아드레날린 ex
공통

1. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이고 $a_{12} = \dfrac{1}{2}$일 때, $a_1 + a_4$의 값은? [2022학년도 6월 09]

① $\dfrac{3}{4}$ ② $\dfrac{9}{4}$ ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ $\dfrac{17}{4}$ ⑤ $\dfrac{9}{2}$

1. 정답 ⑤〔2022학년도 6월 09〕

1) 자연수 보이면 숫자 넣기

일단 수열이 보이네요. $a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$ 라고 합니다. 이때 $a_{12}=\dfrac{1}{2}$라고 하네요. 그냥 고민없이 숫자 넣어봐야겠죠? 천천히 $n=1$부터 넣어봅시다.

$a_2=\dfrac{1}{a_1}$, $a_3=8a_2=\dfrac{8}{a_1}$, $a_4=\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{a_1}{8}$, $a_5=8a_4=a_1$, $a_6=\dfrac{1}{a_5}=\dfrac{1}{a_1}$, $a_7=8a_6=\dfrac{8}{a_1}$, $a_8=\dfrac{1}{a_7}=\dfrac{a_1}{8}$

지금 보면 반복되고 있는 거 보이시죠? a_1, $\dfrac{1}{a_1}$, $\dfrac{8}{a_1}$, $\dfrac{a_1}{8}$가 계속 반복해서 나타나고 있잖아요. 4를 주기로 반복되네요.

2) 규칙 보이면 일반화

그러면 a_{12}는? 4를 주기로 반복되니까 $a_4=a_8=a_{12}$가 되겠네요. $\dfrac{a_1}{8}=\dfrac{1}{2}$이고 $a_1=4$입니다. $a_4=\dfrac{1}{2}$이죠? 따라서 $a_1+a_4=\dfrac{9}{2}$입니다. 답은 ⑤번이네요.

2. 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\ f(1)=1,\ \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)dx$의 값은?

〔2022학년도 6월 11〕

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0 \le x \le 1) \end{cases}$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

2. 정답 ② 〔2022학년도 6월 11〕

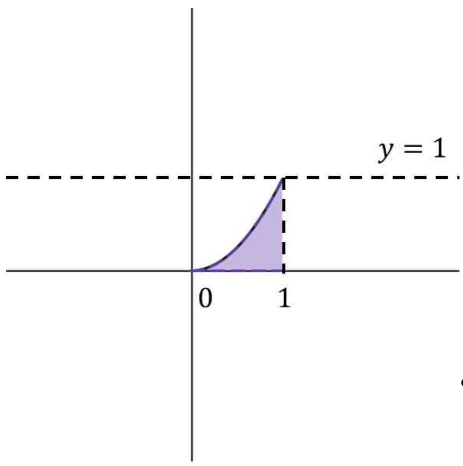
1) 문제해석, 조건해석

$0 \le x \le 1$에서 연속인 함수 $f(x)$가 있는데 $f(0)=0$, $f(1)=1$, $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$이라고 합니다. 그때 $g(x)$가 있는데 (가)조건에서 $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0 \le x \le 1) \end{cases}$라고 하네요. (나)조건에서는 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$라고 하구요.

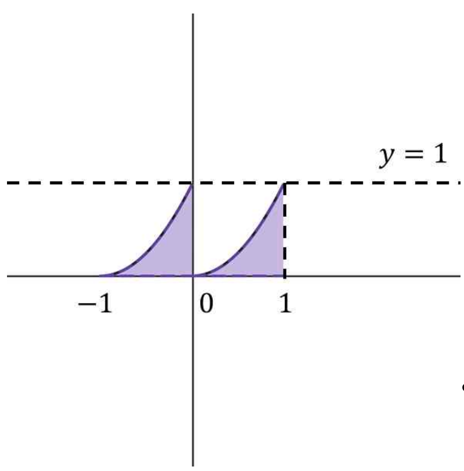
(가)조건부터 해석해봅시다. 일단 $g(x)$는 $0 \le x \le 1$에서 $f(x)$와 같아요. 그런데 $-1<x<0$에서는 $f(x)$를 왼쪽으로 1만큼 움직인 다음에, (−)를 곱해서 뒤집고, 위로 1만큼 올린 함수에요. 일단 아주 대충 그래프를 그려볼게요.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

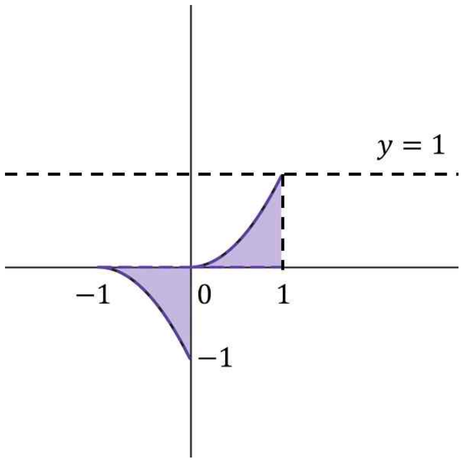
일단 $0 \le x \le 1$에서



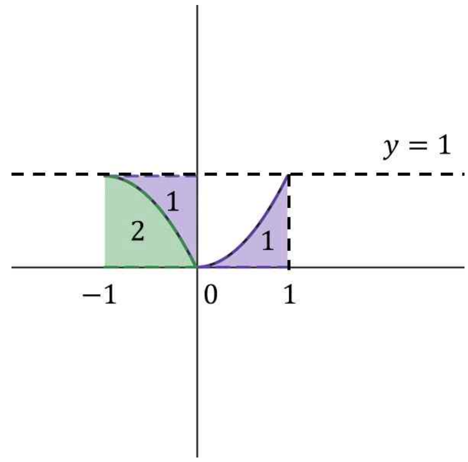
이렇게 됩니다. 보라색 부분이 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$이에요. 그리고 $-1<x<0$에서는 먼저



이렇게 왼쪽으로 1만큼 움직인 다음에



(−) 곱해서 뒤집어 준 후,



이렇게 1만큼 위로 올리면 됩니다. (가)조건에서의 $g(x)$는 다 그렸네요.

(나)조건에서는 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$라고 했었죠? 이거는 주기가 2인 함수잖아요? 그러니까 $-1<x\le 1$에서의 함수가 $1<x\le 3$에서도 형태가 반복되고, $-3<x\le -1$에서도 반복된다는 의미이죠.

3) 정적분 나누기, 정적분 관찰

이때 $\int_{-3}^{2}g(x)dx$를 구하랍니다. 일단 나눠봅시다. 지금 $g(x)$도 구간에 따라 나눠져 있으니까 나눠보면 되겠죠.

일단 $\int_{-3}^{-1}g(x)dx+\int_{-1}^{1}g(x)dx+\int_{1}^{2}g(x)dx$로 나눌 수 있습니다.

$\int_{-1}^{1}g(x)dx$부터 구해봅시다. 일단 그래프를 보면 1이라고 써져 있는 부분과 2라고 써져 있는 부분의 합이에요. 일단 1의 값은 $\dfrac{1}{6}$인 거 알죠? 지금 그래프를 보면 1부분과 2부분의 합은 한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이인 1이에요. 따라서 2부분의 값은 $\dfrac{5}{6}$이죠. 이 둘을 합하면 $\int_{-1}^{1}g(x)dx=1$이 됩니다.

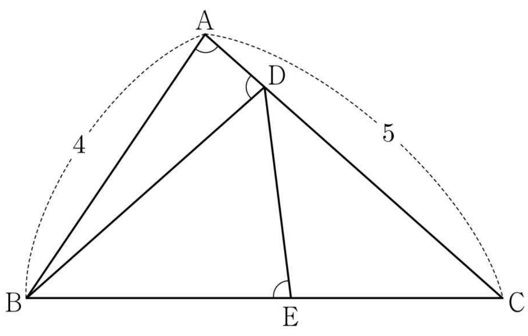
그런데 이건 $\int_{-3}^{-1}g(x)dx$도 마찬가지입니다. 왜냐하면 정적분은 평행이동해도 값이 변하지 않잖아요. 왼쪽으로 2만큼 움직였다고 정적분 값이 변하진 않아요. 따라서 $\int_{-3}^{-1}g(x)dx=1$입니다.

