제 2 교시

수학 영역

check 부채꼴 공식

5지선다형

1. $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\sqrt[3]{27}=(3^3)^{\frac{1}{3}}=3$

2. $\log_2\sqrt{2}+\log_2 2\sqrt{2}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\log_2(\sqrt{2}\times2\sqrt{2})$

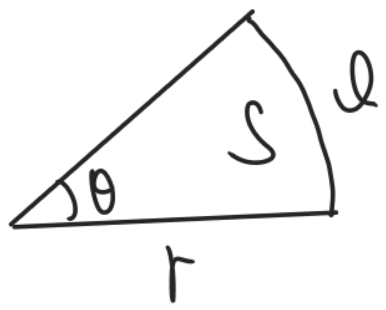
$=\log_2 4$

$=\log_2 2^2$

$=2$

3. 반지름의 길이가 6이고 넓이가 15π인 부채꼴의 중심각의 크기는? [2점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{6}\pi$



$l=r\theta$

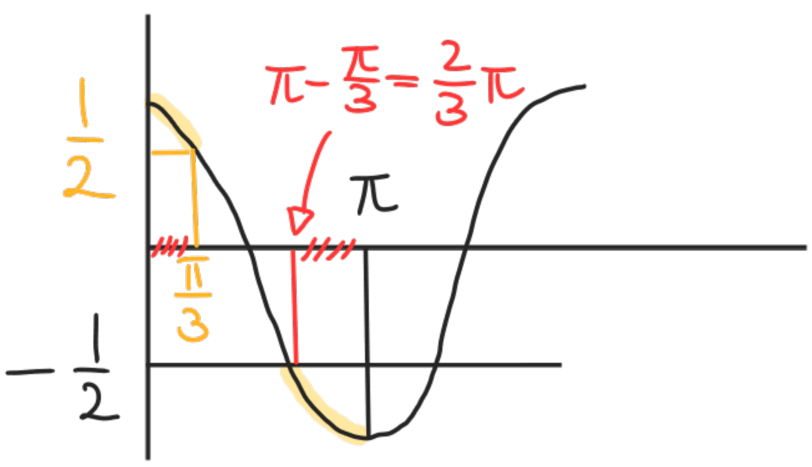
$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$

$15\pi=\frac{1}{2}\times6^2\times\theta$

$\theta=\frac{15}{18}\pi=\frac{5}{6}\pi$

4. $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$일 때, 방정식 $\cos x=-\frac{1}{2}$ 의 해는? [3점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ $\frac{3}{4}\pi$ ④ $\frac{5}{6}\pi$ ⑤ π



5. 다음은 상용로그표의 일부이다.

수	···	4	5	6	···
⋮		⋮	⋮	⋮	
3.1	···	.4969	.4983	.4997	···
3.2	···	.5105	.5119	.5132	···
3.3	···	.5237	.5250	.5263	···

$\log(3.14\times10^{-2})$의 값을 위의 표를 이용하여 구한 것은? [3점]

① -2.5119 ② -2.5031 ③ -2.4737
④ -1.5119 ⑤ -1.5031

$\log 3.14 + \log 10^{-2}$

$= 0.4969 - 2$

$= -1.5031$

6. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\cos\theta=-\frac{2}{3}$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{3}$

Sin	All
tan	Cos

$\Leftarrow \sin\theta<0$

$\cos^2\theta=\frac{4}{9}$

$\sin^2\theta=\frac{5}{9}$

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

7. $(\sqrt{2})^{1+\log_2 3}$의 값은? [3점]

① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{14}$

$(\sqrt{2})^{\log_2 2+\log_2 3} = (\sqrt{2})^{\log_2 6}$

$= 2^{\frac{1}{2}\times\log_2 6}$

$= 2^{\log_2 6^{\frac{1}{2}}}$

$= (6^{\frac{1}{2}})^{\log_2 2}$

$= \sqrt{6}$

8. $-1 \le x \le 2$에서 함수 $f(x)=a\times 2^{2-x}+b$의 최댓값이 5, 최솟값이 -2일 때, $f(0)$의 값은? (단, $a>0$이고, a와 b는 상수이다.) [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

$-1\le x\le 2$ 이면 $0\le 2-x\le 3$

$M = a\times 2^3+b$, $8a+b=5$

$m = a\times 2^0+b$, $-)\ a+b=-2$

$7a=7$

$a=1$, $b=-3$

$f(0)=a\times 2^2+b=1$

$=0$ 점근선

9. 두 상수 a, b에 대하여 함수 $y=\log_2(x-a)+1$의 그래프가 점 $(7, b)$를 지나고 점근선이 직선 $x=3$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

