제 2 교시

수학 영역

by 심상범 in Orbi

5지선다형

1. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

$2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}} = 2^2 = \boxed{4}$

2. 함수 $f(x)$가

$$f'(x) = 3x^2 - 2x, \quad f(1) = 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\int f'(x)\,dx = x^3 - x^2 + C = f(x)$

$f(1) = 1 - 1 + C = 1$

$C = 1$

그러므로

$f(x) = x^3 - x^2 + 1$

$\boxed{f(2) = 8 - 4 + 1 = 5}$

3. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 인 θ에 대하여 $\tan\theta = \frac{12}{5}$ 일 때, $\sin\theta + \cos\theta$ 의 값은? [3점]

주어진 각은 제 3사분면에

$\cos\theta$와 $\sin\theta$의 비율이 5 : 12이다.

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ 0 ④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$

tan의 값을 준다는 것을 보고 주어진 각을 그려봐도 되고

다르게 보면 cos 과 sin 의 비율이 5 : 12 라는 것이다.

각이 같으므로 cos 과 sin 값을 제곱해서 더하면 1이 되어야 한다.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos\theta = 5k$

$\sin\theta = 12k$

5 : 12이므로

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 25k^2 + 144k^2 = 1$

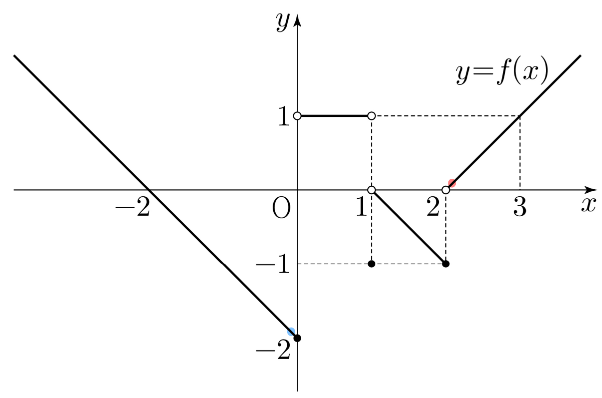
$k = \pm\frac{1}{13}$

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$이므로 $k = -\frac{1}{13}$이다.

$\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\sin\theta = -\frac{12}{13}$

$\boxed{\sin\theta + \cos\theta = -\frac{17}{13}}$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x)$ 의 값은? [3점]

-2 0

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\left(x^2+3\right)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+3)f'(x)$

$g'(1)=2f(1)+4f'(1)$

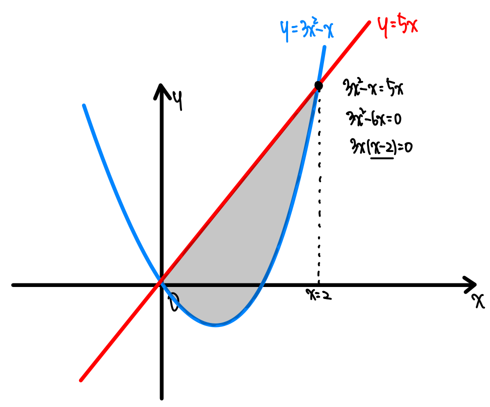
$=4+4=\boxed{8}$

6. 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

$y=x(3x-1)$

$x=0,\ \frac{1}{3}$에서 x축과 만남

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



$\int_0^2 5x-(3x^2-x)\,dx=\int_0^2 -3x^2+6x\,dx$

$=\left[-x^3+3x^2\right]_0^2$

$=-8+12=\boxed{4}$

7. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

공차만 알면 된다.

$$a_6=2\left(S_3-S_2\right)$$

$(a_1+a_2+a_3)-(a_1+a_2)=a_3$

일 때, S_{10}의 값은? [3점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

$a_6=2a_3$

$(2+5d)=2(2+2d)$

$2+5d=4+4d$

$d=2$

수열 a_n은 공차가 2이고 첫항은 2이다.

$a_n=2n$

$S_{10}=\frac{2+20}{2}\cdot 10=11\cdot 10=\boxed{110}$

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6 & (x<a) \\ 2x-a & (x \geq a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$\{f(x)\}^2 = \begin{cases} (-2x+6)^2 = 4x^2-24x+36 & (x<a) \\ (2x-a)^2 = 4x^2-4ax+a^2 & (x \geq a) \end{cases}$

$\lim_{x\to a^-}\{f(x)\}^2 = \lim_{x\to a^-} 4x^2-24x+36 = 4a^2-24a+36$

$\lim_{x\to a^+}\{f(x)\}^2 = \lim_{x\to a^+} 4x^2-4ax+a^2 = 4a^2-4a^2+a^2$

$=$함숫값

$4a^2-24a+36=a^2$

$3a^2-24a+36=0$

$3(a^2-8a+12)=0$

$3(a-6)(a-2)=0$

$a=6$ or $a=2$

$\boxed{6+2=8}$

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

홀수항 → 짝수항 : 역수

짝수항 → 홀수항 : 8배

이고 $a_{12}=\frac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

우리가 익히 아는 수열이 아니므로 천천히 '해보자'

$a_{12}=\frac{1}{2} \rightarrow a_{11}=2 \rightarrow a_{10}=\frac{1}{4} \rightarrow a_9=4$

4단계마다 반복

$\rightarrow a_8=\frac{1}{2} \rightarrow a_7=2$

$a_{12}=a_8=a_4=\frac{1}{2}$

$a_1=a_5=a_9=4$

$\frac{1}{2}+4=\boxed{\frac{9}{2}}$

10. $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x, \quad y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

