제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$　② 2　③ $2\sqrt{2}$　④ 4　⑤ $4\sqrt{2}$

$$2^{\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})} = 2^2 = 4$$

2. 함수 $f(x)$가

$$f'(x) = 3x^2 - 2x, \quad f(1) = 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$f(x) = x^3 - x^2 + C$

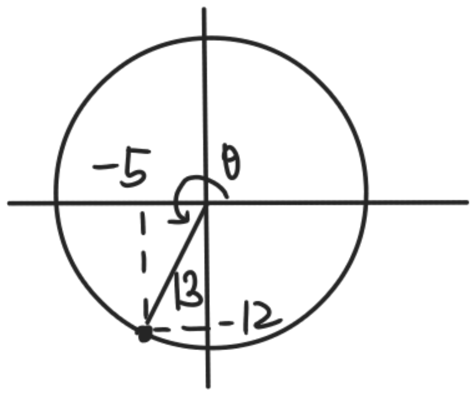
$x=1$　$1 = 1 - 1 + C$, $C = 1$

$f(x) = x^3 - x^2 + 1$

$f(2) = 8 - 4 + 1 = 5$

3. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta = \frac{12}{5}$일 때, $\sin\theta + \cos\theta$의 값은? [3점]

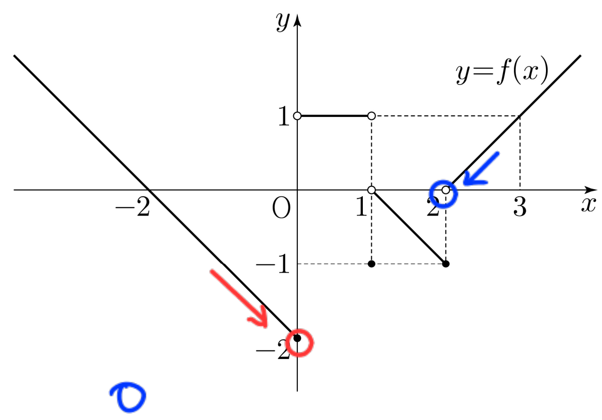
① $-\frac{17}{13}$　② $-\frac{7}{13}$　③ 0　④ $\frac{7}{13}$　⑤ $\frac{17}{13}$



$\sin\theta = \frac{-12}{13}$

$\cos\theta = \frac{-5}{13}$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$$\overset{-2}{\lim_{x \to 0-} f(x)} + \overset{0}{\lim_{x \to 2+} f(x)}$$의 값은? [3점]

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2+3)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$g'(x)=2x\,f(x)+(x^2+3)f'(x)$

$g'(1)=2f(1)+4f'(1)$

$=4+4$

$=8$

Check 이차함수 넓이 공식

6. 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\boxed{\text{풀이1}}$

$3x^2-x=5x$

$3x(x-2)=0$, $x=0, 2$

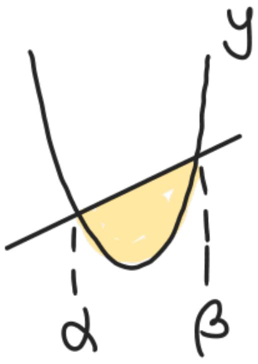
$\int_0^2 5x-(3x^2-x)\,dx$

$=\left[-x^3+3x^2\right]_0^2=4$

$\boxed{\text{풀이2}}$

$y=ax^2+bx+c$

$y=mx+n$



$S=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$

$S=\frac{3}{6}\times 2^3=4$

7. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_6=2(S_3-S_2)$$

일 때, S_{10}의 값은? [3점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

$a_6=2a_3$

$2+5d=2(2+2d)$

$d=2$

$S_{10}=(2a_1+(n-1)d)\times\frac{n}{2}$

$=(4+9\times2)\times5$

$=110$

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6 & (x<a) \\ 2x-a & (x\ge a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$\lim_{x\to a-}\{f(x)\}^2 = (-2a+6)^2$

$\lim_{x\to a+}\{f(x)\}^2 = (2a-a)^2$

$(2a-6)^2-a^2=0$

$(a-6)(3a-6)=0$

$a=6,\ 2$

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이고 $a_{12}=\dfrac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

×8 역수

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫

··· 2 $\frac{1}{2}$ 4 $\frac{1}{4}$ 2 $\frac{1}{2}$

a_1 a_4

주기 4

10. $n\ge 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x,\quad y=-\log_n(x+3)+1$$

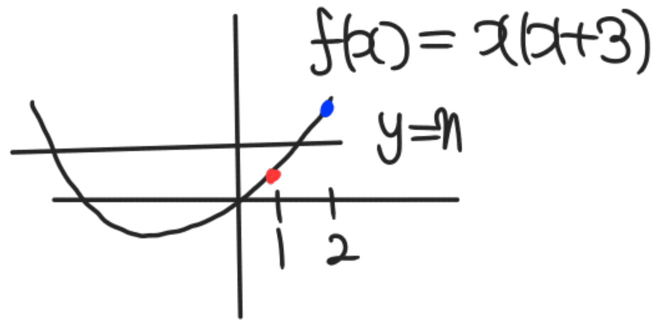
이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

$\log_n x = -\log_n(x+3)+1$

$\log_n x(x+3)=1$

$x(x+3)=n$



$f(1) < n < f(2)$

$4 < n < 10$

$5+6+7+8+9$

$= 7\times 5$

$= 35$

11. 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$$

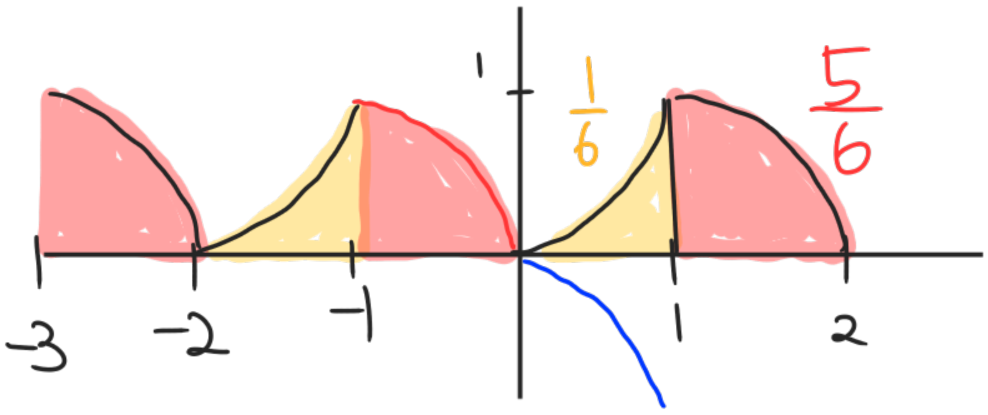
을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$의 값은? [4점]

