$Ax_1x+By_1y=1$ ··· ①

(나) $Ax^2+By^2=1$ ($A>0$, $B>0$) 밖의 점 $(x_2,\ y_2)$에서 이차곡선에 접선 두 개를 긋는다고 하자. 접선과 이차곡선이 만나는 접점 두 개를 연결한 직선 방정식은 식 ①과 같은 형태다.

$Ax_2x+By_2y=1$ ··· ②

접선과 이차곡선이 만나는 두 개의 접점을 각각 $\mathrm{P}(a_1,\ b_1)$, $\mathrm{Q}(a_2,\ b_2)$라 할 때 점 P와 Q에서의 접선 방정식은 각각 다음과 같다.

$Aa_1x+Bb_1y=1,\ Aa_2x+Bb_2y=1$

이 두 접선은 모두 점 $(x_2,\ y_2)$을 지나므로

$Aa_1x_2+Bb_1y_2=1,\ Aa_2x_2+Bb_2y_2=1$

가 성립한다. 이들 식은 직선 $Ax_2x+By_2y=1$의 x, y에 두 접점 P, Q의 좌표를 대입했을 때의 등식이므로 곡선 밖의 점 $(x_2,\ y_2)$에서의 접선과 이차곡선이 만나는 두 개의 접점을 연결한 직선 방정식은 ②와 같다.

(다) 공간에서 중심이 C인 원을 정하고 이 원을 포함하는 평면 α밖에 한 정점 V를 잡는다. 정점 V와 원 위의 동점 P를 이은 선분(모선)이 이루는 자취와 원의 내부 영역으로 이뤄지는 입체도형을 원뿔이라 한다. 정점 V를 원뿔의 꼭짓점, 원과 원의 내부를 원뿔의 밑면, 반지름을 밑면의 반지름, 정점 V와 원의 중심 C를 연결하는 선분을 원뿔의 축, V와 평면 α와의 거리를 원뿔의 높이, 꼭짓점 V와 밑면인 원의 둘레 위의 임의의 점 P를 잇는 선분 VP를 원뿔의 모선, 모선이 움직여서 그린 곡면을 원뿔의 옆면이라고 한다. 직선 VC가 평면 α에 수직이면 직원뿔이라 하고 그 이외 원뿔을 빗원뿔이라 한다. 직원뿔은 직각삼각형을 직각의 한 변을 축으로 해 1회전 시켰을 때 생긴 입체이다. 하나의 직원뿔에서 모선 길이는 모두 같다. 밑면의 반지름이 r, 높이가 h, 모선의 길이가 l인 직원뿔의 옆넓이를 S라 하면 $S=\pi rl$이며 원뿔의 부피 V는 $\dfrac{1}{3}\pi r^2h$이다.

1) 접선 방정식 ①을 미분을 이용해 유도하라.

2) 높이가 $\dfrac{8}{\sqrt{3}}$이고, 밑면의 반지름이 4인 직원뿔의 축이 평면 α와 30°를 이룰 때 원뿔에서 평면 α로의 정사영 모양을 제시문을 참조해 추론하고 넓이를 구하라.

▶ 전문가 클리닉

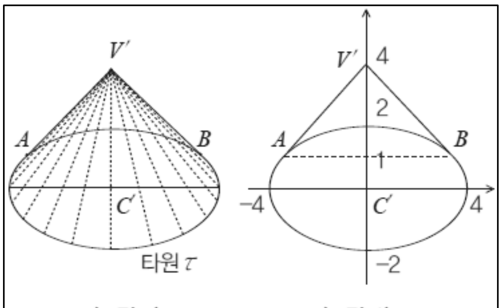
원뿔의 정사영을 제대로 아는 학생이 많지 않습니다. 직선의 정사영은 항상 직선이므로 원뿔

모선의 정사영은 모든 타원(원뿔밑면의 정사영)의 점에 존재합니다. 제시문 (나)에서는 '극선의 방정식'을 조금 다르게 해석했습니다. 문제로 내진 않았지만 밑줄 친 부분의 내용을 정확히 이해하고 증명해 봐야 합니다. 논제 1)에서는 $y_1=0$일 때를 구분해 답을 구해야 합니다.

▶ 예시답안

1) $Ax^2+By^2=1$을 x에 대해 미분하면 $2Ax+2By\dfrac{dy}{dx}=0$이므로 곡선 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서 접선 기울기(m)는 $m=-\dfrac{Ax_1}{By_1}$(단 $y_1\neq 0$)이고 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나는 접선 방정식은 $y-y_1=-\dfrac{Ax_1}{By_1}(x-x_1)$이다. 식을 정리하면 $Ax_1x+By_1y=Ax_1^2+By_1^2$이고 점 $(x_1,\ y_1)$은 이차곡선 위의 점이므로 $Ax_1x+By_1y=1(\because Ax_1^2+By_1^2=1)$이다.
주어진 이차곡선은 y축에 대해 대칭하는 곡선이다. $y_1=0$일 때 접선기울기는 y축에 평행하고 점 $(x_1,\ 0)$를 지나므로 접선방정식은 $x=x_1(\because Ax_1^2=1)$이고 방정식 ①은 성립한다.

2) 주어진 직원뿔에서 평면 α로의 정사영은 <그림1>과 같다. 그림에서 지면은 평면 α이다. 점 V′와 C′는 각각 원뿔의 꼭짓점 V와 밑면의 중심 C의 평면 α로의 정사영이고 타원 τ는 원뿔 밑면의 정사영이다. 점 A와 B는 점 V′에서 타원 τ에 그은 접선과 타원 τ와의 접점이다. 원뿔의 정의에서 원뿔은 모선의 자취가 이루는 도형이라 했다. V′에서 타원 τ의 둘레로 뻗은 점선은 원뿔 모선의 정사영이다. 정사영의 넓이는 △V′BA의 넓이와 그 아랫부분의 타원 넓이를 이용해 구한다.



〈그림 1〉 〈그림 2〉

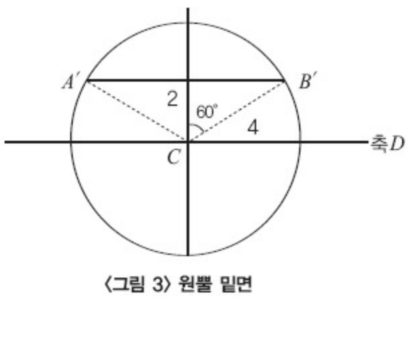
원뿔의 축과 평면 α가 이루는 각이 30°이므로 원뿔의 밑면과 평면 α가 이루는 각은 60°이다. 즉

$$\overline{V'C'}=\overline{VC}\cos 30°=\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=4$$

타원 τ의 단축=원의 반지름×cos60°=$4\cdot\dfrac{1}{2}=2$이다. 그러므로 타원 τ의 방정식은 장축 길이가 8이고 단축 길이가 4인 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$이다. 직선 AB의 방정식은 제시문 (나)에서 타원 밖의 점 (0, 4)에서 타원에 그은 접선과 타원의 두 접점을 연결한 직선 방정식이므로 $y=1$이다. 점 A와 B의 y좌표는 모두 1이고 x좌표는 $\pm 2\sqrt{3}$이다. 정사영의 넓이는 삼각형 V′BA의 넓이와 직선 AB 아래 타원 넓이의 합이다.

$$\triangle \mathrm{V'BA}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\sqrt{3}=6\sqrt{3}\ \cdots\ ①$$

이다. 직선 AB 아래의 타원 넓이는 <그림3>의 선분 A′B′ 아랫부분의 원을 축 D를 중심으로 60° 회전한 지면으로의 정사영 넓이다. 이를 구하는 방법은 다음과 같다.



〈그림 3〉 원뿔 밑면

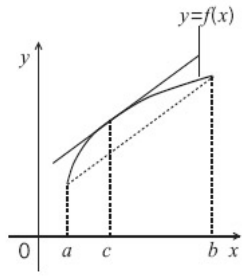
선분 A′B′ 아랫부분 원 넓이는 $\dfrac{2}{3}$분원(중심각이 240°인 부채꼴)과 삼각형 A′B′C 넓이의 합으로 $\dfrac{2}{3}\cdot 4^2\pi+4\sqrt{3}$이다.

이것을 60° 회전한 정사영의 넓이는

$$\left(\frac{2}{3}\cdot 4^2\pi+4\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{16}{3}\pi+2\sqrt{3}\ \cdots\ ②$$

이다. 원뿔 정사영의 넓이는 식 ①과 ②의 합인 $\frac{16}{3}\pi+8\sqrt{3}$이다.

문제2 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.



〈그림 4〉 평균값의 정리

(가) 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 최대값과 최소값을 갖는다. 이로부터 다음과 같은 '롤의 정리'가 성립한다.

'함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 개구간 (a, b)에서 미분 가능할 때 $f(a)=f(b)$이면 $f'(c)=0$인 c가 개구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다. '

(나) 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 개구간 (a, b)에서 미분 가능하면 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 (a, b)에 적어도 하나 존재한다(그림 4).

(다) 육상부인 철수는 민호의 운동능력이 떨어진다고 매일 핀잔을 준다. 잔소리가 듣기 싫었던 민호는 철수에게 400m 달리기 시합을 제안한다. 자신은 육상부가 아니므로 출발선으로부터 100m 지점에서 출발하겠다고 했다. 철수도 동의해 둘이 동시에 출발했다. 시간이 얼마 지나지 않아 철수는 민호를 앞질렀고 출발한지 T초 만에 400m 지점을 통과했다. 그 때 민호는 철수의 출발선으로부터 300m 지점을 지나고 있었다.

(라) 시간 t초일 때 평면 위를 움직이는 점 P의 좌표가 $P(x(t),\ y(t))$이고 $x(t)$와 $y(t)$가 미분 가능하면 속도벡터 $\overrightarrow{v(t)}=(x'(t),\ y'(t))$이며 속력 $|\overrightarrow{v(t)}|$은 다음과 같다.

$$|\overrightarrow{v(t)}|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}$$

1) 제시문 (나)의 '평균값 정리'를 '롤의 정리'를 이용해 증명하라.

2) 제시문 (다)에서 철수의 속도가 민수의 속도의 두 배가 되는 시점이 존재함을 제시문을 참조해 설명하라. 단 시간 t에서 철수와 민호의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 한다.

3) 제시문 (라)와 관련해 다음 주장의 문제점을 지적하라.

> **$x(t)$와 $y(t)$가 폐구간 $[t_1,\ t_2]$에서 연속이고 개구간 $(t_1,\ t_2)$에서 미분 가능하면 평균값 정리에 의해**
>
> $$x'(c)=\frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1},\ \ y'(c)=\frac{y(t_2)-y(t_1)}{t_2-t_1}$$
>
> **를 만족하는 c가 t_1과 t_2 사이에 존재하고 이때 속력은 다음과 같다.**
>
> $$|\overrightarrow{v(c)}|=\frac{\sqrt{(x(t_2)-x(t_1))^2+(y(t_2)-y(t_1))^2}}{t_2-t_1}$$

▶ 전문가 클리닉

최대-최소의 정리, 중간값 정리, 롤의 정리, 평균값 정리는 수리논술이나 심층면접의 단골 주

제입니다. 각각에 대해 정의와 증명을 알아둠은 기본이고 적용과 응용까지 잘 할 수 있게 대비해야 합니다. 논제 2)와 3)은 고려대 모의논술의 기출문항을 변형한 문제입니다.

▶ 예시답안

1) 롤의 정리를 이용하기 위해서는 구간 양끝의 함수값이 같아야 하므로 두 점 $(a,f(a)),(b,f(b))$를 잇는 직선을 $y=g(x)$라 하여 새로운 함수 $F(x)=f(x)-g(x)$를 정의한다. 여기서

$g(x)=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$이므로

$$F(x)=f(x)-\left\{f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right\}$$

이다. 이때 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 미분 가능하므로 양변을 미분하면

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

이고 $F(a)=F(b)=0$이므로 롤의 정리에 의해

$$F'(c)=\frac{F(a)-F(b)}{b-a}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

인 c가 개구간 $(a,\ b)$에 반드시 존재한다. 식 ①에 c를 대입해 식 ②를 이용하면

$f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$이다. '$f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$인 $c(a<c<b)$가 개구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다'라는 평균값 정리가 성립한다.

2) 새로운 함수 $F(t)$를 $F(t)=x_1(t)-2x_2(t)$라고 정의하면 $F(0)=F(T)=-200$이다. 롤의 정리에 의해$F'(c)=x_1'(c)-2x_2'(c)=0$인 $c(0<c<T)$가 개구간 $(0,\ T)$에 적어도 하나 존재하므로 $x_1'(c)-2x_2'(c)=0$인 시점 c가 달리기 시합 중 반드시 존재한다.

3) x, y 좌표에 대한 속도를 구하기 위해 평균값 정리를 적용하는데 c의 값이 $x'(c)$와 $y'(c)$에서 같다고 생각한 점이 문제다. $x'(t)$와 $y'(t)$가 같은 함수가 아니면 동일한 c, t_1, t_2에 대해

$x'(c)=\dfrac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}$와 $y'(c)=\dfrac{y(t_2)-y(t_1)}{t_2-t_1}$가 항상 동시에 만족하지 않는다.

폐구간 [0, 1]에서 연속이고 개구간 (0, 1)에서 미분 가능한 두 함수 $x(t)=t^2$, $y(t)=t^3$에서 도함수는 $x'(t)=2t$와 $y'(t)=3t^3$이다. 평균값 정리를 만족하는 $c(0<c<1)$를 찾아보면

$$\frac{x(1)-x(0)}{1-0}=1,\ \frac{y(1)-y(0)}{1-0}=1$$

이므로 $x'(c)=y'(c)=1$을 만족하는 c는 개구간 (0, 1)에 존재하지 않는다. 단지 $x'\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$

이고 $y'\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=1$으로 서로 다른 t에 대해 0과 1 사이의 평균변화율과 같은 속도를 갖는 순간이 존재할 뿐이다. 임의의 시간 c에서의 속력도 제시문 (라)처럼 $|\overrightarrow{v(t)}|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}$으로 구해야 한다. 주장처럼 임의의 같은 구간에서 평균변화율로 각 좌표 방향의 속도를 대신할 수는 없다.

2008년 09월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]확률을 이용한 미래 예측

| 글 | 이창훈 ·vmfgksmf40@hanmail.net |

확률을 바탕으로 미래의 경향을 예측하고, 경험을 통한 판단을 응용해 봅시다.

문제1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 소비자는 특정한 브랜드를 선호하고 그것을 계속 구입하는 경향을 보인다. 소비자의 이러한 심리를 나타내는 척도가 브랜드 충성도이다. 브랜드 충성도는 고객이 사용 목적에 따라 특정 브랜드를 선호하고 이를 반복해 구매하는 소비자 선호의 심리적 이유나 원인이다. 어떤 브랜드가 계속적으로 구매자의 높은 지지를 얻으면 이를 판매하는 기업은 독점적인 시장을 구축할 수 있다. 이때문에 각 기업은 브랜드 충성도를 향상시키는 데 큰 관심을 갖는다.