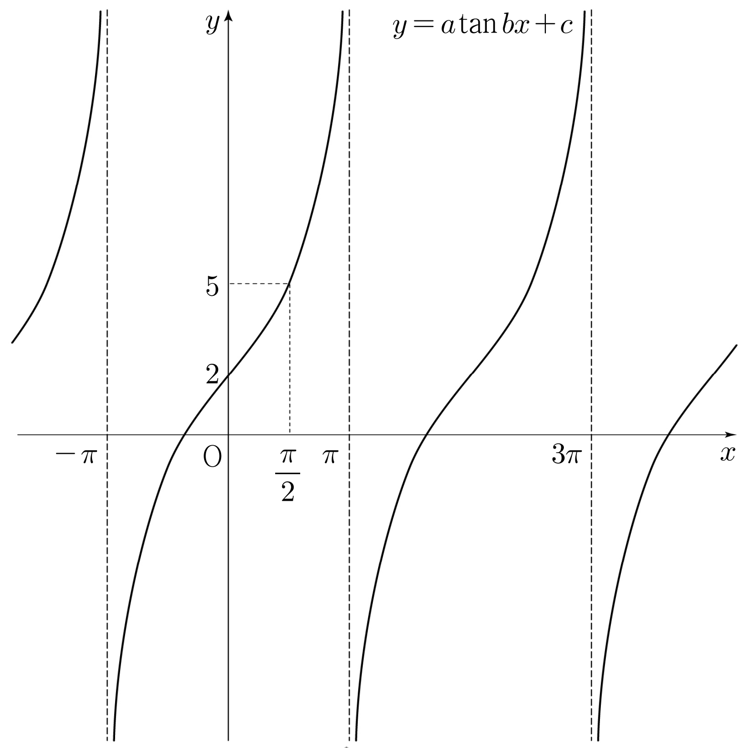
① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

점근선 $x=a$ $\therefore a=3$

$(7,b)$ 대입 $b=\log_2(7-3)+1$

$=2+1=3$

10. 세 양수 a, b, c에 대하여 함수 $y=a\tan bx+c$의 그래프가 그림과 같을 때, $a\times b\times c$의 값은? [3점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

주기 $=\pi-(-\pi)=2\pi=\frac{\pi}{|b|}$ $b=\frac{1}{2}$

$x=0$ 대입 $a\tan 0+c=2$ $c=2$

$x=\frac{\pi}{2}$ 대입 $a\tan\frac{\pi}{4}+2=5$ $a=3$

11. 방정식 $2^{x-6}=\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}$ 의 모든 해의 합은? [3점]

① $-\frac{9}{2}$ ② $-\frac{7}{2}$ ③ $-\frac{5}{2}$ ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

$$2^{x-6}=2^{-2x^2}$$

$$x-6=-2x^2$$

$$2x^2+x-6=0$$

12. 주어진 채널을 통해 신뢰성 있게 전달할 수 있는 최대 정보량을 채널용량이라 한다. 채널용량을 C, 대역폭을 W, 신호전력을 S, 잡음전력을 N이라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$C=W\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$$

대역폭이 15, 신호전력이 186, 잡음전력이 a인 채널용량이 75일 때, 상수 a의 값은? (단, 채널용량의 단위는 bps, 대역폭의 단위는 Hz, 신호전력과 잡음전력의 단위는 모두 Watt이다.) [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$$75=15\times\log_2\left(1+\frac{186}{a}\right)$$

$$5=\log_2\left(1+\frac{186}{a}\right)$$

$$1+\frac{186}{a}=2^5=32$$

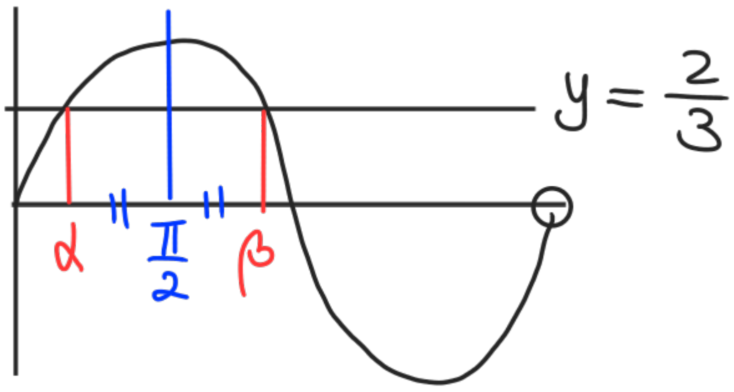
$$\frac{186}{a}=31$$

$$a=6$$

13. $0 \le x < 2\pi$일 때, 부등식 $3\sin x - 2 > 0$의 해가 $\alpha < x < \beta$이다. $\cos(\alpha+\beta)$의 값은? [3점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

$\sin x > \frac{2}{3}$



$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2}$, $\alpha+\beta = \pi$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\pi = -1$

14. $x > 0$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (0 < x \le 1) \\ \log_3 x & (x > 1) \end{cases}$$

에 대하여 $f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right)=2$를 만족시키는 모든 양수 t의 값의 합은? [4점]

① $\frac{76}{9}$ ② $\frac{79}{9}$ ③ $\frac{82}{9}$ ④ $\frac{85}{9}$ ⑤ $\frac{88}{9}$

