제 2 교시

수학 영역

by 심상범 in Orbi

5지선다형

1. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

$2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}} = 2^2 = \boxed{4}$

2. 함수 $f(x)$가

$$f'(x) = 3x^2 - 2x, \quad f(1) = 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\int f'(x)dx = x^3 - x^2 + C = f(x)$

$f(1) = 1 - 1 + C = 1$

$C = 1$

그러므로

$f(x) = x^3 - x^2 + 1$

$\boxed{f(2) = 8 - 4 + 1 = 5}$

3. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta = \frac{12}{5}$일 때, $\sin\theta + \cos\theta$의 값은? [3점]

주어진 각은 제 3사분면에

$\cos\theta$와 $\sin\theta$의 비율이 5 : 12이다.

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ 0 ④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$

tan의 값을 준다는 것을 보고 주어진 각을 그려봐도 되고

다르게 보면 cos 과 sin 의 비율이 5 : 12 라는 것이다.

각이 같으므로 cos 과 sin 값을 제곱해서 더하면 1이 되어야 한다.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos\theta = 5k$

$\sin\theta = 12k$

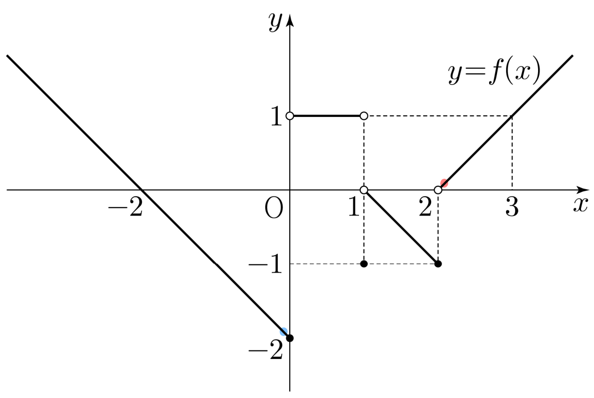
5 : 12이므로

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 25k^2 + 144k^2 = 1$ $k = \pm\frac{1}{13}$

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$이므로 $k = -\frac{1}{13}$이다.

$\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\sin\theta = -\frac{12}{13}$ $\boxed{\sin\theta + \cos\theta = -\frac{17}{13}}$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

−2 0

① −2 ② −1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\left(x^2+3\right)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+3)f'(x)$

$g'(1)=2f(1)+4f'(1)$

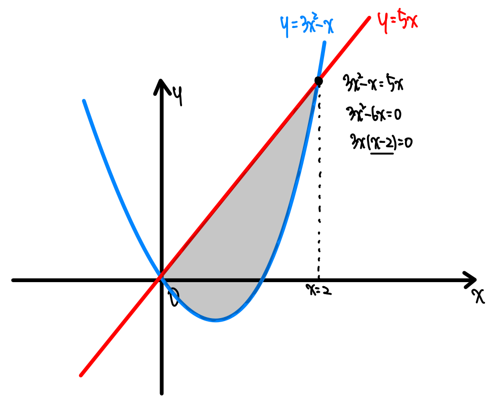
$=4+4=\boxed{8}$

6. 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

$y=x(3x-1)$

$x=0,\ \frac{1}{3}$에서 x축과 만남

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



$\int_0^2 5x-(3x^2-x)\,dx=\int_0^2 -3x^2+6x\,dx$

$=\left[-x^3+3x^2\right]_0^2$

$=-8+12=\boxed{4}$

7. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

공차만 알면 된다.

$$a_6=2\left(S_3-S_2\right)$$

$(a_1+a_2+a_3)-(a_1+a_2)=a_3$

일 때, S_{10}의 값은? [3점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

$a_6=2a_3$

$(2+5d)=2(2+2d)$

$2+5d=4+4d$

$d=2$

수열 a_n은 공차가 2이고 첫항은 2이다.

$a_n=2n$

$S_{10}=\frac{2+20}{2}\cdot 10=11\cdot 10=\boxed{110}$

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6 & (x<a) \\ 2x-a & (x\geq a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

써보자.

좌극한 = 우극한 = 함숫값

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$$\{f(x)\}^2 = \begin{cases} (-2x+6)^2 = 4x^2-24x+36 & (x<a) \\ (2x-a)^2 = 4x^2-4ax+a^2 & (x\geq a) \end{cases}$$

$\lim_{x\to a^-}\{f(x)\}^2 = \lim_{x\to a^-} 4x^2-24x+36 = 4a^2-24a+36$

$\lim_{x\to a^+}\{f(x)\}^2 = \lim_{x\to a^+} 4x^2-4ax+a^2 = 4a^2-4a^2+a^2$

= 함숫값

$4a^2-24a+36=a^2$

$3a^2-24a+36=0$

$3(a^2-8a+12)=0$

$3(a-6)(a-2)=0$

$a=6$ or $a=2$

$\boxed{6+2=8}$

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \frac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

홀수항 → 짝수항 : 역수

짝수항 → 홀수항 : 8배

이고 $a_{12}=\frac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

우리가 익히 아는 수열이 아니므로 천천히 '해보자'

$a_{12}=\frac{1}{2} \longrightarrow a_{11}=2 \longrightarrow a_{10}=\frac{1}{4} \longrightarrow a_9=4$

4단계마다 반복

$\longrightarrow a_8=\frac{1}{2} \longrightarrow a_7=2$

$a_{12}=a_8=a_4=\frac{1}{2}$

$a_1=a_5=a_9=4$

$\frac{1}{2}+4=\boxed{\frac{9}{2}}$

10. $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x, \quad y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

$\log_n x = -\log_n(x+3)+1$

$\log_n x+\log_n(x+3)=1$

$x(x+3)=n$

$1<x<2$이므로

$1\times 4<n<2\times 5$

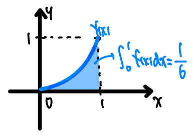
$4<n<10$

$n=5,6,7,8,9$

$\boxed{5+6+7+8+9=35}$

11. 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$$ 가정



을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $\displaystyle\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$ 의 값은? [4점]

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 1)\end{cases}$

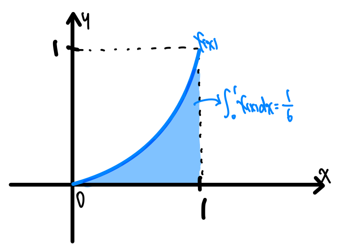
$f(x)$를 x축 대칭시키고 x축 방향으로 -1, y축 방향으로 1 이동

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $g(x+2)=g(x)$ 이다.