고객의 충성도와 브랜드 범주에 따라 브랜드 전환을 유도하기 위한 마케팅 전략도 달라진다. 충성도가 비교적 낮은 고객이 대상이거나 브랜드 전환율이 높은 비내구성 상품(예: 라면, 우유)이라면 광고 메시지나 쿠폰, 견본, 구매 시점의 시각적 자극물이나 포장을 활용해 브랜드 전환을 유도할 수 있다. 하지만 충성도가 높은 고객이 대상이거나 브랜드 전환율이 낮은 내구성 상품(예: 아파트, 컴퓨터)이라면 브랜드 전환을 유도하기 위해 제품 이미지를 크게 개선하고 대대적인 판촉 전략을 펼쳐 소비자의 태도를 기본적으로 변화시켜야 한다.

(나) <표1>과 <표2>는 서로 다른 범주의 상품 a, 상품 b에 대한 브랜드별 선호도 변화를 나타낸 것이다. 둘 중 하나는 4개의 자동차 브랜드에 대한 선호도 변화를, 다른 하나는 4개의 초콜릿 브랜드에 대한 선호도 변화를 반영한다. 표에 나타난 숫자는 2007년 구매했던 브랜드와 2008년 구매한 브랜드를 대응시킨 인원수다. 각 상품 시장에서 브랜드의 추가 진입은 없고 총 소비자는 2007년의 소비자가 그대로 유지된다고 가정한다. 예를 들어 상품 a의 브랜드 C를 2007년에 구매하고 2008년에 D를 구매한 사람의 수는 5명이다.

<표1>상품 a의 4개 브랜드별 선호도 변화

2007 \ 2008	A	B	C	D	합계
A	32	10	23	15	80
B	27	41	20	12	100
C	30	35	50	5	120
D	10	12	32	46	100
합계	99	98	125	78	400

<표2>상품 b의 4개 브랜드별 선호도 변화

2007 \ 2008	E	F	G	H	합계
E	63	7	20	10	100
F	1	51	39	9	100
G	2	3	80	15	100
H	1	8	41	50	100
합계	67	69	180	84	400

1) 제시문 (나)의 상품 a와 상품 b가 각각 무엇일지 추론하고 그 이유를 제시문 (가)를 근거로 논리적으로 설명하라.

2) 제시문 (나)의 상품 b에서 브랜드별 선호도의 변화 양상이 2008년 이후에도 그대로 지속된다고 가정하자. 이때 브랜드 G의 시간에 따른 시장 점유율의 변화를 수리적으로 모델링하라. 단 시장 점유율이란 동종 상품 내에서 차지하는 특정 브랜드의 구매 비율을 의미한다.

3) 과동이는 <표2>를 보고 다음과 같이 말했다.

"이와 같은 양상이 계속 유지된다면 결국엔 상품 b시장에서 거의 모든 구매자가 브랜드 G

의 상품을 택할 것으로 예상된다."

과동이의 예상에 대해 그 진위 여부를 수리적으로 판단하라.

▶ 전문가 클리닉

주어진 자료를 올바로 분석하고 해석하는 과정에서 수학적 논리를 적용할 수 있도록 논제를 구성했습니다. 이런 언어-수리 통합형 논제를 해결하려면 일반적 논술문제와는 달리 수학적 도구를 사용해 자신의 주장을 펼쳐야 합니다.

논제 1)에서는 브랜드 전환율을 제시문에 맞게 스스로 정의하고 그것에 따라 자동차와 초콜릿이 어떤 상품에 속하는지를 수리적 과정을 거쳐 추론해야 합니다. 논제 2)에서 주의할 점은 브랜드 G의 점유율이 25%에서 45%로 판매량이 80%가 증가했다고 해서 다음해에도 판매량이 80% 증가하지는 않는다는 점입니다. 브랜드 G에서 다른 브랜드로 전환하는 비율이 유지되고 있다는 점을 상기해야 합니다. 그러므로 행렬을 이용해 점유율의 변화를 점화식으로 이끌어 내야 합니다.

완벽한 답안을 작성하기 위해서는 논제의 비중에 알맞은 심층적 분석을 해야 합니다. 3개의 논제 중 두 번째 논제의 비중이 가장 높으므로 더욱 꼼꼼한 수학적 분석이 필요합니다.

▶ 예시답안

1) 상품 a는 초콜릿이고 상품 b는 자동차다. 그 이유는 제시문 (가)의 비내구성 상품과 내구성 상품의 브랜드 전환율에 대한 설명으로 알 수 있다. 라면이나 우유 같은 비내구성 상품은 아파트나 컴퓨터 같은 내구성 상품에 비해 브랜드 전환율이 높다. 브랜드 전환율은 <표1>과 <표2>에 나타나 있는데, 이는 2007년에 특정 브랜드를 구입했던 소비자들이 2008년에 선택한 브랜드의 비율을 나타낸 것이다. 이를 근거로 <표1>과 <표2>에서 각 브랜드에 대한 브랜드 전환율을 구하면 <표3>과 같다.

<표3> 상품 a와 b의 브랜드 전환율

상품 a			
A	B	C	D
$1-\frac{32}{80}$	$1-\frac{41}{100}$	$1-\frac{50}{120}$	$1-\frac{46}{100}$

상품 b			
E	F	G	H
$1-\frac{63}{100}$	$1-\frac{51}{100}$	$1-\frac{80}{100}$	$1-\frac{50}{100}$

<표3>에서 알 수 있듯이 상품 a의 브랜드 전환율은 상품 b의 전환율보다 상대적으로 높다. 따라서 상품 a가 비내구성 상품인 초콜릿이고, 상품 b가 내구성 상품인 자동차다.

두 상품에서 브랜드를 나누지 않고 전체 전환율을 구할 수도 있다. 상품 a의 전체 브랜드 전환율은 $1-\frac{169}{400}$이고, 상품 b의 전체 브랜드 전환율은 $1-\frac{244}{400}$이다. 따라서 상품 a의 전체 브랜드 전환율이 상대적으로 높다는 점을 알 수 있다.

2) 상품 b의 브랜드별 선호도 변화 양상이 2008년 이후에도 그대로 계속된다고 가정했으므로 우선 <표2>에서 선호도 변화 양상을 브랜드 G를 중심으로 살펴보면 <표4>와 같다. 단 여기서 G^C는 G 이외의 브랜드를 의미한다.

<표4> n년과 n+1년차의 G 브랜드 선호도

n년 \ n+1년	G	G^c
G	$\frac{80}{100}=0.8$	$\frac{20}{100}=0.2$
G^c	$\frac{100}{300}=\frac{1}{3}$	$\frac{200}{300}=\frac{2}{3}$

<표4>에서 $\frac{100}{300}$은 2007년에 G 이외의 브랜드를 구매했으나 2008년에는 브랜드 G를 구매한 사람의 비율이다. 즉 E, F, H 브랜드를 2007

년에 구매했던 사람수는 모두 300명이며, 그 중에서 2008년에 브랜드 G로 바꾸어 구매한 사람 수는 100이다. 따라서 브랜드 변화비율은 $\frac{1}{3}$이다.

2007년에 구매했던 사람수는 모두 300명이며, 그 중에서 2008년에 브랜드 G로 바꾸어 구매한 사람 수는 100이다. 따라서 브랜드 변화비율은 $\frac{1}{3}$이다.

G_n을 2007년부터 n년 후에 브랜드 G를 구매한 구매비율이라 하고, G_{n+1}을 $n+1$년 후의 구매비율, G_n^c을 n년 후에 G이외의 브랜드를 구매한 구매비율이라 하면 다음 식이 성립한다.

$$G_{n+1}=0.8G_n+\frac{1}{3}G_n^c$$

여기서 $G_n+G_n^c=1$이므로

$$G_{n+1}=0.8G_n+\frac{1}{3}(1-G_n)$$

$$G_{n+1}=\frac{7}{15}G_n+\frac{1}{3}$$

이다. 이 점화식에서 일반항 G_n을 구하기 위해 식을 변형하면

$$(G_{n+1}-\alpha)=\frac{7}{15}(G_n-\alpha)$$

에서 $\frac{8}{15}\alpha=\frac{1}{3}$이므로 $\alpha=\frac{5}{8}$이다.

즉 $G_n-\frac{5}{8}$는 공비가 $\frac{7}{15}$인 등비수열이므로

$$G_n=\left(G_1-\frac{5}{8}\right)\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}+\frac{5}{8}$$

이다. 여기서 2007년 브랜드 G의 구매비율 $\left(\frac{100}{400}=\frac{1}{4}\right)$을 G_0으로 놓고 식을 다시 표현하면 다음과 같다.

$$G_n=\left(G_0-\frac{5}{8}\right)\left(\frac{7}{15}\right)^{n}+\frac{5}{8}=\left(-\frac{3}{8}\right)\left(\frac{7}{15}\right)^{n}+\frac{5}{8}$$

3) 과동이의 예상에 대한 진위여부를 수리적으로 판단하려면 논제 2)에서 구했던 G_n의 극한값을 구해야 한다.

$$\lim_{n\to\infty}G_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(-\frac{3}{8}\right)\left(\frac{7}{15}\right)^{n}+\frac{5}{8}\right\}=\frac{5}{8}$$

과동이는 거의 모든 구매자가 브랜드 G를 선택할 것이라고 했다. '거의 모든 구매자'를 '적어도 90% 이상의 소비자'라고 해석할 때 브랜드 G를 선택할 비율은 $\frac{5}{8}$이다. 따라서 과동이의 예측은 틀렸다고 볼 수 있다.

문제2 다음 글을 읽고 물음에 답하라.

플하늘 씨는 관상을 직업으로 삼은 지 올해로 20년째다. 플하늘 씨는 자신을 방문한 고객의 당시 상태를 알아차리는 노하우를 갖고 있다. 고객의 상태는 세 가지 요소에 의해 결정된다. 그것은 바로 방문한 사람이 다리를 떠는지, 눈을 정확히 보는지, 웃을 때 활짝 웃는지의 여부다.

다음 표에서 0이 2개 이상이면 고객의 현재 상태가 불만족스럽고, 그 외에는 불만족스럽지 않다고, 즉 만족스럽다고 판단한다.

<표5> 고객의 특성과 불만족 여부

	그렇다	그렇지 않다
다리를 떤다	0	1
눈을 정확히 바라본다	1	0
웃을 때 활짝 웃는다	1	0

플하늘 씨는 고객이 들어와서 맞은편의 방석 4개 중 왼쪽 끝에 앉으면 눈을 정확히 보지 못하고 다리를 떤다는 점, 왼쪽 2번째 방석에 앉으면 눈을 정확히 보기는 하지만 다리를 떨고 활짝 웃지 못한다는 점, 우측 끝에 앉으면 다리를 떨지는 않지만 활짝 웃지 않거나 또는 눈을 정확히 보지 못하거나 또는 둘 다라는 점, 그리고 오른쪽 2번째 자리에 앉으면 웃음과 다리를 떨고 눈을 보는 것에 대해 앞서 기술한 것 이외의 상황임을 확신하고 있다.

플하늘 씨의 판단 기준이 항상 사실이라고 가정하자. 플하늘 씨가 고객이 앉는 자리를 보고 그 사람의 상태를 판단할 수 있는지에 대해 논하라.

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 고객이 앉는 자리에 따라 그 사람의 현재 상황에 대한 경우의 수가 하나로 확정되느냐 그렇지 않느냐에 대한 문제입니다. 어떤 사건에서건 우리가 결과를 확신하거나 정확히 판단할 수 있다는 점은 그 사건의 결과가 하나의 경우로 나타남을 의미합니다.

▶ 예시답안

이 문제는 <표 6>을 이용해 간단하게 판단 여부를 가늠할 수 있다. 여기서 알 수 있듯이 고객이 왼쪽 끝과 두 번째 방석에 앉으면 모두 불만족스러운 상황이다. 따라서 고객이 왼쪽에 앉는다면 그가 현재 불만족스럽다는 점을 정확히 판단할 수 있다. 또 오른쪽 2번째 방석에 앉는 경우에는 항상 만족스럽다는 점을 알 수 있다. 하지만 오른쪽 끝에 앉을 경우에는 불만족한 경우와 불만족하지 않은 경우가 모두 가능하므로 고객의 현재 상태를 정확히 판단하기 힘들다.

<표6> 방석 위치에 따른 고객의 상태

다리	웃음	눈	방석 위치	현재 상태
0	0	0	왼쪽 끝	불만족
0	0	1	왼쪽 두 번째	불만족
0	1	0	왼쪽 끝	불만족
0	1	1	오른쪽 두 번째	만족
1	0	0	오른쪽 끝	불만족
1	0	1	오른쪽 끝	만족
1	1	0	오른쪽 끝	만족
1	1	1	오른쪽 두 번째	만족

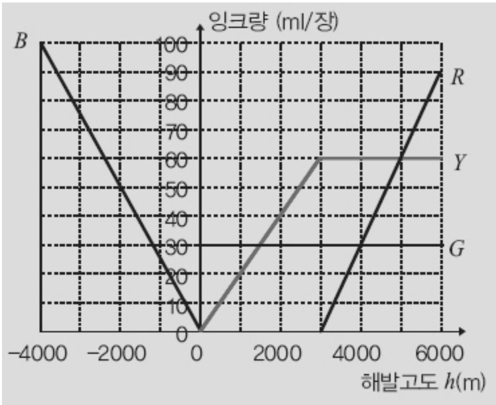
2008년 10월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]지형 정보를 얻는 방법

| 글 | 이창훈 ・vmfgksmf40@hanmail.net |

문제1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

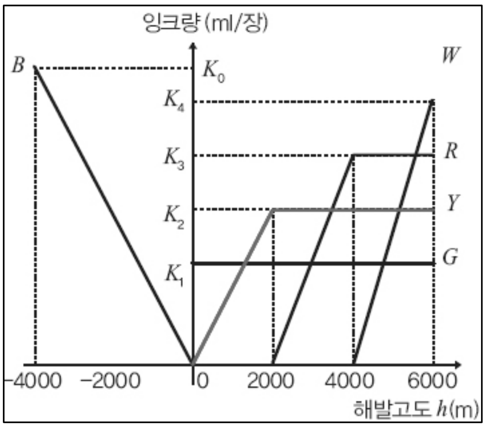
지형도에서 해발고도를 나타내기 위해 몇 가지 기본 색을 혼합해 사용한다. 다음은 지형도 인쇄에 사용되는 4가지 색상 잉크의 양을 해발고도에 따라 표시한 그래프다. 가로축은 고도 h(육지 $h>0$, 수면 $h<0$)를, 세로축은 지도 1장 전체를 고도 h로 인쇄할 경우 소요되는 잉크의 양을 나타낸다. 인쇄에 사용된 4개의 잉크 사용량으로 지도에 표시된 지역의 지형에 관한 정보를 얻을 수 있다. 단 지도 영역은 모두 4000m에서 6000m 사이의 고도로 표시되며 고도에 따른 지형을 제외한 표식은 4가지 색상 이외의 잉크를 사용한다.



1) 지도에 표시된 육지와 수면의 면적 비율을 구하려면 어떤 색상의 잉크 사용량을 알아야 하는지 설명하고 여러 색상의 잉크 사용량으로 평균수심을 구하는 방법에 대해 논하라.

2) 4개의 잉크 사용량으로부터 육지의 평균고도를 결정하고 그 방법을 설명하라.