$\log_n x = -\log_n(x+3)+1$

$\log_n x + \log_n(x+3) = 1$

$x(x+3)=n$

$1<x<2$이므로

$1\times4<n<2\times5$

$4<n<10$

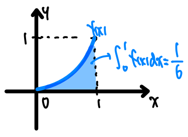
$n=5,6,7,8,9$

$\boxed{5+6+7+8+9=35}$

11. 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$$

가정



을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$ 의 값은? [4점]

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 1)\end{cases}$

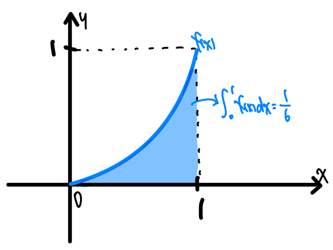
f(x)를 x축 대칭시키고 x축 방향으로 -1, y축 방향으로 1 이동

(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

g(x)의 주기가 2이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

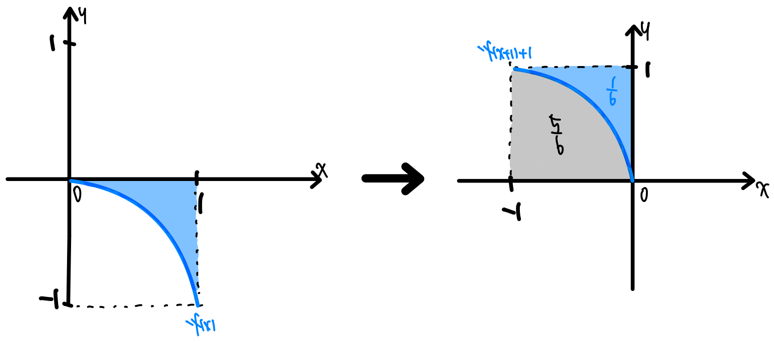
닫힌 구간 [0,1] 에서 연속인 함수 f(x) 에 대한 정보들을 종합하여 그래프를 가정해보자.



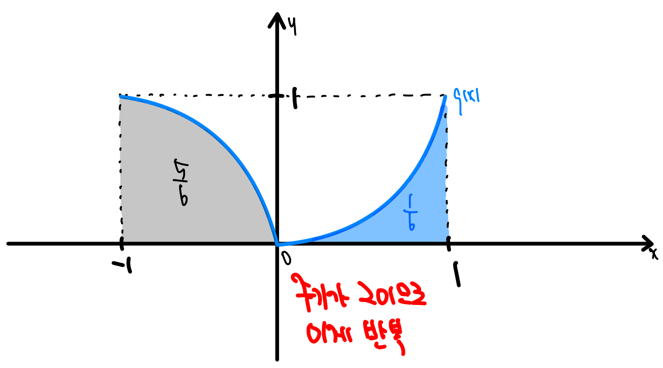
f(x) 로 이루어진 함수 g(x) 에서 -1< x <0 에서의 함수를 최대한 그래프에서 표현해보자.

g(x) = -f(x+1)+1

평행이동시키면 편하다.



그렇다면 g(x) 의 그래프는 아래와 같다.



$$\int_{-3}^{2} g(x)dx=\int_{-3}^{-1} g(x)dx+\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{1}^{2} g(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{-1}^{0} g(x)dx$$

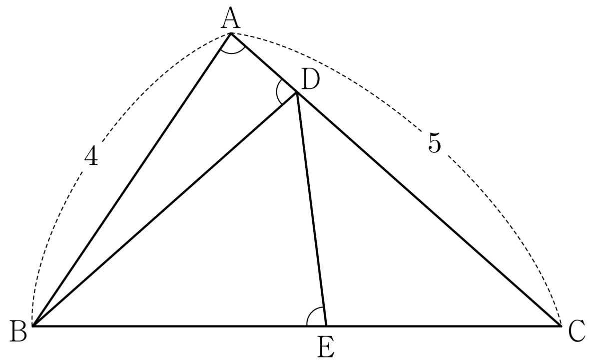
$$=1+1+\frac{5}{6}=\boxed{\frac{17}{6}}$$

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$\cos(\angle BDA)=\cos(\angle BED)=\frac{1}{8}$

$$\angle BAC=\angle BDA=\angle BED$$

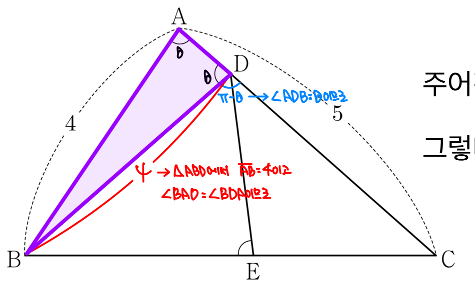
일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

주어진 도형 안에 있는 각 중 3개가 같고 이 각의 cos값을 주었으므로 이 각을 미지수로 잡고 문제를 시작해보자.

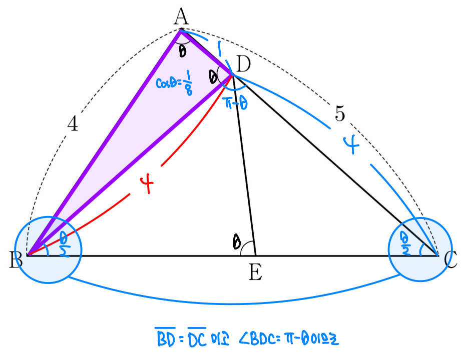
$\angle BAC=\angle BDA=\angle BED=\theta$라고 하자. → $\cos\theta=\frac{1}{8}$



주어진 각을 미지수로 두면 변 BD가 4라는 것도 알 수 있다.

그렇다면 삼각형 ABD에서 cos법칙을 쓸 준비가 끝났다.