$g(x)$의 주기가 2이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

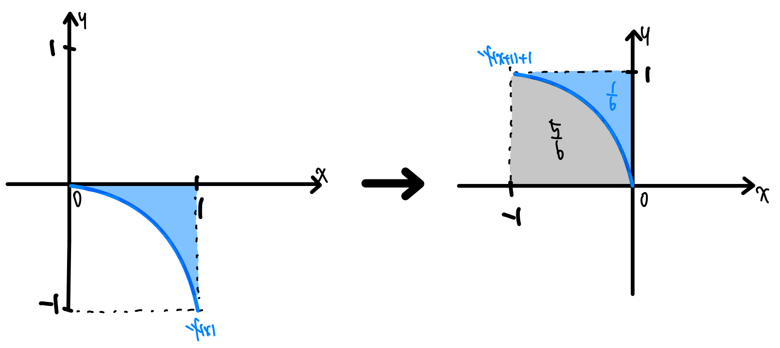
닫힌 구간 [0,1] 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대한 정보들을 종합하여 그래프를 가정해보자.



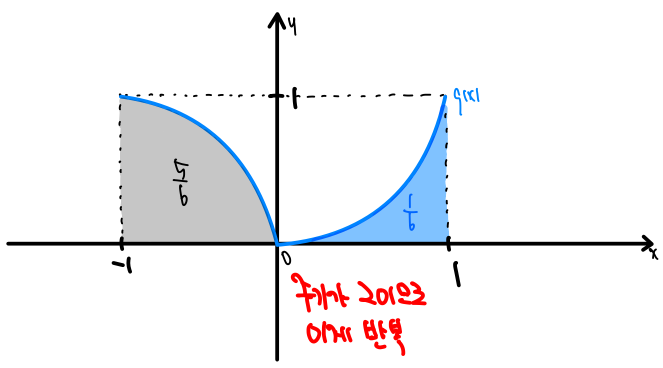
$f(x)$ 로 이루어진 함수 $g(x)$ 에서 -1< x <0 에서의 함수를 최대한 그래프에서 표현해보자.

$g(x)=-f(x+1)+1$

평행이동시키면 된다.



그렇다면 $g(x)$ 의 그래프는 아래와 같다.



$$\int_{-3}^{2} g(x)dx=\int_{-3}^{-1} g(x)dx+\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{1}^{2} g(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{-1}^{0} g(x)dx$$

$$=1+1+\frac{5}{6}=\boxed{\frac{17}{6}}$$

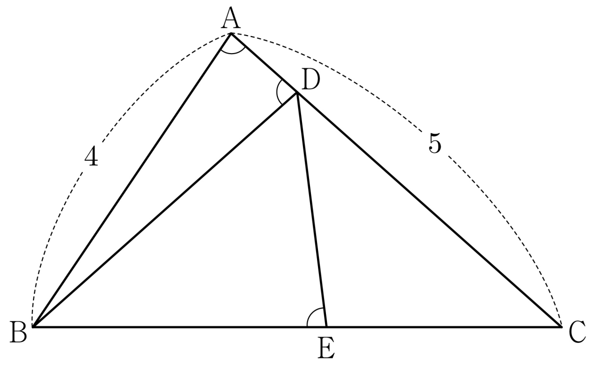
12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$ 이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$ 인

$\cos(\angle BDA)=\cos(\angle BED)=\frac{1}{8}$

삼각형 ABC 가 있다. 선분 AC 위의 점 D 와 선분 BC 위의 점 E 에 대하여

$$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$$

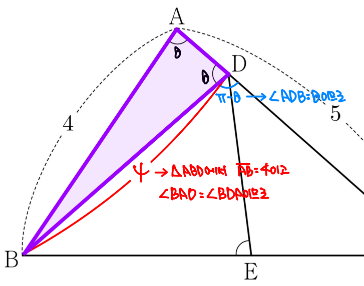
일 때, 선분 DE 의 길이는? [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

주어진 도형 안에 있는 각 중 3개가 같고 이 각의 cos값을 주었으므로 이 각을 미지수로 잡고 문제를 시작해보자.

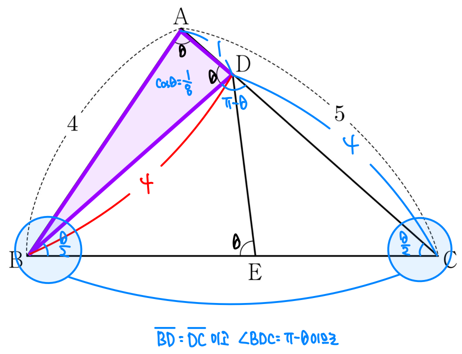
$\angle BAC=\angle BDA=\angle BED=\theta$ 라고 하자. $\rightarrow \cos\theta=\frac{1}{8}$



주어진 각을 미지수로 두면 변 BD가 4라는 것도 알 수 있다.

그렇다면 삼각형 ABD에서 cos법칙을 쓸 준비가 끝났다.

$\overline{AB}=\overline{BD}=4$ 이고 $\cos\theta=\frac{1}{8}$이므로 $\overline{AD}$를 구할 수 있다.



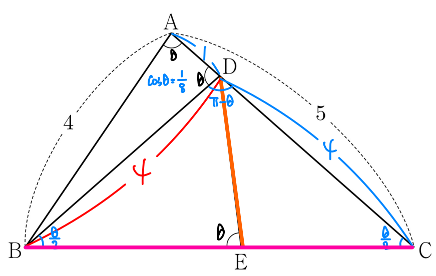
$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\cos\theta=\overline{BD}^2$$

$$16+\overline{AD}^2-8\cdot\overline{AD}\cdot\frac{1}{8}=16$$

$$\overline{AD}^2-\overline{AD}=0$$

$\overline{AD}=1$

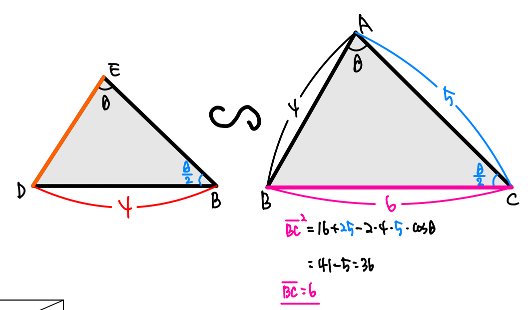
그렇다면 $\overline{DC}=5-1=4$이다.