3) 지도 제작업체 '하늘지도'는 해발고도에 따라 색상 변화가 뚜렷한 지도를 만들기 위해 잉크 한 가지를 추가한 뒤 다음 그래프에 따라 잉크량을 조절하려 한다. 이 경우에도 앞의 경우처럼 5개의 잉크 사용량으로 육지의 평균고도를 결정할 수 있을까? 아니면 상수 K_0, K_1, K_2, K_3, K_4 사이에 특별한 관계가 성립할 때만 평균고도를 결정할 수 있는가? 그 여부를 말하고 이유를 설명하라.



▶ 전문가 클리닉

2007학년도 이화여대 수시 기출문제를 변형, 발전시킨 문제입니다. 평균고도와 평균수심을 미지수로 놓고 시작해야 논제를 해결할 수 있습니다.

▶ 예시답안

1) 잉크 G의 사용량을 안다면 육지와 수면의 비율을 구할 수 있다. 그래프 G는 육지(고도 $h>0$)에서 잉크 사용량이 항상 일정하므로 그 사용량과 육지의 넓이가 비례한다. g는 잉크 G의 실제 사용량이고 e는 지도에서 차지하는 육지의 비율이다.

$g:30=e:1$이므로 $e=\dfrac{g}{30}$이고 수면이 지도에서 차지하는 비율을 S라고 하면 $S=1-\dfrac{g}{30}$이다. 수면의 면적비율은 $\dfrac{g}{30}:1-\dfrac{g}{30}$이다.

수면의 평균수심은 잉크 B의 사용량을 알면 구할 수 있다. 수면의 평균수심을

$h_{-0}(h_{-0}<0)$라고 하면 잉크 B의 사용량은 수심과 비례한다. 그러므로 잉크 B의 사용량은 수면이 모두 평균수심 h₋₀일 때 사용량과 같다. 잉크 B가 지도에서 사용된 양을 b라 하면 다음 식이 성립한다.

b=(지도 1장을 수심 h_{-0}로 인쇄할 때 잉크 B의 소요량)×(수면의 면적/지도 1장의 면적)

고도(h)에 따른 잉크 B의 사용량을 $B(h)$라 하면 $B(h)=-\frac{1}{40}h$이므로

$$b=\frac{1}{40}h_{-0}\left(1-\frac{g}{30}\right)$$

이고 평균수심 h_{-0}는 $\dfrac{40b}{1-\dfrac{g}{30}}=\dfrac{1200b}{30-g}$이다.

2) e_1과 e_2를 각각 지도에서 고도 3000m 이하 육지부분과 3000m를 초과하는 육지부분의 넓이라 정의한다. 각 부분의 평균고도가 h_1, h_2이면 육지의 평균고도 h_0는 다음과 같다.

$$h_0=\frac{e_1h_1+e_2h_2}{e_1+e_2} \cdots ①$$

잉크 R과 Y의 사용량을 각각 r, y라 하면 <표1>과 같이 정리할 수 있다. 3000m이하 육지부분에서 잉크 Y의 사용량은 제시문 그래프 Y에서 지도 한 장을 평균고도 h_1으로 인쇄할 때 잉크 사용량 h_1에 이 부분의 넓이(1장에서 차지하는 이 부분의 넓이 비) e_1을 곱해서 얻고 3000m 초과 육지부분에서 잉크 R의 사용량은 그래프 R에서 지도 한 장을 평균고도 h_2로 인쇄할 때 잉크 사용량 (h_2-3000)에 이 부분의 넓이 e_2를 곱해 얻는다.

식 ①에서 분모 $e_1+e_2=e=\frac{g}{30}$이고 $e_1h_1+e_2h_2$를 각 잉크 사용량으로 나타내면

$$r=\frac{90}{3000}(h_2-3000)\cdot e_2 \cdots ②$$

$$y=\frac{60}{3000}h_1\cdot e_2+60\cdot e_2 \cdots ③$$

이다. 이로부터 e_2h_2와 e_1h_1만 남기고 정리하면

$$e_2h_2=\frac{90}{3000}(h_2-3000)\cdot e_2 \cdots ②'$$

$$e_1h_1=\frac{60}{3000}h_1\cdot e_2+60\cdot e_2 \cdots ③'$$

이다. ②′와 ③′를 변끼리 더하면

$$e_1h_1+e_2h_2=\frac{3000}{90}r+\frac{3000}{60}y=\frac{100}{3}r+50y$$

이므로 육지의 평균고도 h_0는 $\dfrac{\dfrac{100}{3}r+50y}{\dfrac{g}{30}}=\dfrac{1000r+1500y}{g}$이다.

3) 각 잉크 사용량과 평균고도와 각 부분의 넓이를 정리하면 <표2>와 같다.

$([1]=\frac{K_2}{2000}h_1\cdot e_1+K_2\cdot e_2+K_2\cdot e_3,\ \ [2]=\frac{K_3}{2000}(h_2-2000)+K_3\cdot e_3,$

$[3] = \frac{K_4}{2000}(h_3 - 4000) \cdot e_3)$

잉크 G의 사용량 g를 이용해 육지 넓이가 $e = \frac{g}{K_0}$이고 육지의 평균고도 h_0가

$$h_0 = \frac{e_1h_1 + e_2h_2 + e_3h_3}{\frac{g}{K_0}}$$

임을 알 수 있다. 식 [1], [2], [3]은 각각 잉크 Y, R, W의 사용량 y, r, w이므로

$$e_1h_1 = \frac{2000}{K_2}y - 2000e_2 - 2000e_3$$

$$e_2h_2 = \frac{2000}{K_3}r + 2000e_2 - 2000e_3$$

$$e_3h_3 = \frac{2000}{K_4}w + 4000e_3$$

$$e_1h_1 + e_2h_2 + e_3h_3 = 2000\left(\frac{y}{K_2} + \frac{r}{K_3} + \frac{w}{K_4}\right)$$

이다. 육지의 평균고도 h_0는 4가지 색상의 잉크사용량 g, y, r, w와 K_0, K_2, K_3, K_4로 나타난다.

$$h_0 = 2000\frac{\frac{y}{K_2} + \frac{r}{K_3} + \frac{w}{K_4}}{\frac{g}{K_0}}$$

양수 K_0, K_1, K_2, K_3, K_4가 어떤 값을 가져도 그래프 개형이 주어진 것과 같고 잉크 사용량 g, y, r, w를 알면 육지의 평균고도를 구할 수 있다.

<표1> 잉크 R과 잉크 Y의 사용량

구분 / 육지	넓이	평균고도	잉크 R 사용량	잉크 Y 사용량
3000m 이하 부분	e_1	h_1	0	$\frac{60}{3000}h_1 \cdot e_1$
3000m 초과 부분	e_2	h_2	$\frac{90}{3000}(h_2 - 3000) \cdot e_2$	$60 \cdot e_2$
육지전체	$e = e_1 + e_2$	$h_0 = \frac{e_1h_1 + e_2h_2}{e_1 + e_2}$	$r = \frac{90}{3000}(h_2 - 3000) \cdot e_2$ -②	$y = \frac{60}{3000}h_3 \cdot e_3 + 60 \cdot e_2$ -③

<표2> 잉크 사용량과 평균고도, 넓이의 관계

	지도 전체	수면	육지(해발고도에 따른 구분, m)			
			육지	0~2000	2000~4000	4000~6000
넓이	$1 = s + e$	s	$e = e_1 + e_2 + e_3$	e_1	e_2	e_3
평균고도(수심)		h_{-0}	h_0	h_1	h_2	h_3
잉크 G 사용량	g	0	$K_1 \cdot e$	$K_1 \cdot e_1$	$K_1 \cdot e_2$	$K_1 \cdot e_3$
잉크 B 사용량	b	$-\frac{K_0}{4000} \cdot h_0$	0	0	0	0
잉크 Y 사용량	y	0	$[1]$	$\frac{K_2}{2000}h_1 \cdot e_1$	$K_2 \cdot e_2$	$K_2 \cdot e_3$
잉크 R 사용량	r	0	$[2]$	0	$\frac{K_3}{2000}(h_2 - 2000) \cdot e_2$	$K_3 \cdot e_3$
잉크 W 사용량	w	0	$[3]$	0	0	$\frac{K_4}{2000}(h_3 - 2000) \cdot e_3$

문제2 다음 글을 읽고 물음에 답하라.

<표1>과 <표2>는 20~30대 500명과 40대 이상 500명이 지하철에서 각각 시간을 어떻게 보내는지에 대한 자료이다.

<표1>20~30대와 40대 이상의 지하철 활동 현황

	20~30대	40대
주로 독서	30%	60%
독서 이외	70%	40%
계	100%(500명)	100%(500명)

<표2>MP3 소유에 따른 지하철 활동 현황

	20~30대		40대 이상	
	MP3 소유	MP3 없음	MP3 소유	MP3 없음
주로 독서	20%	70%	20%	70%
독서 이외	80%	30%	80%	30%
계	100%	100%	100%	100%

1) 두 표를 이용해 지하철에서 연령별 MP3 소유 비율을 논리적으로 추론하라.

2) 두 표를 볼 때 독서 여부와 관련성이 더 큰 요인이 연령과 MP3 소유여부 중 어떤 것인지 논하고 그 이유를 밝혀라.

전문가 의견

언어-수리 통합형에서 자료해석 유형으로 출제될 가능성이 있는 문제입니다. 부분 항목끼리의 연관성을 이용해 모든 구성비를 구할 수 있습니다.

▶ 예시답안

1) <표1>에서 20~30대 중 독서를 하는 사람은 500명 중 30%이다. 또 이 30%는 <표2>에서 20~30대 MP3를 소유한 사람 중 20%와 MP3를 소유하지 않은 사람 중 70%의 합이다.

   20~30대 중 MP3를 소유한 사람의 비율을 P, 소유하지 않은 비율을 1-P라 하면 $0.2P+0.7(1-P)=0.3$이므로 P는 0.8이고 20~30대 중 MP3를 소유한 사람의 비율은 80%다. 40대 이상 연령 중 MP3를 소유한 비율을 Q, 소유하지 않은 비율을 1-Q라 하면 $0.2Q+0.7(1-Q)=0.6$이므로 Q가 0.2가 돼 MP3를 소유한 사람의 비율은 20%다.

   결과적으로 20~30대가 MP3를 소유하는 비율은 40대 이상이 소유하는 비율에 비해 4배 높다.

2) <표1>에서 40대 이상에서 독서를 하는 사람의 비율은 60%이고 20~30대는 30%다. 지하철에서 독서를 하는 사람이 40대 이상에서 차지하는 비율은 20~30대에서 독서하는 사람이 차지하는 비율보다 2배 크다.

   전체 MP3를 소유한 사람 중 독서를 하는 비율은 모든 연령대에서 20%이고 MP3를 소유하지 않은 사람 중 독서를 하는 비율은 70%다. 지하철에서 독서를 하는 사람은 MP3를 소유한 사람 중에서 차지하는 비율보다 MP3를 소유하지 않은 사람 중에서 차지하는 비율이 3배 이상 많다.

   연령에 따른 독서 여부는 비율의 상대적 크기가 2배이지만, MP3 소유에 따른 독서여부는 비율의 상대적 크기가 3.5배이므로 MP3 소유가 관련성이 더 크다.

2008년 11월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

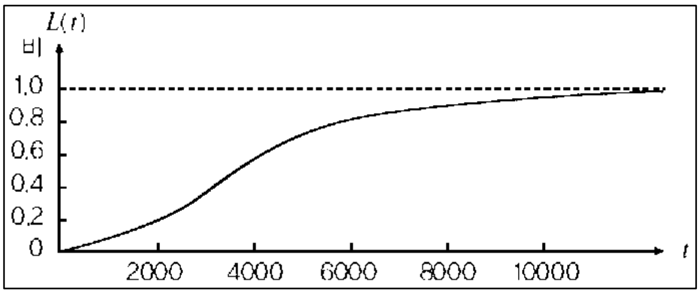
[수학]특이적분과 개념함수

| 글 | 이창훈 · vmfgksmf40@hanmail.net |

여러 가지 문제를 해결하면서 특이적분과 감마함수의 개념을 익혀봅시다.

Q1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 동일한 노트북 1000개의 전원을 동시에 켜고 배터리가 각각 얼마나 오래 지속되는지 기록하면 다음과 같은 그래프를 얻는다.



* $L(t)$는 t초 후에 꺼져있는 노트북의 비다. 이 그래프에서 4000초 뒤에는 컴퓨터 약 600대가 꺼져 있고 8000초가 지나면 900대 정도가 꺼져 있다.

노트북이 t초 후에 꺼진 비율이 $r(t)$이고 이것이 연속함수면 다음과 같다.

$$L(t)=\int_0^t r(x)\,dx$$

$t=a$에서 $t=b$ 사이에 꺼진 노트북의 비는

$$L(b)-L(a)=\int_a^b r(x)\,dx \ \cdots \ ①$$

이다. t가 충분히 클 때

$$L(t)=\int_0^t r(x)\,dx=1$$

이다. <u>$r(t)$는 많은 노트북 가운데 t초 후 아주 짧은 시간동안 꺼진 노트북의 평균비율이다.</u> 그래서 1이 되는 정확한 순간을 알 수 없다. 단지

$$L(\infty)=\int_0^\infty r(x)\,dx=1$$

이라고 할 수 있으며 직접 계산할 수 없기 때문에 '특이적분'이라 부른다.

이것의 '적분영역'은 무한이다. 정의는 다음과 같다.

$$\int_a^\infty r(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b r(x)\,dx$$

(나) 연속확률변수 X가 $-\infty<x<\infty$인 실수 전체 값을 취하고 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\quad(-\infty<x<\infty)\ \cdots\ ②$$

일 때 X의 확률분포는 정규분포이며 ②의 그래프는 정규분포곡선이다. 확률밀도함수 $f(x)$는 $x=m$에 대해 대칭이고 e는 무리수 $2.718281\cdots$이며 m과 $\sigma(\sigma>0)$는 상수다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \ \cdots \ ③$$

(다) 차례곱함수는 양의 정수 n에 대해 다음 식으로 정의된다.

$$n \neq n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

차례곱함수는 다양한 수학적 상황에 이용되지만 양의 정수에 대해서만 정의된 사실 때문에 이용이 제한적이다. $\frac{7}{2}!$과 같은 표현이 가능하도록 확장된 정의역에서 정의된 함수를 만들 수 없을까? 감마함수가 질문의 해답이다. 감마함수 $\Gamma(x)$는 특이적분으로 정의된다.

$$\Gamma(x) = \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

부분적분법을 이용하면

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

이며 $\Gamma(2)$, $\Gamma(3)$, $\Gamma(4)$, $\Gamma(5)$ 값을 계산하면 n에 대해 일반화해 $\Gamma(n)$을 차례곱함수로 나타낼 수 있다. 그러면 $\frac{7}{2}!$에도 의미를 부여할 수 있다.

1) 제시문 (가)의 밑줄친 부분을 참조해 등식 ①이 성립함을 유도하라.

2) 제시문 (가)~(다)를 참조해 '$\Gamma(1)=1$'임을 보여라.

3) 제시문 (나)의 식 ②, ③을 이용해 $\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$값을 구하라.

4) 제시문 (다)의 식 ④를 참조해 식 ⑤가 성립함을 보여라. 또 $\Gamma(n)$을 차례곱함수로 나타내고 그 과정을 설명하라. 필요하면 다음 사실을 이용하라.

<사실1> $\lim_{t\to\infty}\frac{t^p}{e^t}=0$ (단 p는 상수)
<사실2> $(n+1)\neq(n+1)\cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = (n+1)\cdot n!$

5) 제시문과 논제3의 결과를 참조해 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$값을 구하라. 필요하면 $\int_{a}^{b} f'(x)f(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} f\,dt$임을 이용하라.

