제 2 교시

수학 영역

by 심상범 in Orbi

5지선다형

1. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

$2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}} = 2^2 = \boxed{4}$

2. 함수 $f(x)$가

$$f'(x) = 3x^2 - 2x, \quad f(1) = 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\int f'(x)\,dx = x^3 - x^2 + C = f(x)$

$f(1) = 1 - 1 + C = 1$

$C = 1$

그러므로

$f(x) = x^3 - x^2 + 1$

$\boxed{f(2) = 8 - 4 + 1 = 5}$

3. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 인 θ에 대하여 $\tan\theta = \frac{12}{5}$ 일 때, $\sin\theta + \cos\theta$의 값은? [3점]

주어진 각은 제 3사분면에

$\cos\theta$와 $\sin\theta$의 비율이 5 : 12이다.

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ 0 ④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$

tan의 값을 준다는 것을 보고 주어진 각을 그려봐도 되고

다르게 보면 cos 과 sin 의 비율이 5 : 12 라는 것이다.

각이 같으므로 cos 과 sin 값을 제곱해서 더하면 1이 되어야 한다.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos\theta = 5k$

$\sin\theta = 12k$

5 : 12이므로

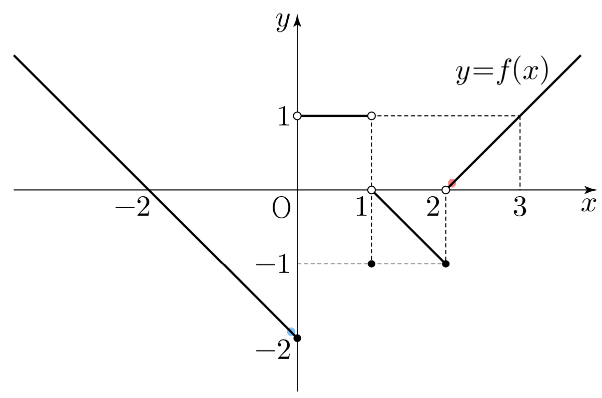
$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 25k^2 + 144k^2 = 1$ $k = \pm\frac{1}{13}$

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$이므로 $k = -\frac{1}{13}$이다.

$\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\sin\theta = -\frac{12}{13}$

$\boxed{\sin\theta + \cos\theta = -\frac{17}{13}}$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

-2 0

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2+3)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+3)f'(x)$

$g'(1)=2f(1)+4f'(1)$

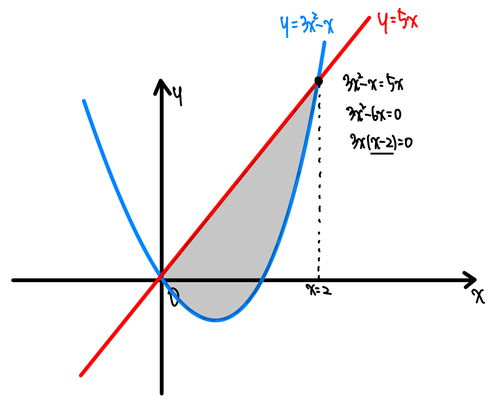
$=4+4=\boxed{8}$

6. 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

$y=x(3x-1)$

$x=0,\ \frac{1}{3}$에서 x축과 만남

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



$\int_0^2 5x-(3x^2-x)dx=\int_0^2 -3x^2+6x\,dx$

$=\left[-x^3+3x^2\right]_0^2$

$=-8+12=\boxed{4}$

7. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

공차만 알면 된다.

$$a_6=2(S_3-S_2)$$

$(a_1+a_2+a_3)-(a_1+a_2)=a_3$

일 때, S_{10}의 값은? [3점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

$a_6=2a_3$

$(2+5d)=2(2+2d)$

$2+5d=4+4d$

$d=2$

수열 a_n은 공차가 2이고 첫항은 2이다.

$a_n=2n$

$S_{10}=\frac{2+20}{2}\cdot 10=11\cdot 10=\boxed{110}$

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6 & (x<a) \\ 2x-a & (x \geq a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

써보자.

좌극한=우극한=함숫값

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$$\{f(x)\}^2=\begin{cases} (-2x+6)^2=4x^2-24x+36 & (x<a) \\ (2x-a)^2=4x^2-4ax+a^2 & (x \geq a) \end{cases}$$

$\lim_{x\to a^-}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a^-}4x^2-24x+36=4a^2-24a+36$

$\lim_{x\to a^+}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a^+}4x^2-4ax+a^2=4a^2-4a^2+a^2$

=함숫값

$4a^2-24a+36=a^2$

$3a^2-24a+36=0$

$3(a^2-8a+12)=0$

$3(a-6)(a-2)=0$

$a=6$ or $a=2$

$\boxed{6+2=8}$

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \frac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

홀수항→짝수항 : 역수

짝수항→홀수항 : 8배

이고 $a_{12}=\frac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

우리가 익히 아는 수열이 아니므로 천천히 '해보자'

$a_{12}=\frac{1}{2} \longrightarrow a_{11}=2 \longrightarrow a_{10}=\frac{1}{4} \longrightarrow a_9=4 \longrightarrow a_8=\frac{1}{2} \longrightarrow a_7=2$

4단계마다 반복

$a_{12}=a_8=a_4=\frac{1}{2}$

$a_1=a_5=a_9=4$

$\frac{1}{2}+4=\boxed{\frac{9}{2}}$

10. $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x, \quad y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

$\log_n x=-\log_n(x+3)+1$

$\log_n x+\log_n(x+3)=1$

$x(x+3)=n$

$1<x<2$이므로

$1\times4<n<2\times5$

$4<n<10$

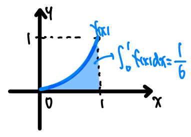
$n=5,6,7,8,9$

$\boxed{5+6+7+8+9=35}$

11. 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$$

가정



을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$ 의 값은? [4점]