① $t>1$ 일 때 $0<\frac{1}{t}<1$

$f(t) = \log_3 t$, $f(\frac{1}{t}) = 0$

$\log_3 t = 2$, $t = 3^2 = 9$

② $0<t<1$ 일때 $\frac{1}{t} > 1$

$f(t) = 0$, $f(\frac{1}{t}) = \log_3 \frac{1}{t}$

$\log_3 \frac{1}{t} = 2$, $\frac{1}{t} = 3^2$

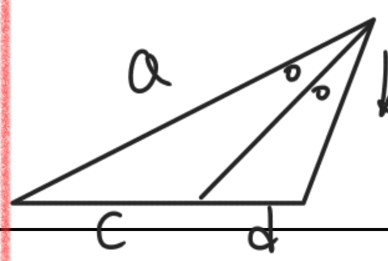
$t = \frac{1}{9}$

③ $t=1$ 이면

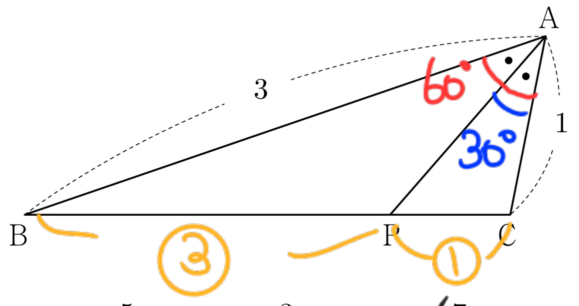
$f(t) + f(\frac{1}{t}) = 2f(1) = 0$

$\therefore 9 + \frac{1}{9} = \frac{82}{9}$

Check 각의 이등분선 성질 $a:b=c:d$



15. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=1$이고 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle BAC$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 APC의 외접원의 넓이는? [4점]



① $\frac{\pi}{4}$　② $\frac{5}{16}\pi$　③ $\frac{3}{8}\pi$　④ $\frac{7}{16}\pi$　⑤ $\frac{\pi}{2}$

$$\overline{BC}^2 = 3^2+1^2-2\times3\times1\times\cos 60^\circ = 7$$

$$\overline{BC} = \sqrt{7}$$

$\overline{BP}:\overline{PC} = 3:1$ 이므로

$$\overline{PC} = \frac{1}{4}\overline{BC} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

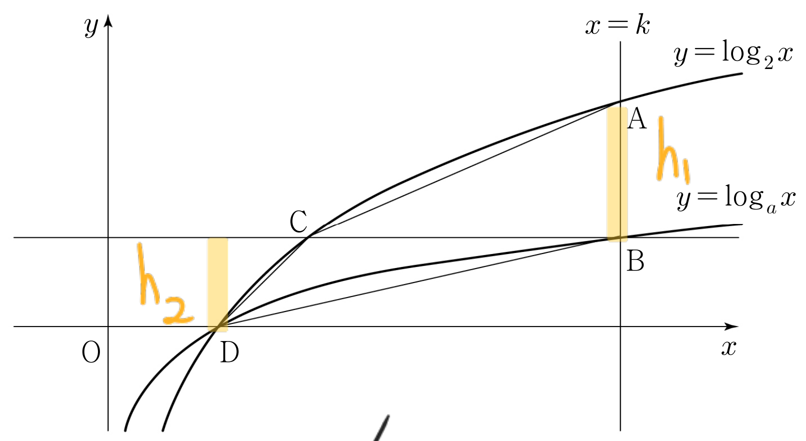
$\triangle APC$ 에서 사인법칙

$$\frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\sin 30^\circ} = 2R$$

$$R = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$S = \pi R^2 = \frac{7}{16}\pi$$

16. 상수 k에 대하여 그림과 같이 직선 $x=k\,(k>1)$이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_a x\,(a>2)$의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. 함수 $y=\log_2 x$의 그래프가 x축과 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 ACB와 삼각형 BCD의 넓이의 비는 $3:2$이다. 상수 a의 값은? [4점]



① $2\sqrt{2}$　② 4　③ $4\sqrt{2}$　④ 8　⑤ $8\sqrt{2}$

밑변 $\overline{BC}$ 공통 → 높이 비 $h_1 : h_2 = 3:2$

$B(k, \log_a k)$, $A(k, \log_2 k)$

$3h_2 = 2h_1$

$h_1 = \log_2 k - \log_a k$

$h_2 = \log_a k$

$$3\log_a k = 2\log_2 k - 2\log_a k$$

$$5\log_a k = 2\log_2 k$$

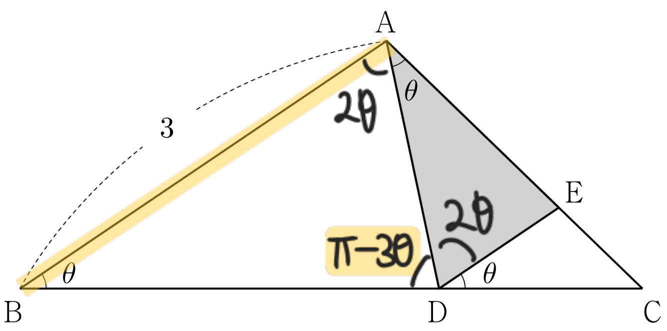
$$5\times\frac{\cancel{\log k}}{\log a} = 2\times\frac{\cancel{\log k}}{\log 2}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{\log a}{\log 2} = \log_2 a$$

$$a = 2^{\frac{5}{2}} = 4\sqrt{2}$$

Check ① 특수각 길이비에 예민하기
② 내접원 나오면 { 높이=r인 삼각형 3개로 분해 / 접선 길이 같다

17. $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 인 임의의 실수 θ에 대하여 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\angle ABC=\theta$, $\angle CAB=3\theta$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위에 점 D를 $\angle DAC=\theta$가 되도록 잡고, 선분 AC 위에 점 E를 $\angle EDC=\theta$가 되도록 잡는다.
다음은 삼각형 ADE의 넓이 $S(\theta)$를 구하는 과정이다.