6) 제시문을 참조해 양의 유리수 x에 대해 $x!$를 정의하고 $\frac{7}{2}!$값을 구하라.

▶ 전문가 클리닉

이 문제는 고교 교육과정 밖의 내용을 제시문에 담고 있습니다. 하지만 제시문을 정확히 이해하이 문제는 고교 교육과정 밖의 내용을 제시문에 담고 있습니다. 하지만 제시문을 정확히 이해하고 제시된 사실을 바탕으로 앞 논제부터 차근차근 해결해 나간다면 쉽게 풀 수 있습니다.

주의할 점은 뒤 논제를 풀 때 앞 논제의 결과를 이용할 수 있는지 없는지에 대한 판단을 정확히 해야 한다는 점입니다. 특정 논제의 결과를 이용하라는 지시사항이 없을 때 함부로 앞의 결과를 이용하면 스스로 함정에 빠지게 됩니다.

▶ 예시답안

1) 제시문 (가)의 밑줄 친 부분에 의하면 $r(t)$는 t초 후 아주 짧은 시간 동안 꺼진 노트북의 평균비율을 나타낸다. t부터 Δt 동안 꺼진 노트북의 총 비율을 '$L(t+\Delta t)-L(t)$'라 하면 $r(t)$는 앞의 식을 Δt로 나눈 평균값의 극한이다.

$$r(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{L(t+\Delta t)-L(t)}{\Delta t}=L'(t)$$

$L(t)$는 $r(t)$의 부정적분 중 하나이므로

$$L(t)+C=\int r(t)dt \text{ (단 } C\text{는 적분상수)}$$

이고 다음 식이 성립한다.

$$L(b)-L(a)=\int_a^b r(x)dx$$

2) $\Gamma(1)$은 등식 ④의 x에 1을 대입해 t에 대한 특이적분으로 구한다. 제시문 (가)에 나온 특이적분의 정의를 이용해 다음과 같이 나타낸다.

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}t^0dt=\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-t}dt$$

$\int_0^a e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\right]_0^a=-e^{-a}+1$이고 $\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-t}dt=\lim_{a\to\infty}e^{-a}+1=1$이므로 $\Gamma(1)$의 값은 1이다.

3) 식 ②, ③을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=1 \ \cdots \ ⓐ$$

$\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt$의 아래끝은 상수인데 반해 식 ⓐ의 아래끝은 $-\infty$이다. 식 ⓐ를 아래끝이 상수인 적분으로 표현하기 위해 $x=m$에 대해 대칭이라는 사실을 이용한다.

$$\int_{-\infty}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_m^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}lx=\frac{1}{2}$$

우변 식의 아래끝을 0으로 바꾸기 위해 우변 적분식에서 $\frac{(x-m)}{\sigma}$를 t로 치환해 정리한다.

$$\frac{(x-m)}{\sigma}=t,\ \ \frac{1}{\sigma}dx=dt$$

$x=m$일 때 $t=0$이고 $x\to\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\int_m^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2}$$

이다. 정리하면 다음과 같다.

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

4) 식 ④를 이용해 $\Gamma(x+1)$을 구하면

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = \lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-t} t^x dt$$

이다. 우변 식 $\int_0^a e^{-t} t^x dt$는 부분적분에 의해

$$\int_0^a e^{-t} t^x dt = \lim_{a \to \infty} [-e^{-t} t^x]_0^a + x \int_0^a e^{-t} t^{x-1} dt$$

이므로 극한을 취하면

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-t} t^x dt = \lim_{a \to \infty} \{-e^{-a} t^x\} + x \lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-t} t^{x-1} dt$$

이다. <사실1>에서 $\lim_{t \to \infty} \frac{t^p}{e^t} = 0$이라 했으므로

$$\lim_{a \to \infty} \{-e^{-a} t^x\} = 0$$

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-t} t^x dt = 0 + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x)$$

이고 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$이 성립한다.

$\Gamma(n)$을 차례곱함수로 나타내면 $\Gamma(n) = (n-1)!$이다. 앞의 결과 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$를 이용해 설명할 수 있다. 식의 x에 1부터 대입하면 논제 1에서 구한 바에 따라 $\Gamma(1) = 1$이므로

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = 2$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot \Gamma(2) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = 6$$

$$\Gamma(5) = 4 \cdot \Gamma(4) = 4 \cdot 3 \cdot \Gamma(3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \Gamma(2) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = 24$$

이 성립한다. 따라서

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = (n-1)!$$

이다. 수학적 귀납법으로 증명하면 자연수 n에 대한 명제 $\Gamma(n) = (n-1)!$는 n=1일 때 Γ(1)=0!=1이므로 성립한다. 그리고 n=k일 때 Γ(k−1)라고 가정하면 Γ(k+1)=kΓ(k)이므로 Γ(k+1)=kΓ(k)=k·(k−1)!=k! 이 돼 $\Gamma(n) = (n-1)!$는 참이다.

5) 제시문 (다)의 식 ④에서 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$은 다음과 같다.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\left|\left(\frac{1}{2}\right)-1\right|} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt \ \cdots \text{ⓑ}$$

또 논제 3의 결과는 다음과 같다.

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \ \cdots \text{ⓒ}$$

식 ⓒ를 ⓑ의 형태로 바꾸려 $\int_a^b f'(x)f(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} t\,dt$를 힌트로 식 ⓒ에서 $\frac{t^2}{2} = A$로 치환하면

$$t = \sqrt{2A} = \sqrt{2}\,A^{\frac{1}{2}},\ dt = \frac{\sqrt{2}}{2}A^{-\frac{1}{2}}dA$$

이므로 $\int_a^b f'(x)f(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} t\,dt$는 다음과 같다.

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\infty e^{-A}A^{-\frac{1}{2}}dA = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

따라서 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt = \sqrt{\pi}$이다.

6) 제시문 (다)와 논제 4의 결론에 의해

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt,\ \Gamma(n) = (n-1)!$$

이므로 $x!$의 정의는

$$x! = \Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x dt$$

이다. 또 $\frac{7}{2}! = \Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$이므로 식 ⑤에 의해

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) &= \frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\\ &= \frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\\ &= \frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\\ &= \frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\\ &= \frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\ \left(\because \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right)\\ &= \frac{105\sqrt{\pi}}{16}\end{aligned}$$

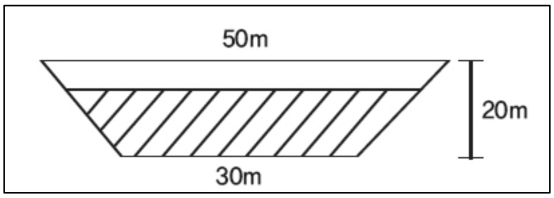
가 돼 $\frac{7}{2}! = \frac{105\sqrt{\pi}}{16}$이다.

Q_2 다음 글을 읽고 물음에 답하라.

(가) 유체 내부의 특정한 위치에 작용되는 압력은 힘의 면적에 대한 비로 정의된다. 즉 압력은 단위면적($1\mathrm{m}^2$)당 힘이다. 유체의 압력 크기는 깊이에 의해서만 결정된다. 밀도 ρ인 유체 속의 깊이 h에서 판이 받는 압력은 ρgh(단 g는 중력가속도)이고 힘의 방향은 물체의 표면에 항상 수직이다.

(나) 만약 어떤 유체가 통 안에 정지해 있다면 유체의 모든 부분은 정적 평형상태에 있다. 또 같은 깊이에 있는 모든 유체는 같은 압력을 받는다. 만약 그렇지 않다면 유체의 그 부분이 평형상태라고 볼 수 없다.

댐을 설계할 때는 댐이 받을 힘을 계산해야 한다. 그림과 같은 사다리꼴 모양의 댐에서 수위가 댐의 꼭대기로부터 4m일 때 수압으로 인해 댐에 가해지는 힘을 구하라. (단 물의 밀도는 1000Kg/m^3, g=9.8m/s^2, 압력의 SI 단위는 파스칼[N/m^2]이다.)



▶ 예시답안

수면의 깊이를 0으로 하고 수심을 h라 하면 수심에 따른 댐의 폭 l은 $l=-h+46$이고 깊이 h인 댐의 면이 받는 힘은 $\rho g h A$이다. 댐이 받는 전체 힘은 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty}1000 \cdot 9.8 \cdot \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(l_k+l_{k+1})}{2} \cdot h_k \cdot \Delta h \ \cdots \ ①$$

식에서 l_k는 수면으로부터 댐의 바닥까지의 수심을 n등분 했을 때 k번째 수심 h_k에 대한 댐의 폭을 의미하고, 수심 h_k부터 h_{k+1}인 부분까지 댐의 부피는 $\frac{(l_k+l_{k+1})}{2} \cdot \Delta h$이다. 식 ①을 정적분으로 표현하면 $\int_0^{16} 9800(-h^2+46h)\,dh$이므로 댐에 가해지는 힘은 $9800 \cdot 16^2 \cdot \frac{58}{3}$N이다.

2008년 12월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]새로운 연산 정의하는 법

| 글 | 김봉수 · skygo21@empal.com |

Q1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

집합 G가 이항연산 $*$에 대해 다음 세 가지 공준을 만족시킬 때 G를 군이라 한다.

G1. G의 모든 원소 a, b, c에 대해 $(a*b)*c=a*(b*c)$이다.

G2. G의 모든 원소 a에 대해 $a*i=a$를 만족시키는 G의 원소 i가 존재한다. 이때 원소 i를 이 군의 항등원이라 한다.

G3. G의 각 원소 a에 대해 $a*a^{-1}=i$를 만족시키는 G의 원소 a^{-1}이 존재한다. 이때 원소 a^{-1}를 원소 a의 역원이라 한다.

이에 덧붙여 다음 공준을 만족하면 그 군을 가환군 또는 아벨군이라 부르고 그렇지 않은 군은 비가환군 또는 비아벨군이라고 한다.

G4. G의 모든 원소 a와 b에 대해 $a*b=b*a$이다.

군을 이루는 집합 G가 서로 다른 유한 개의 원소를 포함하면 그 군을 유한군이라 부르고 그렇지 않으면 그 군을 무한군이라 부른다.

공준 G1만을 만족시키는 이항연산 $*$이 정의된 집합을 반군이라 한다. 공준 G4를 만족시키는 반군을 아벨 반군이라 부른다.

대수적 체계에는 이외에도 환, 가환 환, 단위원을 가진 환, 정역, 나눗셈 환, 체가 있다. 덧셈과 곱셈이 정의된 집합 S에 대해 ▲항등원 0과 함께 덧셈에 관한 아벨 군이고 ▲S가 곱셈에 관한 반군이며 ▲덧셈에 관한 곱셈의 두 가지 분배 법칙이 성립한다.

1) 실수 h와 k에 대해 좌표평면 $T: (x, y)\rightarrow(x+h, y+k)$ 꼴의 이동 전체의 집합을 G라 하고, 이동 T1이 시행된 뒤에 이동 T_2가 시행된 결과를 T_2*T_1라고 하자. G가 무한 아벨군인지에 대해 논하라.

2) 다음의 정리가 성립함을 증명하라.

   ① a, b, c가 G의 원소이고 $a*c=b*c$이면 $a=b$이다.

   ② G의 모든 a에 대해 $i*a=a*i$이다.

   ③ 하나의 군은 단 하나의 항등원을 갖는다.

▶ 전문가 클리닉

새롭게 정의한 기본 연산을 문제에 적용할 수 있는지를 묻고 있습니다. 낯선 용어에 부담 갖지 말고 제시문의 내용을 충분히 이해한 뒤 답안을 작성해 봅시다. 2)는 군의 기본 성질에 대한 정리를 증명하는 문제입니다.

▶ 예시답안

1) G를 실수 h와 k에 대해 좌표평면

$$T: \begin{array}{l} x' = x + h \\ y' = y + k \end{array}$$

꼴의 이동 전체의 집합이라고 하고, $T_2 * T_1$을 이동 T_1이 시행된 뒤에 이동 T_2가 시행된 결과를 나타낸다고 하자. 이동 T_1과 T_2를 각각

$$T_1: \begin{array}{l} x' = x + h_1 \\ y' = y + k_1 \end{array} \qquad T_2: \begin{array}{l} x' = x + h_2 \\ y' = y + k_2 \end{array}$$

이라 하면 $T_2 * T_1$은 변환

$$x' = x + (h_1 + h_2),\ y' = y + (k_1 + k_2)$$

로 다시 이동되므로 연산 $*$에 관한 결합법칙이 성립한다. 항등원은 $h = k = 0$인 이동이고, 이동 T의 역원은

$$T^{-1}: \begin{array}{l} x' = x - h \\ y' = y - k \end{array}$$

과 같다. 따라서 G는 무한 아벨군이다.

2-1) $G3$에 의해 c^{-1}이 존재한다. $a * c = b * c$이므로 양변에 c^{-1}을 취하면 $(a * c) * c^{-1} = (b * c) * c^{-1}$이고 $G1$에 의해 $a * (c * c^{-1}) = b * (c * c^{-1})$이 성립한다. 따라서 $a * i = b * i$이므로 $G2$에 의해 $a = b$이다.

2-2) $G3$에 의해 a^{-1}이 존재한다. a^{-1}을 이용해 $G1, G2, G3$을 차례로 적용하면 $(i * a) * a^{-1} = i * (a * a^{-1})$을 얻는다. 이 식은 2-1)에 의해 $i * a = a$이다. $G2$에 의해 $a * i = a$가 성립하므로 $i * a = a * i$이다.

2-3) i와 j를 이 군의 두 개의 항등원이라 하자. $G2$에 의해 j를 항등원으로 사용하면 $i * j = i$이다. 그러면 2-2)에 의해 $i * j = j * i$이다. $G2$에 의해 i를 항등원으로 사용하면 $j * i = j$이므로 결국 $i = j$이다.

Q 2 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 두 점 사이의 거리는 자로 측정할 수 있다. 자는 "멀다" 또는 "가깝다"의 정도를 판단하는 기준을 제공한다. 수직선 상의 두 점 a, b의 거리는 절대값 $|a-b|$이다. 따라서 '자'가 무엇인가에 대한 질문은 '절대값함수 $|\ |$'가 무엇인가 하는 질문으로 귀착된다. 유리수 x의 절대값 $|x|$의 정의는

$$|\ |: Q \to R,\ |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

이다. 절대값 $|\ |$은 유리수의 크기를 의미하는데 이는 다음 세 가지 성질에 근거한다. 유리수집합에서 정의된 함수가 세 가지 조건을 만족한다면 그 함수는 새로운 절대값 함수이며 또 다른 '자'가 된다.

ⓐ $|x| \geq 0; |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ⓑ $|xy| = |x||y|$

ⓒ $|x+y| \leq |x| + |y|$

(나) 앞의 세 가지 조건을 만족하는 Q에서 R로의 새로운 함수를 만들어 보자. 소수 p를 한

개 고정시키고 0이 아닌 정수 a를 소인수분해 했을 때 p의 최고 거듭제곱을 $\mathrm{ord}_p a$라 쓰자. 또 $a=0$이면 $\mathrm{ord}_p 0=\infty$로 정의한다. 이때 함수 ord_p는 로그함수처럼 $\mathrm{ord}_p(ab)=\mathrm{ord}_p a+\mathrm{ord}_p b$를 만족한다. 유리수 $x=\dfrac{a}{b}$에 대해 $\mathrm{ord}_p x$는 '$\mathrm{ord}_p x=\mathrm{ord}_p a-\mathrm{ord}_p b$'과 같이 정의한다.