마지막으로 $\int_{1}^{2}g(x)dx$는 $\int_{-1}^{0}g(x)dx$과 같아요. 그래프를 오른쪽으로 2만큼 움직였어도 정적분 값은 같으니까요. 따라서 2부분과 같은 $\dfrac{5}{6}$입니다. 따라서 $\int_{-3}^{2}g(x)dx=\dfrac{17}{6}$입니다. 답은 ②번이네요.

3. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$$

일 때, 선분 DE의 길이는? 〔2022학년도 6월 12〕

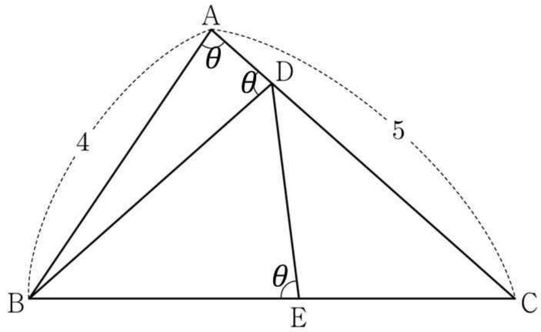


① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

3. 정답 ③ 〔2022학년도 6월 12〕

1) 문제해석, 그림 있으면 그림 보면서

$\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\dfrac{1}{8}$이랍니다. $\cos(\angle BAC)=\dfrac{1}{8}$빼고는 그림에 표시되어 있네요. 이때 $\angle BAC=\angle BDA=\angle BED$라고 하네요. 보기 편하게 $\angle BAC=\angle BDA=\angle BED=\theta$라 할까요? 그러면 $\cos\theta=\dfrac{1}{8}$입니다. 이왕이면 사인값도 구해놓을까요? $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이니까 $\sin^2\theta=\dfrac{63}{64}$입니다. θ는 π를 넘지 않으니까 $\sin\theta$는 양수입니다. 따라서 $\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$이네요.



이렇게 되겠네요.

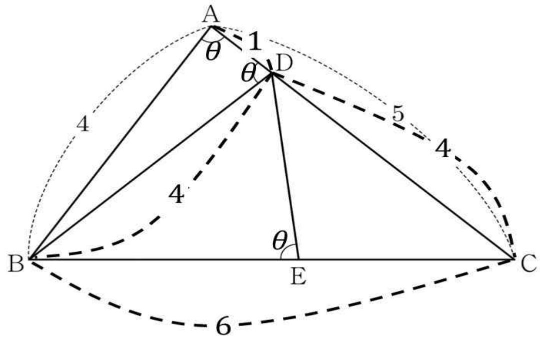
이렇게 보면 삼각형 BDA은 이등변삼각형이네요? 그러면 $\overline{BD}=4$가 됩니다.

2) 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각

삼각형 ABC는 두 변의 길이와 한 각이 주어진 삼각형이에요. 그러면 코사인법칙으로 나머지 한 변의 길이도 구할 수 있겠죠? $\cos\theta=\dfrac{4^2+5^2-\overline{BC}^2}{2\times4\times5}=\dfrac{1}{8}$이고 $\overline{BC}=6$입니다.

삼각형 BDA 역시 두 변의 길이와 한 각이 주어진 삼각형이죠. 따라서

$\cos\theta=\dfrac{4^2+\overline{AD}^2-4^2}{2\times4\times\overline{AD}}=\dfrac{\overline{AD}}{8}=\dfrac{1}{8}$이고 $\overline{AD}=1$입니다. 모두 정리하면



이렇게 됩니다.

그러고 보니 BCD도 이등변삼각형이네요? 그러면 $\angle \mathrm{DBE} = \angle \mathrm{BCD}$이죠? 이거를 θ_2라고 할게요.

이제 우리가 구해야 하는 건 $\overline{\mathrm{DE}}$이에요. 이걸 어떻게 구하면 될까...... $\overline{\mathrm{DE}}$를 표현할 수 있는 식은 없을까요?

사인법칙이 있긴 하네요. 삼각형 BDE 안에서 사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin\theta_2} = \dfrac{4}{\sin\theta}$가 됩니다. $\sin\theta = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$인 걸 알긴 알지만 $\sin\theta_2$를 모르겠어요.

음... 그리고 또 뭔가가 있어야 하는데.. 그런데 왜 이리 각과 관련한 조건들이 많은 걸까요? 각과 각의 관계에 대한 공식은 사인법칙인데... θ, θ_2와 관련된 삼각형 뭐가 더 없을까요? 그러고 보니 ABC도 되네요?
사인법칙에 의하여 $\dfrac{4}{\sin\theta_2} = \dfrac{6}{\sin\theta}$입니다. 양변에 4를 나눠주면 $\dfrac{1}{\sin\theta_2} = \dfrac{3}{2\sin\theta}$이니까 이걸 $\dfrac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin\theta_2} = \dfrac{4}{\sin\theta}$에 넣으면...? $\overline{\mathrm{DE}} \times \dfrac{3}{2\sin\theta} = \dfrac{4}{\sin\theta}$이고 $\overline{\mathrm{DE}} = \dfrac{8}{3}$이네요! 답은 ③번입니다.

4. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은? 〔2022학년도 6월 13〕

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

4. 정답 ⑤ 〔2022학년도 6월 13〕

1) 자연수 보이면 숫자 넣기

$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$ 가 있는데 $f(x+1)=f(x)$라고 합니다. 주기가 1인 함수네요?

이때 $\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$를 구하랍니다. 음..... 일단 넣어볼까요? 먼저 편하게 계산하기 위해 $\frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}=a_k$라 하겠습니다.

$k=1$이면 $\frac{f(1)}{3}$입니다. $f(1)=1$이니까 $a_1=\frac{1}{3}$이네요.

$k=2$이면 $\frac{2f(\sqrt{2})}{3}$입니다. 지금 보면 $\sqrt{2}$는 $1<x<2$에 있죠? $f(x)$는 주기가 1이니까 $0<x<1$과 형태가 같을 거예요. 그러니까 $f(x)=3$이 될 거라는 말이죠. 따라서 $f(\sqrt{2})=3$입니다. $a_2=2$이네요.

$k=3$이면 $f(\sqrt{3})$입니다. $\sqrt{3}$은 $1<x<2$에 있어요. 따라서 $f(\sqrt{3})=3$입니다. $a_3=3$

$k=4$이면 $\frac{4f(2)}{3}$입니다. 2는 $x=2$에 있잖아요. 이거는 $x=1$에서의 함숫값을 그대로 오른쪽으로 1만큼 움직인 거니까 값이 같겠네요. 따라서 $f(2)=1$입니다. $a_4=\frac{4}{3}$이네요.

지금 보면 루트 값이 자연수와 자연수의 사이에 있으면 $f(x)=3$이 되고, 루트 값이 자연수가 되면 $f(x)=1$이 되는 거 같은데요? 하나만 더 해봅시다.

$k=5$이면 $\frac{5f(\sqrt{5})}{3}$입니다. $\sqrt{5}$는 $2<x<3$에 있죠. 자연수와 자연수 사이에 있어요. 이러면 $2<x<3$에서 $f(x)=3$이죠? $1<x<2$에서의 $f(x)$를 오른쪽으로 1만큼 움직인 건데 $1<x<2$에서의 $f(x)$도 $0<x<1$에서의 $f(x)$를 오른쪽으로 1만큼 움직인 거잖아요. 따라서 $f(\sqrt{5})=3$입니다. $a_5=\frac{5}{3}$입니다.

예측한 게 맞네요. 그러면 확인해봅시다.
일단 루트 값이 자연수가 되려면 제곱수여야 해요. 따라서 $k=1,\ 4,\ 9,\ 16$일 때는 $f(\sqrt{k})=1$이 되죠. 이것만 더하면 $\frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\frac{9}{3}+\frac{16}{3}=10$입니다.

루트 값이 자연수와 자연수 사이에 있다면? $f(x)=3$이 되죠. 따라서 $k=1,\ 4,\ 9,\ 16$ 이외의 값일 때는

$\sum k$를 계산하면 됩니다. 이거는 1부터 20까지 다 더한 다음에 $k=1$, 4, 9, 16만 빼버리면 되겠죠? 일단 $\sum_{k=1}^{20} k = \frac{20 \times 21}{2} = 210$인데 $1+4+9+16=30$이니까 $210-30=180$입니다. 결국 구하는 값은 $180+10=190$이네요. 답은 ⑤번입니다.

5. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? 〔2022학년도 6월 14〕

(가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=\lvert xf(x-p)+qx\rvert$이다. (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

5. 정답 ③ 〔2022학년도 6월 14〕

1) 문제해석, 조건해석, 절댓값은 범위 나누고 풀기

양수 p, q가 있고 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$가 있는데 $g(x)$는 연속이고 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$랍니다.

$f(x)$가 인수분해되는지부터 볼까요? 음..... 되는 것 같진 않네요. 미분하면

$3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$이니까 $x=-1$에서 극대, $x=3$에서 극소인 함수입니다.

그리고 절댓값을 좀 정리해볼게요. $xg(x)=|xf(x-p)+qx|=|x(f(x-p)+q)|$잖아요? 그럼 안쪽의 x만 밖으로 빼내서 $xg(x)=|x|\times|f(x-p)+q|$가 됩니다.

이때 $|x|$의 범위를 나누고 풀면 $x\geq 0$일 때는 $xg(x)=x\times|f(x-p)+q|$이니까 $g(x)=|f(x-p)+q|$가 됩니다.

$x<0$일 때는 $xg(x)=-x\times|f(x-p)+q|$이니까 $g(x)=-|f(x-p)+q|$가 됩니다. 정리하면

$g(x)=\begin{cases} |f(x-p)+q| & (x\geq 0) \\ -|f(x-p)+q| & (x<0) \end{cases}$이네요.

2) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인, 조건해석

그런데 $g(x)$는 연속이어야 하잖아요? 따라서 $x=0$에서 좌극한 우극한 함숫값이 같아야 합니다.

$|f(-p)+q|=-|f(-p)+q|$이고 $f(-p)+q=0$이네요. $g(0)=0$이어야 합니다.

(나)조건에서 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점은 1개랍니다. 음... 일단 $x=0$이 의심스러워요. 그리고 함수에 절댓값이 씌워져 있으니까 x축과 만나는 부분도 의심해봐야 할 것 같구요.

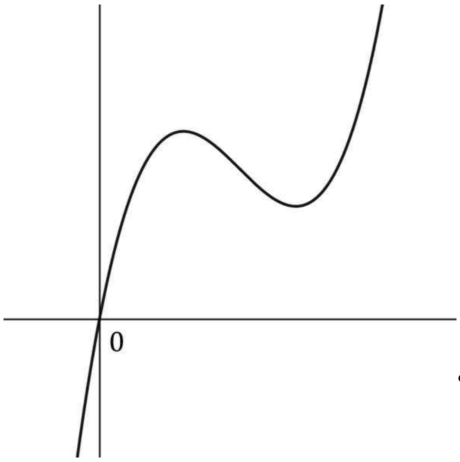
그 전에 $g(x)$가 어떤 함수인지 좀 관찰해봅시다. 먼저 $f(x)$는 극점 두 개가 있는 지렁이 모양의 삼차함수입니다. 그런데 $f(x-p)+q$는? 그 삼차함수를 p만큼 x축의 방향으로 움직이고 q만큼 위아래로 움직인 함수이죠. 모양은 그대로 유지한 채로요. 그냥 이동만 하는 거예요.

이 그래프를 $x\geq 0$에서는 절댓값을 씌워서 접어 올립니다. 그런데 $x<0$에서는 절댓값을 씌우고 접어 올리는 게 끝이 아니라 $(-)$를 곱해서 또 접어 올려야 해요. 또 $g(x)$는 원점을 지나야 하죠. 아까 $g(0)=0$이어야 한다고 했으니까요.

일단 막 그려봅시다. 그런데 그릴 때 최소한 x축과 3개의 점에서 만나는 그래프는 그리면 안 돼요. 그러면 그래프가 접어 올라가서 미분불가능한 점이 1개보다는 더 나오겠죠?

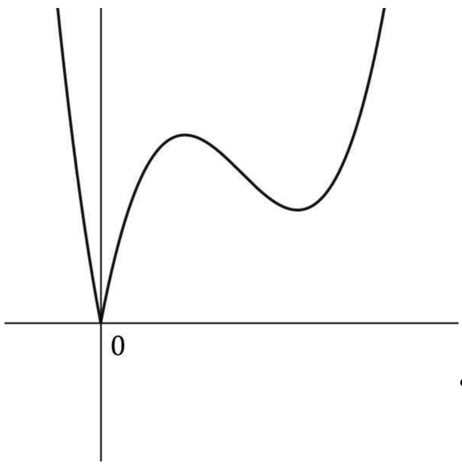
3) 케이스 분류, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

천천히 기준을 나눠봅시다. 먼저 두 극점의 x좌표가 $x>0$ 부분에 있다면?

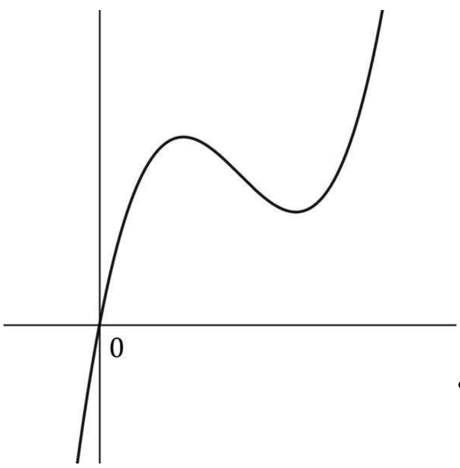


이런 그래프가 가능하죠. 이 경우 $x>0$ 부분은 절댓값을 씌우고,

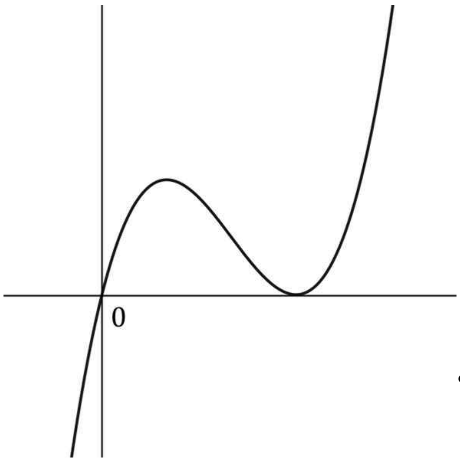
$x<0$ 부분은 절댓값을 씌워서



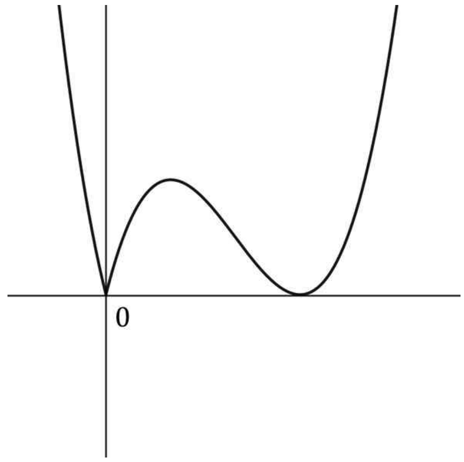
이렇게 한 후에 $(-)$를 곱해서



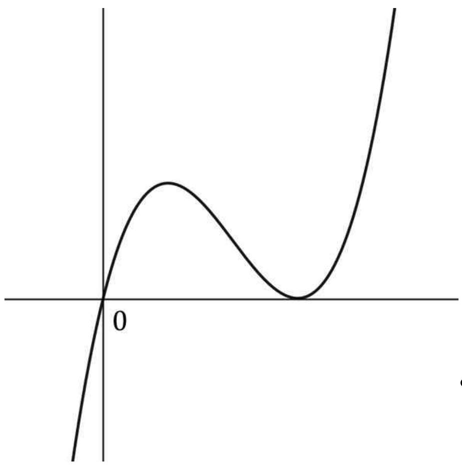
이렇게 바꿔줍니다. 똑같네요? 이건 미분불가능한 점이 없는데요?