$\overline{AB}=\overline{BD}=4$이고 $\cos\theta=\frac{1}{8}$이므로 $\overline{AD}$를 구할 수 있다.



$\overline{BD}=\overline{DC}$ 이고 $\angle BDC=\pi-\theta$이므로

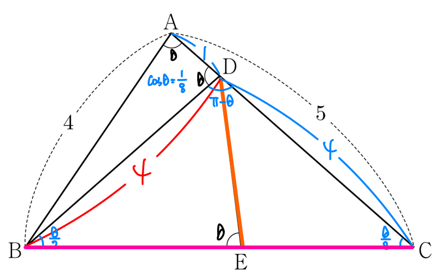
$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\cos\theta=\overline{BD}^2$$

$$16+\overline{AD}^2-8\cdot\overline{AD}\cdot\frac{1}{8}=16$$

$$\overline{AD}^2-\overline{AD}=0$$

$\overline{AD}=1$

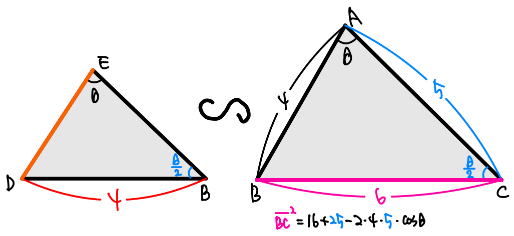
그렇다면 $\overline{DC}=5-1=4$이다.



주황색으로 표시한 변 DE의 길이를 알기 위해서는 그 변을 포함한 삼각형을 유심히 볼 필요가 있다.

우리가 구해놓은 것들을 모두 그려본 뒤 살펴보면 삼각형 ABC와 삼각형 EDB가 닮음이다.

AA닮음 : $\angle DEB=\angle BAC$, $\angle EBD=\angle ACB$



$\overline{BC}^2=16+25-2\cdot4\cdot5\cdot\cos\theta$

$=41-5=36$

$\overline{BC}=6$

닮음비가 4 : 6 = 2 : 3이므로

$$\boxed{\overline{DE}=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}}$$

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

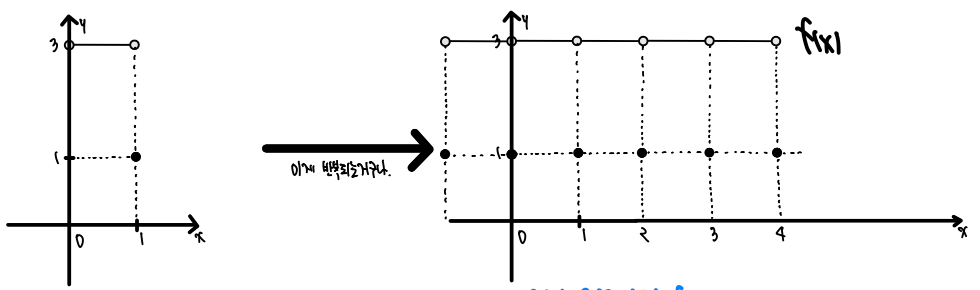
이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.

주기가 1인 함수다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$ 의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

구해야하는 것이 함숫값을 기반으로 한 수이므로 주어진 함수를 한 번 그려보도록 하자.



x가 정수라면 f(x)=1이고
x가 정수가 아니라면 f(x)=3이다.

함수의 그래프는 그렸고 이제는 수열에 대한 파악을 해야한다.

우리에게 익숙한 수열은 아니므로 천천히 해보자.

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}=\frac{1}{3}\{1\times f(1)+2\times f(\sqrt{2})+\cdots+20\times f(\sqrt{20})\}$$

$$=\frac{1}{3}\{f(1)+4f(\sqrt{4})+9f(\sqrt{9})+16f(\sqrt{16})\}+\frac{1}{3}\{2f(\sqrt{2})+3f(\sqrt{3})+\cdots+20f(\sqrt{20})\}$$

$$=\frac{1}{3}(1+4+9+16)+\frac{1}{3}(2\cdot3+3\cdot3+\cdots+20\cdot3)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot30+(2+3+5+6+7+8+10+11+12+13+14+15+17+18+19+20)$$

$$=10+\left\{\frac{1+20}{2}\cdot20-(1+4+9+16)\right\}$$

$$=10+(210-30)=\boxed{190}$$

14. 두 양수 $p,\ q$와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

g(x)= ....의 형태로 만든자.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

한 개만 나오도록

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

문제에서 중심으로 잡는 것이 $g(x)$ 이므로 정리해보면 아래와 같다..

$$g(x)=\frac{|x|\cdot|f(x-p)+q|}{x}$$

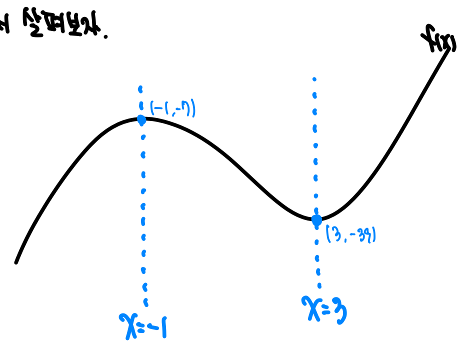
조건 (나)에 의하면 우리는 위의 식에서 미분가능하지 않은 점에 대해 생각해봐야한다.

식으로 보았을 때는 절댓값이 쳐저 있는 $f(x-p)+q$와 x가 0이 될 때를 눈여겨보자.

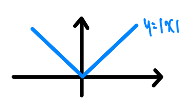
∘ $f(x-p)+q$

$f(x-p)+q$는 $f(x)$를 이동시킨 그래프이므로 $f(x)$를 먼저 살펴보자.