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 1)\end{cases}$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다. 주기

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

$y=f(x) \xrightarrow{x축대칭} y=-f(x) \xrightarrow[y+1]{x-1} y=-f(x+1)+1$

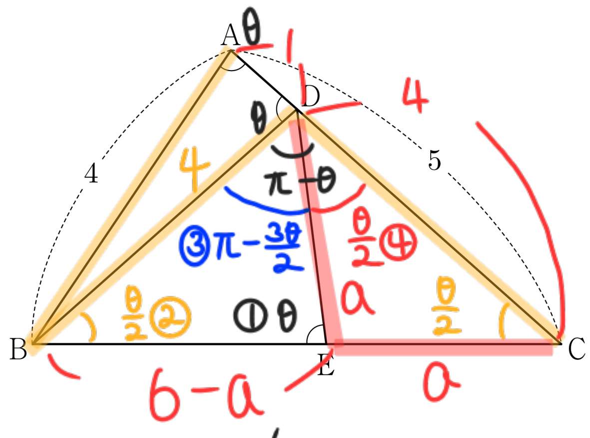


$\frac{5}{6}+2=\frac{17}{6}$

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$$

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

$\overline{AD}=2\overline{AB}\cos\theta=1$ → △DBC 이등변

① ② ③ ④ 순 각표시 → △DEC 이등변

$\overline{BC}^2=4^2+5^2-2\times4\times5\cos\theta$

$=16+25-5=36$, $\overline{BC}=6$

△DBC, △DCE 에서

$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{3}{4}=\frac{2}{a}$

$a=\frac{8}{3}$

Check 절댓값과 미분가능성
+α (위/아래로 접기 섞임)

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0,\,1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

K=1, 4, 9, 16 일 때 $\sqrt{K}$는 자연수

$f(\sqrt{K})=1$

그외일때 $\sqrt{K}=n+0.xx$

$f(\sqrt{K})=f(n.xx)=f(0.xx)=3$

$$\frac{1\times(1+4+9+16)+3\times(\underbrace{2+3+5+6+7+8+10+\cdots+20}_{1,4,9,16 추가})}{3}$$

$$=\frac{-2\times(1+4+9+16)+3\times(1+2+3+\cdots+20)}{3}$$

$$=\frac{-2\times 30}{3}+\frac{21\times 20}{2}$$

$$=-20+210$$

$$=190$$

14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$$g(x)=\begin{cases} |f(x-p)+q| & x>0 \\ -|f(x-p)+q| & x<0 \end{cases}$$

$x=0$에서 연속이므로

$g(0)=|f(-p)+q|=-|f(-p)+q|=0$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$

$y=f(x)$

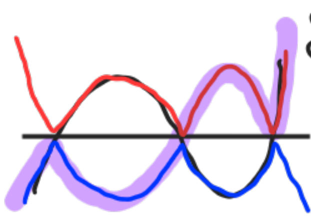
$f(-1)=-7$

$f(3)=-39$

$(-1,-7)\to(p-1,\,q-7)$

$(3,-39)\to(p+3,\,q-39)$

①

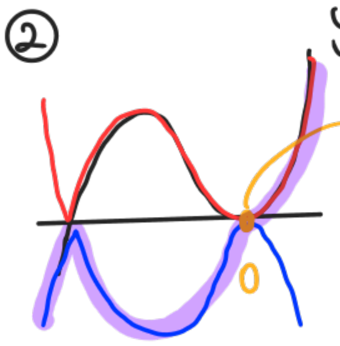


$y=f(x-p)+q$

미분 불가 두개

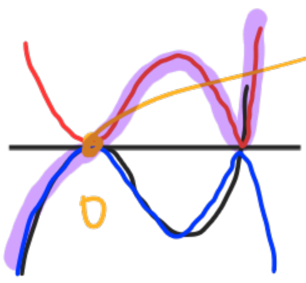
②

$y=f(x-p)+q$



$(\underbrace{p+3}_{=0},\,\underbrace{q-39}_{=0})$ p가 음수

③



$(\underbrace{p-1}_{=0},\,\underbrace{q-7}_{=0})$ $p=1$, $q=7$

15. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2} - t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2} - t\right) = 0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t) + \beta(t) = 5$이다.

ㄴ. $\{t \mid \beta(t) - \alpha(t) = \beta(0) - \alpha(0)\} = \left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

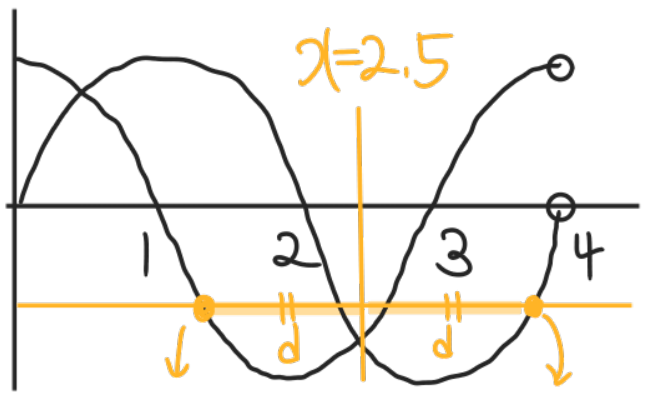
ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2 = \frac{1}{3}$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$\sin\frac{\pi x}{2} = t$ 또는 $\cos\frac{\pi x}{2} = t$