이런 그래프도 가능해요. 이때

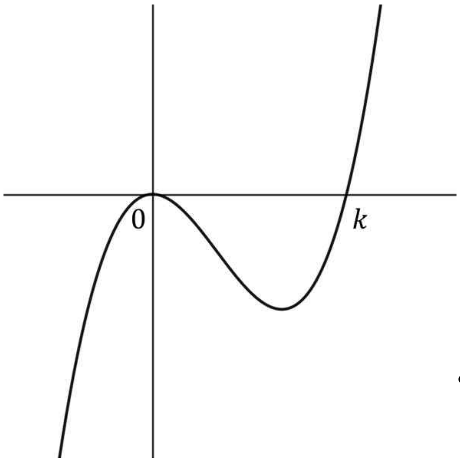


접어 올린 후에 $x<0$ 부분만 $(-)$를 곱하면

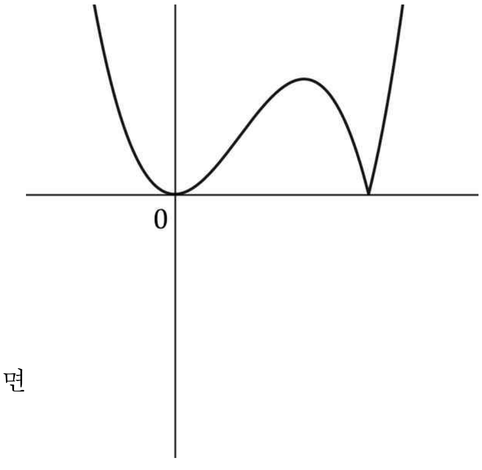


이렇게 됩니다. 이것도 마찬가지로 미분불가능한 점이 하나도 없네요. 그리고 아까 말했듯이 x축과 3개의 점에서 만나는 건 안 됩니다. 접어 올리면 두 점에서 미분불가능합니다. 이건 한 번 해보세요.

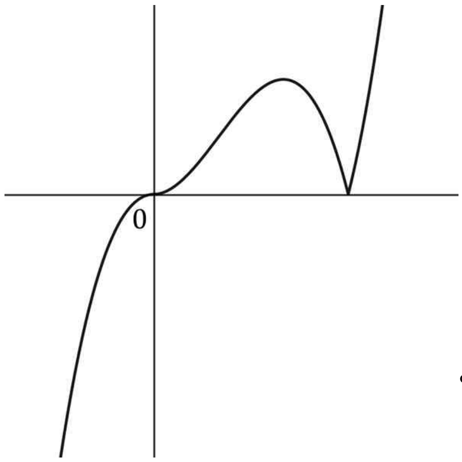
극대점이 $x=0$에 있다면? x축과 세 점에서 만나는 건 안 되니까 결국 $x=0$에서 x축과 접해야 합니다.



이렇게 되네요. 접어 올리면



이렇게 되구요. $x<0$ 부분만 $(-)$를 곱하면



이렇게 되네요. 어? 이건 되는데요? 한 개의 점에서만 미분불가능하잖아요.

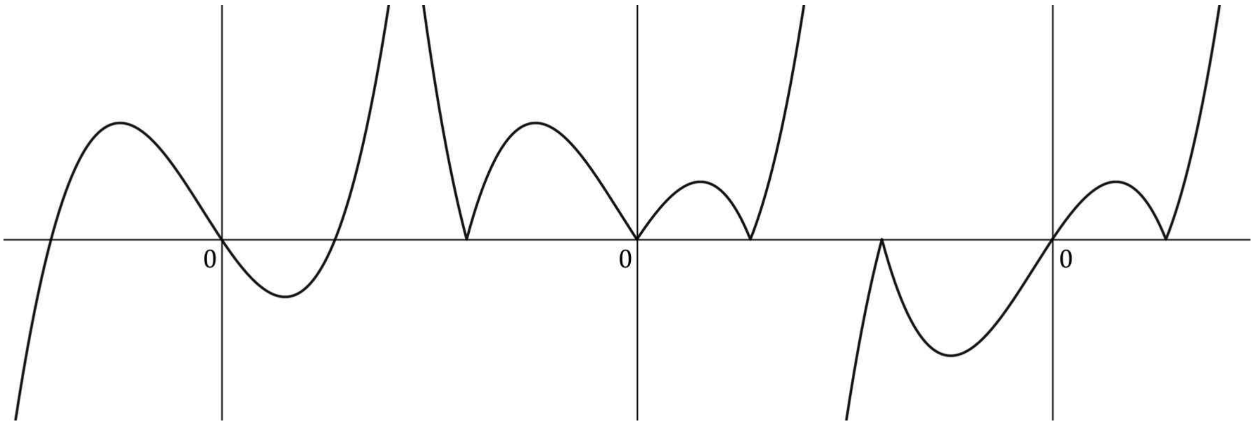
바로 가봅시다. 우리는 $p+q$의 값을 구해야 해요. p, q 각각을 구하라는 이야기죠. 지금 그래프를 보면 함수식을 바로 구할 수 있죠? $f(x-p)+q=x(x-k)^2$입니다. 그런데 $f(x-p)+q$는 $f(x)$의 모양을 유지한 채로 위아래, 좌우로 움직인 그래프라고 했었잖아요. 그 말은 극점의 간격은 같다는 이야기죠. 아까 극점이 $x=-1$, 3였으니까 이거도 마찬가지여야 합니다. 지금 삼차함수의 비율관계에 의해 x축에 접하는 점의 x좌표와 그냥 만나는 점의 x좌표의 $2:1$내분점이 극소점의 x좌표여야 하잖아요? 따라서 극소점의 x좌표는 $\frac{2}{3}k$입니다.

극점의 x좌표의 차이가 4니까 $\frac{2}{3}k=4$여야 하고 $k=6$이네요. 극점이 -1, 3에서 0, 4로 바뀌었죠? 따라서 $f(x-p)+q$는 원래 함수 $f(x)$에서 오른쪽으로 1만큼 움직여야 합니다. $p=1$이네요.
$f(x-1)+q=x(x-6)^2$이네요.

q는..... 그냥 아무런 숫자 하나만 넣어봅시다. $x=0$을 넣어볼까요? 그러면 $f(-1)+q=0$이 됩니다.
$f(x)=x^3-3x^2-9x-12$이니까 $f(-1)=-7$이네요. $q=7$입니다. $p+q=8$이네요. 답은 ③번입니다.

참고!

나머지 그래프는 왜 안 되는지 확인해봅시다. 일단 x축과 세 점에서 만나면 안 되니까 $f(x-p)+q$는 감소하는 부분에서 x축과 만날 수 없습니다. 그래도 확인해보자면



이렇게 해서 두 개의 점에서 미분 불가능합니다.

다음은 극소점이 $x=0$에 있을 때네요. 그런데 여기부터는 불가능해요. p, q는 양수라고 했었죠? p가 양수라는 건 $f(x-p)+q$는 최소한 $f(x)$보다는 오른쪽에 있어야 한다는 말이에요. 극점도 마찬가지죠. 우리가 $f(x)$를 분석할 때 극대점이 $x=-1$에 있고 극소점이 $x=3$에 있다고 했었잖아요. 극소점은 $x=3$보다 왼쪽에 있을 수 없어요. 이렇게 해서 극대점이 $x=0$에 있을 때만 가능합니다.

6. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x \le 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 〔2022학년도 6월 15〕

<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다.

ㄴ. $\{t \mid \beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\left\{t \mid 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2=\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 정답 ② 〔2022학년도 6월 15〕

1) 문제해석

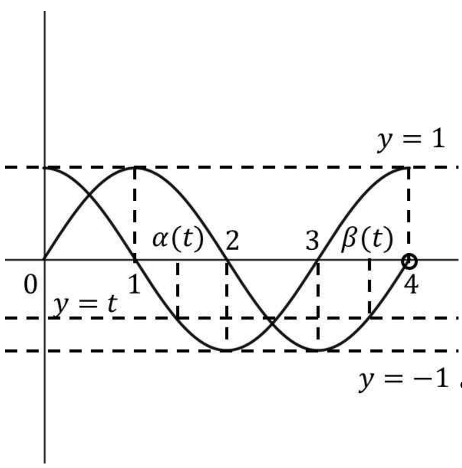
$-1 \le t \le 1$인 t가 있는데 $\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\dfrac{\pi x}{2}-t\right)=0$를 만족시키는 x 중에서 $0 \le x < 4$에 있는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라고 한답니다.

