201130 풀이

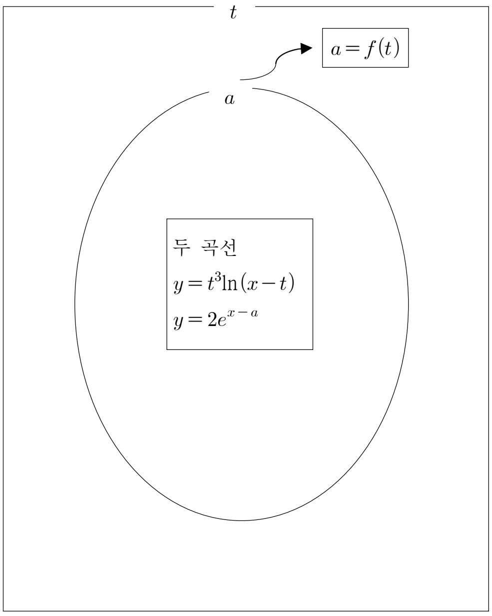
수학 영역

2020학년도 수능 30번

30. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오. [4점]

[2020학년도 수능 가30]

변수의 **층계**를 생각해보면 가장 바깥에 t가 있고
그다음 a가 결정된다면 두 곡선이 결정된다. 이 두 곡선이 오직 한 점에서만 만나면 되므로 접하는 상황이고 a를 결정해서 그 a를 t에 대한 함수로 보면 되는 문항이다.



풀이 과정이야 상투적이고 지금은 다들 개좆밥으로 생각할테니 나는 조금 특이하지만 중요한 관점을 담고 있는 풀이를 하나 제시하겠다.

결국 이 문제는 가장 아래 층계에서 두 곡선의 교점의 개수, **즉, 방정식의 근의 개수**를 **해석적(그래프)**로 판단해야한다.

두 곡선이 하나는 아래로 볼록하고 하나는 위로 볼록하므로 간단히 두 곡선이 접하는 상황이 원하는 상황임을 파악할 수 있다.

헌데 **그냥 단순하게 방정식** $t^3\ln(x-t)=2e^{x-a}$ (t, a**를 상수로 보고** x**에 대한 방정식으로 봐야한다! 인지가 중요하다!**) 의 실근의 개수가 1이라고 생각해보자.

좌변이 곡선, 우변이 곡선이고 곡선과 곡선을 비교하는 것은 귀찮다. 따라서 x가 포함된 식을 죄다 한쪽으로 몰아보자.

$$e^{-x}\ln(x-t)=\frac{2e^{-a}}{t^3}$$ **[다시, x를 변수로 인지해야한다.]**

여기에서 x 대신에 $x+t$를 대입해도 실근의 개수에는 영향이 없다.

$$e^{-x-t}\ln x=\frac{2e^{-a}}{t^3}$$

다시 좌변에는 x만 남긴다면

$$e^{-x}\ln x=\frac{2e^{t-a}}{t^3}$$

이다. 가장 아래 층계에서는 위 방정식의 우변은 **상수에 불과**하고, 좌변은 **고정된 어떤 곡선**에 불과하다.

좌변의 곡선의 식을 $p(x)$라 두면
$p(x)=k$꼴 방정식이 오직 한 실근을 가지에 해야한다.

적당히 그래프를 그려보면 $f(x)$는 의 최댓값을 가짐을 알 수 있고 (뭔지 알 필요는 없다) 그 최댓값은 ★ 라 하면

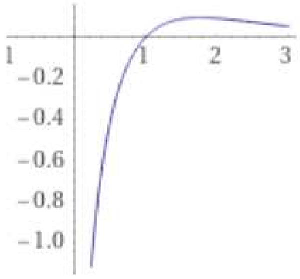
$$\star=\frac{2e^{t-a}}{t^3}$$

이 만족해야한다. 즉, a와 t의 관계식이 완성되었다. 양쪽에 ln를 씌우고 정리하면

$$a=t-3\ln t+(\ln 2-\ln\star)$$

이고 어차피 괄호부분은 상수니 미분하면 사라짐을 알 수 있다.
참고사항으로 저 ★의 값을 직접 구할 수 있는데 그 과정은 아래와 같다.

$p(x)=e^{-x}\ln x$ 의 그래프는 아래와 같다.



$p'(x)=-e^{-x}\ln x+\dfrac{e^{-x}}{x}$ 이므로 $p'(\alpha)=0$이 되는 α는 $\alpha\ln\alpha=1$을 만족시키는 α이다. $\ln(\alpha e^{\alpha})=1$이므로 $\alpha e^{\alpha}=e$이고 $\dfrac{\alpha}{e}=e^{-\alpha}$이다.

이 α에 대하여 $p(\alpha)=e^{-\alpha}\ln\alpha=\dfrac{\alpha\ln\alpha}{e}=\dfrac{1}{e}$이므로 $\bigstar=\dfrac{1}{e}$ 이다.
즉,

$$a=t-3\ln t+(\ln 2-\ln\bigstar)=t-3\ln t+\ln 2+1$$

이므로 $f(t)=t-3\ln t+\ln 2+1$로 정확하게 구할 수 있다.