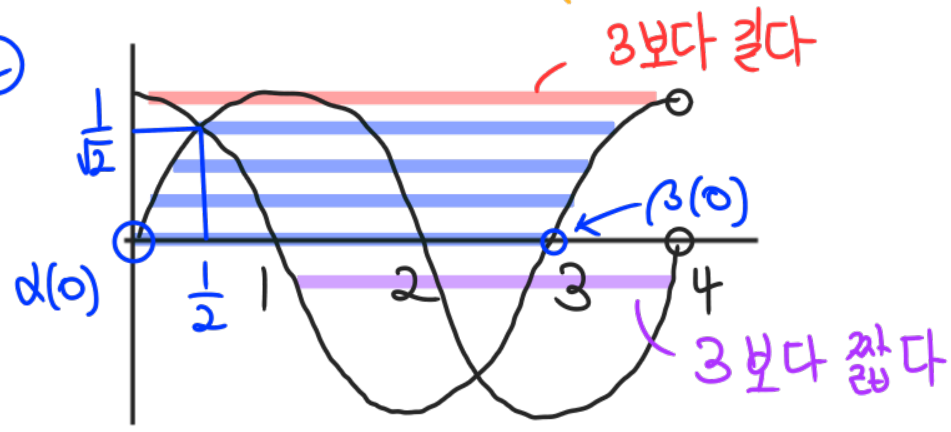
└ 주기4

ㄱ

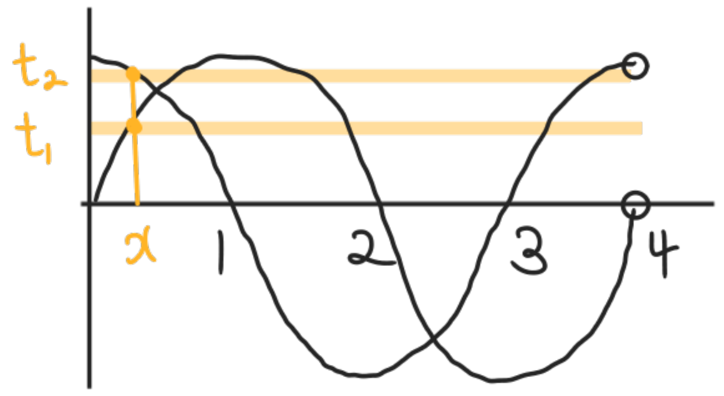


$\alpha(t) = 2-d$　$\beta(t) = 2+d$

ㄴ



ㄷ



$t_2 = \cos x$, $t_1 = \sin x$

$\cos x - \sin x = \frac{1}{2}$

$1 - 2\cos x \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow t_1 \times t_2 = \frac{3}{8}$

단답형

16. $\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24$의 값을 구하시오. [3점]

$\log_4 \frac{2}{3} \times 24 = \log_4 16 = 2$

$\boxed{2}$

17. 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 12$가 $x = a$에서 극소일 때, $a + f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$a = 1$

$f(a) = f(1) = 10$

$1 + 10 = 11$

$\boxed{11}$

18. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2 = 36, \quad a_7 = \frac{1}{3}a_5$$

일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

$$a_5 r^2 = \frac{1}{3} a_5$$

$$r^2 = \frac{1}{3}$$

$$a_6 = a_2 \times r^4$$

$$= 36 \times \frac{1}{9} = 4 \qquad \boxed{4}$$

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

$$S(x) = 0 + \int_0^x v(t)\,dt$$

$$= x^3 - 2x^2 + kx$$

$$S(1) = k - 1 = -3 \qquad k = -2$$

$$S(3) - S(1) = \int_1^3 v(t)\,dt$$

$$= \left[t^3 - 2t^2 - 2t\right]_1^3$$

$$= (27 - 18 - 6) - (1 - 2 - 2)$$

$$= 3 + 3$$

$$= 6 \qquad \boxed{6}$$

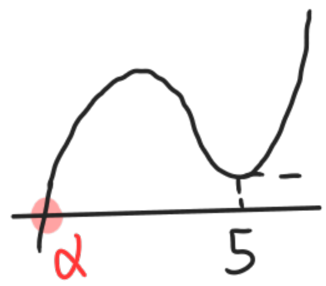
20. 실수 a와 함수 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 3$에 대하여 함수

$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^4\,dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45$$

$$= 3(x-3)(x-5)$$



$f(5) = 53$

$$g(x) = f(x)\int_a^x f(t)^4\,dt - \int_a^x f(t)^5\,dt$$

$$g'(x) = \underbrace{f'(x)}\,\underbrace{\int_a^x f(t)^4\,dt}$$

ㄴ $f(t)^4 \geq 0$ ($\alpha = 0$ 일때 0)

↓ 증가함수

$\therefore \int_a^x f(t)^4\,dt = 0$ 해는 $x = a$ 유일

$g'(x) = 0 \iff x = 3, 5$ 또는 a

$g(x)$가 유일극값 → $g'(x) = 0$은 실근1 + 중근1

$a = 3$ 또는 $a = 5$

$\boxed{8}$

Check 거듭제곱근의 정의
x는 a의 n제곱근 $\Leftrightarrow x^n=a$.
+ n 홀짝, a 부호에 따른 개수

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

$x^n-64=0$ 근 α, β

$f(x)=0$ 근 α, β

$x^n=64$, n 홀수면 실근 하나라서 X
n 짝수면 $x=\pm 2^{\frac{6}{n}}$

$n=2$ $\quad x=\pm 2^3$

$f(x)=(x-8)(x+8)$, $f(0)=-64$

$n=4$ $\quad x=\pm 2^{\frac{3}{2}}$

$f(x)=(x-2^{\frac{3}{2}})(x+2^{\frac{3}{2}})$, $f(0)=-8$

⋮ 일반화

$f(x)=(x-2^{\frac{6}{n}})(x+2^{\frac{6}{n}})$

$f(0)=-2^{\frac{12}{n}}$

n: 2, 4, 6, ~~8~~, ~~10~~, 12, ~~14 ...~~

$f(0)$: $-2^6, -2^3, -2^2, -2^{\frac{3}{2}}, -2^{\frac{6}{5}}, -2^1$, $0<\frac{12}{n}<1$

$\boxed{24}$

22. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

α(중근), β

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. → $x=\alpha, \beta$ 대입하면 근임을 확인가능

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$f(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)$

$f(x-f(x))=0$

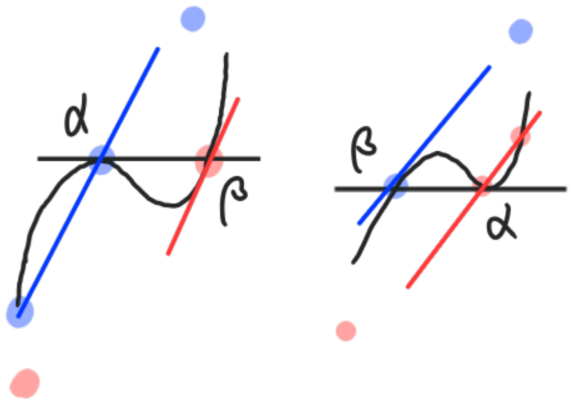
$x=\alpha$ 대입하면 $f(\alpha-f(\alpha))=f(\alpha-0)=0$.