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)$$
$$=3(x+1)(x-3)$$



$g(x)$의 식에서 $|x|$은 x=0에서 미분불가능한 점을 하나 만들게 된다.



$f(x-p)+q$ 은 3차식이므로 실근을 1~3개를 가질 수 있다.

실근을 가지는 지점이 미분불가능한 점의 후보이므로 개수별로 경우의 수를 따져보자.

실근 1개: 실근이 x=0이 아니라면 미분불가능한 점이 2개라 X
x=0이 실근이라면 x=0에서 미분가능해지므로 미분불가능한 점이 0개->X

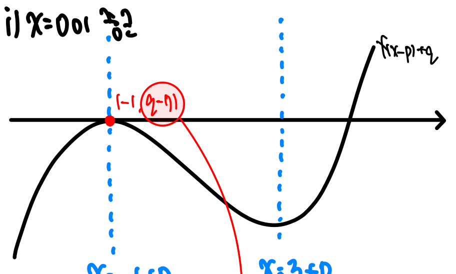
실근 2개: 실근이 모두 x=0이 아니라면 미분불가능한 점이 3개라 X
하나의 중근을 가진다. 실근 중 하나는 x=0이고 나머지는 아니라면 x=0에서는 미분가능해지므로->O

실근 3개: 실근이 모두 x=0이 아니라면 미분불가능한 점이 4개라 X
실근 중 x=0이 하나라면 x=0에서는 미분가능하고 미분불가능한 점이 3개->X

그렇다면 $f(x-p)+q=0$ 은 실근을 2개 가져야하고 x=0이 중근인지는 알 수 없다.

그래서 체크해보자.

i) x=0이 중근

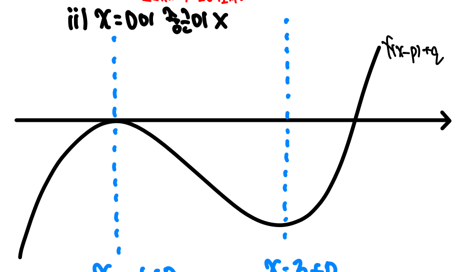


x=0이어야함

p=1 q=7

$\boxed{p+q=8}$

ii) x=0이 중근이 X



x=0이 되어야함

~~p=-3~~

p와 q는 양수이다.

15. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2} - t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2} - t\right) = 0$$

$\sin\frac{\pi x}{2} = t$ or $\cos\frac{\pi x}{2} = t$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t) + \beta(t) = 5$이다.

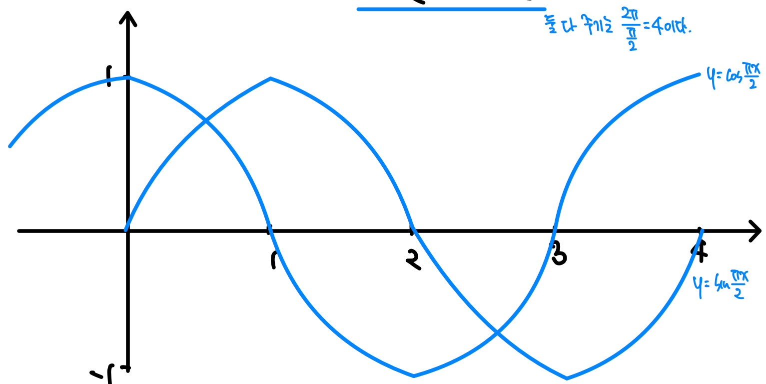
ㄴ. $\{t \mid \beta(t) - \alpha(t) = \beta(0) - \alpha(0)\} = \left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2 = \frac{1}{3}$이다.

① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ　　④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

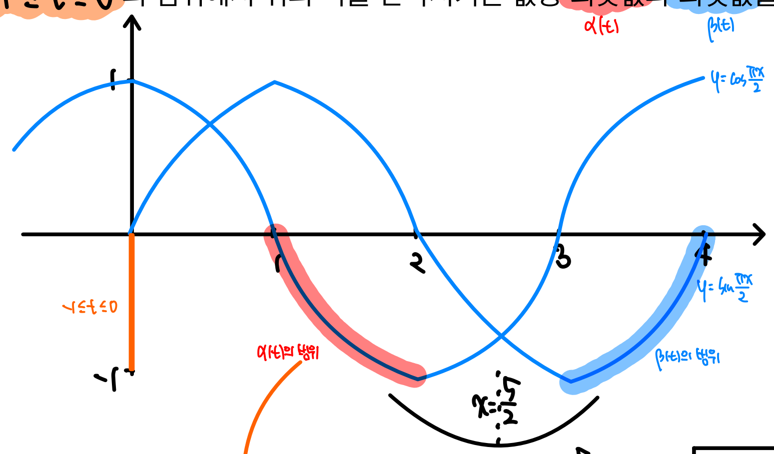
문제의 식에서 가장 중요한 것은 $\sin\frac{\pi x}{2}$, $\cos\frac{\pi x}{2}$ 으로 보이므로 그래프를 그려보자.

둘 다 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$이다.



ㄱ. $-1 \le t \le 0$의 범위에서 위의 식을 만족시키는 값중 최솟값과 최댓값을 그래프에서 보자.