일단 $\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\dfrac{\pi x}{2}-t\right)=0$를 만족시키려면 $\sin\dfrac{\pi x}{2}=t$이거나 $\cos\dfrac{\pi x}{2}=t$이면 되겠죠? 다시 말하면

$y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$와 $y=t$가 만나는 점이거나 $y=\cos\dfrac{\pi x}{2}$와 $y=t$가 만나는 점이 되는 거예요.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

이거 그래프로 그려보면



이렇게 됩니다. 결국 $\sin\dfrac{\pi x}{2}$와 $\cos\dfrac{\pi x}{2}$를 그린 후에 $y=t$를 그리고

$y=t$와 왼쪽부터 처음으로 만나는 점의 x좌표를 $\alpha(t)$, 마지막에 만나는 점의 x좌표를 $\beta(t)$라고 하는 거네요.

ㄱ에서 $-1 \le t < 0$이면 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이냐고 물어봅니다. 딱 그림에 있는 상황이네요! 그런데 더해서 5가 되는지를 어떻게 확인하죠?

사인과 코사인 그래프를 확인할 때는 대칭을 확인하는 것이 매우 중요합니다. 지금 그래프를 보면

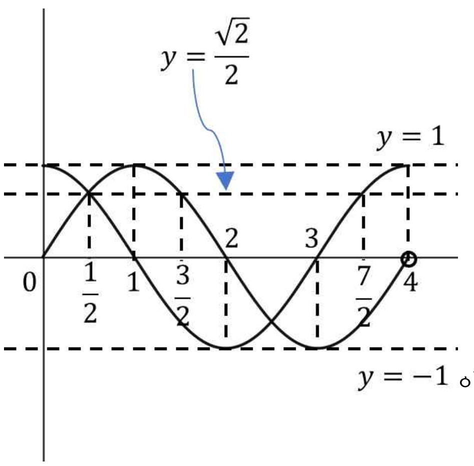
$y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$와 $y=\cos\dfrac{\pi x}{2}$가 $x=\dfrac{5}{2}$에 대하여 대칭이죠? 지금은 대칭이 아닌 것 같아도 그래프를 옆으로 확장해보면 대칭입니다. 사인 그래프를 옆으로 옮기면 코사인 그래프와 같게 되잖아요. 반대도 마찬가지이구요.

$-1 \le t < 0$이면 $\alpha(t)$는 코사인 그래프 상에 있구요, $\beta(t)$는 사인 그래프 상에 있어요. 둘의 중점의 x좌표는

$\frac{5}{2}$가 되겠죠. 대칭이니까요. 따라서 $\frac{\alpha(t)+\beta(t)}{2}=\frac{5}{2}$이고 $\alpha(t)+\beta(t)=5$입니다. 맞네요! ㄱ은 맞습니다.

ㄴ에서 $\{t|\beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\left\{t|0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$이냐고 물어보네요. 일단 $\alpha(0)$과 $\beta(0)$은 $t=0$을 그어서 확인하면 되겠죠? 그림을 보면 $\alpha(0)=0$이고 $\beta(0)=3$이네요. $x=4$는 등호가 없어서 포함되지 않으니까요. 그러니까 결국 $0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 $\alpha(t)$와 $\beta(t)$의 차이가 3이 되는지를 묻고 있는 거에요.

일단 범위부터 확인해봅시다. $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$는 뭘까요? $\sin\frac{\pi x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$인 x는 $\frac{1}{2}$이 있고, $x=1$에 대하여 대칭임을 이용하면 $\frac{3}{2}$도 되네요. 그리고 $\cos\frac{\pi x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$인 x는 $\frac{1}{2}$이 있고, $x=2$에 대하여 대칭임을 이용하면 $\frac{7}{2}$도 됩니다. 어? $x=\frac{1}{2}$이면 $\sin\frac{\pi x}{2}=\cos\frac{\pi x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이네요? 그러니까



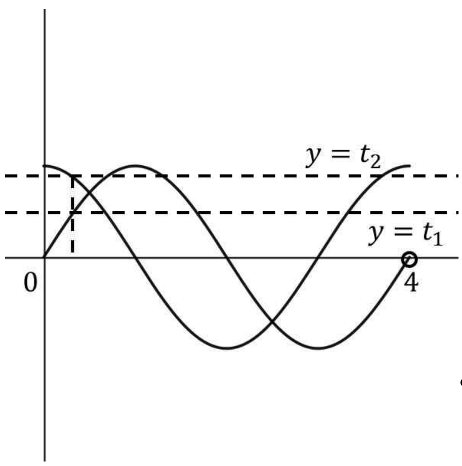
이렇게 되는 거죠?

지금 보면 $0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 $\alpha(t)$는 사인 그래프 상에 있고 $\beta(t)$는 코사인 그래프 상에 있어요. 그런데 $0<x<\frac{1}{2}$일 때 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$의 그래프와 $3<x<\frac{7}{2}$일 때 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$는 모양이 일치합니다. 그럴 수밖에 없는 게 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$를 3만큼 오른쪽으로 밀어버리면 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$가 되거든요. 그러니까 $y=t$라는 수평선을 그어서 만나는 x좌표의 차이도 일정하게 되겠죠. 단지 3만큼 오른쪽으로 움직였으니까요. 따라서 ㄴ도 맞습니다.

ㄷ에서 $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$인 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$이면 $t_1\times t_2=\frac{1}{3}$이냐고 물어봅니다.

일단 $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$라는 게 뭘까요? 먼저 $\alpha(t_1)$은 $y=t_1$이 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$와 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$와 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점의 x좌표에요. $\alpha(t_2)$는 $y=t_2$이 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$와 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$와 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점의 x좌표이죠. $t_2-t_1=\frac{1}{2}$이니까 t_1, t_2는 달라요. 그러면 결국 가장 작은 x좌표가 같게 되는 두 직선의 차이가 $\frac{1}{2}$가 난다는 이야기네요.

그래프를 잘 보면



이렇게 되어야 하겠네요. 그러면 결국 $x=\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=k$에서 코사인값과 사인값의 차이가 $\frac{1}{2}$이 되어야 한다는 말이 됩니다. $t_2=\cos\frac{\pi k}{2}$이고 $t_1=\sin\frac{\pi k}{2}$이니까요.

$\cos\frac{\pi k}{2}-\sin\frac{\pi k}{2}=\frac{1}{2}$가 되네요. 그런데 이때 $\cos^2\frac{\pi k}{2}+\sin^2\frac{\pi k}{2}=1$이잖아요? $\cos\frac{\pi k}{2}-\sin\frac{\pi k}{2}=\frac{1}{2}$를 제곱하면 $\cos^2\frac{\pi k}{2}-2\cos\frac{\pi k}{2}\sin\frac{\pi k}{2}+\sin^2\frac{\pi k}{2}=\frac{1}{4}$가 됩니다. $\cos^2\frac{\pi k}{2}+\sin^2\frac{\pi k}{2}=1$이니까 $-2\cos\frac{\pi k}{2}\sin\frac{\pi k}{2}=-\frac{3}{4}$이고 $\cos\frac{\pi k}{2}\sin\frac{\pi k}{2}=\frac{3}{8}$이네요. $t_1\times t_2=\frac{3}{8}$인데요? ㄷ은 아닙니다. 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이고 답은 ②번이네요.

7. 실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. 〔2022학년도 6월 20〕

7. 정답 8〔2022학년도 6월 20〕

1) 문제해석, 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

$f(x)=x^3-12x^2+45x+3$가 있는데 $g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4dt$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하랍니다. 네제곱???? 음......

일단 정적분의 위끝에 변수가 있잖아요? 위끝과 아래끝이 같아지는 $x=a$를 넣으면 $g(a)=0$이 됩니다.

$g(x)$가 오직 하나의 극값을 갖는다는 건 $g'(x)$의 부호가 단 한 번만 바뀌어야 한다는 말이죠. 다시 말하면 $g'(x)$는 x축과 접하지 않은 상태로 한 점에서 만나야 하구요, 그 이외에는 아예 만나지 않거나 만나도 방향을 바꾸면서 접해야 합니다. 그러니까 인수를 짝수 개 가져야 한다는 말이죠.