α, β가 근이다.

$x-f(x)=\alpha, \beta$

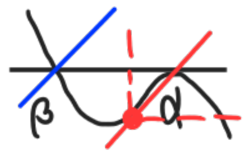
$f(x)=x-\alpha$, $x-\beta$

① $a>0$

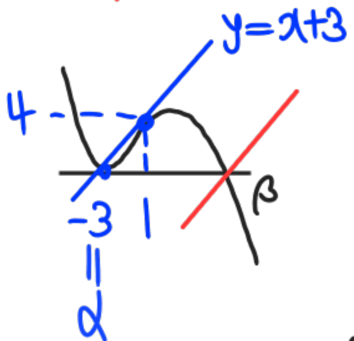


→ 최소 5개

② $a<0$



$-4<0$ 모순



$f(x)=a(x+3)^2(x-\beta)$ → $(x+3)^2$

$f(x)=a(x+3)(x-1)^2+(x+3)$

$=(x+3)\{a(x-1)^2+1\}$

$x=-3$, $16a+1=0$, $a=-\frac{1}{16}$

$f(x)=(x+3)\{-\frac{1}{16}(x-1)^2+1\}$

$f(0)=3\times\frac{15}{16}=\frac{45}{16}$

$\boxed{61}$

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(2x+1)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는? [2점]

① 20 ② 40 ③ 60 ④ 80 ⑤ 100

$_5C_3 \times (2x)^3 \times 1^2$

$= 80x^3$

24. 어느 동아리의 학생 20명을 대상으로 진로활동 A와 진로활동 B에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 진로활동 A와 진로활동 B 중 하나를 선택하였고, 각각의 진로활동을 선택한 학생 수는 다음과 같다.

(단위 : 명)

구분	진로활동 A	진로활동 B	합계
1학년	7	5	12
2학년	4	4	8
합계	11	9	20

이 조사에 참여한 학생 20명 중에서 임의로 선택한 한 명이 진로활동 B를 선택한 학생일 때, 이 학생이 1학년일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{11}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

25. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 선택할 때, 선택한 수가 3500 보다 클 확률은? [3점]

① $\frac{9}{25}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{11}{25}$ ④ $\frac{12}{25}$ ⑤ $\frac{13}{25}$

$5\ \underline{1\sim5}\ \underline{1\sim5}\ \underline{1\sim5} \rightarrow 5^3$

$4\ \underline{1\sim5}\ \underline{1\sim5}\ \underline{1\sim5} \rightarrow 5^3$

$3\ \underline{5}\ \underline{1\sim5}\ \underline{1\sim5} \rightarrow 5^2$

$$\frac{2\times5^3+5^2}{5^4}=\frac{11}{25}$$

26. 빨간색 카드 4장, 파란색 카드 2장, 노란색 카드 1장이 있다. 이 7장의 카드를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생이 있도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색 카드끼리는 서로 구별하지 않고, 카드를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 78 ② 84 ③ 90 ④ 96 ⑤ 102

1+3 1+1 1

빨 파 노

한장씩 미리 줄 학생 택1 A 1+ 1+ 1

B

C

A주고 남은 거 가진사람

$3 \times {}_3H_3 \times 3 = 9\,{}_5C_3 = 90$

A주고 남은 것

27. 주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던질 때, 나오는 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 같을 확률은? [3점]

0~4

① $\frac{3}{64}$ ② $\frac{5}{96}$ ③ $\frac{11}{192}$ ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{13}{192}$

1 $\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_1}_{동전} \times \underbrace{\frac{1}{36} \times 1}_{주사위}$ (1,1)

2 $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_2 \times \frac{1}{36} \times 2$ (1,2),(2,1)

3 $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_3 \times \frac{1}{36} \times 2$ (1,3),(3,1)

4 $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{36} \times 3$ (1,4),(2,2)(4,1)

$$\frac{1}{2^4 \times 36} \times (4\times1 + 6\times2 + 4\times2 + 1\times3)$$

$$= \frac{27}{2^4 \times 36} = \frac{3}{64}$$

28. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이하이면 나온 눈의 수를 점수로 얻고, 나온 눈의 수가 4 이상이면 0점을 얻는다. 이 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 할 때, 얻은 네 점수의 합이 4가 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [4점]

① 187 ② 190 ③ 193 ④ 196 ⑤ 199

0 위치 선택 후 4,5,6중 골라 넣기

3 1 0 0 　 ✓ 1 ✓ 3 　 ${}_4C_2 \times 3^2 \times 2$ $= 108$

2 2 0 0 　 ✓ 2 ✓ 2 　 ${}_4C_2 \times 3^2 \times 1$ $= 54$

1 배치 2배치

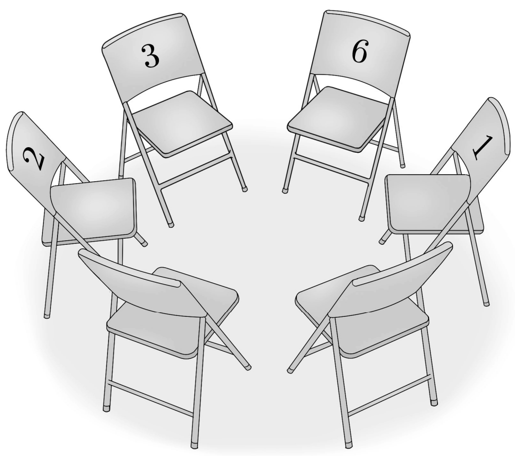
2 1 1 0 　 1 ✓ 1 _ 　 ${}_4C_1 \times 3 \times {}_3C_2 \times 1$ $= 36$