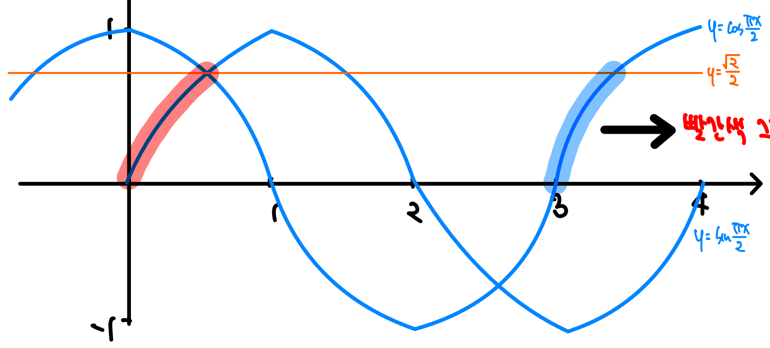
$\alpha(t)$　$\beta(t)$



$\alpha(t)$와 $\beta(t)$는 $x=\frac{5}{2}$ 대칭이므로 $\boxed{\alpha(t)+\beta(t)=5\ (\text{O})}$

ㄴ. $\beta(t) - \alpha(t) = \underline{\beta(0)}_{3} - \underline{\alpha(0)}_{0} = 3$를 만족시키는 t 의 범위에 대한 질문이다.

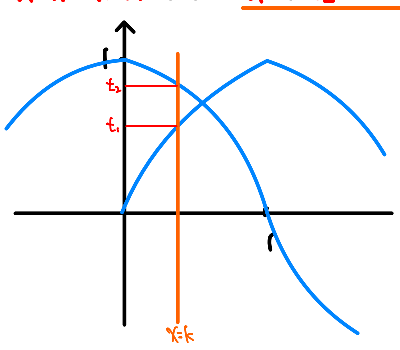
→ 두 값간의 거리가 3이다.　　$0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$



→ 빨간색 그래프와 파란색 그래프의 개형이 같고 $\boxed{\text{거리가 3이므로 맞다 (O)}}$

ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ 이려면 t_1 과 t_2 는 같은 x좌표를 가져야 한다.

$x=k$라고 하자.



$t_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right)$　$t_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right)$

$t_2 - t_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot k\right) = \frac{1}{2}$　가정

$t_1 \cdot t_2 = \frac{t_1^2 + t_2^2 - (t_1 - t_2)^2}{2} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{2} = \boxed{\frac{3}{8}\ (\text{X})}$

단답형

16. $\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24$의 값을 구하시오. [3점]

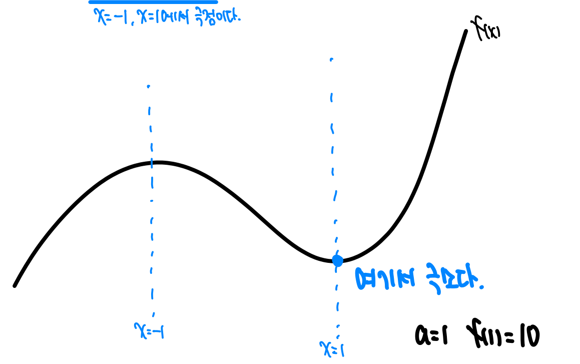
$\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24 = \log_4 16 = \boxed{2}$

17. 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 12$가 $x = a$에서 극소일 때, $a + f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

$f'(a)=0$이고 도함수가 음→양

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

$x=-1$, $x=1$에서 극점이다.



$a=1$　$f(1)=10$

$\boxed{a+f(a)=1+10=11}$

18. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

공비가 양수네

$$a_2 = 36, \quad a_7 = \frac{1}{3}a_5$$

2단계를 거치면 $\frac{1}{3}$이 된다. → 공비가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이네

일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

$a_6 = a_2 \cdot r^4 = a_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 36 \times \frac{1}{9} = \boxed{4}$

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

위치는 속도를 적분

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

위치는 속도를 적분하면 된다.

$\int v(t)dt = t^3 - 2t^2 + kt + C = x(t)$

$x(0) = C = 0$

$x(1) = 1 - 2 + k = -3$

$k = -2$

$x(t) = t^3 - 2t^2 - 2t$

$t=1 \sim t=3$에서는 운동 방향의 변화가 없으므로

$x(3) - x(1) = (27 - 18 - 6) - (1 - 2 - 2)$

$= 3 + 3 = \boxed{6}$

20. 실수 a와 함수 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 3$에 대하여 함수

$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^4 dt$$

t에 대한 적분인데 x가 같이 있으니 분리해주자.

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

도함수를 구해서 보자.

$g(x) = \int_a^x f(x) \cdot \{f(t)\}^4 dt - \int_a^x f(t)\{f(t)\}^4 dt$

$= f(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt - \int_a^x \{f(t)\}^5 dt$

$g'(x) = f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt + \cancel{f(x) \cdot \{f(x)\}^4} - \cancel{\{f(x)\}^5}$

$= f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$

무조건 양수다. → $x=a$에서만 부호변화 O

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45$

$= 3(x^2 - 8x + 15)$

$= 3(x-3)(x-5)$

$x=3$, $x=5$에서 부호변화 O

$a=3$ or $a=5$ 이어야 $g'(x)$의 부호변화가 1번

$\boxed{3+5=8}$

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$로 쓸 수 있다.

> (가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
> 근 4개 중에 2개씩 중복
> (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

조건 (가)에서 주어진 새로운 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면서 각각 중근이라면

실근이 2개씩 겹쳐야 하므로 모든 실근의 개수는 짝수여야 한다.

n 이 홀수라면 $x^n-64=0$ 에서 생기는 근의 개수가 1개이다.

그렇다면 $f(x)$이 이차식이므로 $(x^n-64)f(x)=0$ 의 모든 실근의 개수는 홀수가 된다.

실근이 최대 2개이다.

그렇다면 n 이 짝수가 될때도 체크해보자.

