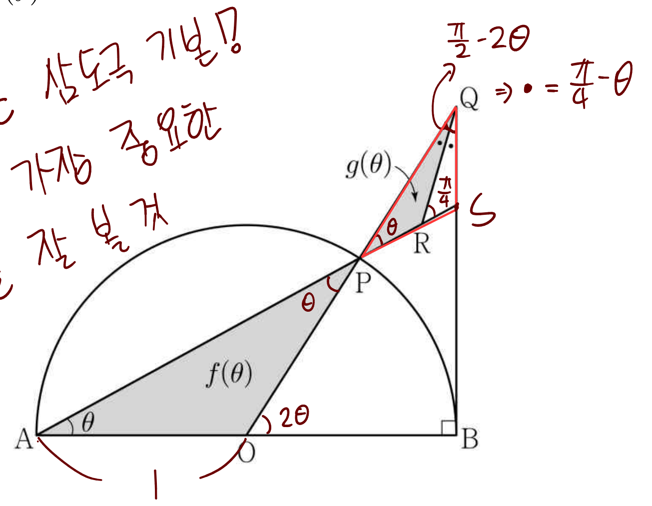
MENTOR

수학 영역

1. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, $\angle OQB$의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. $\angle OAP=\theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]

갈색 부분은 삼도극 기본!?
도형에서 가장 중요한
"각"을 잘 볼 것



[2022학년도 6월 모의평가 미적분 28번]

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\overline{AO}\,\overline{OP}\sin(\angle AOB)$$
$$=\frac{1}{2}\sin(\pi-2\theta)=\frac{1}{2}\sin2\theta$$

△PQS를 보는 관점이 다양한데,
세 변 길이와 내부 각을 모두 파악할 수 있으므로
방법이 떠오르지 않아도 박치기 가능!?

$$\begin{cases}\overline{QP}=\overline{QO}-\overline{PO}=\sec2\theta-1\\ \overline{PS}=\overline{AS}-\overline{AP}=2\sec\theta-2\cos\theta=\dfrac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}\\ \overline{QS}=\tan2\theta-2\tan\theta\end{cases}$$

i) 사인법칙

$$\frac{\overline{QP}}{\sin(\angle PRQ)}=\frac{\overline{QR}}{\sin(\angle QPR)}$$

$$\therefore \overline{QR}=\sqrt{2}\,\overline{QP}\sin\theta$$

$$\therefore g(\theta)=\frac{1}{2}\overline{QP}\,\overline{QR}\sin\bullet=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{QP}^2\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

ii) 각의 이등분선

$\overline{QP}:\overline{QS}=\overline{PR}:\overline{RS}$ $\Rightarrow$ $\overline{PR}$ 구할 수 있음

$\overline{RS}=\overline{PS}-\overline{PR}$

$$\Rightarrow \overline{PR}=\frac{\overline{QP}\,\overline{PS}}{\overline{QP}+\overline{QS}}$$

$$\therefore g(\theta)=\frac{1}{2}\overline{PQ}\,\overline{PR}\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\overline{QP}^2\,\overline{PS}}{\overline{QP}+\overline{QS}}\sin\theta$$

iii) 각의 이등분선이 아닌 듯 이등분선

$$\triangle QPS=\frac{1}{2}\overline{QP}\,\overline{PS}\sin\theta$$

$\triangle QPS=\triangle QPR+\triangle QRS$ 이고,

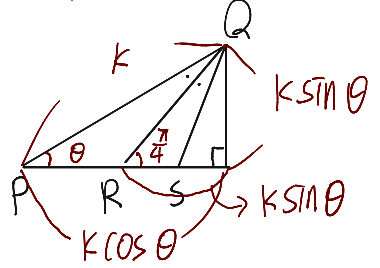
$$\begin{cases}\triangle QPR=\frac{1}{2}\overline{QP}\,\overline{QR}\sin\bullet\\ \triangle QRS=\frac{1}{2}\overline{QS}\,\overline{QR}\sin\bullet\end{cases}$$ 이므로

$$\triangle QPR:\triangle QRS=\overline{QP}:\overline{QS}$$

$$\therefore \triangle QRS=\frac{\overline{QP}}{\overline{QP}+\overline{QS}}\triangle QPS$$