1 1 1 1 → 1가지

$108+54+36+1 = 199$

단답형

29. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



$12 = 2\times6 = 3\times4$

이웃 X 이웃 X

6

3

2

3 아무곳 4 위치 나머지 배열

$4\times2\times2$

$=16$

6

2

34

43

43

34

2 위치 3,4 배열 3,4 이웃 나머지 배열

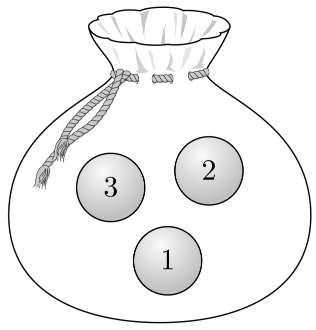
$2\times({}_4P_2-4)\times2$

$=32$

$16+32$ $\boxed{48}$

30. 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 5번 반복하여 확인한 5개의 수의 곱이 6의 배수일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$6=2\times3$



X : 2가 1번 이상 and 3이 1번 이상

X^c : 2가 0번 OR 3이 0번

A B

$P(X^c) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 - \left(\frac{1}{3}\right)^5$

1,3뽑기 1,2뽑기 A∩B, 1만뽑기

$= \frac{32+32-1}{3^5} = \frac{63}{3^5} = \frac{7}{27}$

$P(X) = \frac{20}{27}$

$\boxed{47}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{\cancel{n^2}+n+1-\cancel{n^2}} = \frac{1+1}{1}$$

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^t+\cos t,\quad y=\sin t$$

에서 $t=0$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

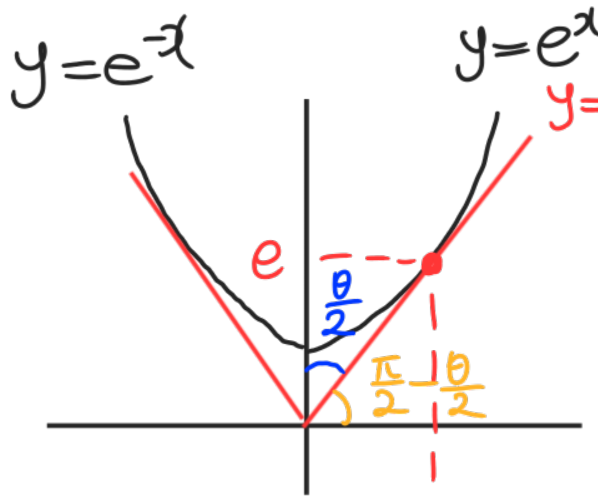
$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{e^t-\sin t} \xrightarrow{t=0} 1$$

check 자주나오는 접선
$y=e^x$, $y=ex$ $(1, e)$

Check 평행 → 엇각, 동위각

25. 원점에서 곡선 $y=e^{|x|}$에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{e}{e^2+1}$ ② $\frac{e}{e^2-1}$ ③ $\frac{2e}{e^2+1}$ ④ $\frac{2e}{e^2-1}$ ⑤ 1



접선 알고 있다면 생략

$$\begin{cases} y=e^x=f(x) \\ y=ax=g(x) \end{cases}$$

$f(t)=g(t)$, $e^t=at$

$f'(t)=g'(t)$, $e^t=a$

$t=1$

$a=e$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=e$

$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{e}$

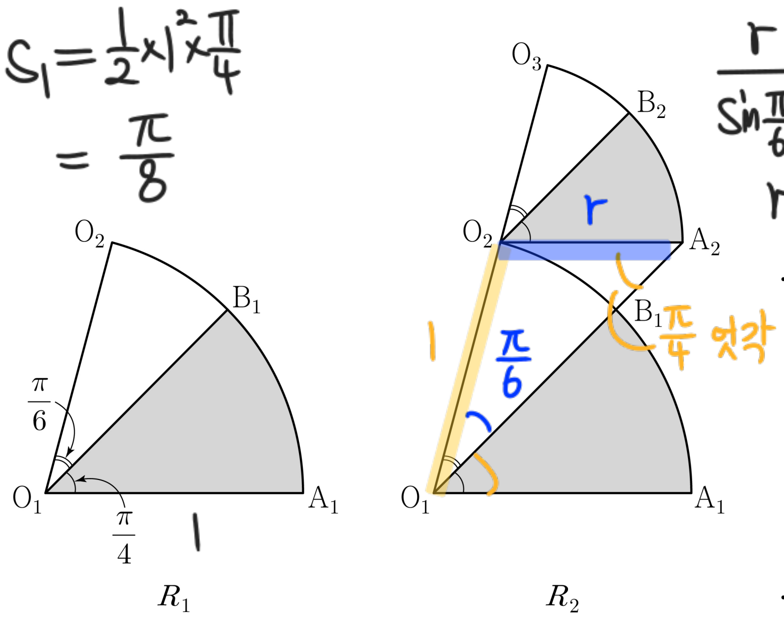
$\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\frac{2}{e}}{1-\frac{1}{e^2}}=\frac{2e}{e^2-1}$

26. 그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_1A_1O_2$가 있다. 호 A_1O_2 위에 점 B_1을 $\angle A_1O_1B_1=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_1A_1B_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 O_2를 지나고 선분 O_1A_1에 평행한 직선이 직선 O_1B_1과 만나는 점을 A_2라 하자. 중심이 O_2이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_2A_2O_3$을 부채꼴 $O_1A_1B_1$과 겹치지 않도록 그린다. 호 A_2O_3 위에 점 B_2를 $\angle A_2O_2B_2=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_2A_2B_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

$S_1=\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{4}$
$=\frac{\pi}{8}$



$\frac{r}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}$

$r=\frac{\sqrt{2}}{2}$: 닮음비

∴ $r^2=\frac{1}{2}$: 넓이비 = 공비

∴ $\frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{4}$

① $\frac{3\pi}{16}$ ② $\frac{7\pi}{32}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{9\pi}{32}$ ⑤ $\frac{5\pi}{16}$

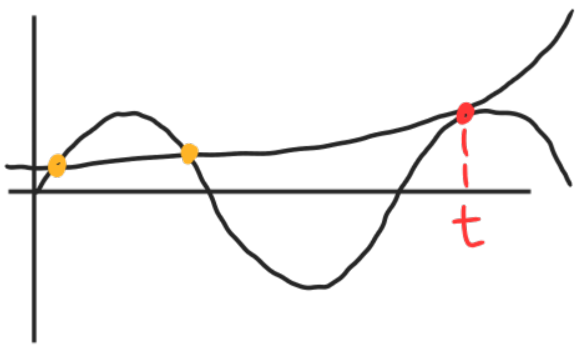
check 각의 이등분선

27. 두 함수

$$f(x)=e^{x},\quad g(x)=k\sin x$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$ ② $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$ ③ $\sqrt{2}e^{2\pi}$ ④ $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$ ⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}}$