그럼 미분해봅시다. 그런데 바로 하지는 못하겠네요. 정적분 식 안에 변수가 두 개잖아요. 그러면 일단 x는 밖으로 빼야겠죠. 따라서 $g(x)=f(x)\int_a^x \{f(t)\}^4dt-\int_a^x \{f(t)\}^5dt$입니다. 이 상태로 미분하면

$g'(x)=f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4dt+f(x)^5-f(x)^5=f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4dt$입니다.

$f'(x)=3x^2-24x+45=3(x-3)(x-5)$잖아요? 따라서 $g'(x)=3(x-3)(x-5)\int_a^x \{f(t)\}^4dt$의 부호가 단 한 번만 바뀌어야 합니다.

어? 그런데 이미 x축과 만나는 점이 두 개 있는데요? $x=3$에서도 만나고 $x=5$에서도 만나잖아요. 그러면 이 둘 중 하나는 중근을 가져야겠네요. 중근을 가지면 방향을 바꾸면서 접하게 될 테니까요.
그런데..... $\int_a^x \{f(t)\}^4dt$는..... $f(x)$가 삼차함수니까 네제곱하면 12차함수인데....

여러분 천천히 생각해보세요. 네제곱하면 $\{f(x)\}^4$의 함숫값은 무조건 0보다 크거나 같겠죠? 그걸 적분하면? 정적분값 역시 무조건 0보다 크거나 같게 될 거예요. 다시 말하면 $g'(x)=3(x-3)(x-5)\int_a^x \{f(t)\}^4dt$에서

$\int_a^x \{f(t)\}^4dt$는 $x=a$에서 0이 되는데 이 $x=a$가 $x=3$ 또는 $x=5$랑 겹쳐야 한다는 이야기죠. 그래야 둘 중 하나가 중근을 가지면서 오직 하나의 극값을 가지게 될 테니까요. 따라서 $a=3$ 혹은 $a=5$이고 합은 8입니다.

8. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. 〔2022학년도 6월 21〕

(가) x에 대한 방정식 $(x^n - 64)f(x) = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다. (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

8. 정답 24 〔2022학년도 6월 21〕

1) 조건해석, 자연수 보이면 숫자 넣을 준비, 인수정리

최고차항의 계수가 1인 이차함수가 있는데 (가)조건에서 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고 각각의 실근은 중근이라고 합니다. n은 자연수이구요. (나)조건에서는 $f(x)$의 최솟값이 음의 정수라네요. 숫자 넣을 준비는 하고 있어야 해요.

이차함수의 최솟값이 음의 정수라는 건 이미 x축과 두 개의 점에서 만나고 있다는 말이겠죠? 그래프 그려보면 바로 알 수 있어요. 두 실근을 α, β라 하면 인수정리에 의해 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$라 할 수 있겠네요.

x^n-64는 자체적으로 중근을 가질 수 없습니다. n이 홀수라면 $y=x^n$은 계속 증가하는 그래프인데 그러면 만나는 점이 하나가 되죠. $x^n-64=0$은 오직 하나의 실근을 가지게 됩니다. 이러면 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$를 곱해도 중근 두 개를 가질 수 없어요.

n이 짝수라면 $y=x^n$은 $x=0$에서 방향을 바꾸면서 x축에 접하는 그래프입니다. $y=x^2$와 아주 유사한 그래프이죠. 그러면 $y=x^n$과 $y=64$가 만나는 점은 두 개가 됩니다. 그리고 그게 $x=\alpha$, $x=\beta$가 되어야 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$와 합쳐서 중근을 가지게 되겠죠? 따라서 따라서 $\alpha^n=64$, $\beta^n=64$입니다.

α, β는 같으면 안 되니까(같으면 $f(x)=(x-\alpha)^2$로 최솟값이 0이 되겠죠?) 하나는 양수, 하나는 음수이고 서로의 부호는 반대가 되어야겠네요. $\alpha=-\beta$입니다. $f(x)=(x-\alpha)(x+\alpha)=x^2-\alpha^2$이네요. 최솟값은 $-\alpha^2$인데 이게 음의 정수여야 하죠? 일단 기억해두자구요.

결국 $\alpha^n=64$를 만족하고 $-\alpha^2$가 음의 정수가 되는 짝수 n을 찾아야 합니다. 천천히 자연수에 숫자 넣어볼까요?

2) 자연수 보이면 숫자 넣기

$n=2$이면 $\alpha^2=64$입니다. $-\alpha^2=-64$로 음의 정수이죠? 되네요.

$n=4$이면 $\alpha^4=64$입니다. $-\alpha^2=-8$로 음의 정수이네요. 됩니다.

$n=6$이면 $\alpha^6=64$입니다. $-\alpha^2=-4$로 음의 정수입니다. 되네요.

$n=8$이면 $\alpha^8=64$입니다. $-\alpha^2=-2^{\frac{3}{2}}$로 음의 정수가 아니네요? 안 됩니다.

$n=10$이면 $\alpha^{10}=64$입니다. $-\alpha^2=-2^{\frac{6}{5}}$로 음의 정수가 아닙니다. 안 되겠네요.

$n = 12$이면 $\alpha^{12} = 64$입니다. $-\alpha^2 = -2$로 음의 정수이네요. 됩니다.

이거보다 더 작아지려면 $-\alpha^2 = -1$이어야 하는데 그러면 $\alpha^n = 64$가 될 리가 없죠? 여기가 끝이네요. 따라서 모든 자연수의 합은 $2 + 4 + 6 + 12 = 24$입니다.

9. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)
〔2022학년도 6월 22〕

9. 정답 61 〔2022학년도 6월 22〕

1) 조건해석, 합성함수는 치환

삼차함수 $f(x)$가 있답니다. (가)조건에서 $f(x)=0$의 서로 다른 실근이 2개라네요. 너무 뻔하죠? 한 점에서 x축에 접해야 합니다. 그리고 (나)조건에서 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이라네요. 형태 참 기괴하네요.

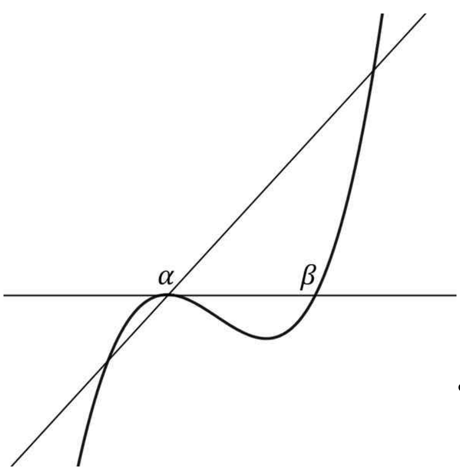
먼저 합성함수를 보면 해야 할 일이 있죠? 바로 치환하는 거예요. $x-f(x)=t$라 하면 $f(t)=0$이 됩니다. 일단 먼저 $f(t)=0$이 되는 t값을 찾고, $x-f(x)=t$이 되는 x값을 찾는, 사실상 문제를 두 번 푸는 셈이 됩니다.

일단 먼저 $f(x)$부터 설정해볼게요. $f(x)$는 한 점에서 접해야 하니까 $f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$라 할게요. 그러면 $f(t)=0$이 되는 t는 α, β이 됩니다.

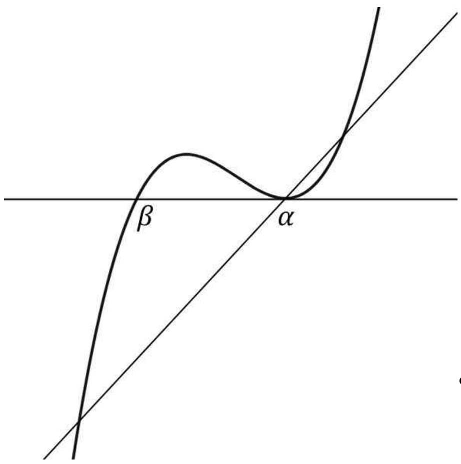
2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

다음으로 가봅시다. 이번에는 $x-f(x)=\alpha$, $x-f(x)=\beta$가 되는 x가 3개가 되도록 해야 해요. 저거 넘기면 $f(x)=x-\alpha$, $f(x)=x-\beta$이니까 정리하면 $y=f(x)$와 $y=x-\alpha$, $y=x-\beta$가 만나는 점의 개수의 합이 3이 되도록 해야 해요.