$\underbrace{(x^n-64)}_{\text{n이 짝수라면 여기서 근 2개}}\underbrace{f(x)}_{\text{이차식이므로 최대 2개}}=0 \longrightarrow$ 가능

위의 조건을 모두 만족시키기 위해서는 $f(x)=(x-\sqrt[n]{64})(x+\sqrt[n]{64})$이 되어야 한다.

그렇다면 x=0일때 f(x)가 최소이고 $f(0)=-64^{\frac{2}{n}}=-2^{\frac{12}{n}}$이다.

그렇다면 n 은 12의 약수 중 짝수가 되어야 한다.

$n=\cancel{1},2,\cancel{3},4,6,12$

$\boxed{2+4+6+12=24}$

22. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

최고차항의 계수에 대한 언급 x

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> 실근 1개 + 중근 1(α, β로 두자)
> (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
> $x-f(x)=\alpha$ or β

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

조건 (가)에서 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2개라는 것은

3차식인 $f(x)$ 와 x=0의 교점이 두 개라는 것이므로 하나의 교점과 하나의 접점을 가질 것이다.

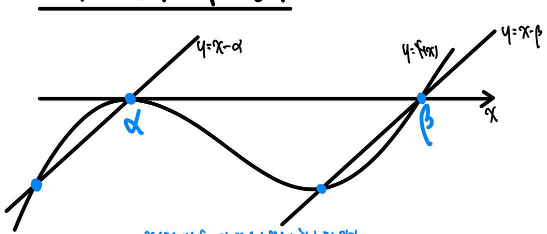
조건 (나)에서 $f(x-f(x))=0$ 을 만족시키려면 $x-f(x)=\alpha$ or β를 만족시켜야 한다. (α와 β라고 하자.)

식을 다시 정리하면 $f(x)=x-\alpha$ or $f(x)=x-\beta$ 을 만족시켜야 한다.

이를 확인하기 위해서는 그래프 간의 교점으로 체크해볼 필요가 있다.

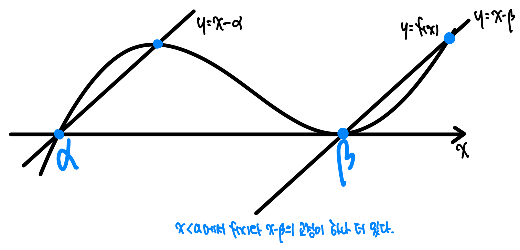
최고차항의 계수의 부호에 대한 언급이 없으므로 경우의 수를 모두 생각해보자.

i) 최고차항의 계수가 양수



$x<\alpha$에서 f(x)와 x-β의 교점이 하나 더 있다.

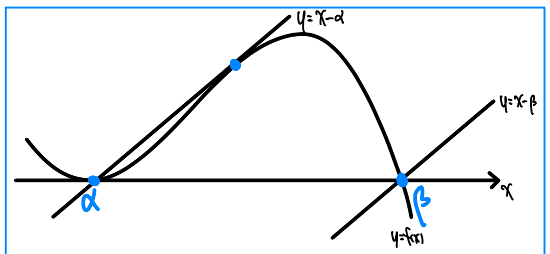
서로 다른 실근의 개수가 5개



$x<\alpha$에서 f(x)와 x-β의 교점이 하나 더 있다.

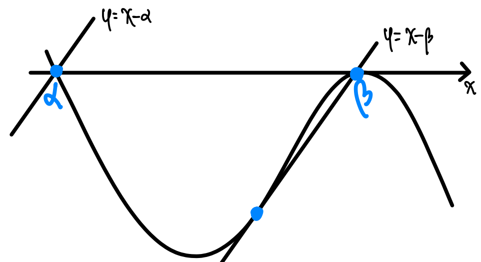
서로 다른 실근의 개수가 5개

ii) 최고차항의 계수가 음수



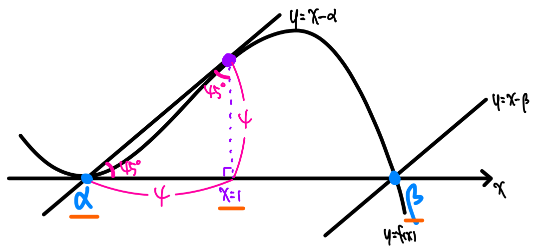
서로 다른 실근의 개수가 3개

이게 맞다.



서로 다른 실근의 개수가 3개

그러나 $f(1)=4$와 $f'(1)=1$을 동시에 만족시킬 수 없다.



① $f'(1)=1$이므로 $y=x-\alpha$와 $y=f(x)$의 접점의 좌표가 (1, 4)이다.

② $y=x-\alpha$와 $y=f(x)$의 교점에서 $y=x-\alpha$와 x축이 이루는 각이 45°이므로 $\alpha=1-4=-3$이다.

③ 3차함수와 일차함수의 교점의 x좌표들의 합은 일정하므로 $-3+1+1=-3+(-3)+\beta$ $\quad \beta=5$

$f(x)=k(x+3)^2(x-5)$

$f(1)=k\cdot16\cdot-4=4$

$k=-\frac{1}{16}$

$f(x)=-\frac{1}{16}(x+3)^2(x-5)$

$f(0)=-\frac{1}{16}\cdot 9\cdot -5=\frac{45}{16}$

$\boxed{p+q=61}$

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(2x+1)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는? [2점]

3번 2번

① 20 ② 40 ③ 60 ④ 80 ⑤ 100

$_5C_3 \cdot (2x)^3 \cdot 1^2 = 10 \cdot 8x^3 = \boxed{80}x^3$

24. 어느 동아리의 학생 20명을 대상으로 진로활동 A와 진로활동 B에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 진로활동 A와 진로활동 B 중 하나를 선택하였고, 각각의 진로활동을 선택한 학생 수는 다음과 같다.