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 1)\end{cases}$

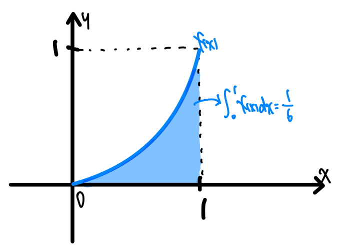
f(x)를 x축 대칭시키고 x축 방향으로 -1, y축 방향으로 1이동

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

g(x)의 주기가 2이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

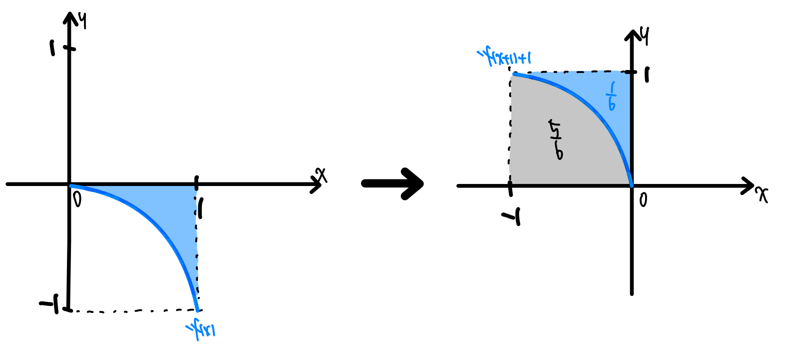
닫힌 구간 [0,1] 에서 연속인 함수 f(x) 에 대한 정보들을 종합하여 그래프를 가정해보자.



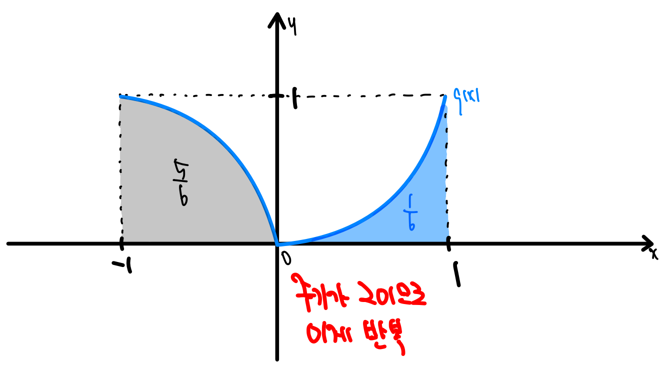
f(x) 로 이루어진 함수 g(x) 에서 -1< x <0 에서의 함수를 최대한 그래프에서 표현해보자.

g(x) = -f(x+1)+1

평행이동시키면 된다.



그렇다면 g(x) 의 그래프는 아래와 같다.



$$\int_{-3}^{2} g(x)dx=\int_{-3}^{-1} g(x)dx+\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{1}^{2} g(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{-1}^{0} g(x)dx$$

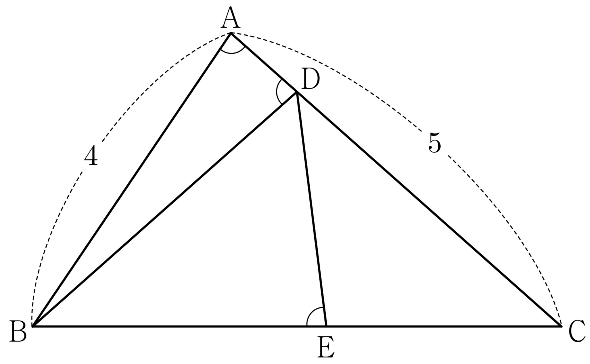
$$=1+1+\frac{5}{6}=\boxed{\frac{17}{6}}$$

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$\cos(\angle BDA)=\cos(\angle BED)=\frac{1}{8}$

$$\angle BAC=\angle BDA=\angle BED$$

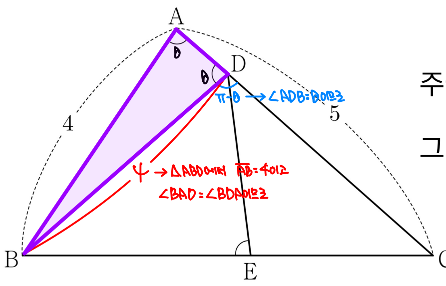
일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

주어진 도형 안에 있는 각 중 3개가 같고 이 각의 cos값을 주었으므로 이 각을 미지수로 잡고 문제를 시작해보자.

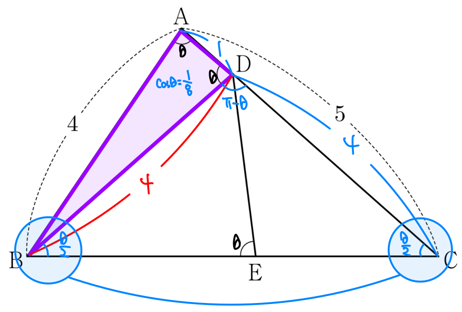
$\angle BAC=\angle BDA=\angle BED=\theta$라고 하자. $\rightarrow \cos\theta=\frac{1}{8}$



주어진 각을 미지수로 두면 변 BD가 4라는 것도 알 수 있다.

그렇다면 삼각형 ABD에서 cos법칙을 쓸 준비가 끝났다.

$\overline{AB}=\overline{BD}=4$이고 $\cos\theta=\frac{1}{8}$이므로 $\overline{AD}$를 구할 수 있다.



$\overline{BD}=\overline{DC}$ 이고 $\angle BDC=\pi-\theta$이므로

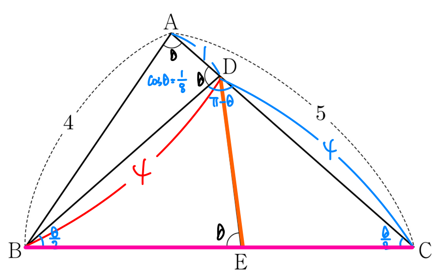
$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\cos\theta=\overline{BD}^2$$

$$16+\overline{AD}^2-8\cdot\overline{AD}\cdot\frac{1}{8}=16$$

$$\overline{AD}^2-\overline{AD}=0$$

$\overline{AD}=1$

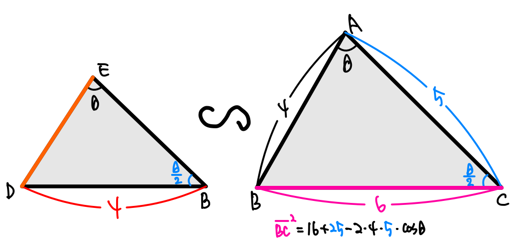
그렇다면 $\overline{DC}=5-1=4$이다.