(다) 새로운 함수 $|\ |_p : Q\to R$를

$$|x|_p=\begin{cases}\dfrac{1}{P^{\mathrm{ord}_p x}} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

와 같이 정의하면 $|\ |_p$는 제시문 (가)의 세 가지 조건을 모두 만족해서 임의의 소수 p에 대해 '자'가 된다. $|x|_p$를 x의 $p-$진 절대값이라 한다.

(라) 집합 $R(\neq\varnothing)$에서 $a,\ b\in R \Rightarrow q+b,\ a\cdot b\in R$이고 다음 조건을 만족할 때 $(R,\ +,\ \cdot)$을 환이라 한다.

ⓓ $(R,\ +)$는 아벨군이다.

ⓔ 곱셈에 관한 결합법칙이 성립한다.

ⓕ 덧셈과 곱셈에 관한 분배법칙이 성립한다.

환 R이 단위원 1을 가진 환으로서 다음 조건을 만족할 때 R을 나눗셈환이라고 한다.

ⓖ 각 $a\in R,\ a\neq 0$에 대해 $ab=ba=1$인 원소 $b\in R$이 존재하면 원소 b를 곱셈에 관한 a의 역원이라 하고 이것을 a^{-1}로 나타낸다. 즉 $aa^{-1}=a^{-1}a=1$이다. 특히 가환환인 나눗셈환을 체라고 한다.

유리수체 Q의 원소로 이뤄진 코시수열(정의에서 사용된 절대값은 $|\ |_p$임)의 집합을 S라 하자. S의 두 원소 $S=\{a_k\}$와 $t=\{b_k\}$의 관계 『$\sim$』를 $s\sim t \Leftrightarrow |a_k-b_k|_p\to 0\,(k\to\infty)$과 같이 정의하면 이는 동차관계이다. 즉 매우 작은 $\epsilon>0$에 대해 유한 개를 제외한 나머지 대부분이 $|a_i-b_i|<\epsilon$를 만족할 때 두 수열은 본질적으로 같다.

동치류의 집합 $S/\sim=\{[s]|s\in S\}$를 Q_p로 표시하고 여기에 있는 원소의 모양을 살펴보자. 먼저 한없이 커질 때 $|p^n|_p=p^{-n}\to 0$이므로 무한등비급수의 합공식인

$$\frac{1}{1-p}=\sum_{n=k}^{\infty}p^n=1+p+p^2+\cdots+p^n+\cdots$$

을 사용할 수 있다. 일반적으로 0이 아닌 유리수는 $p-$진 전개 $\sum_{n=k}^{\infty}a_np^n\,(k\in Z,\ 0\leqq a_n\leqq p-1)$을 갖는다. 집합 $Q_p=\left\{\sum_{n=k}^{\infty}a_np^n\,|\,(k\in Z,\ 0\leqq a_n\leqq p-1\right\}$가 체의 조건을 만족하기 때문에 이 집합을 p진체라 부른다. $x=\sum_{n=k}^{\infty}a_np^n\in Q_p\,(0\leqq a_n\leqq p-1,\ a_k\neq 0)$에 대해 $|x|_p=p^{-k}$라 하면 제시문 (가)의 ⓐ, ⓑ, ⓒ를 만족하므로 $p-$진 절대값은 Q_p로 자연스럽게 확장된다.

(마) 실수체와 p진체는 대부분 같은 성질을 갖는다. 그러나 삼각부등식보다 더 강력한 부등식 $|x+y|_p\leqq\max(|x|_p,\ |y|_p)$이라는 성질 때문에 많은 부분이 다르다.

1) 제시문 (다)의 밑줄 친 부분에서 세 번째 정리 ⓒ를 증명하라.

2) 제시문 (마)를 이용해 "모든 삼각형은 이등변삼각형이다"를 증명하라.

3) "원 내부의 모든 점은 그 원의 중심이다"를 증명하라.

▶ 전문가 클리닉

p-진체라는 새로운 함수를 정의한 뒤 이것을 이용해 주어진 명제를 증명할 수 있는가를 묻는 문제입니다. 군, 환, 체의 개념을 이용해 p-진체의 성질을 추론하고 p-진체에서 삼각형의 성질과 원의 성질을 생각해 봅시다.

▶ 예시답안

1) 0이 아닌 $x,\ y,\ x+y$에 대해 $x=\dfrac{a}{b},\ x=\dfrac{c}{d}$로 더 이상 약분이 안되는 형태라고 가정하자. 이

때 $x+y=\dfrac{ad+bc}{bd}$이고 $\mathrm{or}\,d_p(x+y)=\mathrm{or}\,d_p(ad+bc)-\mathrm{or}\,d_p b-\mathrm{or}\,d_p d$이다. 그리고

$$\mathrm{or}\,d_p(ad+bc)\geqq\min(\mathrm{or}\,d_p ad,\ \mathrm{or}\,d_p bc)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{or}\,d_p(x+y)&\geqq\min(\mathrm{or}\,d_p ad,\ \mathrm{or}\,d_p bc)-\mathrm{or}\,d_p b-\mathrm{or}\,d_p d\\&=\min(\mathrm{or}\,d_p a+\mathrm{or}\,d_p d,\ \mathrm{or}\,d_p b+\mathrm{or}\,d_p c)-\mathrm{or}\,d_p b-\mathrm{or}\,d_p d\\&=\min(\mathrm{or}\,d_p a-\mathrm{or}\,d_p b,\ \mathrm{or}\,d_p c-\mathrm{or}\,d_p d)\\&=\min(\mathrm{or}\,d_p x,\ \mathrm{or}\,d_p y)\end{aligned}$$

이므로 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}|x+y|_p&=p^{-\mathrm{or}\,d_p(x+y)}\leqq\max(p^{-\mathrm{or}\,d_p x},\ p^{-\mathrm{or}\,d_p y})\\&=\max(|x|_p,\ |y|_p)\leqq|x|_p+|y|_p\end{aligned}$$

2) 세 점 $o,\ x,\ y\in Q_p$를 꼭짓점으로 갖는 삼각형을 생각하자. 변 x와 y가 다른 길이 즉 $|x|_p\leq|y|_p$를 갖는다고 가정하면 세 번째 변 $x-y$의 길이는 $|x-y|_p\leq\max(|x|_p,\ |x-y|_p)\leq|y|_p$이다.

그러나 $|y|_p=|x-(x-y)|_p\leq\max(|x|_p,\ |x-y|_p)\leq|y|_p$이기 때문에 $|x-y|_p=|y|_p$를 얻는다. 따라서 모든 삼각형이 두 변의 길이가 서로 다른 이등변 삼각형이다.

3) 중심이 $a\in Q_p$이고 반지름 $r\in R$인 양의 실수인 원의 내부를 다음과 같은 집합으로 나타내고 개원판이라 부른다.

$$D(a,\ r)=\{x\in Q_p\,|\,|x-a|_p<r\}$$

b를 $D(a,\ r^-)$의 한 원소라고 할 때 $x\in D(a,\ r^-)$이면 $|x-a|<r$이고

$$|x-b|_p=|(x-a)+(x-b)|_p\leq\max(|x-a|_p,\ |a-b|_p)\leq r$$

이므로 $x\in D(b,\ r^-)$이다. 따라서 $D(a,\ r^-)\subset D(b,\ r^-)$이고 같은 방법으로 $D(b,\ r^-)\subset D(a,\ r^-)$이다. 결과적으로 $D(b,\ r^-)=D(a,\ r^-)$가 되면서 원 내부의 점 b가 그 원의 중심이다.

2009년 01월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]수열의 신비

| 글 | 윤종선 · KuMing@pathfinder.or.kr |

수열의 나열순서를 바꾸면 수열의 수렴 여부가 바뀌는지 알아보자. 적분을 이용하면 무한급수의 수렴과 발산 여부를 판정할 수 있다. 이를 적분판정법이라 부른다.

Q1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 유클리드는 '자명하다고 생각되는 명제, 즉 증명할 필요 없이 명확한 명제' 중에서 기하학에서만 사용하는 명제를 공준이라고 하고 기하학에 한정되지 않은 일반적인 명제를 공리라고 했다.

그 뒤에 유클리드가 말한 공준과 공리를 통일해 공리라고 규정했다. 유클리드의 '기하학 원본'에서는 공리와 정의를 이용해 기하학을 논리적으로 증명했다. 이것은 오랫동안 체계적인 학문의 전형처럼 여겨졌다.

(나) 실수는 체의 공리, 순서의 공리, 완비성 공리라는 세 가지 특성을 만족하는데, 그 중 완비성 공리는 극한과 관련해 중요한 의미를 가진다. 실수의 완비성 공리는 실수에는 빈틈이 없다는 뜻이다. 유리수의 경우 아주 작은 구간에 무수히 많은 유리수가 존재하지만 그들 사이에는 무리수라는 무수히 많은 빈틈이 존재한다. 하지만 이런 빈틈이 실수에는 존재하지 않는다. 실수의 완비성 공리를 수열을 이용해 설명하면 '실수로 이뤄진 증가하는 수열의 각 항이 일정한 실수보다 작으면 그 수열은 수렴한다'이다.

(다) 유한수열 1, 2, 3, 4는 2, 4, 3, 1과 같은 식으로 나열하는 순서를 바꿀 수 있는데 이를 수열의 재배열이라 한다. 일반적으로 무한수열 an은 일대일대응 r:N→N을 이용해 $b_n=a_{r(n)}$ 이라 할 때으로 재배열한다. 예를 들어 수열 1,−1/2, 1/3,−1/4,...는 일대일대응

r(n)=n−1, n이 짝수일 때

n+1, n이 홀수일 때

에 의해−1/2, 1,−1/4, 1/3,...로 재배열된다.

유한수열은 재배열해도 원소의 총합이 바뀌지 않는다. 그러나 무한수열은 재배열을 통해 수열의 총합이 바뀔 뿐만 아니라 수렴하던 수열이 발산하거나 발산하던 수열이 수렴할 수 있다. 이때 N은 자연수 전체의 집합이다.

1) 임의의 일대일대응 r에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{r(n)}|$도 수렴함을 증명하라.

2) $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$일 때 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴함을 증명하라.

3-1) 다음에 주어진 r에서 $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$이고 $b_n=a_{r(n)}$일 때 b_{20}의 값을 구하라.

$$r(n)=\begin{cases}2(n-[\log_2 n])-1, & \log_2 n\text{이 자연수가 아닐 때}\\ 2\log_2 n, & \log_2 n\text{이 자연수일 때}\end{cases}$$

3-2) 논제 3-1에서 주어진 수열 b_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 발산함을 증명하라.

4) $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$일 때 a_n을 재배열할 수열 $b_n=a_{r(n)}$이 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=0$을 만족하는 일대일대응 r을 구하라.

▶ 전문가 클리닉

실수의 완비성 공리는 고교과정은 아니지만 직관적으로 이해할 수 있기 때문에 논술문제에서 자주 등장하고 있습니다. 수열의 수렴 판정에서 중요하므로 꼭 알아두기 바랍니다.

논제 1은 완비성 공리를 이용하면 쉽게 풀 수 있는 문제입니다. 하지만 답안을 제대로 서술하려면 추가적인 아이디어가 필요합니다. 논제 2는 무작정 식을 정리해 풀려고 하면 실패하기 쉽습니다. 문제 풀이에는 두 단계가 있는데, 첫 단계에서는 직관과 경험을 이용해 문제의 흐름을 파악해야 합니다.

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}-\frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$$

에서 분모가 n^2에 관한 함수이고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$이 수렴한다는 점을 이용해 전체적인 내용을 구상한 뒤 두 번째 단계에서 식을 정확히 계산해 이를 구체화시켜야 합니다.

논제 3은 적분판정법을 이용해 수열의 수렴, 발산 여부를 알아보는 문제입니다. 고교과정의 구분구적법과 연계되기 때문에 대학의 미적분학을 배우지 않아도 풀 수 있는 문제이며 실제로 여러 대학에서 자주 출제되고 있습니다.

논제 4는 상당히 어려운 문제입니다. 문제풀이과정에서 재미있는 아이디어가 숨어있으므로 어렵더라도 풀이과정을 꼼꼼히 읽어보기 바랍니다. 참고로 주어진 조건을 만족하는 일대일대응 r이 존재한다는 사실을 증명하기 쉽습니다. 음수를 절대값이 큰 수부터 빼나가다가 전체 합이 음수이면 다시 절대값이 큰 수부터 양수를 더해나가는 식으로 계산하면 0으로 수렴합니다.

$S_m=\frac{1}{2m-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)2^n}$이라 할 때 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{m=1}^{\infty}S_m$과 같이 표현할 수 있고 $S_m=0$임을 이용하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$을 0으로 수렴시킬 수 있습니다.

▶ 예시답안

1) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$의 수렴값을 α라 하고 $f(m)=\max(r(n):1\le n\le m)$라 한다. $f(m)$은 $r(1)$에서 $r(m)$까지 중에서 가장 큰 수이므로 $\sum_{n=1}^{m}|a_{r(n)}|\le\sum_{n=1}^{f(m)}|a_n|\le\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\alpha$이다. 따라서 $S_m=\sum_{n=1}^{m}|a_{r(n)}|$은 각 항이 모두 일정한 실수값 α보다 작다. 이때 $S_{m+1}=S_m+|a_{r(m+1)}|\ge S_m$이 성립하여 증가수열이 되면서 제시문 (나)에서 언급한 완비성 공리의 요구조건을 모두 만족시킨다. 즉 S_m이 수렴한다.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-2n}$이다. 이 수열의 각 항은 양수이고 양의 유리수에서 분모가 작아지면 전체 수는 더 커지므로 $b_n=\frac{1}{4n^2-2n}$이라 하면

$B_m = \sum_{n=1}^{m} b_n \leqq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} \leqq 1 + \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^{m}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{m} \leqq 2$이다. B_m은 각 항이 모두 일정한 실수값 2보다 작고 $B_{m+1} = B_m + b_{m+1} \geqq B_m$이므로 증가수열이다. 따라서 B_m은 수렴하고 $\lim_{m\to\infty} B_m = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴한다.

3-1) $\log_2 20$은 자연수가 아니므로 $r(20) = 2(20 - [\log_2 20]) - 1 = 2(20-4) - 1 = 31$이다. 따라서 $b_{20} = a_{r(20)} = a_{31} = \frac{1}{31}$이다.