$2\pi < t < 3\pi$

$f(t)=g(t)$ $\quad e^{t}=k\sin t$

$f'(t)=g'(t)$ $\quad e^{t}=k\cos t$

$\sin t=\cos t>0$ 이므로

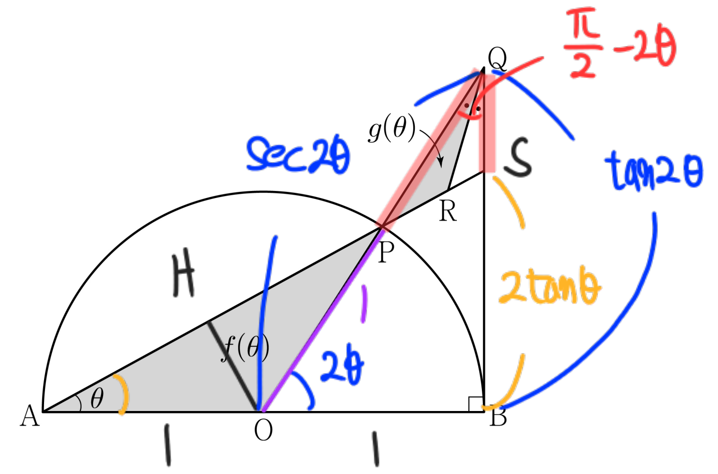
$t=\frac{\pi}{4}+2\pi$

$e^{\frac{\pi}{4}+2\pi}=k\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)$

$k=\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, $\angle OQB$의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. $\angle OAP=\theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{g(\theta)}{\theta^{4}\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

$\overline{OH}=\sin\theta,\quad \overline{AH}=\cos\theta,\quad f(\theta)=\sin\theta\cos\theta$

$\overline{QS}=\tan2\theta-2\tan\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}-2\tan\theta=\dfrac{2\tan^3\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\overline{PQ}=\sec2\theta-1=\dfrac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}$ $\quad \frac{1}{2}$

$\dfrac{\overline{QS}}{\theta^3}=\dfrac{2}{1-\tan^2\theta}\times\boxed{\dfrac{\tan^3\theta}{\theta^3}}\to 2,\quad \dfrac{\overline{PQ}}{\theta^2}=\boxed{\dfrac{1-\cos2\theta}{4\theta^2}}\times\dfrac{4}{\cos2\theta}\to 2$

1

$\triangle PQS=\frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{QS}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\dfrac{\cos2\theta}{2}\overline{PQ}\,\overline{QS}$

$\dfrac{\triangle PQS}{\theta^5}=\dfrac{\cos2\theta}{2}\,\dfrac{\overline{PQ}}{\theta^2}\,\dfrac{\overline{QS}}{\theta^3}\to\frac{1}{2}\times2\times2=2$

$g(\theta)=\triangle PQR=\triangle PQS\times\dfrac{\overline{PR}}{\overline{PR}+\overline{RS}}$ $\Big)$ 이유 : 각의 이등분선 $\overline{PQ}:\overline{QS}=\overline{PR}:\overline{RS}$

$=\triangle PQS\times\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PQ}+\overline{QS}}$

$=\triangle PQS\times\dfrac{1}{1+\frac{\overline{QS}}{\overline{PQ}}}=\triangle PQS\times\dfrac{1}{1+\frac{\overline{QS}}{\theta^3}\frac{\theta^2}{\overline{PQ}}\times\theta}$

$\dfrac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}=\dfrac{\theta}{f(\theta)}\times\dfrac{\triangle PQS}{\theta^5}\times\dfrac{1}{1+\frac{\overline{QS}}{\theta^3}\frac{\theta^2}{\overline{PQ}}\times\theta}\to1\times2\times\dfrac{1}{1+0}=2$

1 $\quad$ 2 $\quad$ 2 $\quad$ 2 $\quad$ 0

Check ① 직선의 기울기와 삼각비
② 인수분해 눈썰미

단답형

29. $t>2e$ 인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$인 실수 α에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$f'(x) = (2t\ln x)\times\frac{1}{x} - 2x = 0$

$t\ln x = x^2$ *

$t=\alpha$ 일 때 $x=g(\alpha)=e^2$ 대입

$\alpha\ln e^2 = e^4$, $\alpha=\frac{1}{2}e^4$

* $\boxed{\text{미분 1}}$

$t\ln g(t) = g(t)^2$

$1\times\ln g(t) + t\times\frac{g'(t)}{g(t)} = 2g(t)g'(t)$

$t=\alpha=\frac{1}{2}e^4$, $g(\alpha)=e^2$, $\quad 2+\frac{1}{2}e^4\times\frac{g'(\alpha)}{e^2} = 2e^2g'(\alpha)$

$2 = \frac{3}{2}e^2 g'(\alpha)$

$g'(\alpha)=\frac{4}{3e^2}$

$\alpha\times(g'(\alpha))^2 = \frac{1}{2}e^4\times\frac{16}{9e^4} = \frac{8}{9}$ $\quad\boxed{17}$

* $\boxed{\text{미분 2}}$

$t\ln x = x^2 \qquad x=g(t),\ g'(t)=\frac{dx}{dt}$

$1\cdot\ln x + t\times\frac{1}{x}\times\frac{dx}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$ $\quad t=\alpha,\ x=g(\alpha)=e^2$

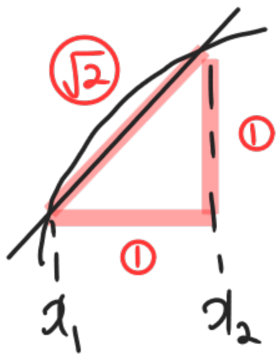
$2+\frac{1}{2}e^4\times\frac{1}{e^2}\times\frac{dx}{dt} = 2e^2\frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{8}{9}\quad (t=\alpha)$

$\boxed{17}$

30. $t>\frac{1}{2}\ln 2$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2)=\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$y=1x+t$: 기울기 1 → $1:1:\sqrt{2}$