주황색으로 표시한 변 DE의 길이를 알기 위해서는 그 변을 포함한 삼각형을 유심히 볼 필요가 있다.

우리가 구해놓은 것들을 모두 그려본 뒤 살펴보면 삼각형 ABC와 삼각형 EDB가 닮음이다.

AA닮음 : ∠DEB=∠BAC, ∠EBD=∠ACB



$\overline{BC}^2=16+25-2\cdot4\cdot5\cdot\cos\theta$

$=41-5=36$

$\overline{BC}=6$

닮음비가 4:6=2:3이므로

$$\boxed{\overline{DE}=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}}$$

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0, 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

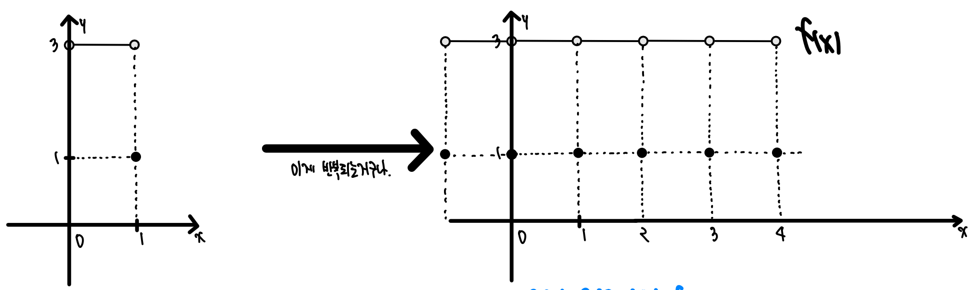
이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.

주기가 1인 함수

$\sum_{k=1}^{20} \frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$ 의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

구해야하는 것이 함숫값을 기반으로 한 수이므로 주어진 함수를 한 번 그려보도록 하자.



x가 정수라면 $f(x)=1$이고
x가 정수가 아니라면 $f(x)=3$이다.

함수의 그래프는 그렸고 이제는 수열에 대한 파악을 해야한다.

우리에게 익숙한 수열은 아니므로 천천히 해보자.

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}=\frac{1}{3}\{1\times f(1)+2\times f(\sqrt{2})+\cdots+20\times f(\sqrt{20})\}$$

$$=\frac{1}{3}\{f(1)+4f(\sqrt{4})+9f(\sqrt{9})+16f(\sqrt{16})\}+\frac{1}{3}\{2f(\sqrt{2})+3f(\sqrt{3})+\cdots+20f(\sqrt{20})\}$$

$$=\frac{1}{3}(1+4+9+16)+\frac{1}{3}(2\cdot 3+3\cdot 3+\cdots+20\cdot 3)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 30+(2+3+5+6+7+8+10+11+12+13+14+15+17+18+19+20)$$

$$=10+\left\{\frac{1+20}{2}\cdot 20-(1+4+9+16)\right\}$$

$$=10+(210-30)=\boxed{190}$$

14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

$g(x)=\cdots$의 형태로 만든자.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=\lvert xf(x-p)+qx\rvert$이다. (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

한 개만 나온다

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

문제에서 중심으로 잡는 것이 $g(x)$이므로 정리해보면 아래와 같다,.

$$g(x)=\frac{\lvert x\rvert\cdot\lvert f(x-p)+q\rvert}{x}$$

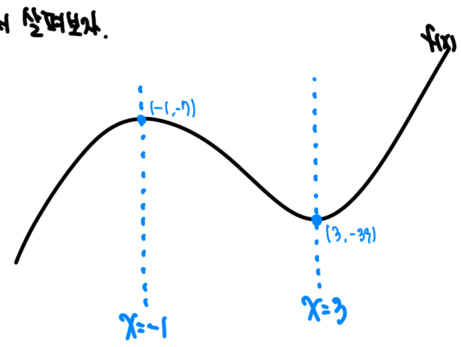
조건 (나)에 의하면 우리는 위의 식에서 미분가능하지 않은 점에 대해 생각해봐야한다.

식으로 보았을 때는 절댓값이 쳐져 있는 $f(x-p)+q$와 x가 0이 될 때를 눈여겨보자.

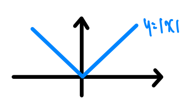
∘ $f(x-p)+q$

$f(x-p)+q$는 $f(x)$를 이동시킨 그래프이므로 $f(x)$를 먼저 살펴보자.

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)$$
$$=3(x+1)(x-3)$$



$g(x)$의 식에서 $\lvert x\rvert$은 x=0에서 미분불가능한 점을 하나 만들게 된다.



$f(x-p)+q$은 3차식이므로 실근을 1~3개를 가질 수 있다.

실근을 가지는 지점이 미분불가능한 점의 후보이므로 개수별로 경우의 수를 따져보자.