3-2) $1 \leqq n \leqq 2^m$에서 $[\log_2 n]$이 자연수인 n은 m개가 존재한다. a_n은 n이 짝수일 때 음수이고 n이 홀수일 때 양수이므로 음수가 m개 존재한다. 또 $r(n)$값이 짝수와 홀수인 각각의 경우에 대하여 순차적으로 증가하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{2^m} b_n = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{2^m - m} \frac{1}{2k-1} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2k}\right)$$

이다. 이때 $\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \geqq 0$이므로

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{2^m - m} \frac{1}{2k-1} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2k}\right) \geqq \lim_{m\to\infty} \sum_{n=m+1}^{2^m - m} \frac{1}{2k-1}$$

이다. 극한값이 발산함을 증명하기 위해 구분구적법을 이용하면 $\frac{1}{2k-1}$은 높이가 $\frac{1}{2k-1}$이고 밑변이 1인 직사각형 넓이와 같으므로

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=m+1}^{2^m - m} \frac{1}{2k-1} \geqq \lim_{m\to\infty} \int_{m+1}^{2^m - m + 1} \frac{1}{2x-1}\, dx \geqq \lim_{m\to\infty} \int_{m}^{2^m} \frac{1}{2x-1}$$

이다. 적분을 계산해보면

$$\lim_{m\to\infty} \int_{m}^{2^m} \frac{1}{2x-1} = \lim_{m\to\infty}\left(\ln(2^{m+1} - 1) - \ln(2m-1)\right) = \lim_{m\to\infty} \ln \frac{2^{m+1}-1}{2m-1} = \infty$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 발산한다.

4) $r\left((2\alpha - 1) \cdot 2^{\beta - 1}\right) = (2\beta - 1) \cdot 2^{\alpha - 1}$($\alpha$, β는 자연수)라 하면 임의의 자연수는 자연수 α, β를 이용해 $(2\alpha - 1) \cdot 2^{\beta - 1}$로 표현할 수 있고 이 방법은 유일하므로 r은 문제의 조건을 만족하는 일대일대응이다.

$$(2\alpha - 1) \cdot 2^{i-1} \leqq 2^m - 1 \Rightarrow 2\alpha - 1 < 2^{m-i+1} \Rightarrow \alpha < 2^{m-i}$$

이므로 $a_{r(1)}$에서 $a_{r(2^m - 1)}$사이에는 분모가 $(2i-1) \cdot 2^x$꼴인 수가 $0 \leqq x \leqq 2^{m-i} - 1$에서 존재하고

$$S_{i,\, m} = \frac{1}{2i-1} - \sum_{j=1}^{2^m - 1} \frac{1}{(2i-1) \cdot 2^j}$$

라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{r(n)} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{2^m - 1} a_{r(n)} = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} S_{i,\, m-i}$이다. $S_{i,\, m-i} = \frac{1}{(2i-1) \cdot 2^{2^{m-1} - 1}}$에서 $\frac{1}{(2i-1)}$은 i가 커질수록 작아지고 $\frac{1}{2^{2^{m-i} - 1}}$은 i가 작아질수록 커진다.

$g(m) = m - [\log_2 m]$이라 할 때

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{r(n)} = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m} S_{i,\,m-i} = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{g(m)} S_{i,\,m-i} + \sum_{i=g(m)+1}^{m} S_{i,\,m-i}\right)$$

이다. 각 항을 따로 계산해보면

$$\sum_{i=1}^{g(m)} S_{i,\,m-i} = \sum_{i=1}^{g(m)} \frac{1}{(2i-1)\cdot 2^{2^{m-i}-1}} \leq \sum_{i=1}^{g(m)} \frac{1}{1\cdot 2^{2^{m-i}-1}} \leq \frac{g(m)}{2^{m-1}} \leq \frac{m-[\log_2 m]}{2^{m-1}}$$

$$\sum_{i=g(m)+1}^{m} S_{i,\,m-i} = \sum_{i=g(m)+1}^{m} \frac{1}{(2i-1)\cdot 2^{2^{m-i}-1}} \leq \sum_{i=g(m)+1}^{m} \frac{1}{(2i-1)} \leq \frac{m-g(m)}{(2g(m)+1)} \leq \frac{\log_2 m}{2m-2[\log_2 m]+1}$$

가 돼 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{r(n)} = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m} S_{i,\,m-i} = \left(\lim_{m\to\infty}\frac{m-[\log_2 m]}{2^{m-1}} + \frac{\log_2 m}{2m-2[\log_2 m]+1}\right) = 0$이다.

Q2 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

> 무한급수의 정확한 값을 구하기 어려운 경우가 많다. 이때 적분을 이용하면 무한급수의 수렴과 발산 여부를 판정할 수 있는데 이를 적분판정법이라 부른다. 적분판정법을 알아보면 다음과 같다.
>
> 연속함수 $f:[1,\infty)\to R$이 감소함수이고 $f(x)>0$일 때 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$이 수렴할 필요충분조건은 적분 $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$가 수렴하는 것이다. 단 R은 실수 전체의 집합이다.

1) 제시문의 적분판정법을 증명하라.

2) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot \ln n\cdot \ln(\ln n)}$이 발산함을 증명하라.

3) $\displaystyle\left[\sum_{k=1}^{[e^{100}]}\frac{1}{k}\right]$의 값을 구하라. 단 $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수를 뜻한다.

▶ 전문가 클리닉

1) 논제 1은 적분판정법을 증명하는 문제로 완비성 공리를 사용하는데 익숙해졌다면 어렵지 않게 풀 수 있습니다. 논제 2는 적분판정법의 응용 문제로 로그함수가 합성돼 있으므로 치환을 두 번 해주어야 합니다. 논제 3은 적분판정법에서 사용하는 구분구적법의 아이디어를 응용한 문제입니다. 적분판정법으로 무한급수의 정확한 값을 구할 수는 없지만 함수에 따라 적분값과 무한급수의 오차가 크지 않은 경우도 있습니다. $\dfrac{1}{k}$도 초기값이 1이기 때문에 오차가 크지 않습니다. 전체적으로 가우스기호가 씌워져 있기 때문에 무한급수의 근사값을 구할 수 있습니다.

▶ 예시답안

1) $f(x)$는 감소함수이므로 $m-1\leq x\leq m$에서 $f(x)\leq f(m-1)$이다. 양변을 $m-1$에서 m까지 적분하면

$$\int_{m-1}^{m} f(x)\,dx \leqq f(m-1)$$

이고 이를 더해가면 $\int_{1}^{m} f(x)\,dx \leqq \sum_{n=1}^{m-1} f(n)$이다.

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$이 α로 수렴한다고 가정하면 $\int_{1}^{m} f(x)\,dx \leqq \sum_{n=1}^{m-1} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \alpha$이다. 이때 $f(x)>0$이므로 m이 커질수록 $\int_{1}^{m} f(x)\,dx$값이 커지고 이 값은 항상 α보다 작다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$이 수렴하면 $\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$도 수렴한다.

마찬가지 방법으로 $f(x)$는 감소함수이므로 $m-1 \leqq x \leqq m$에서 $f(m) \leqq f(x)$이다. 양변을 $m-1$에서 m까지 적분하면 $f(m) \leqq \int_{m-1}^{m} f(x)\,dx$이고 이를 더해가면 $\sum_{n=1}^{m} f(n) \leqq f(1) + \int_{1}^{m} f(x)\,dx$이다.

$\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$가 β로 수렴한다고 가정하면

$$\sum_{n=1}^{m} f(n) \leqq f(1) + \int_{1}^{m} f(x)\,dx \leqq f(1) + \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx = f(1) + \beta$$

이다. 이때 $\sum_{n=1}^{m} f(n)$은 임의의 m에 대하여 $f(1)+\beta$보다 작고 $f(x)>0$이므로 m이 커질수록 값이 커진다. 따라서 $\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$도 수렴한다. 결국 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$이 수렴할 필요충분조건은 $\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$가 수렴하는 것이다.

2) $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)}$는 감소함수이고 항상 0보다 크기 때문에 $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln(\ln n)}$이 수렴한다고 가정하면 적분판정법에 의해

$$\int_{3}^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)}\,dx$$

가 수렴해야 한다. $t = \ln x$로 치환하면

$$\lim_{m\to\infty} \int_{3}^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)}\,dx = \lim_{m\to\infty} \int_{\ln 3}^{\ln m} \frac{1}{x \cdot t \cdot \ln t} x\,dx = \lim_{m\to\infty} \int_{\ln 3}^{\ln m} \frac{1}{t \cdot \ln t}\,dt$$

이고 다시 $s = \ln t$로 치환하면

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\ln 3}^{\ln m} \frac{1}{t \cdot \ln t}\,dt = \lim_{m\to\infty} \int_{\ln(\ln 3)}^{\ln(\ln m)} \frac{1}{t \cdot s} t\,ds = \lim_{m\to\infty} (\ln(\ln(\ln m)) - \ln(\ln(\ln 3))) = \infty$$

이다. 결과가 수렴하지 않으므로 $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln(\ln n)}$는 발산한다.

3) $\dfrac{1}{x}$은 감소함수이므로 $m-1 \leqq x \leqq m$에서 $f(m) \leqq f(x) \leqq f(m-1)$이다. 양변을 적분해 더하면

$$\sum_{k=1}^{[e^{100}]}\frac{1}{k} \leqq 1+\int_1^{[e^{100}]}\frac{1}{x}\,dx$$

이고 $\sum_{k=1}^{[e^{100}]}\frac{1}{k} \geqq \int_1^{[e^{100}]+1}\frac{1}{x}\,dx$이다. 적분을 계산해 $\sum_{k=1}^{[e^{100}]}\frac{1}{k}$의 범위를 구하면

$$\sum_{k=1}^{[e^{100}]}\frac{1}{k} < 1+\int_1^{[e^{100}]}\frac{1}{x}\,dx \leqq 1+\int_1^{e^{100}}\frac{1}{x}\,dx = 1+[\ln x]_1^{e^{100}} = 101$$

이고 $\sum_{k=1}^{[e^{100}]}\frac{1}{k} > \int_1^{[e^{100}]+1}\frac{1}{x}\,dx > \int_1^{e^{100}}\frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^{e^{100}} = 100$이다. 그러므로 $100 < \sum_{k=1}^{[e^{100}]}\frac{1}{k} < 101$이고 $\left[\sum_{k=1}^{[e^{100}]}\frac{1}{k}\right] = 100$이다.

Tip 비교판정법 : 비교판정법은 양수로만 이뤄진 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 $0 \le a_n \le b_n$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴함을 뜻한다. 또 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 발산한다. 적분판정법은 a_n 또는 b_n이 적분으로 표현되는 특수한 경우로 비교판정법을 이용해 증명할 수 있다. 연속함수 $f : [1,\infty) \to R$이 감소함수이고 $f(x) > 0$이면 $a_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt$, $b_n = f(n)$이라 할 때 $0 \le a_n \le b_n$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_1^{\infty} f(t)\,dt$도 수렴한다. 반대의 경우도 비슷한 방법으로 증명할 수 있다.

2009년 02월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]아르키메데스의 구분구적법

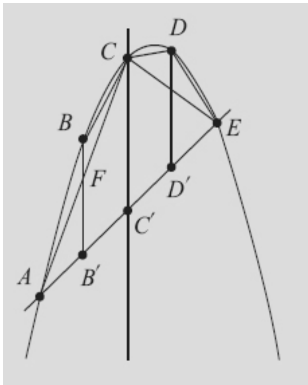
| 글 | 윤종선 · KuMing@pathfinder.or.kr |

아르키메데스는 어떻게 적분을 사용하지 않고 도형의 넓이를 구했을까? 주어진 도형을 넓이를 알고 있는 기본도형으로 세분해 넓이의 근사값을 구하고, 그 값을 극한으로 확장시키는 방법을 구분구적법이라 한다.

Q1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 함수는 수많은 수학자에 의해 다양한 방법으로 정의돼 왔다. 이 중 조지 토마스와 로스피니의 정의가 있는데 다음과 같다. '함수는 집합 D의 각각의 원소들을 집합 C의 하나의 원소로 대응시키는 규칙이다. ' 여기서 집합 D를 '정의역', 집합 C를 '공역' 이라고 부른다. 특별한 언급이 없는 경우 수학에서 다루는 함수들은 정의역과 공역이 실수이다. 함수는 대응시키는 규칙이 같더라도 정의역과 공역이 바뀌면 다른 함수가 된다. 예를 들어 $y=ax+b$라는 함수의 정의역과 공역을 수열들의 집합으로 정의할 경우 등차수열은 또 다른 등차수열로 대응된다. 하지만 y=ax는 정의역과 공역을 수열의 집합으로 정의할 경우 등차수열이 등비수열로 대응된다. 같은 방식으로 $y=ax^2+bx+c$ 같은 이차함수는 정의역이 등차수열의 원소인 경우 계차가 등차인 수열로 대응된다.

(나) 미분과 적분은 아이작 뉴턴과 고트프리드 라이프니츠에 의해 완성됐지만 핵심적인 아이디어는 고대 그리스의 수학자들이 만들었다. 제논이나 에우독소스를 포함해 많은 수학자가 미분과 적분의 기본 개념을 제시했지만 그 중에서도 가장 독보적인 인물은 아르키메데스였다. 그가 이차함수와 직선에 의해 생기는 도형의 면적을 적분을 사용하지 않고 구한 일은 놀라울 따름이다. 그림과 같이 A와 E에서 만나는 이차함수와 직선이 있을 때 AE의 중점에서 이차함수의 축과 평행하도록 직선을 그어서 이차함수와 만나는 점을 C라 한다. 이 직선과 AE가 만나는 점을 C′라 할 때 AC′의 중점과 C′E의 중점에서 축에 평행한 직선을 그어 이차함수와 만나는 점을 각각 B, D라 한다. 삼각형 ACE의 넓이는 삼각형 ABC와 삼각형 CDE의 넓이 합의 4배가 된다. 삼각형 ABC와 삼각형 CDE에서도 같은 방법으로 넓이 합이 각 삼각형의 4분의 1인 삼각형을 두 개씩 찾을 수 있고, 이를 무한히 반복하면 전체 삼각형의 넓이 합은 이차함수와 직선 사이의 면적과 같아진다. 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하고 식으로 표현하면 이차함수와 직선 사이의 면적은 S+S+S+…가 된다.



(다) 반지름 길이가 r인 원의 넓이를 원에 내접하는 정다각형 넓이의 극한으로 구해보자. 반지름 길이가 r인 원에 내접하는 정n각형 넓이를 S_n, 원의 중심을 O, 정n각형에 인접한 두 꼭지점을 각각 A, B라 하면

$$S_n = n \times (\triangle OAB\text{의 넓이}) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \overline{AB} \cdot h_n \quad \cdots \text{㉠}$$

이다. 여기서 h_n은 O에서 AB까지의 거리를 뜻한다. 정n각형의 둘레를 l_n이라 하면

$n \cdot AB = l_n$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $S_n = \frac{1}{2} l_n h_n$이 된다.

여기서 n을 크게 하면 할 수록 정n각형의 둘레 길이 l_n은 원 둘레의 길이 $2\pi r$이고 $\triangle OAB$의 높이 h_n은 r이므로

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} l_n h_n = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2$$

이다. 즉 $n \to \infty$일 때 S_n은 원의 넓이라고 할 수 있다.

이와 같이 어떤 도형의 넓이 또는 부피를 구할 때 넓이 또는 부피를 이미 알고 있는 기본 도형으로 주어진 도형을 세분해 근사값을 구하고 그것의 극한값으로 주어진 도형의 넓이와 부피를 구하는 방법을 구분구적법이라고 한다.

1) 제시문 (가)에서 밑줄 친 부분과 같은 결과가 나오는 이유에 대해 서술하라.

2-1) 제시문 (나)에서 A, B, C, D, E의 y좌표와 A, B', C', D', E의 y좌표가 어떤 수열을 이루는지 설명하라.

2-2) 선분 BF와 선분 B´ F의 길이 비를 구하라.