$f(t)=\sqrt{2}(x_2-x_1)$

$\ln(1+e^{2x}-e^{-2t}) = x+t$

$1+e^{2x}-e^{-2t} = e^{x+t} = e^t\cdot e^x$

$e^{2x}-e^t\cdot e^x + (1-e^{-2t}) = 0$

$-e^{-t}(e^{-t}-e^t)$

① 인수분해가 보인다면

$(e^x-e^{-t})(e^x+e^{-t}-e^t)=0$

$e^x=e^{-t}$ 또는 $e^x=e^t-e^{-t}$

② 안 보였다면 근의 공식

$e^x = \frac{e^t\pm\sqrt{e^{2t}-4+4e^{-2t}}}{2}$ $\quad e^{2t}-4+4e^{-2t}=(e^t-2e^{-t})^2$

$= e^{-t}$ 또는 e^t-e^{-t}

①② 에서 $x=-t=e^{-t}$ 또는 $x=\ln(e^t-e^{-t})$

$f(t)=\sqrt{2}|x_2-x_1| = \sqrt{2}\cdot\ln(e^{2t}-1)$

$f'(t)=\sqrt{2}\times\frac{2e^{2t}}{e^{2t}-1}$

$f'(\ln 2)=\sqrt{2}\times\frac{2\times 4}{4-1} = \frac{8}{3}\sqrt{2}$ $\quad\boxed{11}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(k+3,\ 3k-1)$과 $\vec{b}=(1,\ 1)$이 서로 평행할 때, 실수 k의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$k+3=3k-1$

$k=2$

24. 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(2,\ \sqrt{2})$에서의 접선의 x절편은? [3점]

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

$\frac{2x}{8}+\cancel{\frac{\sqrt{2}y}{4}}=1$

$y=0$

$x=4$

25. 좌표평면 위의 두 점 A(1, 2), B(−3, 5)에 대하여

$$|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AB}|$$

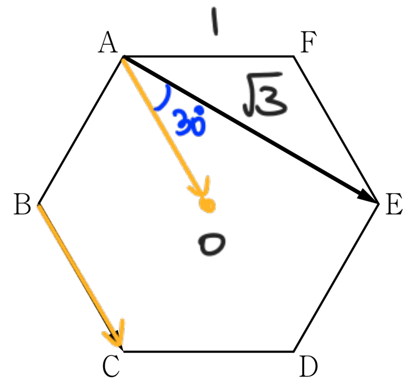
를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 10π ② 12π ③ 14π ④ 16π ⑤ 18π

$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AB}| = 5$

A가 중심이고 반지름 길이 5인 원

26. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 $|\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}|$의 값은? [3점]



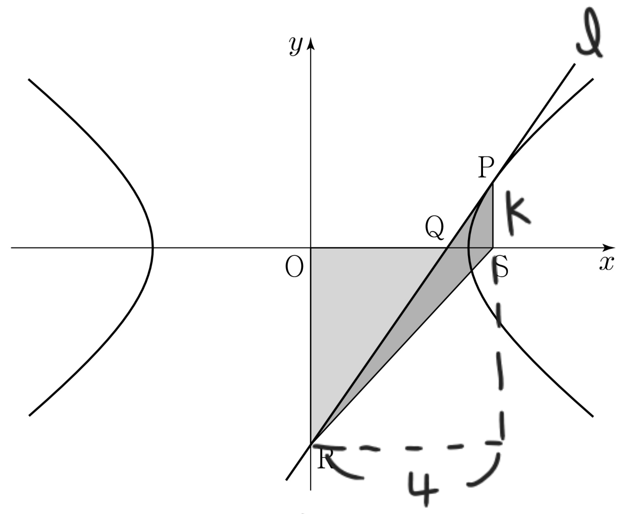
① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

$|\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AO}|^2 = |\overrightarrow{AE}|^2 + |\overrightarrow{AO}| + 2|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AO}|\cos 30°$

$= 3 + 1 + 2 \times \sqrt{3} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 7$

27. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ k)\,(k>0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, y축과 만나는 점을 R라 하자. 점 $\mathrm{S}(4,\ 0)$에 대하여 삼각형 QOR의 넓이를 A_1, 삼각형 PRS의 넓이를 A_2라 하자. $A_1 : A_2 = 9 : 4$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, O는 원점이고, a와 b는 상수이다.) [3점]



① $2\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{14}$

$\triangle PSR = \frac{1}{2} \times 4 \times k = 2k$ 4 : 9

$\triangle OQR = \frac{9}{2}k$

l: $\frac{4x}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 1$

$Q\left(\frac{a^2}{4}, 0\right)$, $R\left(0, -\frac{b^2}{k}\right)$

$\triangle OQR = \frac{9k}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{a^2}{4} \times \frac{b^2}{k}$

$a^2b^2 = 36k^2$

P(4, k) 쌍곡선 대입 $\frac{16}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = 1$

$\frac{16}{a^2} - \frac{a^2}{36} = 1$,

$a^4 + 36a^2 - 16 \times 36 = 0$

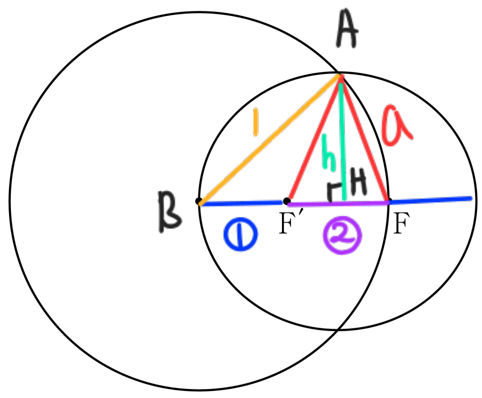
$(a^2-12)(a^2+48) = 0$

$a^2 = 12$, $2a = 4\sqrt{3}$

28. 두 초점이 F, F′이고 장축의 길이가 $2a$인 타원이 있다. 이 타원의 한 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 이 타원의 서로 다른 두 꼭짓점과 한 초점을 지날 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$ ③ $\sqrt{3}-1$