$\angle ABC=\theta$, $\angle DAB=2\theta$이므로 $\angle BDA=\pi-3\theta$이다.
삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AB}}{\boxed{(가)}}$$

이므로 $\overline{AD}=\frac{3\sin\theta}{\boxed{(가)}}$ 이다.

또한 $\angle ADE=2\theta$이므로

$$\overline{DE}=\boxed{(나)}\times\overline{AD}^2$$

이다. 따라서 삼각형 ADE의 넓이 $S(\theta)$는

$$S(\theta)=\frac{9}{2}\times\left(\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)^3\times\boxed{(다)}$$

이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $p\times f\left(\frac{\pi}{6}\right)\times g\left(\frac{\pi}{12}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

(가) $\sin(\pi-3\theta)=\sin 3\theta$

(나) $\triangle ABD, \triangle DAE$ 닮음

$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AD}:\overline{DE}$

$\Leftrightarrow 3\overline{DE}=\overline{AD}^2$ (나) $=\frac{1}{3}$

(다) $\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin 2\theta$

$=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{3\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\sin 2\theta$

$\triangle ABD, \triangle DAE$ 닮음비 $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$

$\triangle DAE=\frac{9}{2}\times\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\sin 2\theta\times\left(\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)^2$

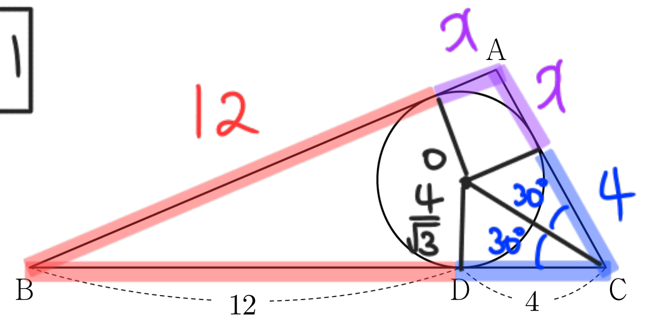
$=\frac{9}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)^3\times\sin 2\theta$ ← (다)

$\frac{1}{3}\times\sin\frac{\pi}{2}\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{6}$

18. 반지름의 길이가 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$인 원이 삼각형 ABC에 내접하고 있다. 원이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하고 $\overline{BD}=12$, $\overline{DC}=4$일 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이는? [4점]

① $\frac{71}{2}$ ② 36 ③ $\frac{73}{2}$ ④ 37 ⑤ $\frac{75}{2}$

풀이1



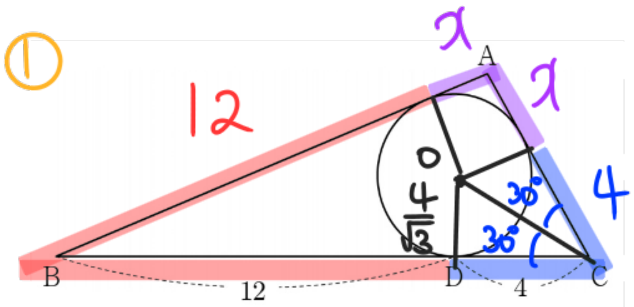
$\cos 60°=\frac{1}{2}=\frac{16^2+(x+4)^2-(x+12)^2}{2\times 16\times(x+4)}$

$16(x+4)=256-8(2x+16)$

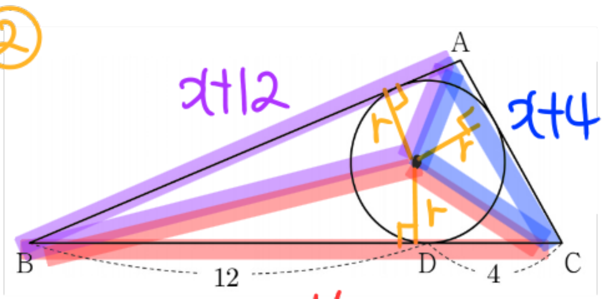
$32x=64$, $x=2$

풀이2

①



②



$r=\frac{4}{\sqrt{3}}$

① ②

$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$

$\frac{1}{2}\times 16\times(x+4)\times\sin 60°=\frac{1}{2}\times\frac{4}{\sqrt{3}}\times(16+x+4+x+12)$

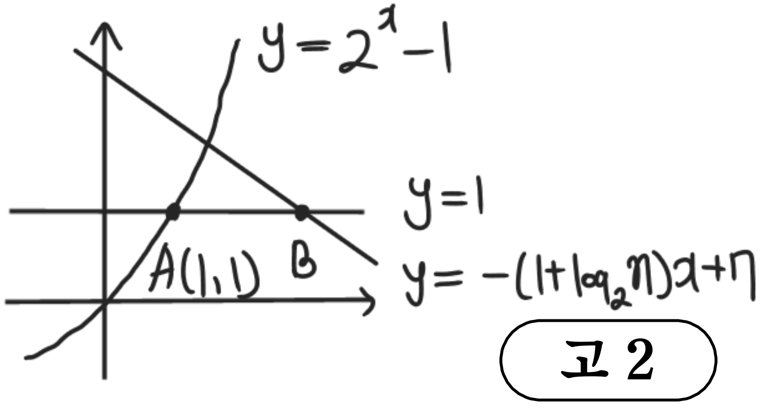
$(x+4)\times 4\sqrt{3}=\frac{4}{\sqrt{3}}\times(x+16)$