$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 x축과 만나죠? 그런데 $y=x-\alpha$, $y=x-\beta$도 마찬가지이네요? 일단 두 점은 확정으로 있습니다. 나머지 하나가 어디에 있는지만 찾으면 돼요. 그런데 그래프를 그려보세요.

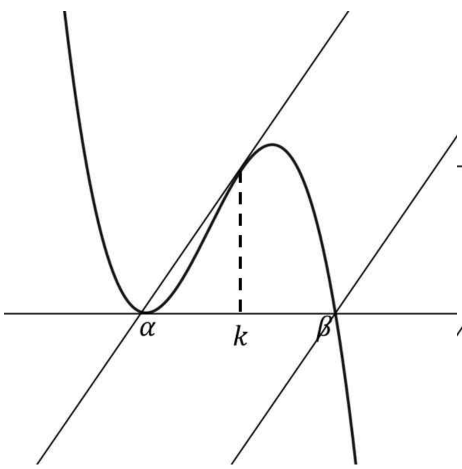


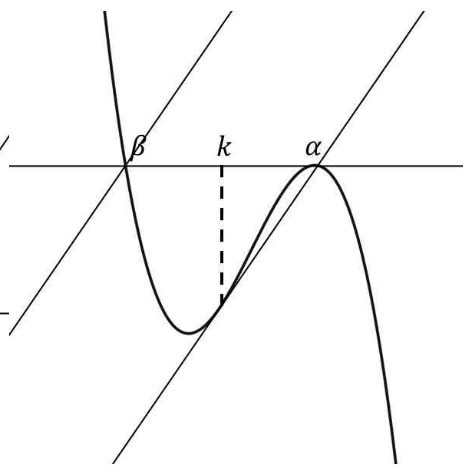
이건 이거 하나만으로 3개의 점에서 만나니까 불가능하죠?



이거도 이거 하나만으로 3개의 점에서 만납니다. 최고차항의 계수가 양수일 때는 아예 안 되네요. 일단 3개의 점에서 만나는 게 안 된다면? 그러면 두 개+한 개가 되어야 총 세 개가 되겠네요.

삼차함수와 일차함수가 두 개의 점에서 만난다는 건 접해야 한다는 거죠. 최고차항의 계수를 음수로 바꿔서 접하도록 그려봅시다.





이렇게 두 가지가 가능하겠네요.

이때 $f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$이어야 한답니다. 모든 것을 의심하세요. 왜 하필 $f(1)=4$일까요? 아직은 모르겠네요. 왜 하필 $f'(1)=1$일까요? 지금 $x=1$에서의 접선의 기울기가 1이라는 건데 $y=x-\alpha$, $y=x-\beta$의 기울기도 1이죠? 위에 그래프를 보세요. 접하는 건 $x=k$이니까 $k=1$이 되어야겠어요. 지금 보면 $y=f(x)$와 $y=x-\alpha$가 $x=1$에서 접하고, 그 함숫값이 4잖아요? 따라서 $1-\alpha=4$이고 $\alpha=-3$입니다. $f(x)=k(x+3)^2(x-\beta)$입니다. 그리고 오른쪽 그래프는 불가능하겠네요. 접하는 점에서의 함숫값이 음수니까요. $f(1)=4$을 이래서 알려준 거였군요.

그리고 $f(1)=4$이어야 하잖아요? 따라서 $f(1)=16k(1-\beta)=4$이고 $f'(1)=1$이어야 하니까 미분하고 값을

집어 넣으면 $k(8(1-\beta)+16)=8k(1-\beta)+16k=1$입니다. $8k(1-\beta)=2$이죠? 아까 $f(1)=16k(1-\beta)=4$라 했잖아요. 따라서 $k=-\dfrac{1}{16}$입니다. $f(1)=16k(1-\beta)=4$이니까 $\beta=5$이네요.

$f(x)=-\dfrac{1}{16}(x+3)^2(x-5)$입니다.

잠깐! $f'(0)>1$ 맞나요? 미분하면 값을 집어 넣으면 $\dfrac{21}{16}$으로 1보다 큰 거 맞네요. 따라서 $f(0)=\dfrac{45}{16}$입니다.

$p=16,\ q=45$이니까 $p+q=61$이네요.

확통

10. 빨간색 카드 4장, 파란색 카드 2장, 노란색 카드 1장이 있다. 이 7장의 카드를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생이 있도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색 카드끼리는 서로 구별하지 않고, 카드를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)
〔2022학년도 6월 확통 26〕

① 78　　② 84　　③ 90　　④ 96　　⑤ 102

10. 정답 ③ 〔2022학년도 6월 확통 26〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

빨 4, 파 2, 노 1 이렇게 7개를 3명한테 나누어 줄 때 3가지 색 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생이 있도록 나누어 주어야 한답니다. 거기에 카드를 받지 못할 수도 있다고 하네요.

음... 일단 노란색이 하나만 있으니까 3가지 색을 받을 때 이거는 꼭 들어가야겠죠? 그런데 파란색이랑 빨간색은 각각 몇 장씩 주어야 할까요?

그럼 기준 잡고 나눠봐야죠. 먼저 파란색 1개를 줄 때 가능한 경우의 수는 노랑파랑빨강 순서로 111, 112, 113, 114가 가능합니다.

일단 이 모든 경우 저 3가지 색의 카드 묶음을 줄 사람 한 명을 골라야 해요. 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$입니다. 또한 파란색은 하나만 남습니다. 그러면 파란색 카드 1장을 나머지 두 명에게 주면 되겠죠? ${}_2C_1 = 2$입니다. 이제 남은 건 빨간색 카드를 주는 거예요.

111의 경우 빨간색 카드를 주는 방법은 같은 공을 다른 상자에 넣는 방법과 같습니다. 같은 색 카드끼리는 구별하지 않으니까 사실상 같잖아요. 선택종류는 2가지(2명), 선택횟수는 3번이니까 ${}_2H_3 = {}_4C_3 = 4$입니다.
112의 경우 선택종류는 2가지(2명), 선택횟수는 2번이니까 ${}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$입니다.
113의 경우 선택종류는 2가지(2명), 선택횟수는 1번이니까 ${}_2H_1 = {}_2C_1 = 2$입니다.
114의 경우 빨간색 카드를 다 줬으니까 경우의 수는 1이네요.
따라서 총 $3 \times 2 \times (4+3+2+1) = 60$입니다.

파란색 카드 두 개를 줄 때는요? 그러면 121, 122, 123, 124가 가능하네요. 아까랑 파란색만 다르게 해서 경우의 수를 계산하면 되겠어요. 먼저 저 3가지 색의 카드 묶음을 줄 사람 한 명을 고르구요(${}_3C_1 = 3$), 그 다음에는 빨간색을 주면 됩니다. 이건 앞에서 구했죠? $4+3+2+1 = 10$이네요. 따라서 $3 \times 10 = 30$입니다.
구하는 경우의 수는 $60 + 30 = 90$이네요. 답은 ③번입니다.

11. 주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던질 때, 나오는 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 같을 확률은? 〔2022학년도 6월 확통 27〕

① $\frac{3}{64}$ ② $\frac{5}{96}$ ③ $\frac{11}{192}$ ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{13}{192}$

11. 정답 ① 〔2022학년도 6월 확통 27〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던질 때 나오는 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 같을 확률을 구하랍니다. $\dfrac{\text{주사위 눈의 수 곱} = \text{앞면 나오는 동전 개수}}{\text{주사위 2개, 동전 4개}}$ 이죠? 분모부터 확인해봅시다. $6^2 \times 2^4$이네요.

그러면 일단 앞면이 나오는 동전의 개수부터 확인해볼까요?

1234가 가능합니다. 0도 가능은 하지만 주사위 눈의 수를 곱해서 0이 될 수는 없으니까요.