④ $2\sqrt{2}-2$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

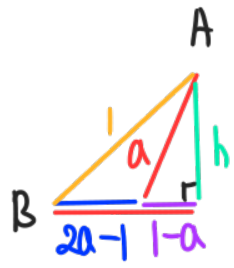


①+② = 1

2①+② = 2a

① = 2a−1

② = 2−2a



$a^2 = h^2 + (1-a)^2$

$-\big)\ 1^2 = h^2 + a^2$

$a^2 - 1 = -2a + 1$

$a^2 + 2a - 2 = 0$

$a = -1 \pm \sqrt{3}$

Check 평행이동 보조선인 직선

Check 두 벡터 합으로 나타내기 (feat. 수직이 되도록)

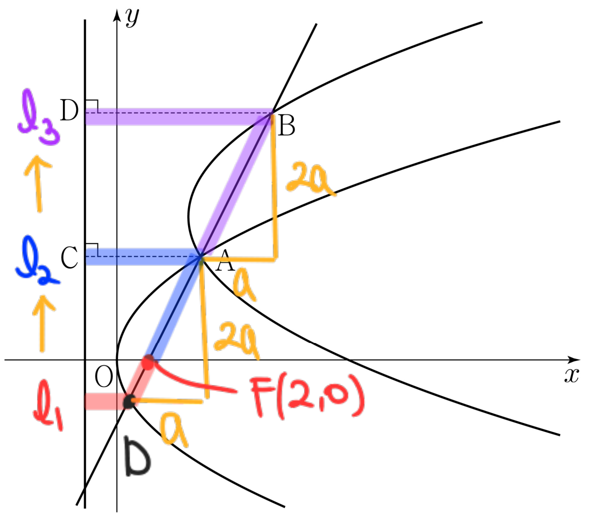
단답형

평행이동 ⓧ +a ⓨ +2a

기울기2

29. 포물선 $y^2=8x$와 직선 $y=2x-4$가 만나는 점 중 제1사분면 위에 있는 점을 A라 하자. 양수 a에 대하여 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 점 A를 지날 때, 직선 $y=2x-4$와 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, $\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=k$이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]

$\overline{AF}+\overline{FD}$



D → A → B는 평행이동 ⓧ +a, ⓨ +2a

$k=\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}$

$=\cancel{\overline{AC}}+\overline{BD}-(\cancel{\overline{AF}}+\overline{FD})$

$=l_3-l_1$

$=2a$

$y^2=8x$ & $y=2x-4$ 연립

$(x-2)^2=2x,\quad x^2-6x+4=0$

$x=3\pm\sqrt{5}$

$a=x_2-x_1=2\sqrt{5}$

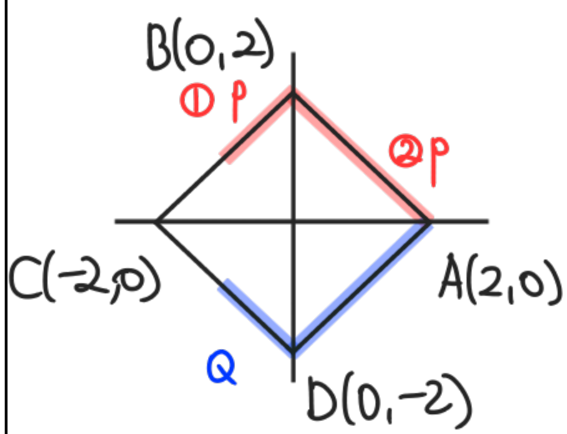
$k=2a=4\sqrt{5}$

$k^2=80$ $\boxed{80}$

30. 좌표평면 위의 네 점 A(2, 0), B(0, 2), C(−2, 0), D(0, −2)를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 네 변 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AD})=0$ → PQ는 AB 또는 AD와 수직
(나) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\ge-2$이고 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}\ge 0$이다.
(다) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}\ge-2$이고 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}\le 0$이다.

점 R(4, 4)에 대하여 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

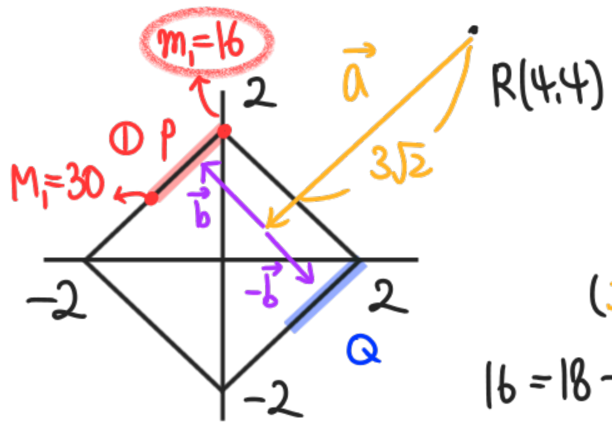


(가) PQ는 정사각형 한 변과 평행

(나) $\overrightarrow{OP}=(x,y)$라 하면 $x\ge-1,\ y\ge0$

(다) $\overrightarrow{OQ}=(x,y)$라 하면 $x\ge-1,\ y\le0$

① P가 제2사분면



$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$ 수직

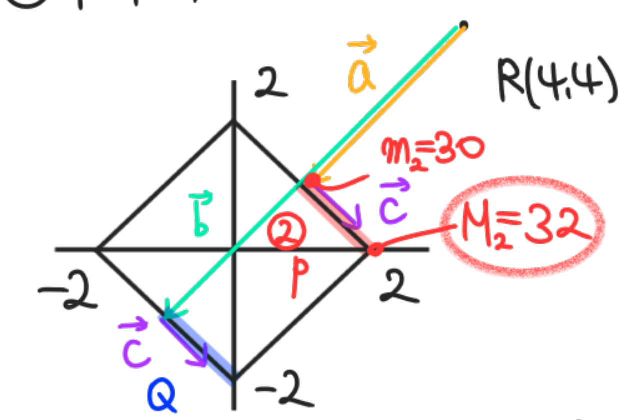
$=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

$(3\sqrt{2}\le|\vec{a}|\le4\sqrt{2},\ |\vec{b}|=\sqrt{2})$

$16=18-2\le\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}\le32-2=30$

② P가 제1사분면



$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$ 수직

$=(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c})$

$=|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{c}|^2$

$=3\sqrt{2}\times5\sqrt{2}+|\vec{c}|^2$

$(0\le|\vec{c}|\le\sqrt{2})$

$30+0\le\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}\le30+2$

최댓값 32 최솟값 16

$\boxed{48}$