$3(x+4)=x+16$

$x=2$

(둘레 길이) $=(12+4+x)\times 2$

$=36$



19. 부등식

$$(\sqrt{2}-1)^m \ge (3-2\sqrt{2})^{5-n}$$

을 만족시키는 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는? [4점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

$3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$

$(\sqrt{2}-1)^m \geq (\sqrt{2}-1)^{2\times(5-n)}$

$0<\sqrt{2}-1<1$ 이므로

$m \leq 2\times(5-n)$

$m+2n \leq 10$

$n=1$ $1\leq m\leq 8$ 8개

$n=2$ $1\leq m\leq 6$ 6개

$n=3$ $1\leq m\leq 4$ 4개

$n=4$ $1\leq m\leq 2$ 2개

$\therefore$ 20개

20. 자연수 n에 대하여 직선 $y=1$이 곡선 $y=2^x-1$, 직선 $y=-(1+\log_2 n)x+7$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 두 점 A, B 사이의 거리를 $f(n)$이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(2)=2$

ㄴ. $f(n)\geq 1$을 만족시키는 n의 개수는 4이다.

ㄷ. $|f(n)-1|\geq \frac{2}{3}$를 만족시키는 n의 개수는 245이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

B 좌표 찾자.

ㄱ $-(1+\log_2 n)x+7=1$,

$(1+\log_2 n)x=6$, $x=\frac{6}{1+\log_2 n}=\frac{6}{\log_2 2n}$ >0 $(\because n\geq 1)$

$n=2$ 일때 $B(3,1)$, $f(2)=2$

ㄴ $f(n)=\left|\boxed{\frac{6}{\log_2 2n}-1}\right|\geq 1$, $\boxed{}\geq 1$ 또는 $\boxed{}\leq -1$

그런데 $\frac{6}{\log_2 2n}>0$ 이므로 $\boxed{\frac{6}{\log_2 2n}-1}\geq 1$

$\frac{6}{\log_2 2n}\geq 2$, $0<\log_2 2n\leq 3$

$0<2n\leq 8$, $n=1,2,3,4$

~~ㄷ~~ $|f(n)-1|\geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow f(n)\geq \frac{5}{3}$ 또는 $f(n)\leq \frac{1}{3}$

① $\frac{6}{\log_2 2n}-1\geq \frac{5}{3}$, $\rightarrow \log_2 2n\leq \frac{9}{4}$, $2n\leq 2^{\frac{9}{4}}$

$n\leq 2^{\frac{5}{4}}$ $\therefore \boxed{n=1,2}$

① 2개

② $\boxed{\frac{6}{\log_2 2n}-1}\leq -\frac{5}{3}$, $\rightarrow$ X

$\log_2 2n>0$

>-1

③ $-\frac{1}{3}\leq \frac{6}{\log_2 2n}-1\leq \frac{1}{3}$, $\rightarrow \frac{2}{3}\leq \frac{6}{\log_2 2n}\leq \frac{4}{3}$

$\frac{9}{2}\leq \log_2 2n\leq 9$

$2^{\frac{9}{2}}\leq 2n\leq 2^9$

$\sqrt{128}=2^{\frac{7}{2}}\leq n\leq 2^8=256$

$\boxed{12\leq n\leq 256}$

① ③ 합쳐서 247개

③ $256-12+1=245$개

Check 역함수, 원점대칭 눈썰미

(지수, 로그는 역함수 확인 필수)

21. 상수 k에 대하여 정의역과 공역이 각각 실수 전체의 집합인 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{-x-2}-2 & (x<k) \\ -\log_2(x+2)-2 & (x\geq k) \end{cases}$$

역함수

가 일대일대응이다. 함수 $g(x)$를

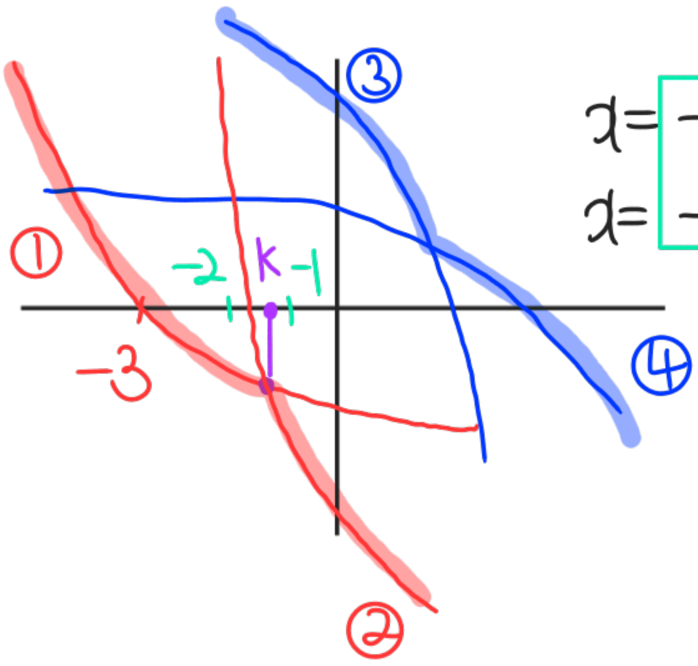
$$g(x)=\begin{cases} \log_2(2-x)+2 & (x<-k) \\ -2^{x-2}+2 & (x\geq -k) \end{cases}$$