2-3) 제시문 (나)의 밑줄 친 부분과 같은 결과가 나오는 이유를 설명하라.

3) 제시문 (나)의 증명은 아르키메데스가 쓴 '포물선의 구적'(Quadrature of the Parabola)에 실려 있다. 다음은 이 책의 일부다.

<정리 23> 삼각형 면적들의 수열 A, B, C, D ..., Z가 주어졌을 때 이 수열이 A가 가장 크고 수열의 각 항이 그 다음 항의 4배라면 다음 식이 성립한다.

$$A + B + C + D + \cdots + Z + \frac{1}{3} Z = \frac{4}{3} A$$

아르키메데스는 B에서 Z까지 합에 B에서 Z까지 합의 3분의 1을 더해 앞 식을 만들었다. 이 과정을 구체적으로 서술하고 이를 이용해 $S + \frac{1}{4} S + \frac{1}{4^2} S + \cdots$를 S에 관한 식으로 나타내라.

4-1) 제시문을 활용해 $y = -2x^2 + 4x$와 $y = x + 1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 아르키메데스가 사용한 방법으로 구하고 이 방법이 구분구적법인지에 대해 서술하라.

4-2) $y = -2x^2 + 4x$와 $y = x + 1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 적분을 이용해 구하고 앞의 결과와 비교하라.

▶ 전문가 클리닉

정적분과 부정적분은 계산방법은 유사하지만 정의는 다릅니다. 부정적분은 미분을 이용해 정의하고 정적분은 구분구적법을 이용해 정의합니다. 수능에 출제되는 계산문제 위주로 공부하다 보면 부정적분과 정적분의 차이를 이해하지 못하고 정적분은 부정적분을 한 뒤에 숫자만 대입하는 방식으로 이해하기 쉽습니다. 대학에서도 수능 위주 학습의 문제점을 알기 때문에 구분구적법은 논술에서 가장 많이 출제되는 문제입니다.

논제 1은 수열과 함수 사이의 관계를 묻는 문제입니다. 먼저 계차수열의 의미를 생각하고 그것을 어떻게 식으로 나타낼지 고민해야 합니다. 조건을 식으로 바꾸는 일은 수학문제를 해결하는 시작점입니다. 논제 2-1은 제시문과 논제 1의 결과를 활용하는 문제입니다. 각 점의 x좌표

와 y좌표가 어떤 수열을 이루는지 생각하면 문제를 쉽게 풀 수 있습니다. 논제 2-2는 논제 2-1을 이용해 길이 비를 나타내면 구할 수 있습니다. 논술에서는 이처럼 앞의 문제를 이용해 다음 문제를 푸는 패턴이 자주 등장하므로 이런 흐름에 익숙해져야 합니다. 이 문제는 변수를 어떻게 사용하느냐가 문제의 난이도를 좌우합니다. 등차수열과 계차수열에서 어떤 값을 변수로 잡아야 문제를 쉽게 풀 수 있을지 고려합니다. 논제 2-3은 앞의 문제와 마찬가지로 논제 2-2의 결과를 이용해 풀 수 있습니다. 삼각형의 넓이는 밑변과 높이의 곱을 2로 나눈 값이기 때문에 높이가 동일하다면 삼각형 넓이의 비율은 밑변의 길이 비율과 같습니다. 삼각형을 적당히 분해한 뒤 밑변 길이의 비율을 이용하면 넓이 비율을 쉽게 구할 수 있습니다. 논제 3은 무한 등비수열의 합을 아르키메데스가 사용한 방법을 이용해 구하는 문제입니다. 답을 구하는 일은 별로 어렵지 않지만 문제의 조건을 놓치지 않도록 주의해야 합니다. 아르키메데스는 등비수열의 합 공식을 사용하지 않았으므로 문제에서 아르키메데스가 사용한 방법을 유추합니다. 논제 4-1과 4-2는 동일한 문제이지만 서로 다른 방법으로 풀어야 합니다. 적분으로 쉽게 구할 수 있는 문제이지만, 여기서는 구분구적법을 제대로 적용할 수 있는지를 평가하고 있습니다. 논제 4-1은 제시문에 있는 아르키메데스가 사용한 방법을 제대로 알고 있는지를 묻는 문제입니다. 논제 4-2는 정적분을 이용해 도형 넓이를 구합니다.

▶ 예시답안

1) x_n이 등차수열이라 할 때 $y_n=ax_n^2+bx_n+c$라 하면 $z_n=y_n-y_{n-1}$이 등차수열임을 증명한다. 일단 x_n이 등차수열이므로 x_n-x_{n-1}이 일정한 값을 갖는다. 이 값을 d라고 하자.

$$d=x_n-x_{n-1}$$

$$z_n=y_n-y_{n-1}=(ax_n^2+bx_n+c)-(a_{n-1}^2+bx_{n-1}+c)$$

이므로 $z_n=a(x_n^2-x_{n-1}^2)+b(x_n^2-x_{n-1}^2)$이고 $x_n-x_{n-1}=d$를 대입하면 $z_n=ad(x_n+x_{n-1})+bd$가 된다. 따라서 $z_n-z_{n-1}=\{ad(x_n+x_{n-1})+bd\}-\{ad(x_{n-1}+x_{n-2})+bd\}$이고 이것은 $z_n-z_{n-1}=ad(x_n-x_{n-2})=2ad^2$이 돼 z_n이 등차수열이다. 즉 이차함수의 정의역이 등차수열이면 함수값의 계차 z_n이 등차수열임을 알 수 있다.

2-1) A, B', C', D', E의 x좌표를 순서대로 a, b, c, d, e라 하면 C'가 A와 E의 중점이므로 $2c=a+e$이고 B'가 A와 C'의 중점, D'가 C'와 E의 중점이므로 $2b=a+c$, $2d=c+e$이다. 정리하면 $b-a=c-b$, $d-c=e-d$이고 $c-a=(c-b)+(b-a)=2(b-a)$, $e-c=(e-d)+(d-c)=2(d-c)$이므로 $c-a=e-c$에서 $b-a=c-b=d-c=e-d$이다. 즉 A, B', C', D', E의 x좌표들은 순서대로 등차수열을 이룬다. 제시문 (가)에 의해 A, B, C, D, E의 y좌표는 등차가 계차인 계차수열을 이루며 A, B', C', D', E의 y좌표는 등차수열을 이룬다.

2-2) 점 A의 y좌표를 a라 하고 A, B', C', D', E의 y좌표의 공차를 d라 한다. A, B, C, D, E의 y좌표의 계차가 초항이 b, 공차가 e라 하면(즉 A, B', C', D', E의 y좌표는 $a+(n-1)d$인 등차수열이고 A, B, C, D, E의 y좌표는 계차가 $b+(n-1)e$인 계차수열이다.) B의 y좌표는 $a+b$, B'의 y좌표는 $a+d$이고 C의 y좌표는 $a+2b+e$인데 F는 A와 C의 중점이므로 F의 y좌표는 $a+b+\frac{e}{2}$이다. 따라서 $\overline{BF}=-\frac{e}{2}$, $\overline{B'F}=b+\frac{e}{2}-d$이다($e$는 음수이다). 이제 E의 y좌표를 A, B', C', D', E에서 구하면 $a+4d$, A, B, C, D, E에서 구하면 $a+4b+6e$이므로

$4d=4b+6e$이다. 따라서 $\overline{B'F}=\frac{e}{2}-\frac{3}{2}e=-e$가 되고 $\overline{BF}:\overline{B'F}=1:2$이다.

2-3) $\triangle XYZ$의 넓이를 $S(\triangle XYZ)$로 표현하면 $S(\triangle ABF)=\alpha$, $S(\triangle CBF)=\beta$라 할 때 $\overline{BF}:\overline{B'F}=1:2$이므로 $S(\triangle ABF):S(\triangle AB'F)=1:2$, $S(\triangle CBF):S(\triangle CB'F)=1:2$이고 $S(\triangle AB'F)=2\alpha$, $S(\triangle CB'F)=2\beta$이다. B'는 $\overline{AC'}$의 중심이므로 $\overline{AB'}=\overline{B'C'}$이고 $S(\triangle AB'C)=S(\triangle AB'F)+S(\triangle CB'F)=S(\triangle CB'C')=2\alpha+2\beta$이다. 따라서

$$S(\triangle AC'C)=4\alpha+4\beta=4(S(\triangle ABF)+S(\triangle CBF))=4S(\triangle ABC)$$

가 된다. 마찬가지로 $S(\triangle EC'C)=4S(\triangle CDE)$이므로 $S(\triangle ACE)=4(S(\triangle ABC)+S(\triangle CDE))$이다. 즉 제시문 (나)의 밑줄친 부분은 성립한다.

3) $B+C+\cdots+Z+\frac{1}{3}(B+C+\cdots+Z)=\frac{4}{3}(B+C+\cdots+Z)$이고 문제의 조건에 의해 $4B=A$, $4C=B$, $\cdots$, $4Z=Y$이므로 $B+C+\cdots+Z+\frac{1}{3}(B+C+\cdots+Z)=\frac{1}{3}(A+B+\cdots+Y)$이다. 양변에서 $\frac{1}{3}(B+C+\cdots+Y)$를 빼면 $B+C+\cdots+Z+\frac{1}{3}Z=\frac{1}{3}A$이고 양변에 A를 더하면 $A+B+\cdots+Z+\frac{1}{3}Z=\frac{4}{3}A$가 돼 '정리 23'의 식이 성립한다. 이를 적용하면 다음과 같다.

$$S+\frac{1}{4}S+\frac{1}{4^2}S+\cdots+\frac{1}{4^n}S=\frac{4}{3}S-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^n}S\right)$$

$$S+\frac{1}{4}S+\frac{1}{4^2}S+\cdots=\lim_{n\to\infty}S+\frac{1}{4}S+\cdots+\frac{1}{4^n}S=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4}{3}S-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^n}S\right)\right\}=\frac{4}{3}S$$

4-1) 먼저 $y=-2x^2+4x$와 $y=x+1$의 교점을 구하면 $2x^2-3x+1=0$에서 $x=\frac{1}{2}$, 1이므로 $(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2})$과 $(1,\ 2)$이다. 제시문 (나)의 그림에서 $(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2})$을 A, $(1,\ 2)$를 E라 하면 C´에 해당하는 점은 $(\frac{3}{4},\ \frac{7}{4})$이고 C에 해당하는 점은 $(\frac{3}{4},\ \frac{15}{8})$이다. 그 결과 $S(\triangle ACC')=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$이고 $S(\triangle ACE)=2S(\triangle ACC')=\frac{1}{32}$이다.

$\triangle XYZ$가 주어지고 점 X, Y, Z의 x좌표가 이 순서대로 증가한다고 할 때 XY의 중점에서 이차함수의 축과 평행하도록 직선을 그어 이차함수와 만나는 점을 W라 하고 YZ의 중점에서 이차함수의 축과 평행하도록 직선을 그어 이차함수와 만나는 점을 V라 하자. 이때 $\triangle XYZ$로부터 $\triangle XYW$와 $\triangle YZV$를 만들어내는 것을 '시행'이라고 정의한다. $\triangle ACE$가 1단계 삼각형이라면 $(n+1)$단계 삼각형은 n단계의 모든 삼각형에서 '시행'을 해 만들어지는 삼각형이다.

1단계 삼각형으로부터 n단계 삼각형까지 모두 모은 도형을 T_n이라 하면 $\lim_{n\to\infty}T_n$은 $y=-2x^2+4x$와 $y=x+1$로 둘러싸인 도형과 같다. T_n의 넓이는 논제 3의 결과를 이용하면

$$\frac{4}{3}S(\triangle ACE)=\frac{1}{24}$$

이다. $y=-2x^2+4x$와 $y=x+1$로 둘러싸인 도형의 넓이는 넓이를 이미 알고 있는 작은 삼각형으로 나눠 근사값의 극한값으로 구했으므로 제시문 (다)에 의해 이 방법은 구분구적법이다.

2009년 03월호-수학 면접구술고사 완벽가이드

[수학]미분방정식

| 글 | 윤종선 · KuMing@pathfinder.or.kr |

과학에서 다루는 대부분의 변수들은 현재의 값이 앞으로의 변화량에 영향을 미친다. 함수와 그 함수를 미분한 함수사이의 관계가 주어진 식을'미분방정식'이라한다. 자연 현상들은 대부분 미분방정식으로 표현할 수 있다.

Q1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 방정식은 좌우 두 식이 서로 같음을 의미하는 수학적인 문장이다. 대부분의 방정식은 하나 이상의 변수가 존재하고 변수가 특정한 값일 때만 식이 성립한다. 예를 들어 $3x=x+6$과 같은 방정식은 x가 3일 때만 성립한다. 이처럼 방정식이 성립하는 조건을 찾는 행위를 '방정식을 푼다'고 한다.

함수방정식이란 함수값들이나 함수들 사이의 관계를 방정식으로 표현한 것이다. $f(x+y)=f(x)f(y)$ 같은 식은 함수방정식의 대표적인 예다. 함수방정식 중에서 함수와그 함수를 미분한 함수 사이의 관계가 주어진 것을 미분방정식이라 한다. $x+f''(x)=f(x)$, $f(x)=f(x)-x^2$ 같은 식들은 모두 미분방정식이다.

(나) A라는 도시의 시점 t에서의 인구를 $f(t)$라 하면 $f'(t)$는 $f(t)$에 비례한다. 현재의 인구가 많을수록 인구가 증가하는 속도도 크기 때문이다. 이처럼 우리가 과학에서 다루는 대부분의 변수들은 현재의 값이 앞으로의 변화량에 영향을 미친다. $f(t)$와 f ′d2(t) (t) 사이의 관계식이 존재하는 것이다. 로켓을 쏘아 올린 경우를 생각해보면, 지구로부터의 거리 $d(t)$가 클수록 중력이 작아서 속도의 변화(가속도)가 작다. 이와 같이 여러 가지 자연 현상들은 대부분 미분방정식으로 표현할 수 있다.

(다) 열은 항상 고온에서 저온으로 이동한다. 이때 고온의 물체에서 저온의 물체로 이동한 열의 양을 열량이라 한다. 만일 외부와의 열 출입이 없다면, 고온인 물체가 잃은 열량은 저온인 물체가 얻은 열량과 같다. 이것을 열량 보존의 법칙이라고 한다.

같은 양의 열을 받더라도 물체마다 온도가 변하는 정도에는 차이가 있다. 이런 차이를 표현하기 위해서 비열이라는 개념을 사용하는데, 비열은 어떤 물질 1Kg의 온도를 1K 높이는데 필요한 열량을 의미한다. 질량 m(Kg)인 물체의 온도를 △T(K)만큼 높이는데 필요한 열량이 Q(kcal)라고 하면, 그물 체의 비열 c는 $c=mQ\Delta T$와 같다. (물의 비열은 1(kcal/Kg·K)이다.)

(라) 물체의 온도가 높으면 분자들이큰 운동 에너지를 갖게 된다. 온도가 다른 물체와 접촉하고 있거나 한 물체 내에서 온도차가 있으면, 온도가 높아서 열운동이 활발한 쪽의 분자들은 주변 분자들과 충돌해 운동 에너지를 잃고 온도가 낮아지는 반면 주변의 분자들은 운동에너지를 얻어 상대적으로 온도가 올라간다. 이웃한 분자들 사이의 충돌에 의해 열이 이동하는 것을 열전도라고 한다.