주황색으로 표시한 변 DE의 길이를 알기 위해서는 그 변을 포함한 삼각형을 유심히 볼 필요가 있다.

우리가 구해놓은 것들을 모두 그려본 뒤 살펴보면 삼각형 ABC와 삼각형 EDB가 닮음이다.

AA닮음 : ∠DEB=∠BAC, ∠EBD=∠ACB



닮음비가 4:6=2:3이므로

$$\boxed{\overline{DE}=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}}$$

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0, 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

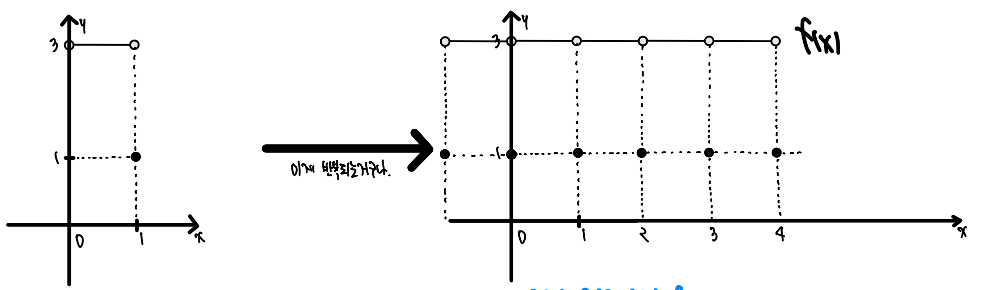
이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.

주기가 1인 함수다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

구해야하는 것이 함숫값을 기반으로 한 수이므로 주어진 함수를 한 번 그려보도록 하자.



x가 정수라면 f(x)=1이고
x가 정수가 아니라면 f(x)=3이다.

함수의 그래프는 그렸고 이제는 수열에 대한 파악을 해야한다.

우리에게 익숙한 수열은 아니므로 천천히 해보자.

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}=\frac{1}{3}\{1\times f(1)+2\times f(\sqrt{2})+\cdots+20\times f(\sqrt{20})\}$$

$$=\frac{1}{3}\{f(1)+4f(\sqrt{4})+9f(\sqrt{9})+16f(\sqrt{16})\}+\frac{1}{3}\{2f(\sqrt{2})+3f(\sqrt{3})+\cdots+20f(\sqrt{20})\}$$

$$=\frac{1}{3}(1+4+9+16)+\frac{1}{3}(2\cdot3+3\cdot3+\cdots+20\cdot3)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot30+(2+3+5+6+7+8+10+11+12+13+14+15+17+18+19+20)$$

$$=10+\left\{\frac{1+20}{2}\cdot20-(1+4+9+16)\right\}$$

$$=10+(210-30)=\boxed{190}$$

14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

$g(x)=\cdots$의 형태로 만들자.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

한 개만 나오도록

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

문제에서 중심으로 잡는 것이 $g(x)$이므로 정리해보면 아래와 같다..

$$g(x)=\frac{|x|\cdot|f(x-p)+q|}{x}$$

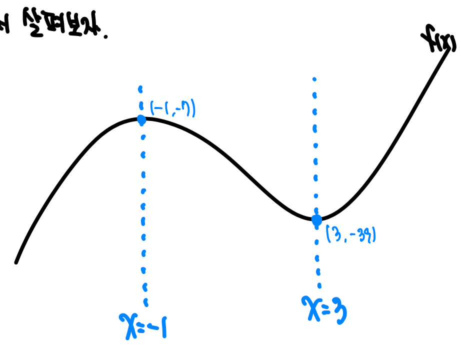
조건 (나)에 의하면 우리는 위의 식에서 미분가능하지 않은 점에 대해 생각해봐야한다.

식으로 보았을 때는 절댓값이 쳐져 있는 $f(x-p)+q$와 x가 0이 될 때를 눈여겨보자.

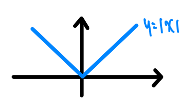
∘ $f(x-p)+q$

$f(x-p)+q$는 $f(x)$를 이동시킨 그래프이므로 $f(x)$를 먼저 살펴보자.

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)$$
$$=3(x+1)(x-3)$$



$g(x)$의 식에서 $|x|$은 x=0에서 미분불가능한 점을 하나 만들게 된다.



$f(x-p)+q$은 3차식이므로 실근을 1~3개를 가질 수 있다.

실근을 가지는 지점이 미분불가능한 점의 후보이므로 개수별로 경우의 수를 따져보자.

실근 1개: 실근이 x=0이 아니라면 미분불가능한 점이 2개라 X
x=0이 실근이라면 x=0에서 미분가능해지므로 미분불가능한 점이 0개->X

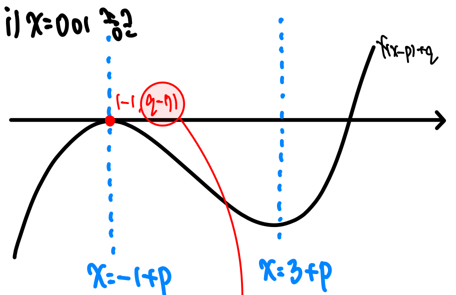
실근 2개: 실근이 모두 x=0이 아니라면 미분불가능한 점이 3개라 X
하나의 중근을 가진다.
실근 중 하나는 x=0이고 나머지는 아니라면 x=0에서는 미분가능해지므로->O

실근 3개: 실근이 모두 x=0이 아니라면 미분불가능한 점이 4개라 X
실근 중 x=0이 하나라면 x=0에서는 미분가능하고 미분불가능한 점이 3개->X

그렇다면 $f(x-p)+q=0$은 실근을 2개 가져야하고 x=0이 중근인지는 알 수 없다.

그래서 체크해보자.

i) $x=0$이 중근

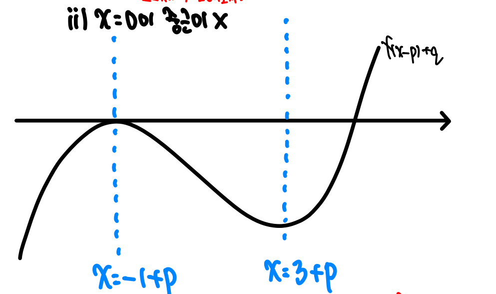


$x=0$이어야함

$p=1$ $q=7$

$\boxed{p+q=8}$

ii) $x=0$이 중근이 X



$x=0$이 되어야함

~~$p=-3$~~

p와 q는 양수이다.

15. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2} - t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2} - t\right) = 0$$

$\sin\frac{\pi x}{2} = t$ or $\cos\frac{\pi x}{2} = t$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t) + \beta(t) = 5$이다.

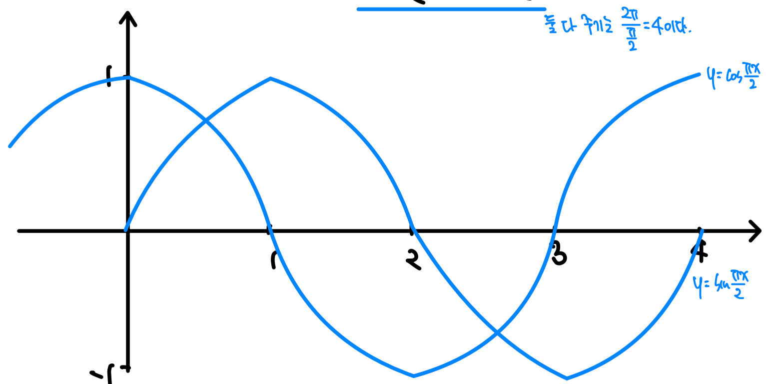
ㄴ. $\{t \mid \beta(t) - \alpha(t) = \beta(0) - \alpha(0)\} = \left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2 = \frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

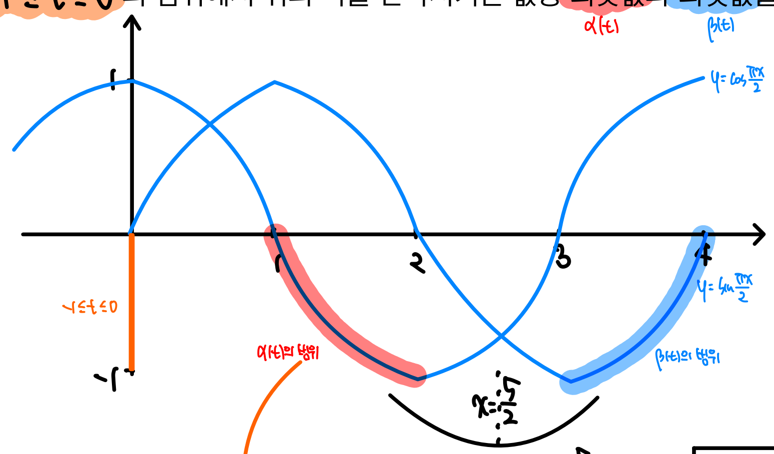
문제의 식에서 가장 중요한 것은 $\sin\frac{\pi x}{2}$, $\cos\frac{\pi x}{2}$ 으로 보이므로 그래프를 그려보자.

둘 다 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$이다.



ㄱ. $-1 \le t \le 0$ 의 범위에서 위의 식을 만족시키는 값중 최솟값과 최댓값을 그래프에서 보자.

$\alpha(t)$ $\beta(t)$

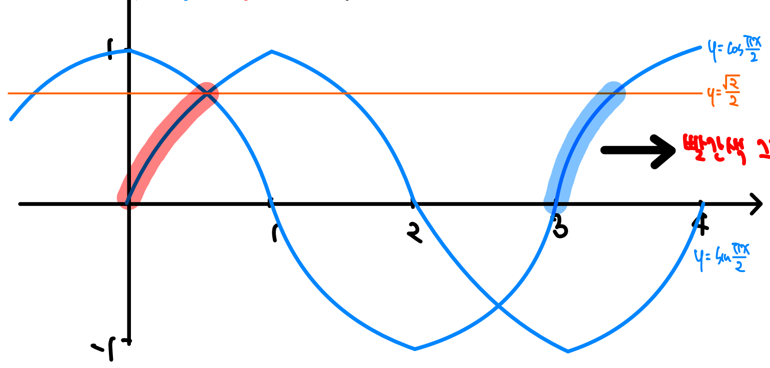


$\alpha(t)$와 $\beta(t)$는 $x=\frac{5}{2}$ 대칭이므로 $\boxed{\alpha(t)+\beta(t)=5\ (O)}$

ㄴ. $\underset{3}{\beta(t)} - \underset{0}{\alpha(t)} = \beta(0) - \alpha(0) = ③$를 만족시키는 t 의 범위에 대한 질문이다.

→ 두 값간의 거리가 3이다.

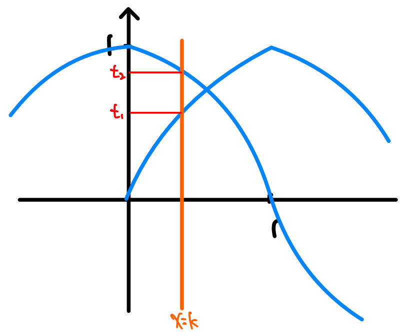
$0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$



→ 빨간색 그래프와 파란색 그래프의 개형이 같고 $\boxed{\text{거리가 3이므로 맞다(O)}}$

ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ 이려면 t_1 과 t_2 는 같은 x좌표를 가져야 한다.

$x=k$라고 하자.



$t_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right)$ $t_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right)$

$t_2 - t_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right) = \frac{1}{2}$ 가정

$t_1 \cdot t_2 = \frac{t_1^2 + t_2^2 - (t_1 - t_2)^2}{2} = \frac{1-\frac{1}{4}}{2} = \boxed{\frac{3}{8}(X)}$

단답형

16. $\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24$의 값을 구하시오. [3점]

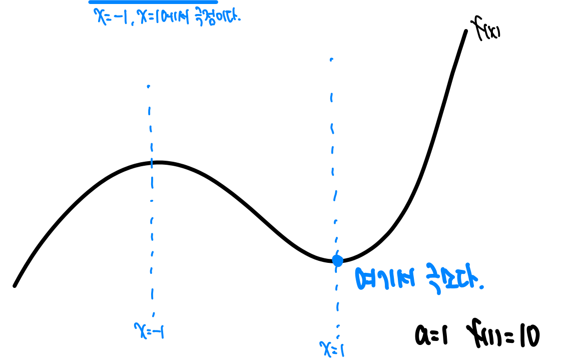
$\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24 = \log_4 16 = \boxed{2}$

17. 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 12$가 $x = a$에서 극소일 때, $a + f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

$f'(a)=0$이고 도함수가 음→양

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

$x=-1$, $x=1$에서 극점이다.