역함수

원점 대칭

라 할 때, $f(a)\leq b\leq g(a)$를 만족시키는 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? (단, $-2\leq a\leq 2$) [4점]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39



	①		②
$x=-2$	-1	$<$	∞
$x=-1$	$-\frac{3}{2}$	$>$	-2

$a=-2$: $f(-2)=2^0-2=-1$

$g(-2)=\log_2 4+2=4$

$-1\leq b\leq 4$ ∴ 6가지

$a=-1$: $f(-1)=-\log_2 1-2=-2$

$g(-1)=\log_2 3+2=3.\text{xx}$

$-2\leq b\leq 3$ ∴ 6가지

$a=0$: $f(0)=-\log_2 2-2=-3$

$g(0)=\log_2 2+2=3$

$-3\leq b\leq 3$ ∴ 7가지

원점대칭이므로 $a=1$인 경우는 $a=-1$와 같이 6가지

$a=2$ 〃 $a=-2$ 〃 6가지

∴ $6+6+7+6+6=31$

단답형

22. $5^{\frac{7}{3}}\div 5^{\frac{1}{3}}$의 값을 구하시오. [3점]

$5^{\frac{7}{3}-\frac{1}{3}}=5^2=25$

$\boxed{25}$

23. 방정식 $\log_3(x-2)=1$의 해를 구하시오. [3점]

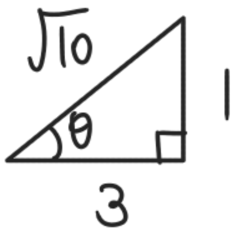
$\log_3(x-2)=1=\log_3 3$

$x-2=3$

$x=5$

$\boxed{5}$

24. $\tan\theta=\frac{1}{3}$ 일 때, $50\cos^2\theta$ 의 값을 구하시오. [3점]



$\cos\theta=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\cos^2\theta=\frac{9}{10}$

$50\cos^2\theta=45$

$\boxed{45}$

25. 함수 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+k$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{6},\,2\right)$ 를 지날 때, 상수 k 의 값을 구하시오. [3점]

$2=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)+k$

$2=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+k$

$2=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+k$

$k=3$ $\boxed{3}$

26. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프와 일치한다. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(1,\,5)$ 를 지날 때, $f(m)$ 의 값을 구하시오. (단, m 은 상수이다.) [4점] ① ②

$y=\log_2 x$

$\downarrow$ ①

$y=\log_2(x-m)$

$\downarrow$ ②

$x=\log_2(y-m) \Leftrightarrow y-m=2^x$

$\therefore f(x)=2^x+m \leftarrow (1,5)$

$5=2+m$

$m=3$

$f(m)=f(3)=2^3+3=11$

$\boxed{11}$

Check
=k 없으면 직접붙이기

27. 1보다 큰 세 실수 a, b, c가

$$\log_a b = \frac{\log_b c}{2} = \frac{\log_c a}{3} = k \ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킬 때, $120k^3$의 값을 구하시오. [4점]

$\log_a b = k$, $\quad b = a^k$

$\log_b c = 2k$, $\quad c = b^{2k}$

$\log_c a = 3k$, $\quad a^1 = c^{3k} = b^{2k\times 3k} = a^{k\times 2k\times 3k}$

$\therefore 1 = 6k^3$

$120k^3 = 20 \quad \boxed{20}$

28. 두 자연수 a, b에 대하여 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(a, \log_4 b)$, $\mathrm{B}(1, \log_8 \sqrt[4]{27})$이 있다. 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점이 곡선 $y = -\log_4(3-x)$ 위에 있고, 집합 $\{n \mid b < 2^n \times a \le 32b,\ n\text{은 정수}\}$의 모든 원소의 합은 25이다. $a+b$의 최댓값을 구하시오. [4점]

$\overline{AB}$ 2:1 외분점 $(2-a,\ 2\log_8 \sqrt[4]{27} - \log_4 b)$

$= (2-a,\ \frac{2}{3}\log_2 3^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\log_2 b)$

$y = -\log_4(3-x)$에 대입

$\frac{2}{3}\log_2 3^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\log_2 b = -\log_4(a+1)$

$\log_2 (3^{\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}} \div \sqrt{b}) = \log_2 (a+1)^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{3^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a+1}}$, $\quad 3(a+1) = b$

$b < 2^n \times a \le 32b = 2^5 b$

$\log_2 \frac{b}{a} < n \le \log_2 \frac{b}{a} + 5$

n은 5개 $m-2, m-1, m, m+1, m+2$

합은 $5m = 25$, $m = 5$

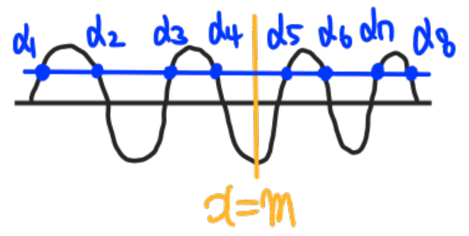
$\log_2 \frac{3(a+1)}{a} < 3, 4, 5, 6, 7 \le \log_2 \frac{3(a+1)}{a} + 5$