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\frac{\overline{QP}^2\,\overline{PS}}{\overline{QP}+\overline{QS}}\sin\theta$$

iv) $\frac{\pi}{4}$ 이용



$$\Rightarrow \overline{PR}=k(\cos\theta-\sin\theta)$$

$$g(\theta)=\frac{1}{2}k^2(\cos\theta-\sin\theta)\sin\theta$$

끝처리

i) 사인법칙

$$\begin{cases} f(\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta \\ g(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{QP}^2\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) \end{cases}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}\overline{QP}^2\cancel{\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}}{\theta^4\ \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\sin 2\theta}\ 2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(\sec 2\theta-1)^2}{2\theta^4}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^4 2\theta}{2\theta^4\cos^2 2\theta(1+\cos 2\theta)^2}$$

$$=\frac{2^4}{2\cdot 2^2}=\boxed{2}$$

ii) iii) 각의 이등분선

$$\begin{cases} f(\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta \\ g(\theta)=\frac{1}{2}\frac{\overline{QP}^2\,\overline{PS}}{\overline{QP}+\overline{QS}}\sin\theta \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\frac{\overline{QP}^2\,\overline{PS}}{\overline{QP}+\overline{QS}}\cancel{\sin\theta}}{\theta^4\ \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\sin 2\theta}\ 2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{QP}^2\,\overline{PS}}{\theta^4(\overline{QP}+\overline{QS})}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sec 2\theta-1}{\theta^2}\right)^2\frac{\frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}}{\sec 2\theta-1+\tan 2\theta-2\tan\theta}$$

$$=4\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\sec 2\theta-1+\tan 2\theta-2\tan\theta}$$

$$\tan 2\theta-2\tan\theta$$

$$=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}-2\tan\theta$$

θ^3에서 수렴

$$=2\tan\theta\,\frac{\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\tan^3\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$\therefore 4\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2 2\theta}{\sec 2\theta-1+\tan 2\theta-2\tan\theta}$$

$$=4\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\frac{\sec 2\theta-1}{\theta^2}+\frac{\tan 2\theta-2\tan\theta}{\theta^2}}$$

0으로

$$=4\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2+0}$$

$$=\boxed{2}$$

iv) $\frac{\pi}{4}$ 이용

$$\begin{cases} f(\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta \\ g(\theta)=\frac{1}{2}\overline{QP}^2(\cos\theta-\sin\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\overline{QP}^2(\cos\theta-\sin\theta)\cancel{\sin\theta}}{\theta^4\ \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\sin 2\theta}\ 2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sec 2\theta-1}{\theta^2}\right)^2$$

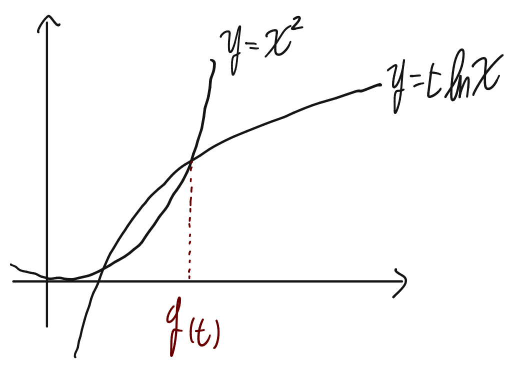
$$=\frac{1}{2}\cdot4=\boxed{2}$$

2. $t>2e$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$ 이 $x=k$ 에서 극대일 때, 실수 k 의 값을 $g(t)$ 라 하면 $g(t)$ 는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$ 인 실수 α 에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[2022학년도 6월 모의평가 미적분 29번]

$$f'(x)=\frac{2t\ln x}{x}-2x=\frac{2t\ln x-2x^2}{x}$$

$t\ln x-x^2=0$ 이면서 근방에서 양 → 음으로 변하는 지점이 $g(t)$ ⇒ 경우가 2개이거나 답이 복수가 나오는 경우에 고려



$$\begin{cases}\{g(t)\}^2=t\ln g(t) & \cdots\ t\text{에 대한 항등식}\\ 2g(t)g'(t)=\dfrac{tg'(t)}{g(t)}+\ln g(t) & \downarrow \text{미분}\end{cases}$$

$x=\alpha$ 대입

$$\begin{cases}\{g(\alpha)\}^2=\alpha\ln g(\alpha)\\ 2g(\alpha)g'(\alpha)=\dfrac{\alpha g'(\alpha)}{g(\alpha)}+\ln g(\alpha)\end{cases}$$

$$\begin{cases}e^4=2\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}e^4\\ 2e^2g'(\alpha)=\dfrac{\alpha}{e^2}g'(\alpha)+2\end{cases}$$

$$\therefore 2e^2g'(\alpha)=\frac{e^2}{2}g'(\alpha)+2$$

$$\Rightarrow g'(\alpha)=\frac{4}{3e^2}$$

$$\therefore \alpha\{g'(\alpha)\}^2=\frac{1}{2}e^4\left\{\frac{4}{3e^2}\right\}^2=\frac{8}{9}$$