실근 1개: 실근이 x=0이 아니라면 미분불가능한 점이 2개라 X
x=0이 실근이라면 x=0에서 미분가능해지므로 미분불가능한 점이 0개->X

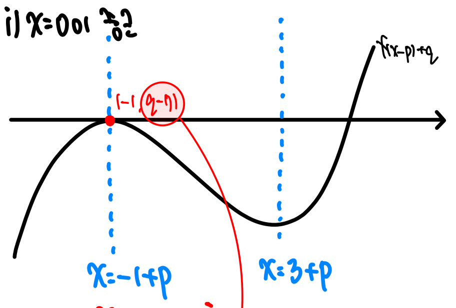
실근 2개: 실근이 모두 x=0이 아니라면 미분불가능한 점이 3개라 X
하나의 중근을 가진다.
실근 중 하나는 x=0이고 나머지는 아니라면 x=0에서는 미분가능해지므로->O

실근 3개: 실근이 모두 x=0이 아니라면 미분불가능한 점이 4개라 X
실근 중 x=0이 하나라면 x=0에서는 미분가능하고 미분불가능한 점이 3개->X

그렇다면 $f(x-p)+q=0$ 은 실근을 2개 가져야하고 x=0이 중근인지는 알 수 없다.

그래서 체크해보자.

i) $x=0$이 중근

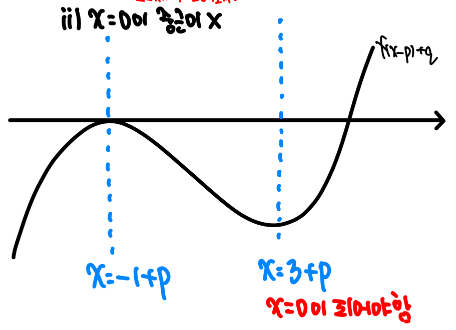


$x=0$이어야함

$p=1$ $q=7$

$\boxed{p+q=8}$

ii) $x=0$이 중근이 X



$x=0$이 되어야함

~~$p=-3$~~

p와 q는 양수이다.

15. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2} - t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2} - t\right) = 0$$

$\sin\frac{\pi x}{2} = t$ or $\cos\frac{\pi x}{2} = t$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t) + \beta(t) = 5$이다.

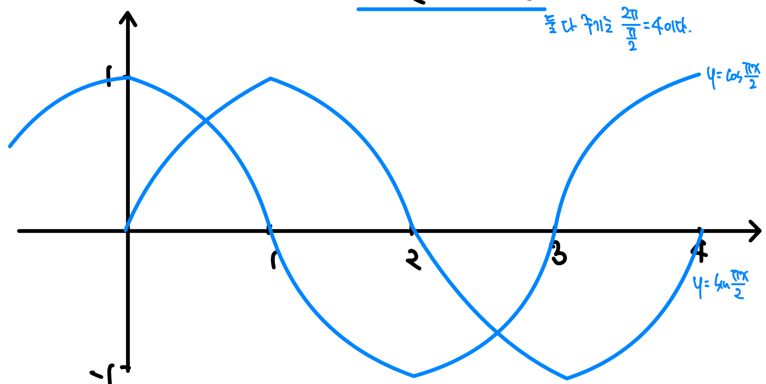
ㄴ. $\{t \mid \beta(t) - \alpha(t) = \beta(0) - \alpha(0)\} = \left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2 = \frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

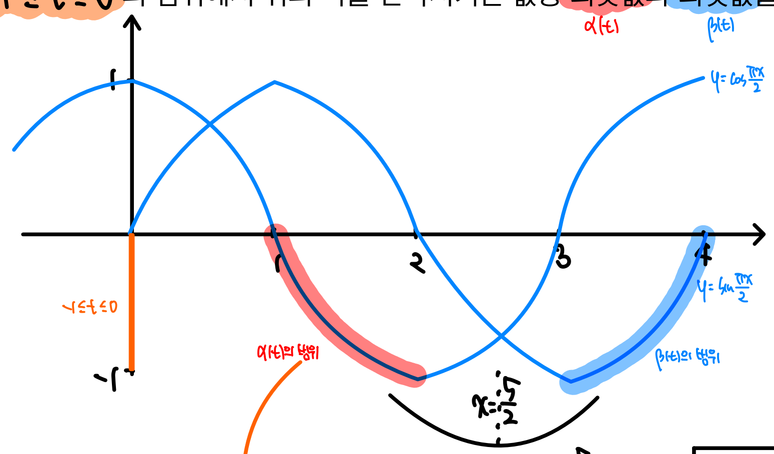
문제의 식에서 가장 중요한 것은 $\sin\frac{\pi x}{2}$, $\cos\frac{\pi x}{2}$ 으로 보이므로 그래프를 그려보자.

둘 다 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$이다.



ㄱ. $-1 \le t \le 0$ 의 범위에서 위의 식을 만족시키는 값중 최솟값과 최댓값을 그래프에서 보자.

$\alpha(t)$ $\beta(t)$

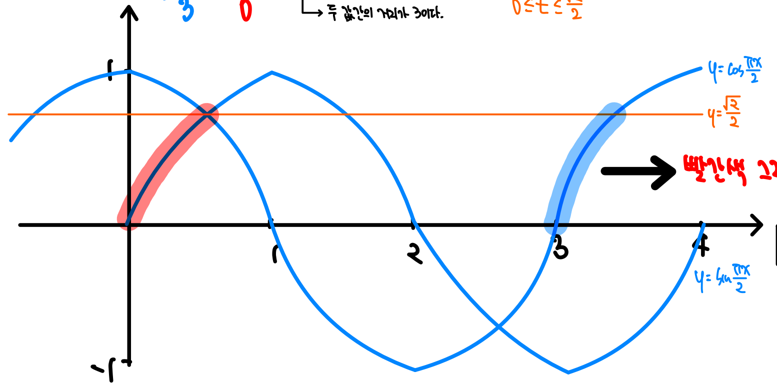


$\alpha(t)$와 $\beta(t)$는 $x=\frac{5}{2}$ 대칭이므로 $\boxed{\alpha(t)+\beta(t)=5\ (O)}$

ㄴ. $\beta(t) - \alpha(t) = \underset{3}{\underline{\beta(0)}} - \underset{0}{\underline{\alpha(0)}} = 3$를 만족시키는 t 의 범위에 대한 질문이다.

→ 두 값간의 거리가 3이다.