$2 \le \log_2 \frac{3(a+1)}{a} < 3$

$4 \le \frac{3(a+1)}{a} < 8$, $\quad \frac{3}{5} < a \le 3$

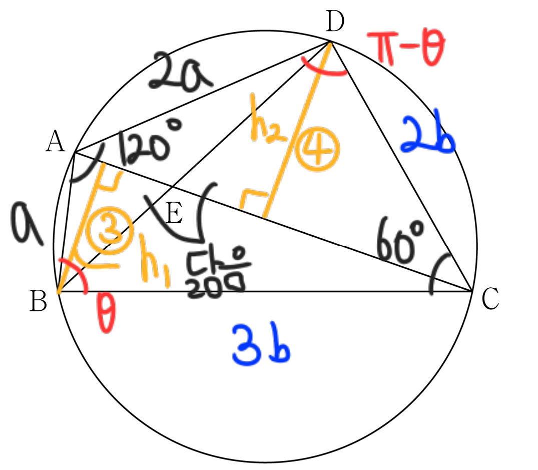
$a+b = 4a+3$의 최댓값은 $\boxed{15}$ $(a=3)$

Check 대칭성 이용한 실근의 합



$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_8 = m \times 8$

29. $\overline{\mathrm{DA}}=2\overline{\mathrm{AB}}$, $\angle \mathrm{DAB}=\frac{2}{3}\pi$이고 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 사각형 ABCD가 있다. 두 대각선 AC, BD의 교점을 E라 할 때, 점 E는 선분 BD를 3:4로 내분한다. 사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



닮음이므로 $h_1 : h_2 = 3:4$

따라서 $\triangle ABC : \triangle ADC = 3:4$

$\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{a}\times\overline{BC}\sin\cancel{\theta} : \cancel{\frac{1}{2}}\times 2\cancel{a}\times\overline{CD}\sin\cancel{(\pi-\theta)} = 3:4$

$6\overline{CD} = 4\overline{BC}$

$\overline{BC} : \overline{CD} = 3:2$

$\frac{\overline{BD}}{\sin 60^\circ} = 2\times 1$, $\overline{BD} = \sqrt{3}$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{4b^2+9b^2-\overline{BD}^2}{2\times 2b\times 3b}$

$6b^2 = 13b^2 - 3$

$7b^2 = 3$

$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2} = \frac{a^2+4a^2-\overline{BD}^2}{2\times a\times 2a}$

$-2a^2 = 5a^2 - 3$

$7a^2 = 3$

$S = \triangle ABD + \triangle CDB$

$= \frac{1}{2}\times a\times 2a\times\sin 60^\circ + \frac{1}{2}\times 2b\times 3b\times\sin 120^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}b^2 = \frac{6\sqrt{3}}{7}$ $\boxed{13}$

30. 두 자연수 a, b에 대하여 세 함수

$f(x)=\cos\pi x$, $g(x)=\sin\pi x$, $h(x)=ax+b$

가 다음 조건을 만족시킨다.

$h(-1) = -a+b$

(가) $0\le x\le 4$일 때, 방정식 $(f\circ h)(x)=(h\circ g)\left(\frac{3}{2}\right)$의 서로 다른 실근의 개수는 홀수이다.

(나) $0\le x\le 4$일 때, 방정식 $(f\circ h)(x)=(h\circ g)(t)$의 서로 다른 모든 실근의 합이 56이 되도록 하는 실수 t가 존재한다.

$\cos(\pi(ax+b))$

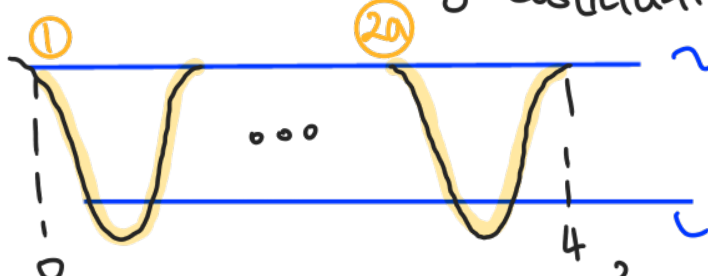
$= a\sin\pi t + b$

$\frac{a\times b}{\cos^2\pi t}$의 값을 구하시오. [4점]

$0\le x\le 4$

1) b 짝수일때

$y=\cos(\pi(ax+b))=\cos(\pi a x)$



→ 홀수개 ok, $-a+b=1$

→ 짝수개, (가)조건 x

$= \frac{2}{a}\times 2a$

주기 개수

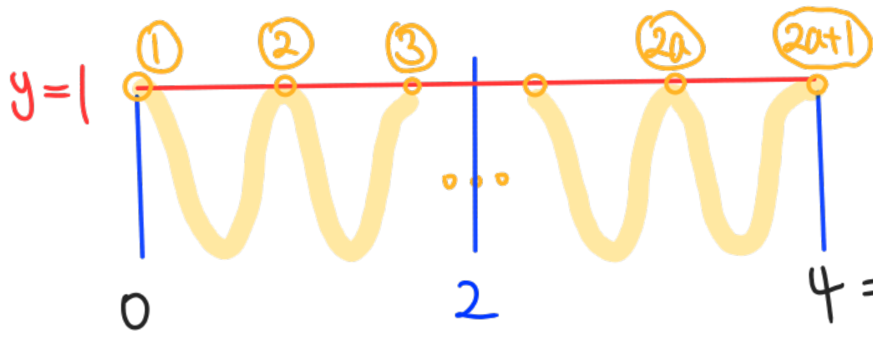
$\therefore b=a+1$, a는 홀수

$0\le x\le 4$ 일때

$y=\cos(\pi(ax+b))=\cos(\pi a x) = a\sin\pi t + a+1$

$= a(\sin\pi t+1)+1 \ge 1$

$=1$



$4 = \frac{2}{a}\times 2a$

주기 개수

실근 $2a+1$개

실근 합 $2\times(2a+1) = 56$ ($\because$ (나))