$$\therefore p+q=\boxed{17}$$

<별해> ∴ 역함수 미분

$\{g(t)\}^2=t\ln g(t)$ $\qquad \alpha=\dfrac{e^4}{2}$

$$t=\frac{\{g(t)\}^2}{\ln g(t)}$$

역함수의 존재성은 현장에서 고려 X

$$\therefore g^{-1}(x)=\frac{x^2}{\ln x}$$

$$\{g^{-1}(x)\}'=\frac{2x\ln x-x}{(\ln x)^2}$$

$x=\alpha$ 대입

$$\{g^{-1}(g(\alpha))\}'=\frac{2e^2\cdot 2-e^2}{4}=\frac{3}{4}e^2$$

$$\therefore g'(\alpha)=\frac{1}{g^{-1\prime}(g(\alpha))}=\frac{4}{3e^2}$$

$$\therefore \alpha\{g'(\alpha)\}^2=\frac{e^4}{2}\times\frac{16}{9e^4}=\frac{8}{9}$$

$$\boxed{p+q=17}$$

3. $t > \frac{1}{2}\ln 2$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2)=\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[2022학년도 6월 모의평가 미적분 30번]

$$\ln(1+e^{2x}-e^{-2t}) = x+t$$

$$1+e^{2x}-e^{-2t} = e^{x+t}$$

$$e^{2x}-e^{t}e^{x}-e^{-2t}+1=0$$

↳ 두 근 α, β

$(\alpha, \alpha+t)$, $(\beta, \beta+t)$ 사이의 거리

$$f(t)=\sqrt{2}(\beta-\alpha)$$

$$e^{2x}-e^{t}e^{x}-e^{-2t}+1=0$$

근의 공식의 확장

$$e^{x}=\frac{e^{t}\pm\sqrt{e^{2t}-4(-e^{-2t}+1)}}{2}=\frac{e^{t}\pm\sqrt{(e^{t}-2e^{-t})^2}}{2}=\frac{e^{t}\pm(e^{t}-2e^{-t})}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{\alpha}=e^{-t} \\ e^{\beta}=e^{t}-e^{-t} \end{cases}$$

$$\therefore e^{\beta-\alpha}=\frac{e^{t}-e^{-t}}{e^{-t}}=e^{2t}-1$$

$$f(t)=\sqrt{2}(\beta-\alpha)=\sqrt{2}\ln(e^{2t}-1)$$

$$f'(t)=\sqrt{2}\,\frac{2e^{2t}}{e^{2t}-1} \rightarrow f'(\ln 2)=\sqrt{2}\,\frac{8}{4-1}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

$$\therefore \boxed{p+q=11}$$

〈별해〉

(구하는 값) : $f'(\ln 2)$

$t=\ln 2$에서의 x를 확정한 후

관계식 미분 → x 대입

$$1+e^{2x}-e^{-2t}=e^{x+t} \quad \cdots ㉠$$

$t=\ln 2$: $1+e^{2x}-\frac{1}{4}=2e^{x}$

$$e^{2x}-2e^{x}+\frac{3}{4}=0$$

인수분해 ↳ $\Rightarrow e^{x}=\frac{1}{2}$ or $\frac{3}{2}$

㉠의 두 근을 α, β라 하면,

$$f(t)=\sqrt{2}(\beta-\alpha) \Rightarrow f'(t)=\sqrt{2}\left(\frac{d\beta}{dt}-\frac{d\alpha}{dt}\right)$$

㉠ 미분 : $2e^{2x}\frac{dx}{dt}+2e^{-2t}=e^{x+t}\left(\frac{dx}{dt}+1\right)$

$$\begin{cases} x=\alpha : 2e^{2\alpha}\frac{d\alpha}{dt}+2e^{-2\ln 2}=e^{\alpha+\ln 2}\left(\frac{d\alpha}{dt}+1\right) \\ x=\beta : 2e^{2\beta}\frac{d\beta}{dt}+2e^{-2\ln 2}=e^{\beta+\ln 2}\left(\frac{d\beta}{dt}+1\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 정리하면 $\frac{d\alpha}{dt}=-1$, $\frac{d\beta}{dt}=\frac{5}{3}$

$\therefore f'(\ln 2)=\sqrt{2}\left(\frac{5}{3}-1\right)=\frac{8}{3}\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{p+q=11}$

$\Rightarrow$ 인수분해로도 가능

$$e^{2x}-e^{-2t}=e^{x+t}-1$$

$$(e^{x}-e^{-t})(e^{x}+e^{-t})=e^{t}(e^{x}-e^{-t})$$

$$e^{x}=e^{-t} \quad \text{or} \quad e^{x}=e^{t}+e^{-t}$$