$a=1$ $f(1)=10$

$\boxed{a+f(a)=1+10=11}$

18. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

공비가 양수네

$$a_2 = 36, \quad a_7 = \frac{1}{3}a_5$$

2단계를 거치면 $\frac{1}{3}$이 된다. → 공비가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이네

일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

$a_6 = a_2 \cdot r^4 = a_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 36 \times \frac{1}{9} = \boxed{4}$

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

위치는 속도를 적분

위치는 속도를 적분하면 된다.

$\int v(t)dt = t^3 - 2t^2 + kt + C = x(t)$

$x(0) = C = 0$

$x(1) = 1 - 2 + k = -3$

$k = -2$

$x(t) = t^3 - 2t^2 - 2t$

$t=1 \sim t=3$에서는 운동 방향의 변화가 없으므로

$x(3) - x(1) = (27 - 18 - 6) - (1 - 2 - 2)$

$= 3 + 3 = \boxed{6}$

20. 실수 a와 함수 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 3$에 대하여 함수

$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^4 dt$$

t에 대한 적분인데 x가 같이 있으니 분리해주자.

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

도함수를 구해서 보자.

$g(x) = \int_a^x f(x) \cdot \{f(t)\}^4 dt - \int_a^x f(t)\{f(t)\}^4 dt$

$= f(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt - \int_a^x \{f(t)\}^5 dt$

$g'(x) = f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt + \cancel{f(x) \cdot \{f(x)\}^4 - \{f(x)\}^5}$

$= f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$

무조건 양수다. → $x=a$에서만 부호변화 O

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45$

$= 3(x^2 - 8x + 15)$

$= 3(x-3)(x-5)$

$x=3$, $x=5$에서 부호변화 O

$a=3$ or $a=5$ 이어야 $g'(x)$의 부호변화가 1번

$\boxed{3+5=8}$

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$로 쓸 수 있다.

> (가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
> 근 4개 중에 2개씩 중복
> (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

조건 (가)에서 주어진 새로운 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면서 각각 중근이라면 실근이 2개씩 겹쳐야 하므로 모든 실근의 개수는 짝수여야 한다.

n 이 홀수라면 $x^n-64=0$ 에서 생기는 근의 개수가 1개이다.

그렇다면 $f(x)$이 이차식이므로 $(x^n-64)f(x)=0$ 의 모든 실근의 개수는 홀수가 된다.
실근이 최대 2개이다.

그렇다면 n 이 짝수가 될때도 체크해보자.

$$\underbrace{(x^n-64)}_{\text{n이 짝수라면 여기서 근 2개}}\underbrace{f(x)}_{\text{이차식이므로 최대 2개}}=0 \longrightarrow \text{가능}$$

위의 조건을 모두 만족시키기 위해서는 $f(x)=(x-\sqrt[n]{64})(x+\sqrt[n]{64})$이 되어야 한다.

그렇다면 x=0일때 f(x)가 최소이고 $f(0)=-64^{\frac{2}{n}}=-2^{\frac{12}{n}}$이다.

그렇다면 n 은 12의 약수 중 짝수가 되어야 한다.

$n=\cancel{1},2,\cancel{3},4,6,12$

$\boxed{2+4+6+12=24}$

22. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

최고차항의 계수에 대한 언급x

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> 실근 1개 + 중근 (α, β로 두자)
> (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
> $x-f(x)=\alpha$ or β

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

조건 (가)에서 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2개라는 것은

3차식인 $f(x)$ 와 x=0의 교점이 두 개라는 것이므로 하나의 교점과 하나의 접점을 가질 것이다.
α와 β라고 하자.

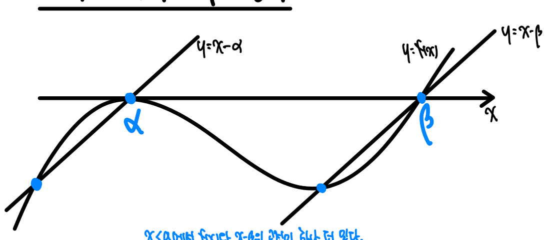
조건 (나)에서 $f(x-f(x))=0$ 을 만족시키려면 $x-f(x)=\alpha$ or β를 만족시켜야 한다.

식을 다시 정리하면 $f(x)=x-\alpha$ or $f(x)=x-\beta$ 을 만족시켜야 한다.

이를 확인하기 위해서는 그래프 간의 교점으로 체크해볼 필요가 있다.

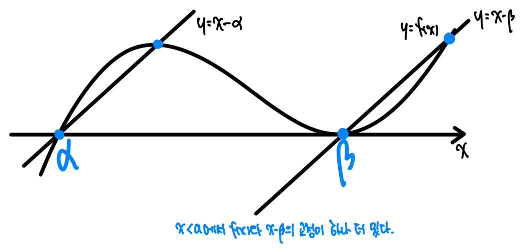
최고차항의 계수의 부호에 대한 언급이 없으므로 경우의 수를 모두 생각해보자.

i) 최고차항의 계수가 양수



x<α에서 f(x)와 x-β의 교점이 하나 더 있다.

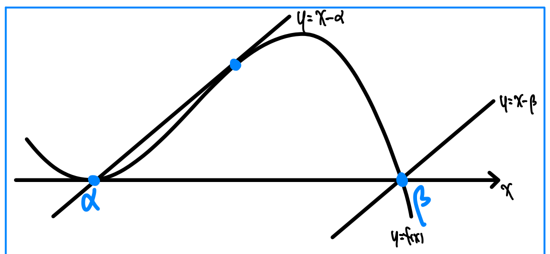
서로 다른 실근의 개수가 5개



x<α에서 f(x)와 x-β의 교점이 하나 더 있다.

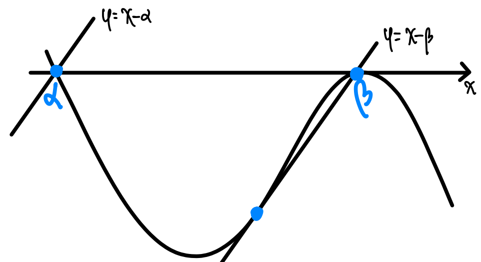
서로 다른 실근의 개수가 5개

ii) 최고차항의 계수가 음수



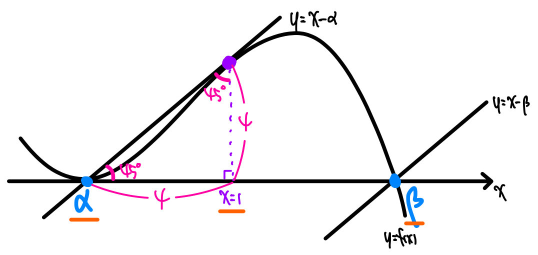
서로 다른 실근의 개수가 3개

이게 맞다.