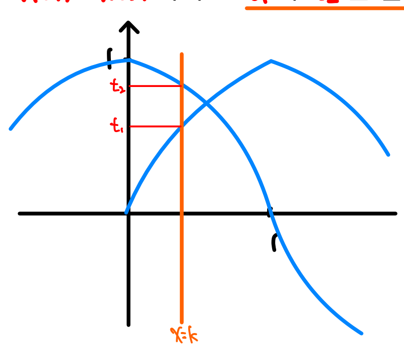
$0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$



→ 빨간색 그래프와 파란색 그래프의 개형이 같고 $\boxed{\text{거리가 3이므로 맞다(O)}}$

ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ 이려면 t_1 과 t_2 는 같은 x좌표를 가져야 한다.

$x=k$라고 하자.



$t_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot k\right)$ $t_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot k\right)$

$t_2 - t_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot k\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot k\right) = \frac{1}{2}$ 가정

$t_1 \cdot t_2 = \frac{t_1^2 + t_2^2 - (t_1 - t_2)^2}{2} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{2} = \boxed{\frac{3}{8}\ (X)}$

단답형

16. $\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24$의 값을 구하시오. [3점]

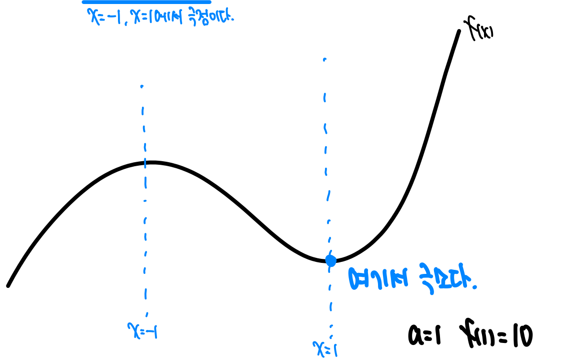
$\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24 = \log_4 16 = \boxed{2}$

17. 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 12$가 $x = a$에서 극소일 때, $a + f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

$f'(a)=0$이고 도함수가 음→양

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

$x=-1$, $x=1$에서 극점이다.



여기서 극소다.

$a=1$ $f(1)=10$

$\boxed{a+f(a)=1+10=11}$

18. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

공비가 양수네

$$a_2 = 36, \quad a_7 = \frac{1}{3}a_5$$

2단계를 거치면 $\frac{1}{3}$이 된다. → 공비가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이네

일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

$$a_6 = a_2 \cdot r^4 = a_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 36 \times \frac{1}{9} = \boxed{4}$$

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

위치는 속도를 적분

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

위치는 속도를 적분하면 된다.

$$\int v(t)\,dt = t^3 - 2t^2 + kt + C = x(t)$$

$x(0) = C = 0$

$x(1) = 1 - 2 + k = -3$

$k = -2$

$x(t) = t^3 - 2t^2 - 2t$

$t=1 \sim t=3$에서는 운동 방향의 변화가 없으므로

$x(3) - x(1) = (27 - 18 - 6) - (1 - 2 - 2)$

$= 3 + 3 = \boxed{6}$

20. 실수 a와 함수 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 3$에 대하여 함수

$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^4\,dt$$

t에 대한 적분인데 x가 같이 있으니 분리해주자.

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

도함수를 구해서 보자.

$$g(x) = \int_a^x f(x) \cdot \{f(t)\}^4\,dt - \int_a^x f(t)\{f(t)\}^4\,dt$$

$$= f(x)\int_a^x \{f(t)\}^4\,dt - \int_a^x \{f(t)\}^5\,dt$$

$$g'(x) = f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4\,dt + \cancel{f(x)\cdot\{f(x)\}^4} - \cancel{\{f(x)\}^5}$$

$$= f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4\,dt$$

무조건 양수다. → $x=a$에서만 부호변화 O

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45$

$= 3(x^2 - 8x + 15)$

$= 3(x-3)(x-5)$

$x=3$, $x=5$에서 부호변화 O

$a=3$ or $a=5$ 이어야 $g'(x)$의 부호변화가 1번

$\boxed{3+5=8}$

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$로 볼 수 있다.

(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.

근 4개 중에 2개씩 중복

(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

조건 (가)에서 주어진 새로운 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면서 각각 중근이라면 실근이 2개씩 겹쳐야 하므로 모든 실근의 개수는 짝수여야 한다.

n 이 홀수라면 $x^n-64=0$ 에서 생기는 근의 개수가 1개이다.

그렇다면 $f(x)$이 이차식이므로 $(x^n-64)f(x)=0$ 의 모든 실근의 개수는 홀수가 된다.

실근이 최대 2개이다.

그렇다면 n 이 짝수가 될때도 체크해보자.

$\underbrace{(x^n-64)}_{\text{n이 짝수라면 여기서 근 2개}}\underbrace{f(x)}_{\text{이차식이므로 최대 2개}}=0 \longrightarrow$ 가능

위의 조건을 모두 만족시키기 위해서는 $f(x)=(x-\sqrt[n]{64})(x+\sqrt[n]{64})$이 되어야 한다.

그렇다면 x=0일때 f(x)가 최소이고 $f(0)=-64^{\frac{2}{n}}=-2^{\frac{12}{n}}$이다.

그렇다면 n 은 12의 약수 중 짝수가 되어야 한다.

$n=\cancel{1},2,\cancel{3},4,6,12$

$\boxed{2+4+6+12=24}$

22. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

최고차항의 계수에 대한 언급 x

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

실근 1개 + 중근 1(α, β로 두자)

(나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$x-f(x)=\alpha$ or β

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

조건 (가)에서 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2개라는 것은

3차식인 $f(x)$ 와 x=0의 교점이 두 개라는 것이므로 하나의 교점과 하나의 접점을 가질 것이다.

α와 β라고 하자.

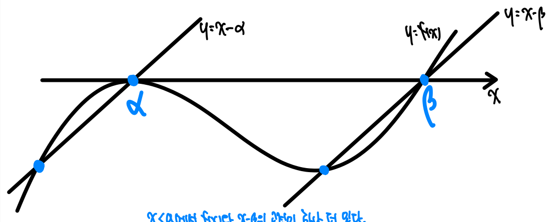
조건 (나)에서 $f(x-f(x))=0$ 을 만족시키려면 $x-f(x)=\alpha$ or β를 만족시켜야 한다.