단면적이 A이고 길이가 l인 금속 막대의 양끝의 온도가 각각 T_1, T_2($T_1>T_2$)일 때, Δt 초 동안에 이 막대를 통해서 이동하는 열량 Q는 단면적 A와 온도차 T_1-T_2, 그리고 시

간 Δt에 비례하고 막대의 길이 l에 반비례하므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$Q = kA\dfrac{T_1 - T_2}{l}\Delta t$ (k : 물질의 열전도율)

(마) 배양실 같은 최적의 환경 조건에서 시간에 따른 미생물의 개체 수를 조사하면, 처음에는 서서히 증가하다가 시간이 지날수록 급격하게 증가한다는 것을 알 수 있다. 좋은 환경에서는 미생물의 개체수가 늘어나고 개체 수 증가량은 현재 개체 수와 비례하기 때문이다. 개체수의 증가율을 k, t시간후의 미생물의 개체수를 $A(t)$라고하면 개체 수의 변화는 $A(t) = kA(t)$이고 $A(t)$는 지수함수다.

환경조건이 좋지 않은 경우에는 시간이 지날수록 개체 수가 증가하는 양이 서서히 감소한다. 미생물의 이러한 개체 수 변화를 그래프로 그리면 S자 형태가 된다. 이를 S자형 생장곡선 또는 로지스틱곡선(logistic curve)이라 부른다. 이상적인 상태에서의 개체 수 증가율을 k, t시간 후 미생물 개체 수를 $A(t)$라 하고 M을 주어진 환경의 최대 미생물 개체수라고 하면, $A(t) = kA(t)$과 같은 식이 성립한다. $A(t)$가 충분히 작은 값일 때는 $A(t) = kA(t)$와 같은 형태로 개체수가 증가하지만 시간이 지날수록 증가율이 작아져서 생장곡선 S자형을 이룬다.

1) 3차원 공간에서 어떤 물체가 속도와 가속도의 방향이 항상 수직이 되도록 운동하고 있다. 이 물체의 속력이 일정함을 증명하라.

2) f(x)=2 f(x)+3, f(0)=4, f(x).3이라 할 때 f(x)를 구하라.

3) 어떤 집의 난방장치가 갑자기 고장 나서 집안의 기온이 내려가고 있다. 외부 온도가 a이고 난방장 치가 고장난 순간 집안의 온도가 b이며 난방장치가 고장난후 t초 후의 집안의 온도 f(t)라 할 때, f(t)의 시간에 따른 변화를 예측하라. (단 집 내부의 온도는 어느 위치에서든 동일하다.)

4) 미생물의 개체수가 제시문(마)의 S자형 생장곡선을 따라 증가할때, t시간 후의 미생물의 개체수 $A(t)$를 구하고 t가 충분히 커지면 $A(t)$는 어떤 값에 수렴하는지 구하라.

5-1) g(t)=cost·f(t)−sint·f ′(t), h(t)=sint·f(t)+cost·f ′(t)라 할 때 g(t), h(t), f(t) 사이의 관계식을 구하라. (단, f ′(t)는 사용하지 않아야 한다.)

5-2) $f''(t) + f(t) = 0$, f(0)=3, f ′(0)=2이라 할 때, 4)의 g(t)와 h(t)를 이용하여 f(t)를 구하라.

▶ 전문가 클리닉

미분방정식은 대학에서 가르치는 수학 수업 중에서도 매우 비중이 큰 파트입니다. 그래서인지 미분방정식은 고등학교 교육과정이 아님에도 불구하고 자주 출제되고 있습니다.

미분방정식이라는 생소한 이름이나 대학과정이라는 이야기에 겁먹을 필요는 없습니다. 고등학교 과정의 접분 계산만 능숙하게 할 수 있다면 수리논술에 출제되는 수준의 미분방정식은 충분히 풀어낼 수 있습니다. 다만 우리에게 익숙한 x^3, $\sin x$ 등을 적분하는것이 아니라 $f(x)$, $g(x)$와 같은 함수를 적분하는 것이기 때문에 계산 실수를 하지 않도록 주의합니다.

미분방정식의 가장 기본 패턴인 $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}dx = \int \frac{1}{f(x)}df(x) = \ln|f(x)|$의 계산은 특히 중요합니다.

1) 문제에서 주어진 상황을 식으로 바꿔낼 수 있어야 합니다. 속도와 가속도는 벡터라는 것을

이용해서 두 벡터가 수직이려면 내적이 0이어야 한다는 생각을 이끌어 냅니다. 속력은 속도벡터의 절대값이라는 사실을 이용해서 답을 구합니다. 수리논술에서는 문제의 조건을 식으로 바꿔내는 능력이 중요합니다.

문제는 $\overrightarrow{v(t)} \cdot \overrightarrow{a(t)} = x'(t)x''(t)+y'(t)y''(t)+z'(t)z''(t)=0$일 때

$\overrightarrow{|v(t)|} = \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}$가 일정함을 증명하는 문제입니다.

$(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2$를 미분하면 $x'(t)x''(t)+y'(t)y''(t)+z'(t)z''(t)$이므로 거꾸로 $x'(t)x''(t)+y'(t)y''(t)+z'(t)z''(t)=0$을 적분하면 속력이 일정하다는 것을 증명합니다.

2) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}dx = \int \frac{1}{f(x)}df(x) = \ln|f(x)|$를 이용해서 풀 수 있는 가장 기본적인 미분방정식 문제입니다. 이것은 수리논술에서 여러 번 출제됐기 때문에 반드시 알아둬야합니다. 이 미분방정식은 분모를 미분하면 분자가 나오는 분수 형태를 적분하는데 사용됩니다. 적분 후에는 절대값 안에 있는 식의 부호를 꼭 확인해야 합니다.

3)은 미분방정식이 실제 자연현상에 적용되는 예입니다. 인접한 두 물체의 온도 차가 클수록 각각의 온도변화도 크기 때문에 현재 온도 $f(t)$가 온도의 변화량 $f'(t)$에 영향을 주게 되는데, 이것은 $f(t)$와 $f'(t)$ 사이의 관계식 즉 미분방정식을 세울 수 있다는 의미입니다.

$f'(t) = \frac{dT}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta T}{\Delta t}$이므로 주어진 식을 $\frac{\Delta T}{\Delta t}$의 형태로 정리한 후 극한을 취해서 미분방정식을 구합니다. 이 과정에서는 미지수가 상당히 많이 나오는데 대부분의 미지수가 상수이므로 치환을 이용하면 식을 간단하게 만들 수 있습니다.

4) 식을 정리하면 $\{A(t)\}^2$이 나와서 약간 어려운 미분방정식 문제입니다. 하지만 앞에서 풀었던 문제들을 잘 응용하면 해결할 수 있습니다. 식을 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 형태로 변환한 후 적분하여 문제를 해결합니다. 먼저 제시문의 식을 $\frac{A'(t)}{M \cdot A(t) - \{A(t)\}^2} = \frac{k}{M}$와 같이 분자에 $A'(t)$ 분모에 $A(t)$가 들어가도록 정리해 봅시다. 이때 분모에 있는 $A(t)$는 차수가 2차이기 때문에 $\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)$를 이용해 부분함수로 식을 나눠주면서 차수를 줄입니다.

5-1)은 삼각함수와 미분방정식이 결합된 형태입니다. 삼각함수에서 제일 중요한 식은 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$입니다. 이것을 이용해 $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ 사이의 관계를 찾아냅니다. 이 문제에서는 $f'(t)$는 사용하지 않는다는 조건에 주목할 필요가 있습니다.

이 말은 $f'(t)$를 소거해야 한다는 의미이므로 $f'(t)$를 없애려면 $g(t)$와 $h(t)$를 어떻게 처리해야 할지 생각해 봅시다.

5-2)는 5-1)을 이용하여 $f(t)$를 구하는 문제입니다. 조건에 $f''(t)$가 나오므로 $g(t)$와 $h(t)$를 미분하여 $f''(t)$를 만들어 내야 한다는 것을 생각해 냈다면 그 다음부터는 쉽게 해결이 가능합니다. 이처럼 수리논술을 풀 때는 앞의 문제를 활용하는 것과 조건식으로부터 필요한 내용을 이끌어 내는 것에 익숙해 져야 합니다.

▶ 예시답안

1) 이 물체의 시간 t에서의 위치벡터를 $\overrightarrow{r(t)} = (x(t),\ y(t),\ z(t))$라 하자. 그러면 속도벡터는

$\overrightarrow{v(t)}=(x'(t),\ y'(t),\ z'(t))$가 되고 가속도 벡터는 $\overrightarrow{a(t)}=(x''(t),\ y''(t),\ z''(t))$가 된다. 속도벡터와 가속도 벡터가 수직이기 때문에 벡터의 내적을 이용하면

$\overrightarrow{v(t)} \cdot \overrightarrow{a(t)}=x'(t)x''(t)+y'(t)y''(t)+z'(t)z''(t)=0$이고 양변을 적분하면

$$\int x'(t)x''(t)dt+\int y'(t)y''(t)dt+\int z'(t)z''(t)dt$$
$$=\int x'(t)\frac{dx'(t)}{dt}dt+\int y'(t)\frac{dy'(t)}{dt}dt+\int z'(t)\frac{dz'(t)}{dt}dt$$
$$=\int x'(t)dx'(t)+\int y'(t)dy'(t)+\int z'(t)dz'(t)$$
$$=\frac{(x'(t))^2}{2}+\frac{(y'(t))^2}{2}+\frac{(z'(t))^2}{2}=C$$가 된다.

$\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}=|\overrightarrow{v(t)}|=\sqrt{2C}$, 즉 속력이 일정함을 알 수 있다.

2) $f(x)=2f'(x)+3 \Rightarrow f(x)-3=2f'(x) \Rightarrow 1=\dfrac{2f'(x)}{f(x)-3}$가 되고 양변을 x에 대해서 적분하면

$x+C=\displaystyle\int \frac{2f'(x)}{f(x)-3}dx=\int \frac{2}{f(x)-3}\frac{df(x)}{dx}=\int \frac{2}{f(x)-3}df(x)=2\ln|f(x)-3|$이 된다.

$f(x) \geqq 3$**이므로** $f(x)-3=e^{\frac{x+C}{2}}$ **가 되고** $f(0)=4$**이므로** $C=0$**이 되어** $f(x)=e^{\frac{x}{2}}+3$**이다.**

3) 제시문 (다)에서 $c=\dfrac{Q}{m\Delta T}$이므로 $\Delta T=\dfrac{Q}{cm}$이고, $Q=kA\dfrac{T_1-T_2}{l}\Delta t$이므로 $\Delta T=kA\dfrac{f(t)-a}{lcm}\Delta t$라 할 수 있다. 이때 Δt를 0으로 보내면 $\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta t}=f'(t)$이므로

$f'(t)=kA\dfrac{f(t)-a}{lcm}$이다. 즉 벽의 두께를 l, 바깥과 만나는 벽의 면적을 A라 하면 l, A는 상수이고, k, c, m도 상수이므로 $\dfrac{kA}{lcm}=B$로 치환하면 $f'(t)=B(f(t)-a)$이다. $\dfrac{f'(t)}{f(t)-a}=B$라 하고 양변을 t에 대하여 적분했을 때, $\displaystyle\int \frac{1}{f(t)-a}\frac{df(t)}{dt}dt=Bt+C \Rightarrow \int \frac{1}{f(t)-a}df(t)=Bt+C$이므로 $\ln|f(t)-a|=Bt+C$이다. 난방을 하다가 꺼진 상태이므로 $f(t) \geqq a$이고 $f(0)=b$인 것을 대입하면, $f(t)=a+e^{Bt+C}$에서 $b=a+e^{C} \Rightarrow C=\ln(b-a)$ 즉 $f(t)=a+e^{Bt+\ln(b-a)}$이다. 이때 $B=\dfrac{kA}{lcm}$이다.

4) 제시문 (마)를 보면 S자형 생장곡선은 $\dfrac{d}{dt}A(t)=kA(t)\dfrac{M-A(t)}{M}$에 의해 그려진다.

$\dfrac{d}{dt}A(t)=A'(t)$라 놓고 주어진 식을 정리하면

$\dfrac{A'(t)}{A(t)\{M-A(t)\}}=\dfrac{k}{M} \Rightarrow \dfrac{1}{M}\left(\dfrac{A'(t)}{A(t)}+\dfrac{A'(t)}{M-A(t)}\right)=\dfrac{k}{M}$이 되고 양변에 M을 곱한 후 t에 대하여 적분하면 $\ln|A(t)|-\ln|A(t)-M|=kt+C$가 된다. $0 \leq A(t) \leq M$을 이용하여 절대값을 없애고 식을 정리하면 $\ln\dfrac{A(t)}{M-A(t)}=kt+C \Rightarrow \dfrac{A(t)}{M-A(t)}=e^{kt+C}$가 되고 양변에 역수를 취하여 정리하면 $\dfrac{M-A(t)}{A(t)}=e^{-kt-C} \Rightarrow \dfrac{M}{A(t)}=1+e^{-kt-C}$이다.

즉 $A(t)=\dfrac{M}{1+e^{-kt-C}}$이다. (단 미생물의 초기 개체수를 α라 한다면 $t=0$에서 $\dfrac{\alpha}{M-\alpha}=e^{C}$ 이므로 $C=\ln\dfrac{\alpha}{M-\alpha}$이다.)

$\lim\limits_{t\to\infty}e^{-kt-C}=0$이므로 $\lim\limits_{t\to\infty}A(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{M}{1+e^{-kt-C}}=M$에서 $A(t)$는 M으로 수렴한다.

5-1) $g(t)$에 $\cos t$를 곱하면 $\cos t\cdot g(t)=\cos^2 t\cdot f(t)-\cos t\sin t\cdot f'(t)$이고 $h(t)$에 $\sin t$를 곱하면 $\sin t\cdot h(t)=\sin^2 t\cdot f(t)-\sin t\cos t\cdot f'(t)$이다.

두 식을 더하면 $\cos t\cdot g(t)+\sin t\cdot h(t)=\cos^2 t\cdot f(t)+\sin^2 t\cdot f(t)=f(t)$가 된다.

5-2) $g(t)$와 $h(t)$를 모두 t에 대하여 미분해 보면

$$\begin{aligned} g'(t)&=-\sin t\cdot f(t)+\cos t\cdot f'(t)-\cos t\cdot f'(t)-\sin t\cdot f''(t)\\ &=-\sin t\cdot(f(t)+f''(t))=0\\ h'(t)&=\cos t\cdot f(t)+\sin t\cdot f'(t)-\sin t\cdot f'(t)+\cos t\cdot f''(t)\\ &=\cos t\cdot(f(t)+f''(t))=0 \end{aligned}$$

이 되므로 $g(t)$와 $h(t)$를 모두 상수함수이다.

$g(t)=C_1$, $h(t)=C_2$라 하면 $g(0)=f(0)=3$, $h(0)=f'(0)=2$에서 $C_1=3$, $C_2=2$이다. 5-1)에서 구한 $f(t)=\cos t\cdot g(t)+\sin t\cdot h(t)$에 이 결과를 대입하면 $f(t)=3\cos t+2\sin t$가 된다.

▶ 추가문제 : $x\geqq 0$에서 $f(x)=3f'(x)-6x+21$, $f(0)=4$, $f(x)\geqq 3$이라 할 때 $f(x)$를 구하라.