서로 다른 실근의 개수가 3개

그러나 $f(1)=4$와 $f'(1)=1$을 동시에 만족시킬 수 없다.



① $f'(1)=1$이므로 $y=x-\alpha$와 $y=f(x)$의 접점의 좌표가 (1,4)이다.

② $y=x-\alpha$와 $y=f(x)$의 교점에서 $y=x-\alpha$와 x축이 이루는 각이 45°이므로 $\alpha=1-4=-3$이다.

③ 3차함수와 일차함수의 교점의 x좌표들의 합은 일정하므로 $-3+1+1=-3+(-3)+\beta$ $\beta=5$

$f(x)=k(x+3)^2(x-5)$

$f(1)=k\cdot16\cdot-4=4$

$k=-\frac{1}{16}$

$f(x)=-\frac{1}{16}(x+3)^2(x-5)$

$f(0)=-\frac{1}{16}\cdot9^2\cdot-5=\frac{45}{16}$

$\boxed{p+q=61}$

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{(\sqrt{n^2+n+1}-n)(\sqrt{n^2+n+1}+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{n+1}=\boxed{2}$

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^t+\cos t,\quad y=\sin t$$

에서 $t=0$일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$\frac{dx}{dt}=e^t-\sin t$

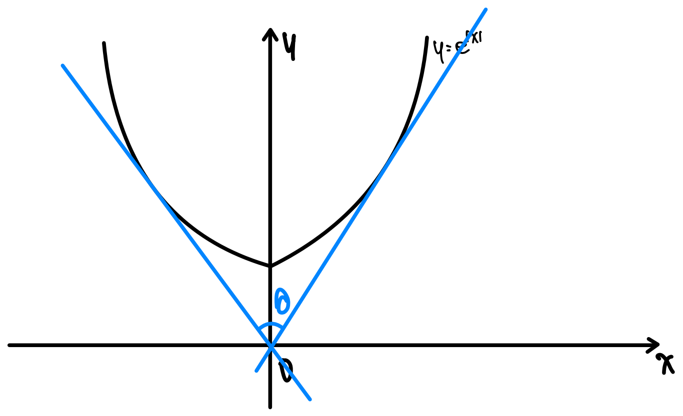
$\frac{dy}{dt}=\cos t$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{e^t-\sin t}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{1}{1}=\boxed{1}$

25. 원점에서 곡선 $y=e^{|x|}$에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]
대표로 그려보자.

① $\frac{e}{e^2+1}$ ② $\frac{e}{e^2-1}$ ③ $\frac{2e}{e^2+1}$
④ $\frac{2e}{e^2-1}$ ⑤ 1



어느 도형에서나 접선에 대한 문제가 나오면 접점에 가장 집중해야한다.

접점에 대한 정보가 없으므로 접점의 좌표를 미지수로 잡고 시작하자.

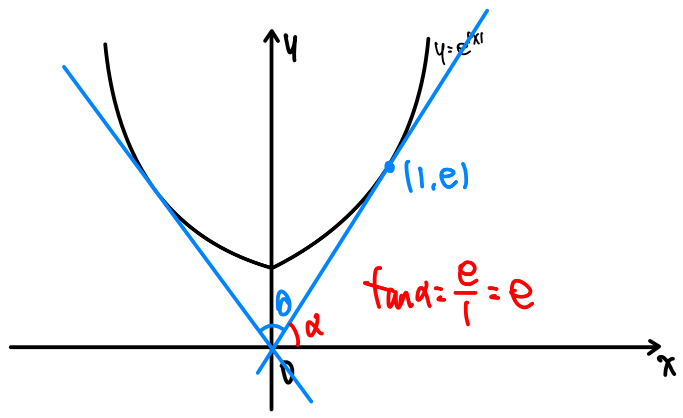
제 1 사분면에서의 접점 : (t, e^t)
$t>0, e^t>0$

접선이 $(0,0)$과 (t, e^t)를 지난다. + (t, e^t)에서의 미분계수는 e^t이다.

$\frac{e^t-0}{t-0}=e^t$

$\frac{e^t}{t}=e^t \longrightarrow t=1$

그렇다면 접점이 $(1, e)$이다.



$\tan\alpha=\frac{e}{1}=e$

$\theta=\pi-2\alpha$

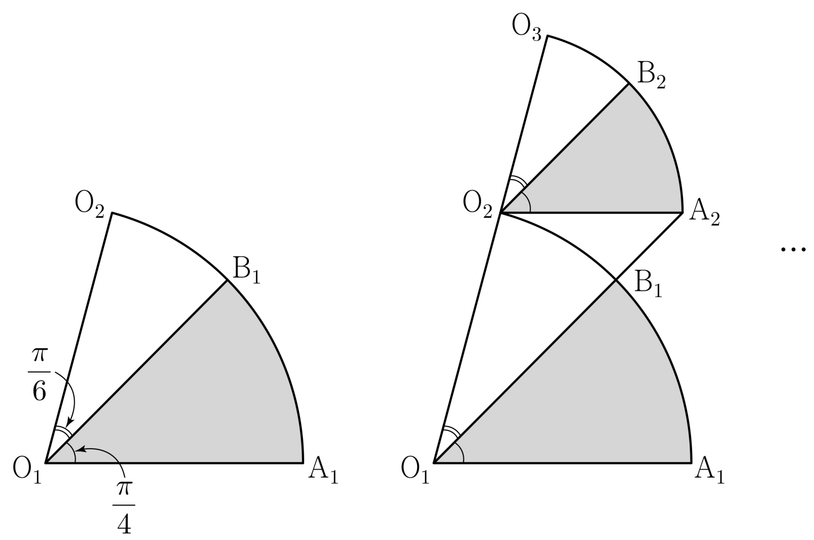
$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2e}{1-e^2}$

$\tan\theta=\tan(\pi-2\alpha)=-\tan 2\alpha=\boxed{\frac{2e}{e^2-1}}$

26. 그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_1A_1O_2$가 있다. 호 A_1O_2 위에 점 B_1을 $\angle A_1O_1B_1=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_1A_1B_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 O_2를 지나고 선분 O_1A_1에 평행한 직선이 직선 O_1B_1과 만나는 점을 A_2라 하자. 중심이 O_2이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_2A_2O_3$을 부채꼴 $O_1A_1B_1$과 겹치지 않도록 그린다. 호 A_2O_3 위에 점 B_2를 $\angle A_2O_2B_2=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_2A_2B_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [3점]



R_1 R_2 ⋯

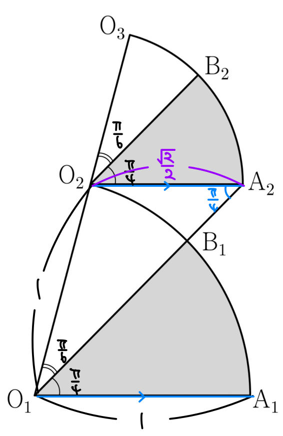
① $\frac{3\pi}{16}$ ② $\frac{7\pi}{32}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{9\pi}{32}$ ⑤ $\frac{5\pi}{16}$

무한등비급수 문제이고 이러한 문제에서 우리가 찾아야하는 것은 단 두 개이다.
첫 항과 공비

왼쪽 그림에서 칠해진 넓이인 첫 항은 부채꼴이다.