식을 다시 정리하면 $f(x)=x-\alpha$ or $f(x)=x-\beta$ 을 만족시켜야 한다.

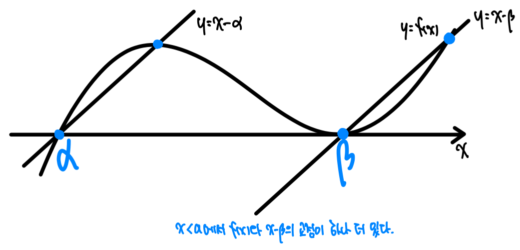
이를 확인하기 위해서는 그래프 간의 교점으로 체크해볼 필요가 있다.

최고차항의 계수의 부호에 대한 언급이 없으므로 경우의 수를 모두 생각해보자.

i) 최고차항의 계수가 양수

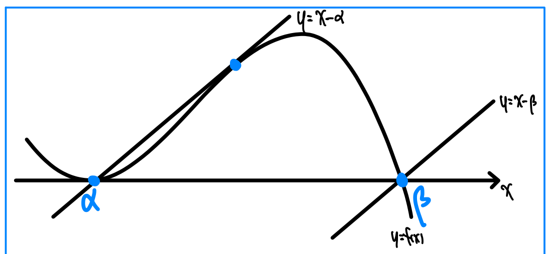


서로 다른 실근의 개수가 5개



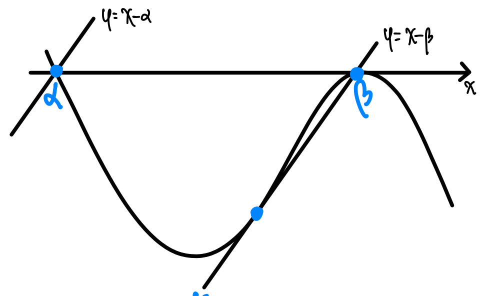
서로 다른 실근의 개수가 5개

ii) 최고차항의 계수가 음수



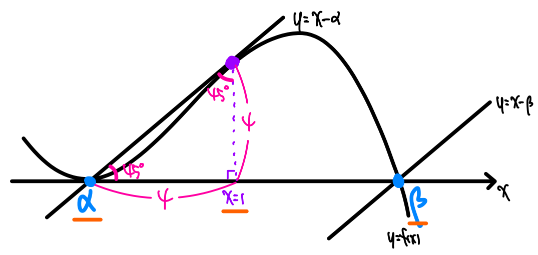
서로 다른 실근의 개수가 3개

이게 맞다.



서로 다른 실근의 개수가 3개

그러나 $f(1)=4$와 $f'(1)=1$을 동시에 만족시킬 수 없다.



① $f'(1)=1$이므로 $y=x-\alpha$와 $y=f(x)$의 접점의 좌표가 (1, 4)이다.

② $y=x-\alpha$와 $y=f(x)$의 교점에서 $y=x-\alpha$와 x축이 이루는 각이 45°이므로 $\alpha=1-4=-3$이다.

③ 3차함수와 일차함수의 교점의 x좌표들의 합은 일정하므로 $-3+1+1=-3+(-3)+\beta$ $\beta=5$

$f(x)=k(x+3)^2(x-5)$

$f(1)=k\cdot16\cdot-4=4$

$k=-\frac{1}{16}$

$f(x)=-\frac{1}{16}(x+3)^2(x-5)$

$f(0)=-\frac{1}{16}\cdot 9^2\cdot -5=\frac{45}{16}$

$\boxed{p+q=61}$

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(k+3,\ 3k-1)$과 $\vec{b}=(1,\ 1)$이 서로 평행할 때, 실수 k의 값은? [2점]

서로 실수배이다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\frac{k+3}{1}=\frac{3k-1}{1}$

$2k=4$

$\boxed{k=2}$

24. 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(2,\ \sqrt{2})$에서의 접선의 x절편은? [3점]

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

$\frac{2x}{8}+\frac{\sqrt{2}y}{4}=1$

$\frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{4}y=1$

$\sqrt{2}y=-x+4$

$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2\sqrt{2}$

$\boxed{x\text{절편}=4}$

25. 좌표평면 위의 두 점 A(1, 2), B(−3, 5)에 대하여

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$$

$=\overrightarrow{\mathrm{AP}}$로 바꿀수 있다.

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는?

점P의 자취를 찾아라.

(단, O는 원점이다.) [3점]

① 10π ② 12π ③ 14π ④ 16π ⑤ 18π

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$

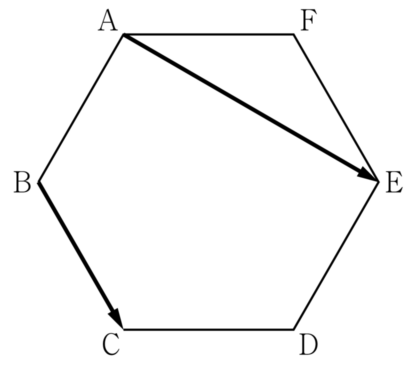
$=\sqrt{4^2+3^2}$

$=5$

→ 길이가 고정되었으므로 점 A를 중심으로 하고 반지름이 5인 원이다.

$\boxed{\text{원의 둘레} = 2\times5\times\pi = 10\pi}$

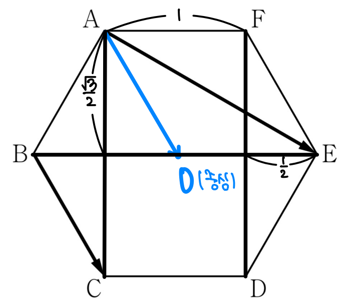
26. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 $|\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$의 값은? [3점]



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{AO}}$

평행이동하여 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}$이다.



