MENTOR

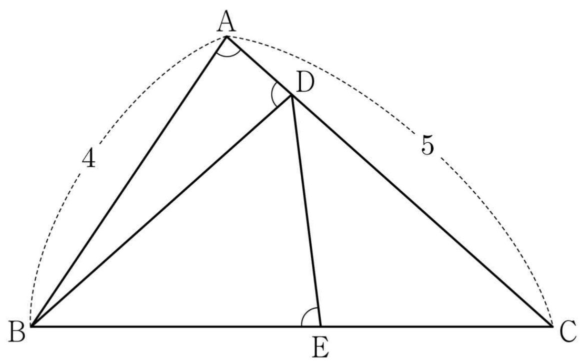
수학 영역

By 남현

1. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=5$이고 $\cos(\angle \mathrm{BAC})=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle \mathrm{BAC}=\angle \mathrm{BDA}=\angle \mathrm{BED}$$

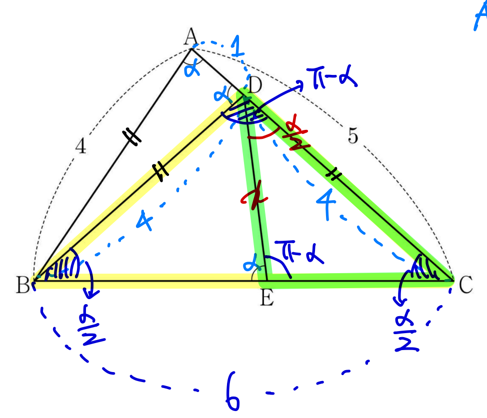
일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

[2022학년도 6월 모의평가 공통 12번]

Sol1) 각 조사 + 닮음



$\overline{AD}=4\cos\alpha\times 2=8\times\frac{1}{8}=1$

$\triangle DBC$와 $\triangle ECD$는 닮음이다. (AA)

$\overline{BC}^2=4^2+4^2-2\cdot4\cdot4\cdot\cos(\pi-\alpha)$

$=32+32\cos\alpha=36$

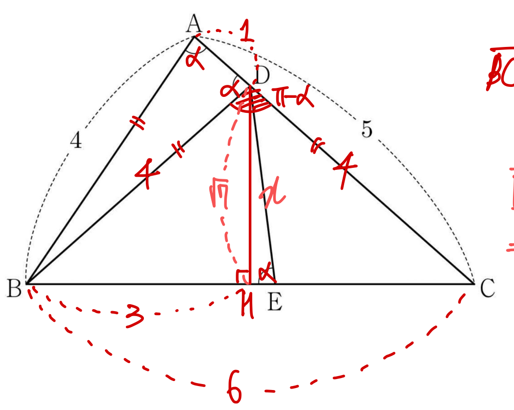
$\Rightarrow \overline{BC}=6$

$\therefore \overline{BC}:\overline{CD}=6:4=3:2$

$\Rightarrow \overline{DC}:\overline{DE}=4:x=3:2$

$\therefore x=\frac{8}{3}$

Sol2) 이등변 삼각형 ⇒ 수선의 발



$\overline{BC}^2=36$ (코사인 법칙)

$\Rightarrow \overline{BC}=6$

$\overline{DE}=x$

$\Rightarrow x\sin\alpha=\sqrt{7}$

$x=\frac{\sqrt{7}}{\sin\alpha}$ $\left(\cos\alpha=\frac{1}{8} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{63}}{8}\right)$

$=\sqrt{7}\times\frac{8}{\sqrt{63}}=\frac{8}{\sqrt{9}}=\frac{8}{3}$

*추가적으로, 미지수를 길이 5배 후 계산 박퀴기도 가능

또한, $\angle DBE=\frac{\alpha}{2}$ 에서 미적러들은 $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$ 을 이용하여 풀이할 수 있음!

2. $-1\le t\le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x\,|\,0\le x<4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $-1\le t<0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다.

