MENTOR

수학 영역

1. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

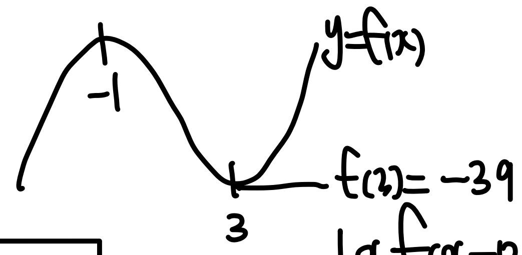
> (가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

[2022학년도 6월 모의평가 공통 14번]

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$=3(x^2-2x-3)=3(x-3)(x+1)$



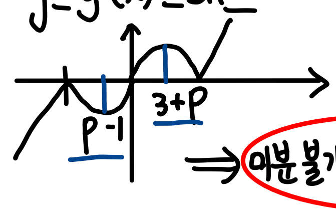
$\boxed{x\neq0}$　$g(x)=\dfrac{|xf(x-p)+qx|}{x}$

$g(x)=\begin{cases}|f(x-p)+q| & (x>0)\\ -|f(x-p)+q| & (x<0)\end{cases}$

$\lim_{x\to0} g(x)=g(0)$ 이여야 하므로 → 연속

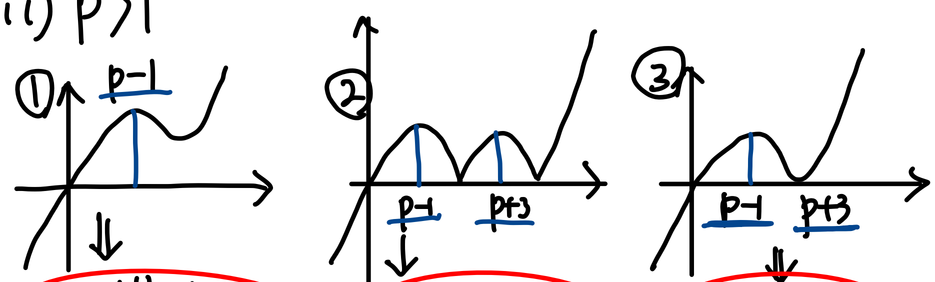
$g(0)=f(-p)+q=0$

i) $0<p<1$ ⇒ $y=g(x)$ 그래프



⇒ 미분불가능점 2개

ii) $p>1$



미분불가능점X　미분불가능점2개　미분불가능점X

$\therefore p=1$, $f(-p)+q=0$에서 $f(-1)=-7$　$q=7$

$p+q=\boxed{8}$

2. 실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

[2022학년도 6월 모의평가 공통 20번]

$g(a)=0$

$g(x)=f(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt-\int_a^x f(t)\times\{f(t)\}^4dt$

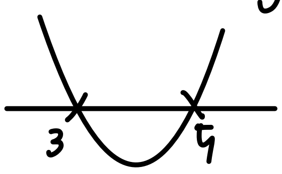
$g'(x)=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt+\cancel{f(x)\times\{f(x)\}^4}-\cancel{f(x)\times\{f(x)\}^4}$

$g'(x)=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt$ ≥ 0

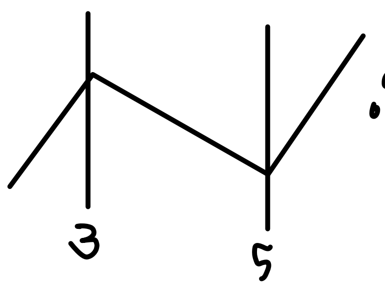
→부호가 한번만 변화해야하니까!!

$f'(x)=3x^2-24x+45$

$=3(x-3)(x-5)$



$f'(x)$는 $x=3$ & $x=5$ 에서 ~~부호변화~~ O



$\therefore \int_a^x\{f(t)\}^4dt$에서

$a=3$ or $a=5$ 여야

$g(x)$가 하나의 극값을 가짐

$\therefore 3+5=\boxed{8}$

3. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[2022학년도 6월 모의평가 공통 22번]

방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$ 라 할때, 조건 (나)를 만족하기 위해선

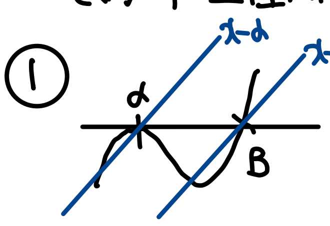
방정식 $\begin{cases} x-f(x)=\alpha \\ x-f(x)=\beta \end{cases}$ 를 만족하는 x의 개수가 3이여야 함.

식 정리하면

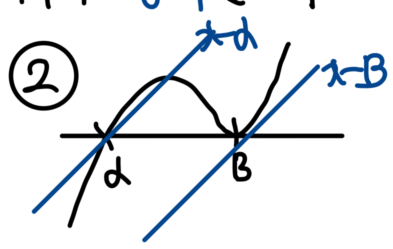
$f(x)= x-\alpha$ or $x-\beta$를 만족하는 x의 개수가 $\underline{\underline{3}}$

i) $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때

①



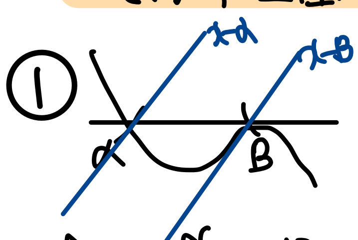
②



조건 (나) 만족X

ii) $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때

①

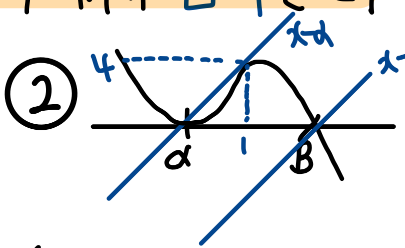


$f(1)=4$, $f'(1)=1$ 만족X

$\therefore f(x)=a(x+3)^2(x-\beta)$

$f(x)=-\frac{1}{16}(x+3)^2(x-5)$

②



$f'(0)>1$ 이므로

직선 $y=x-\alpha$가 점$(1,4)$를 지나고 $\alpha=-3$

$f(1)=4$, $f'(1)=1$ 연립하면 $a=-\frac{1}{16}$, $\beta=5$

$\therefore f(0)=\frac{45}{16}$ $\quad p+q=16+45=\boxed{61}$