A를 원점이라고 생각하고 각각의 벡터를 정의해보면

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

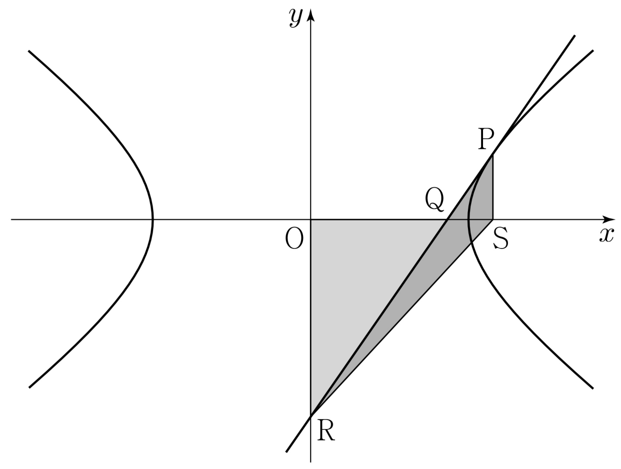
$\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{AO}}=(2,-\sqrt{3})$

$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{AO}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$

$=\boxed{\sqrt{7}}$

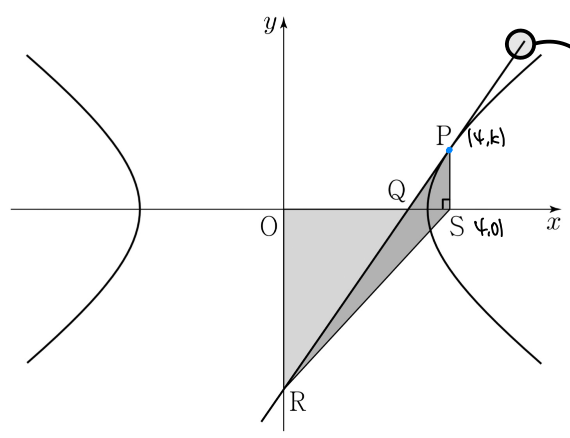
27. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ k)\ (k>0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, y축과 만나는 점을 R라 하자. 점 $\mathrm{S}(4,\ 0)$에 대하여 삼각형 QOR의 넓이를 A_1, 삼각형 PRS의 넓이를 A_2라 하자. $A_1 : A_2 = 9 : 4$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, O는 원점이고, a와 b는 상수이다.) [3점]

이게 중요한 듯



① $2\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{14}$

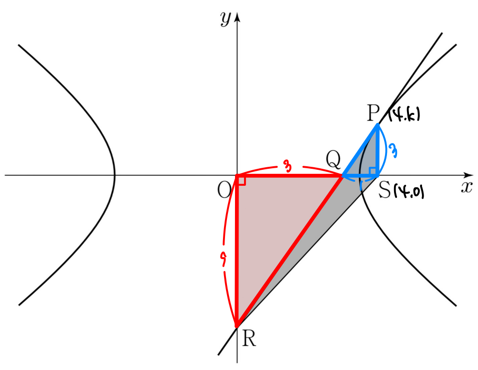
쌍곡선의 접선이 주어져있으므로 접선의 방정식부터 써보자.



(4,k)에서 접하므로 $\frac{4x}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=1$

다시 그래프를 살펴보면 △OQR과 △SQP가 닮음이다.

두 삼각형의 닮음비를 t : 1 이라고 가정해보자.



쌍곡선의 방정식이 (3 , 0)을 지나므로

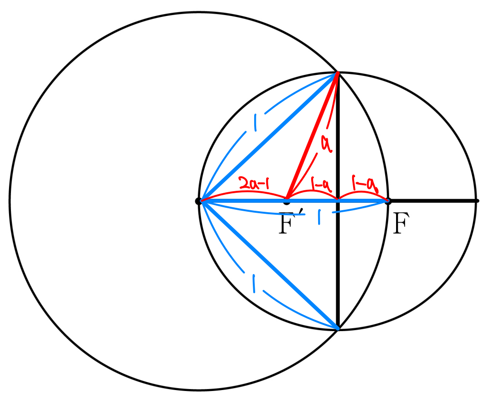
$\frac{12}{a^2}=1$

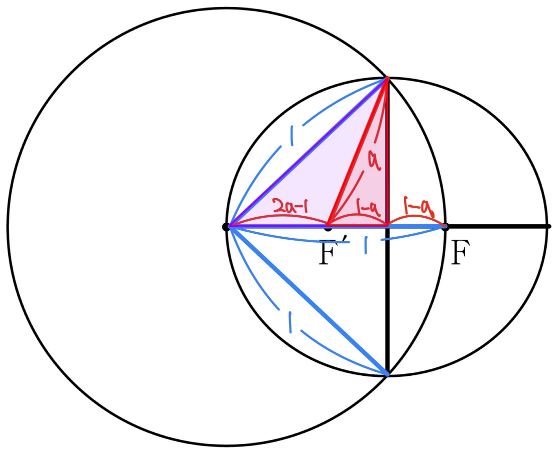
$a=2\sqrt{3}$

$\boxed{주축=2a=4\sqrt{3}}$

28. 두 초점이 F, F′이고 장축의 길이가 $2a$인 타원이 있다. 이 타원의 한 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 이 타원의 서로 다른 두 꼭짓점과 한 초점을 지날 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$ ③ $\sqrt{3}-1$ ④ $2\sqrt{2}-2$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$