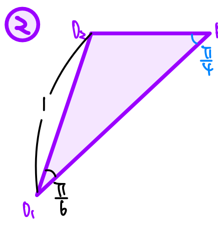
반지름과 중심각을 알고 있으므로 바로 구해보자.

부채꼴 $O_1A_1B_1=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{4}=\underline{\frac{\pi}{8}} \longrightarrow a_1=\frac{\pi}{8}$



① $\overline{O_2A_2}$와 $\overline{O_1A_1}$이 평행하므로 $\angle A_2O_1A_1=\angle O_2A_2O_1=\frac{\pi}{4}$

②



$\triangle O_2A_2O_1$에서 $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\overline{O_2A_2}}{\sin\frac{\pi}{6}}$

$\overline{O_2A_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

③ 부채꼴 $O_2A_2B_2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{16}$

그렇다면 공비가 $\frac{1}{2}$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{\pi}{4}}$

27. 두 함수

$$f(x)=e^{x},\quad g(x)=k\sin x$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 k의 값은? [3점]

$x>0$에서만 보자

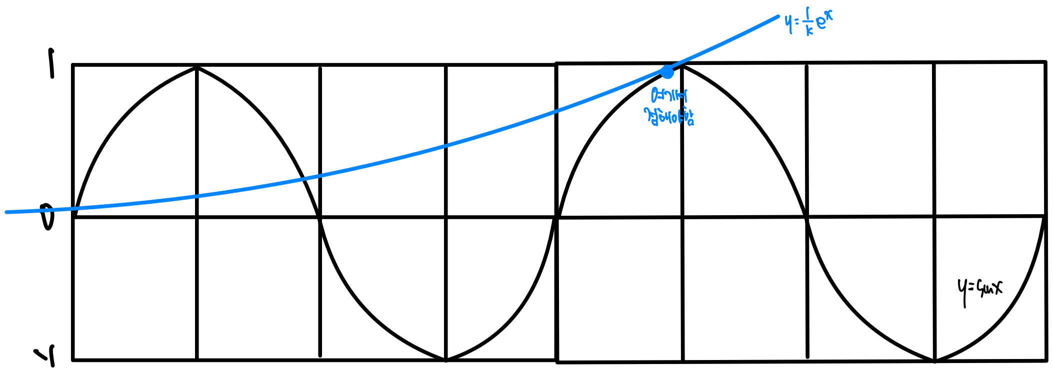
① $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$ ② $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$ ③ $\sqrt{2}e^{2\pi}$ ④ $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$ ⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}}$

실근의 개수에 대해 따질 때는 크게 2가지 방법이 있다.

1. 판별식-> 초월함수인데 무슨 판별식

2. 그래프를 그려서 해결-> 그려봐야겠네

준 식을 그대로 써도 되지만 필자는 $f(x)=g(x)$를 $\frac{1}{k}e^{x}=\sin x$로 바꿔서 처리하겠다.



파란 색 점에서 접해야 교점이 3개일 수 있으므로 위의 그림과 같이 구성되어야 하고

그렇다면 저 점에서 두 함수가 만나고, 미분계수도 같아야 한다.

$\left(t, \frac{1}{k}e^{t}\right)$ or $(t, \sin t)$라고 하자.

① 만난다

$$\frac{1}{k}e^{t}=\sin t$$

② 접한다

$$\frac{1}{k}e^{t}=\cos t$$

$$\rightarrow \cos^2 t+\sin^2 t=1$$

$$\frac{1}{k^2}e^{2t}+\frac{1}{k^2}e^{2t}=1$$

$$\frac{2}{k^2}e^{2t}=1$$

$$k=\sqrt{2}e^{t}$$

$k=\sqrt{2}e^{t}$이므로 ①에 대입하여 t를 구해보자.

$$\frac{1}{\sqrt{2}e^{t}}e^{t}=\sin t$$

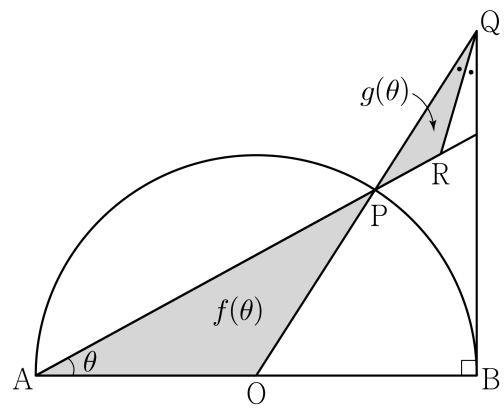
$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin t$$

$$t=\frac{9}{4}\pi \ (2\pi<t<3\pi \text{이므로})$$

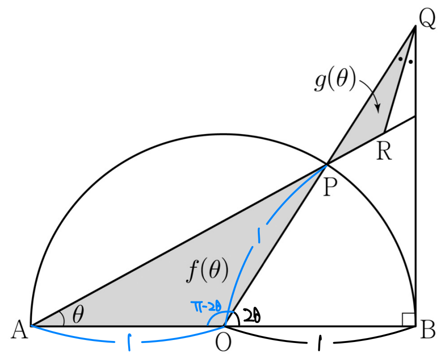
$$\rightarrow \boxed{k=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$$

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, $\angle$OQB의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. $\angle$OAP $=\theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

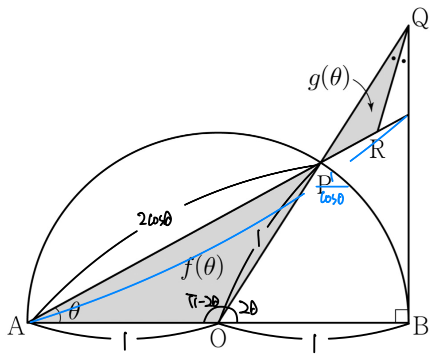
$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]