(단위 : 명)

구분	진로활동 A	진로활동 B	합계
1학년	7	5	12
2학년	4	4	8
합계	11	9	20

이 조사에 참여한 학생 20명 중에서 임의로 선택한 한 명이 진로활동 B를 선택한 학생일 때, 이 학생이 1학년일 확률은? [3점]

9명 그 중 5명

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{11}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

25. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 선택할 때, 선택한 수가 3500 보다 클 확률은? [3점]

① $\frac{9}{25}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{11}{25}$ ④ $\frac{12}{25}$ ⑤ $\frac{13}{25}$

우선 숫자 4개를 골라서 4자리 수를 만드는 것이므로 우선 판을 깔아보자.

___ ___ ___ ___

이 수가 3500보다 클 때의 경우의 수를 구해보자.

천의 자리의 수에 따라 경우의 수를 나눠보자.

가장 큰 단위이므로

i) 천의 자리 수가 3

3 5 ___ ___

여기에 5가 들어가야 3500보다 클 수 있다.

1~5 중 선택이므로 아무나 들어가도 된다.

경우의 수: 1 x 5 x 5 = 25가지

ii) 천의 자리의 수가 4

4 ___ ___ ___

1~5 중 아무거나 들어가도 된다.

경우의 수: 5 x 5 x 5 = 125가지

iii) 천의 자리의 수가 5

5 ___ ___ ___

1~5 중 아무거나 들어가도 된다.

경우의 수: 5 x 5 x 5 = 125가지

전체 경우의 수: 5^4

$$\frac{25+125+125}{5^4} = \frac{1+5+5}{25} = \boxed{\frac{11}{25}}$$

26. 빨간색 카드 4장, 파란색 카드 2장, 노란색 카드 1장이 있다. 이 7장의 카드를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생이 있도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색 카드끼리는 서로 구별하지 않고, 카드를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 78 ② 84 ③ 90 ④ 96 ⑤ 102

우선 상황이 복잡하므로 표로 정리해보도록 하자.

	학생1	학생2	학생3	
빨간색	x_1	x_2	x_3	4
파란색	y_1	y_2	y_3	2
노란색	z_1	z_2	z_3	1

그려보면서 생각이 나는 것은 노란색 공이 하나밖에 없기에 노란색 공을 가져가는 학생은 나머지 공을 꼭 가져갈 필요없다는 것이다.

$$3 \times {}_3H_1 \times {}_3H_3 = 3 \times {}_3C_1 \times {}_5C_2 = \boxed{90가지}$$

27. 주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던질 때, 나오는 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 같을 확률은? [3점]

1~6 앞, 뒤

① $\frac{3}{64}$ ② $\frac{5}{96}$ ③ $\frac{11}{192}$ ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{13}{192}$

동전의 개수가 4개이므로 앞면이 나오는 동전의 개수도 최대 4개이다.

4부터 1까지 천천히 경우의 수를 나눠보자.

i) 곱 = 동전의 앞면 개수 = 4

주사위 눈의 수 곱 = 4 $\quad \frac{3}{36}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4$

→ (1,4), (2,2), (4,1)

3가지

ii) 곱 = 동전의 앞면 개수 = 3

주사위 눈의 수 곱 = 3 $\quad \frac{2}{36}\times {}_4C_3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4$

→ (1,3), (3,1)

2가지

iii) 곱 = 동전의 앞면 개수 = 2

주사위 눈의 수 곱 = 2 $\quad \frac{2}{36}\times {}_4C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4$

→ (1,2), (2,1)

2가지

xi) 곱 = 동전의 앞면 개수 = 1

주사위 눈의 수 곱 = 1 $\quad \frac{1}{36}\times {}_4C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^4$

→ (1,1)

1가지

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{36}+\frac{8}{36}+\frac{12}{36}+\frac{4}{36}\right)=\frac{1}{16}\times\frac{\cancel{27}^{\,3}}{\cancel{36}_{\,4}}=\boxed{\frac{3}{64}}$$

28. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이하이면 나온 눈의 수를 점수로 얻고, 나온 눈의 수가 4 이상이면 0점을 얻는다. 이 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 할 때, 얻은 네 점수의 합이 4가 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [4점]

3이하이면 그대로 주고
4이상이면 버린다.

① 187 ② 190 ③ 193 ④ 196 ⑤ 199

이 문제에서의 조건은

주사위의 눈이 3 이하이면 그 숫자를 가져가고

4 이상이면 그 시행은 0점이 된다.

문제를 풀기 위해 정리해보면

4번을 시행의 값을 더하여 4가 되어야 하는데 조건에 의해 4 이상의 수가 나오면 0이므로

우리가 각 시행에서 더할 수 있는 수는 1~3 이다.

자연수가 아닌 0도 있다.

그렇다면 0~4 중 중복을 포함하여 4개 골라 합이 4가 되도록 하는 것이다.