보라색 삼각형과 빨간색 사각형에서

$1-a^2=a^2-(a-1)^2$

$1-a^2=2a-1$

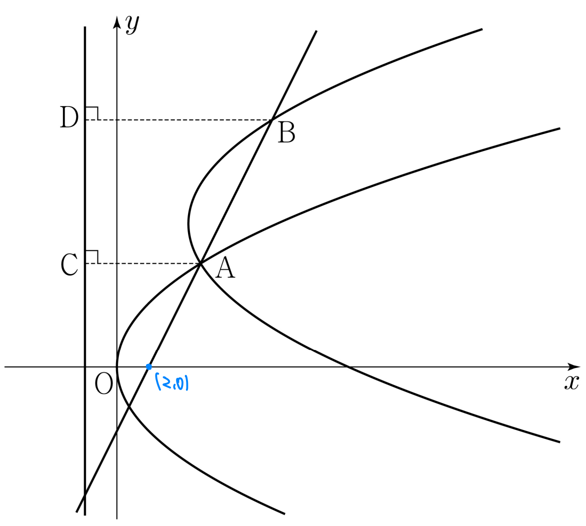
$a^2+2a-2=0$

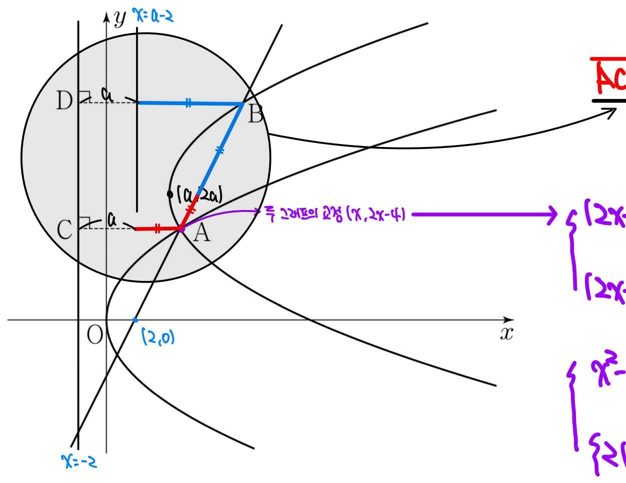
$\boxed{a=\sqrt{3}-1}$

단답형

29. 포물선 $y^2=8x$ 와 직선 $y=2x-4$ 가 만나는 점 중 제1사분면 위에 있는 점을 A라 하자. 양수 a 에 대하여 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$ 가 점 A를 지날 때, 직선 $y=2x-4$ 와 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$ 가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 직선 $x=-2$ 에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, $\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=k$ 이다. k^2 의 값을 구하시오. [4점]

$p=2$ (2,0)을 지난다.





$\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=2a$

$\begin{cases}(2x-4)^2=8x\\(2x-4-2a)^2=8(x-a)\end{cases}$

$\begin{cases}x^2-4x+4=2x \longrightarrow x^2-6x+4=0\\\{2(x-a)-4\}^2=8(x-a)\end{cases}$

두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=4$

$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=2\sqrt{5}$

$\beta-\alpha=a=2\sqrt{5}$

$\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=2a=4\sqrt{5}=k$

$\boxed{k^2=80}$

30. 좌표평면 위의 네 점 A$(2, 0)$, B$(0, 2)$, C$(-2, 0)$, D$(0, -2)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 네 변 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

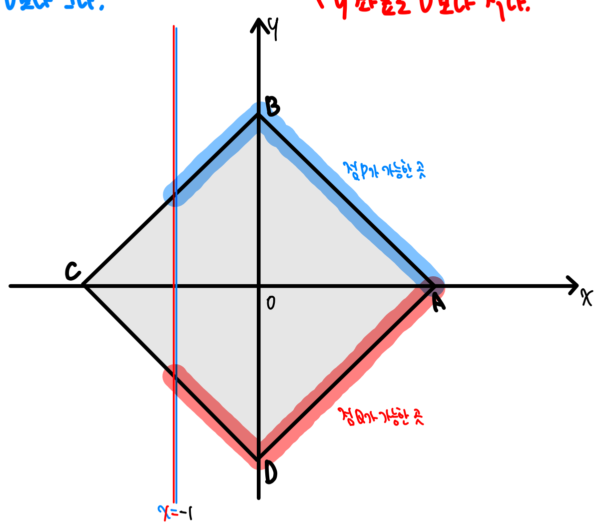
> (가) $(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AD})=0$ $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ 또는 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ → $\overrightarrow{PQ}$의 기울기는 1 또는 −1
> (나) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP} \geq -2$이고 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP} \geq 0$이다.
> P의 x좌표가 −1보다 커야한다. B의 y좌표가 0보다 크다.
> (다) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ} \geq -2$이고 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ} \leq 0$이다.
> Q의 x좌표가 −1보다 크다. Q의 y좌표가 0보다 작다.

점 R$(4, 4)$에 대하여 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

조건 (가), (나), (다)에서 점 P와 점 Q의 좌표에 대한 힌트를 주니 정보를 추합하여 점의 위치의 후보들을 추려보자.

P (x좌표는 −1보다 크다. / y좌표는 0보다 크다.

Q (x좌표는 −1보다 크다. / y좌표는 0보다 작다.



점 P의 가능한 x좌표의 경우의 수로 나눠보자.

점P의 y좌표도 알 수 있다 → 점Q의 좌표도 알 수 있다.

a라고 하자

i) $-1\leq a<0$

점P는 $y=x+2$ 위에 있으므로 $P(a, a+2)$이다.

점Q는 점P와 같이 $y=-x$ 위에 있어야하므로 $Q(a+2, a)$이다.

ii) $0\leq a<1$

점P는 $y=-x+2$ 위에 있으므로 $P(a, -a+2)$이다.

점Q는 점P와 같이 $y=-x$ 위에 있어야하므로 $Q(2, 0)$이다.

iii) $1\leq a\leq 2$

점P는 $y=-x+2$ 위에 있으므로 $P(a, -a+2)$이다.

점Q는 점P와 같이 $y=x$ 또는 $y=-x$ 위에 있어야하므로 $Q(a-2, -a)$ 또는 $Q(2, 0)$이다.

$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=\begin{cases}\text{i) } 2(a-2)(a-4)\\\text{ii) } 2a+16 \longrightarrow a=0\text{일때 } m=16\\\text{iii) } \begin{cases}2a^2-4a+32\\2a+16 \longrightarrow a=2\text{일때 } M=32\end{cases}\end{cases}$

$\boxed{32+16=48}$

> ＊ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.