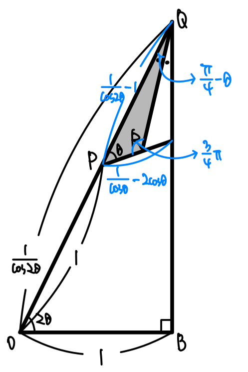


① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4



$$f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin(\pi-2\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta$$





$\triangle$PQR에서

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\frac{\overline{PR}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$$

$$\overline{PR}=\overline{PQ}\times\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\sin\frac{3}{4}\pi}$$

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{PR}\cdot\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\cos 2\theta}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{\cos 2\theta}-1\right)\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\sin\frac{3}{4}\pi}\cdot\sin\theta$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\cos 2\theta}-1\right)^2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\cdot\sin\theta}{\theta^4\times\frac{1}{2}\sin 2\theta}\cdot\sqrt{2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{\cos 2\theta}-1\right)^2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\cdot\cancel{\sin\theta}}{\theta^4\times\cancel{\frac{1}{2}\sin 2\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{\cos 2\theta}\right)^2}{\theta^4}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\cos 2\theta)^2}{\theta^4}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{\theta\to 0+}\frac{1-\cos 2\theta}{(2\theta)^2}\right\}^2\cdot 16=\frac{1}{8}\cdot 16=\boxed{2}$$

단답형

29. $t>2e$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$ 이 $x=k$ 에서 극대일 때, 실수 k 의 값을 $g(t)$ 라 하면 $g(t)$ 는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$ 인 실수 α 에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\dfrac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$f'(k)=0$이고 $x=k$에서 $f'(x)$가 $+\to-$

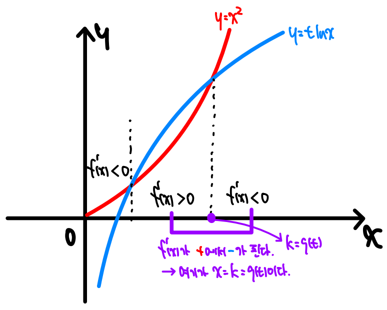
$f(x)$가 x=k에서 극대라고 하였으므로 자연스럽게 도함수를 구해보자.

$$f'(x)=2t\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}-2x$$

$$=\underbrace{\frac{2}{x}}_{\text{이거는 0이 될 수 없으므로}}\underbrace{(t\ln x-x^2)}_{\text{여기서 부호변화가 있을까?}}$$

→ $y=t\ln x$라 $y=x^2$으로 분리하여 보자.

$\longrightarrow$



위에서 구한 것에 따르면 $f(x)$위의 점 x=k=g(t)에서 극대이므로 밑과 같이 쓸 수 있다.

$f'(g(t))=0$

$$f'(g(t))=\frac{2t\ln g(t)}{g(t)}-2g(t)=0$$

$$\frac{t\ln g(t)}{g(t)}=g(t)$$

$$t\ln g(t)=\{g(t)\}^2 \xrightarrow{g(\alpha)=e^2} \alpha\ln e^2=e^4$$

$$2\alpha=e^4$$

$$\boxed{\alpha=\frac{1}{2}e^4}$$

궁금해했던 요소 중 하나였던 α 를 구했으므로 $g'(\alpha)$ 를 구해줘야한다.

$g'(\alpha)$를 구하기 위해서는 유일하게 있던 식인 $t\ln g(t)=\{g(t)\}^2$를 미분해야 할 것이다.

t에 대해 미분해서 $g'(t)$를 만든다.

$$\ln g(t)+t\cdot\frac{g'(t)}{g(t)}=2g(t)\cdot g'(t)$$

$t=\alpha$ 대입하고 $\alpha=\frac{1}{2}e^4$, $g(\alpha)=e^2$

$$\ln e^2+\frac{1}{2}\cancel{e^4}^{\,e^2}\cdot\frac{g'(\alpha)}{\cancel{e^2}}=2\cdot e^2\cdot g'(\alpha)$$

$$2=g'(\alpha)\cdot\left(2e^2-\frac{1}{2}e^2\right)$$

$$2=g'(\alpha)\cdot\frac{3}{2}e^2$$

$$\boxed{g'(\alpha)=\frac{4}{3e^2}}$$

$$\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{\cancel{e^4}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{16}^{\,8}}{9\cancel{e^4}}=\frac{8}{9}$$

$$\boxed{p+q=17}$$

30. $t>\dfrac{1}{2}\ln 2$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$ 과 직선 $y=x+t$ 가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$ 라 할 때, $f'(\ln 2)=\dfrac{q}{p}\sqrt{2}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

문제에서 기본적으로 준 상황이 곡선과 직선이 교점을 가지는 상황이므로

두 곡선의 식이 같다는 식을 씀으로써 시작해보자

$$\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})=x+t$$

$$1+e^{2x}-e^{-2t}=e^{x+t}$$

$$e^{2x}-e^t\cdot e^x-e^{-2t}+1=0$$

인수분해 안되므로 근의 공식으로 처리해보자.

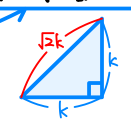
$$e^x=\frac{e^t\pm\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}=\frac{e^t\pm(e^t-2e^{-t})}{2}$$

$$\underbrace{e^x=e^{-t}}_{x=-t}\ \text{or}\ \underbrace{e^t-e^{-t}}_{x=\ln(e^t-e^{-t})=\ln(e^{2t}-1)-t}$$

그렇다면 곡선과 직선이 만나는 두 점의 x좌표는 $-t$와 $\ln(e^{2t}-1)-t$이다.

이 두 점은 y=x+t 위에 있으므로 두 점의 거리는 $\sqrt{2}\times(x\text{값의 차이})$이다.

기울기가 1이다.



$$f(x)=\sqrt{2}\{(\ln(e^{2t}-1)-t)-(-t)\}$$

$$=\sqrt{2}\cdot\ln(e^{2t}-1)$$

$$f'(x)=\sqrt{2}\cdot\frac{2e^{2t}}{e^{2t}-1}$$

$$f'(\ln 2)=\sqrt{2}\cdot\frac{2e^{\ln 4}}{e^{\ln 4}-1}=\sqrt{2}\cdot\frac{8}{3}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

$$\boxed{p+q=11}$$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.