가능한 경우의 수를 한 번 써보자.

i) 3+1+0+0

$\frac{4!}{2!}\times 3^2=\boxed{108\text{가지}}$

0을 더하는것은 4,5,6 중 하나이므로

ii) 2+1+1+0

$\frac{4!}{2!}\times 3=\boxed{36\text{가지}}$

0을 더하는것은 4,5,6 중 하나이므로

iii) 2+2+0+0

$\frac{4!}{2!\,2!}\times 3^2=\boxed{54\text{가지}}$

0을 더하는것은 4,5,6 중 하나이므로

xi) 1+1+1+1

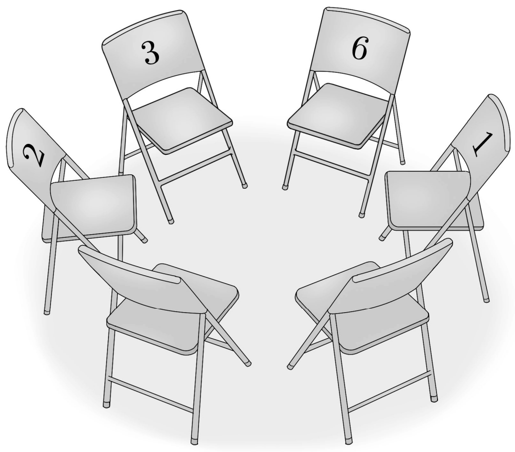
$1\times 1=\boxed{1\text{가지}}$

108+36+54+1

$=\boxed{199\text{가지}}$

단답형

29. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오.
$12=2\times6=3\times4$
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



이 문제의 배열의 가장 중요한 점은 '이웃한 2개의 곱이 12가 되지 않도록' 이다.

이것을 보고 12가 되지 않는 경우의 수를 모두 생각하기에는 무리가 있어보인다.

그렇다면 여사건을 사용하여

(전체의 배열 수)-(이웃한 수의 곱이 12가 되는 배열의 수)로 접근해보자.

전체 배열의 수: $\frac{6!}{6}=5!=120$가지

이웃한 수의 곱이 12가 되는 배열의 수

이웃한 두 수의 곱이 12가 되는 수의 조합을 우선 생각해보자 -> (2,6), (3,4)

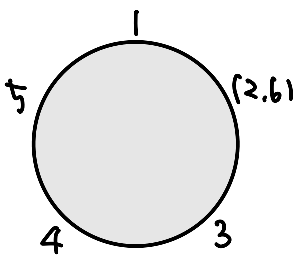
이 두 가지로 경우의 수를 나눠보자.

(2,6)가 이웃 + (3,4)가 이웃 - (2,6),(3,4)가 동시에 이웃

i) 2와 6이 이웃

1, (2,6), 3, 4, 5를 원에 배열하면

이웃하므로 하나로 묶어서 보자.

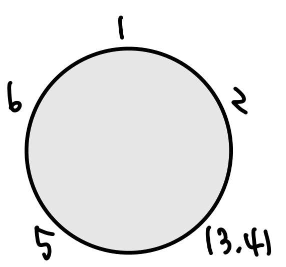


$\frac{5!}{5}\times \underbrace{2}_{\text{2와 6이 바뀌는 경우}} = 4!\times2 = \boxed{48가지}$

ii) 3과 4가 이웃

1, 2, (3,4), 5, 6을 원에 배열하면

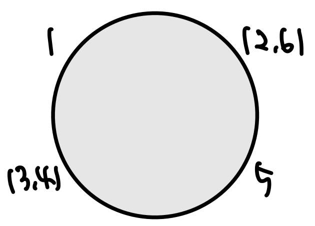
이웃하므로 하나로 묶어서 보자.



$\frac{5!}{5}\times \underbrace{2}_{\text{3과 4가 바뀌는 경우}} = 4!\times2 = \boxed{48가지}$

iii) (2,6), (3,4)가 동시에 이웃

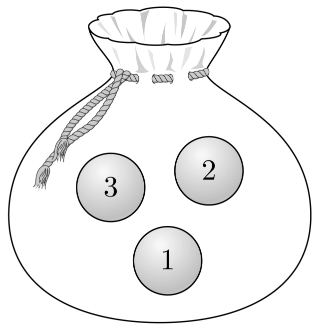
1, (2,6), (3,4), 5을 원에 배열하면



$\frac{4!}{4}\times \underbrace{2}_{\text{2와 6이 바뀌는 경우}}\times \underbrace{2}_{\text{3과 4가 바뀌는 경우}} = \boxed{24가지}$

$120-(48+48-24)=120-72=\boxed{48가지}$

30. 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다.
복원추출
이 시행을 5번 반복하여 확인한 5개의 수의 곱이 6의 배수일
이거로 경우의 수를 나눌까?
확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



1~3의 공 중 복원추출로 5번을 뽑아서 수의 곱이 6의 배수가 되어야 한다.

6의 배수가 되기 위해서는 6을 인수로 가지고 있어야 하고

6의 인수인 2 와 3 을 가지고 있어야 한다.

이게 KEY POINT다.

단순히 바로 확률을 구하기 보다는 여사건을 활용하여 2 와 3 중 하나라도 빠진 경우의 수를
할 수 있다면 해도 좋다.
전체에서 빼도록 하자.

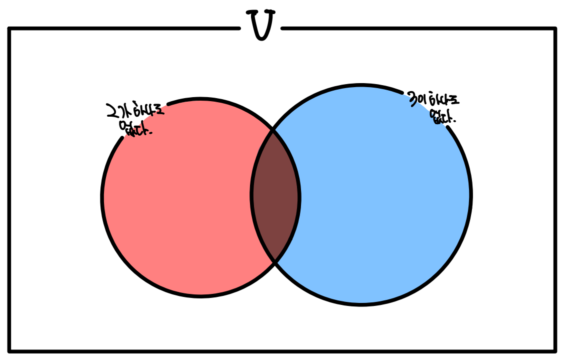
• 전체 확률 = 1

i) 2가 하나도 없을 확률

$\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$

ii) 3이 하나도 없을 확률

$\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$



iii) 2와 3이 모두 없는 확률 = 1만 나온다.

$\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$

$1-\left(\frac{32}{243}+\frac{32}{243}-\frac{1}{243}\right)$

$=1-\frac{63}{243}=\frac{180}{243}=\frac{60}{81}=\frac{20}{27}$

$p=27,\ q=20$

$\boxed{p+q=47}$

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.