$2a+1 = 28$, 자연수 X

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

30. 두 자연수 a, b에 대하여 세 함수

$$f(x)=\cos \pi x,\ g(x)=\sin \pi x,\ h(x)=ax+b$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x \le 4$일 때, 방정식 $(f \circ h)(x)=(h \circ g)\left(\frac{3}{2}\right)$의 서로 다른 실근의 개수는 홀수이다.

(나) $0 \le x \le 4$일 때, 방정식 $(f \circ h)(x)=(h \circ g)(t)$의 서로 다른 모든 실근의 합이 56이 되도록 하는 실수 t가 존재한다.

$\dfrac{a \times b}{\cos^2 \pi t}$의 값을 구하시오. [4점]

$h(-1)=-a+b$

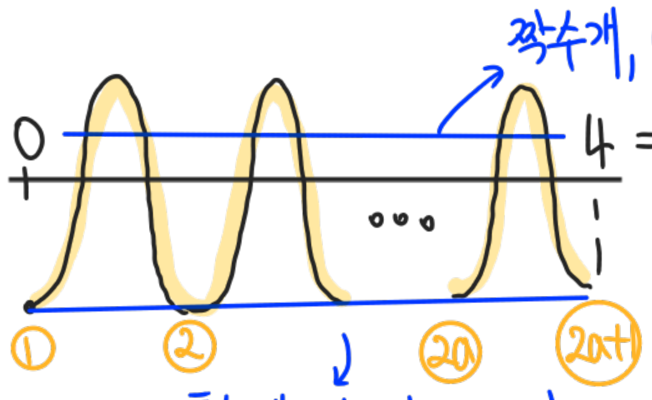
$\cos(\pi(ax+b))$

$=a\sin\pi t+b$

$0 \le x \le 4$

2) b 홀수일때

$y=\cos(\pi(ax+b))=\cos(\pi ax+\pi)$

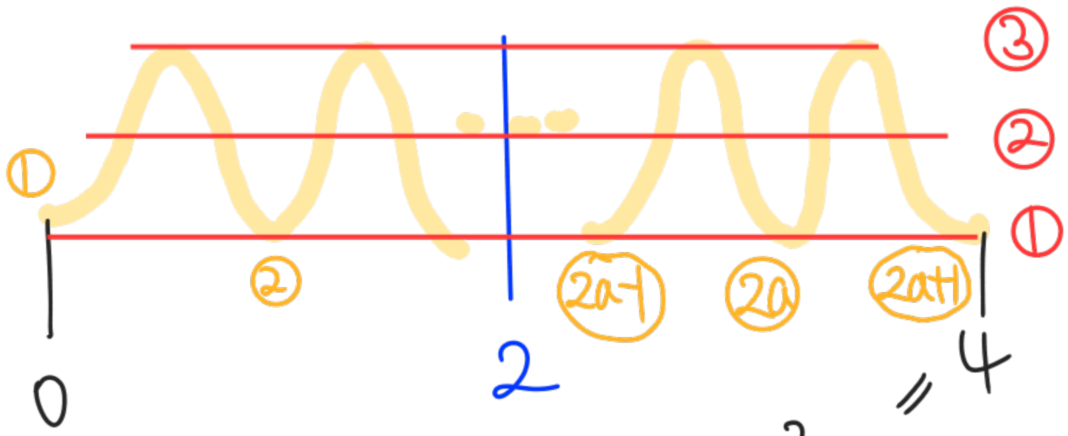


$\therefore b=a-1$, a는 짝수

$y=\cos(\pi(ax+b))=\cos(\pi ax+\pi)$

$=a\sin\pi t+a-1$

$=a(\sin\pi t+1)-1 \geq -1$



③ 실근 $2a$ 개

② 실근 $4a$ 개

① 실근 $(2a+1)$개

① $h\circ g(t)=a(\sin\pi t+1)-1=-1$

실근합 $2\times(2a+1)=56$ ($\because$ (나))

$2a+1=28$ 자연수 X

② $h\circ g(t)=a(\sin\pi t+1)-1<1$

$-1<$

실근합 $2\times 4a=56$ ($\because$ (나))

$a=7$ 짝수 X

③ $h\circ g(t)=a(\sin\pi t+1)-1=1$

실근 합 $2\times 2a=56$ ($\because$ (나))

$a=14$

$b=a-1=13$

$14(\sin\pi t+1)-1=1$

$\sin\pi t=-\frac{6}{7}$

$\cos^2\pi t=\frac{13}{49}$

$\therefore \dfrac{ab}{\cos^2\pi t}=14\times 13\times\frac{49}{13}$

$=686$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

$\boxed{686}$