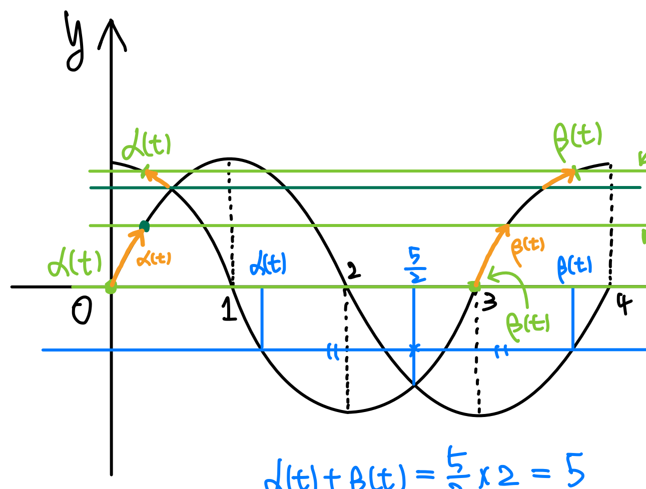
ㄴ. $\{t\,|\,\beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\left\{t\,\middle|\,0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$이면 $t_1\times t_2=\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2022학년도 6월 모의평가 공통 15번]

ㄱ, ㄴ)



$t>\frac{\sqrt{2}}{2}$: $\beta(t)$는 cos 따라서 전진 →, $\alpha(t)$는 cos 따라서 후퇴 ←

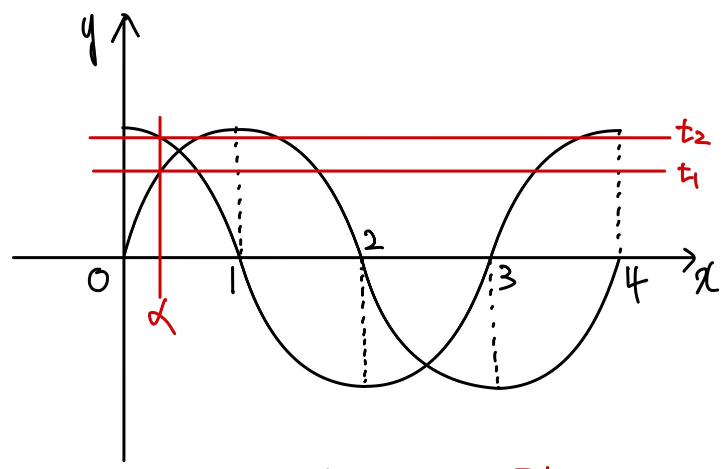
$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$: 기준 ⇒ α, β 관계 깨짐

$t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$: $\beta(t)-\alpha(t)=3$

$y=t\ (-1\le t\le 0)$

$\alpha(t)+\beta(t)=\frac{5}{2}\times2=5$

ㄷ)



$t_1=\sin\frac{\pi\alpha}{2}$, $t_2=\cos\frac{\pi\alpha}{2}$

$\Rightarrow t_1^2+t_2^2=1$

$\Rightarrow (t_2-t_1)^2+2t_1t_2=1$, $t_2-t_1=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow t_1t_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8}\neq\frac{1}{3}$

3. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다. (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

[2022학년도 6월 모의평가 공통 21번]

$(x^n-64)f(x)=0$

$\Rightarrow x=\alpha$(중근), β(중근)

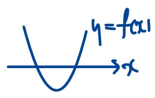
* 접근 1 : $x^n-64=0$ or $f(x)=0$ 에서

n이 홀수이면 $f(x)$는 이차함수이고 $x^n-64=0$ 의 실근은 1개이므로

실근이 4개 (중근 2개씩)가 될 수 없다.

$\Rightarrow$ n은 짝수

* 접근 2 : (나) $\Rightarrow$ $f(x)$의 최솟값이 음의 정수

$\Rightarrow$ 

$f(x)=0$: 서로 다른 두 실근 (고1 근의 분리) $=\alpha, \beta$ $(\alpha \neq \beta)$

$\Rightarrow$ $x^n-64=0$ 실근이 $x=\alpha, \beta$ ($\because$ 조건 (가))

$\therefore$ n은 짝수.

$\Rightarrow$ $x^n=64$ 에서 실근은 $x=\pm\sqrt[n]{64}=\pm 2^{\frac{6}{n}}$ (각각 α, β)

즉, $f(x)=(x+2^{\frac{6}{n}})(x-2^{\frac{6}{n}})$

$=x^2-2^{\frac{12}{n}}$

$\Rightarrow$ $f(x)$의 최솟값 : $f(0)=-2^{\frac{12}{n}}=$ (음의 정수)

$\Rightarrow$ $2^{\frac{12}{n}}=$ (자연수)

$\Rightarrow$ $n=\cancel{1}, 2, \cancel{3}, 4, 6, 12$ (n은 12의 양의 약수 중 짝수)

$\boxed{\text{Ans : 24}}$