이제 천천히 각각의 케이스에 대해 계산해봅시다. 앞면이 나오는 동전의 개수가 1이라면 앞뒤뒤뒤를 배열하는 거니까 $\dfrac{4!}{3!} = 4$입니다. 주사위 눈의 곱이 1이 되려면 11이 되어야겠네요. 이거는 경우의 수가 1입니다. 따라서 $4 \times 1 = 4$이네요.

앞면이 나오는 동전의 개수가 2이라면 앞앞뒤뒤를 배열해야 합니다. $\dfrac{4!}{2! \times 2!} = 6$이네요. 그리고 주사위 눈의 곱이 2가 되려면 12가 되어야겠네요. 이거는 배열이 가능합니다. 경우의 수는 2입니다. 따라서 $6 \times 2 = 12$이네요.

앞면이 나오는 동전의 개수가 3이라면 앞앞앞뒤를 배열해야 합니다. $\dfrac{4!}{3!} = 4$이네요. 그리고 주사위 눈의 곱이 2가 되려면 13가 되어야 합니다. 경우의 수는 2입니다. 따라서 $4 \times 2 = 8$이네요.

앞면이 나오는 동전의 개수가 4라면 앞앞앞앞이니까 경우의 수는 1입니다. 그리고 주사위 눈의 곱이 4가 되려면 14 또는 22가 되어야겠네요. 경우의 수는 $2+1=3$입니다. 따라서 $1 \times 2 = 3$이네요.

구하는 확률은 $\dfrac{4+12+8+3}{6^2 \times 2^4} = \dfrac{3}{64}$입니다. 답은 ①번이네요.

12. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이하이면 나온 눈의 수를 점수로 얻고, 나온 눈의 수가 4 이상이면 0점을 얻는다. 이 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 할 때, 얻은 네 점수의 합이 4가 되는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는? 〔2022학년도 6월 확통 28〕

① 187 ② 190 ③ 193 ④ 196 ⑤ 199

12. 정답 ⑤〔2022학년도 6월 확통 28〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

일단 상황부터 파악해봅시다. 주사위를 던지는데 3이하이면, 그러니까 1, 2, 3이면 이 수를 점수로 얻고, 나온 눈의 수가 4 이상이면, 즉 4, 5, 6이면 0점을 얻는답니다. 그렇게 4번을 해서 나온 점수의 합이 4가 되도록 해보래요.

어우 이거 복잡한데요? 이거 제 생각에는 0점이 몇 개가 있는지를 기준으로 잡는 게 좋을 것 같아요.

1-1) 0점이 없을 때

만약 0점이 없다면 네 번 해서 4점이 나오려면 $1+1+1+1$이어야 합니다. 경우의 수는 1이네요.

1-2) 0점이 1개일 때

이러면 세 번 해서 4점이 나와야 합니다. $1+1+2$만 가능하네요.

$0+1+1+2$를 배열하는 거니까 $\dfrac{4!}{2!}=12$입니다.

그리고 0점을 어느 숫자로 얻을 건지를 정해야 합니다. 4, 5, 6 세 가지가 있죠? 경우의 수는 3입니다. 따라서 총 $3\times12=36$이네요.

1-3) 0점이 2개일 때

이러면 두 번 해서 4점이 나와야 합니다. $1+3$, $2+2$가 가능하네요. 이건 또 경우를 나눠야겠어요.

1-3-1) 1+3일 때

그러면 $0+0+1+3$을 배열하는 것이 됩니다. 따라서 $\dfrac{4!}{2!}=12$이네요.

0점을 뭘로 할지도 정해야 합니다. 4, 5, 6 세 가지가 있으니까 각각 하면 3×3이 되겠네요. 각각의 경우에 대하여 4, 5, 6이 가능하니까요. 따라서 $12\times3\times3=108$입니다.

1-3-2) 2+2일 때

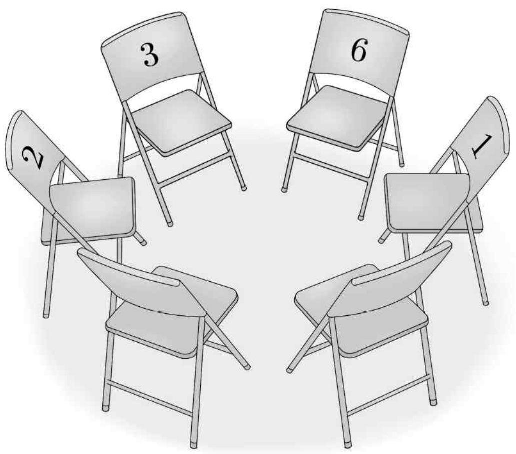
이러면 $0+0+2+2$를 배열하는 것이 됩니다. $\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$이네요.

마지막으로 0점을 뭘로 할지 정하면 됩니다. 마찬가지로 3×3이 되겠죠? 따라서 $6\times3\times3=54$입니다.

0이 3개 이상인 건 불가능합니다. 이러면 점수가 4 이상은 나와야 하는데 눈의 수가 4 이상이면 점수가 0점이 되죠.

따라서 구하는 경우의 수는 $1+36+108+54=199$입니다. 답은 ⑤번이네요.

13. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다.이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)
〔2022학년도 6월 확통 29〕

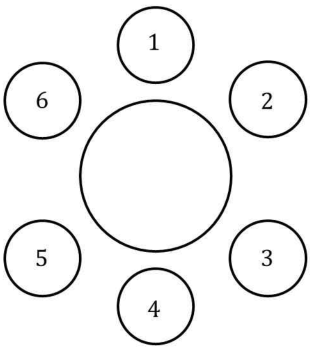


13. 정답 48 〔2022학년도 6월 확통 29〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

1, 2, 3, 4, 5, 6을 원형으로 배열할 때 이웃한 두 숫자의 곱이 12가 되지 않도록 배열하라네요. 곱이 12가 된다는 건 34 아니면 26이라는 거잖아요? 이 두 숫자는 이웃하지 말랍니다.

막무가내로 원순열 쓰는 건 안 될 것 같아요. 그러면 천천히 기준 잡고 분류해야죠.



일단 이렇게 설정해봅시다. 원 위의 번호는 그냥 제가 임의로 붙여놓은 거예요.

먼저 6을 놓아봅시다. 1번 자리에 놓을게요. 경우의 수는 1입니다. 처음 놓을 때는 자리끼리 구분되지 않거든요. 1번 자리가 아니라 3번에 놓아도 어차피 회전시키면 1번 자리로 오게 할 수 있잖아요. 경우의 수는 1이에요. 그러면 2는 5, 4, 3번 자리에 가능하죠? 2, 6번 자리는 이웃하게 되잖아요.

1-1) 5번 자리에 갔을 때

5번 자리에 갔다고 해봅시다. 그러면 3과 4는 3, 4번에 앉는 거, 2, 3번에 앉는 거 빼고는 다 가능합니다. 그렇게 앉으면 이웃하게 되겠죠?

총 4자리니까 2명을 배열하는 경우의 수는 $4\times3=12$입니다. 하지만 3, 4번, 2, 3번에는 앉을 수 없죠. 3, 4번 자리에 앉는 경우의 수는 2입니다. 자리만 3, 4끼리 자리만 바꿀 수 있으니까요. 2, 3번도 마찬가지이죠. 따라서 $12-2-2=8$입니다. 그 이후에 나머지 두 숫자는 맘대로 배치하면 되죠. 경우의 수는 2입니다. 총 $8\times2=16$이네요.

1-2) 3번 자리에 갔을 때

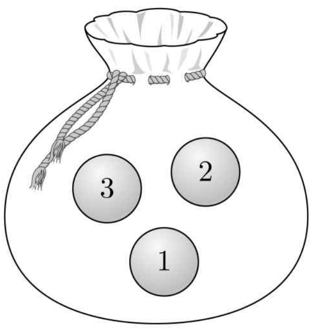
이번엔 3번 자리에 갔을 때로 가봅시다. 그런데 이건 5번 자리에 있을 때와 정확히 일치해요. 3과 4는 4, 5번, 5, 6번 자리에 앉는 거만 안 되니까 경우도 똑같죠. 경우의 수는 16입니다.

1-3) 4번 자리에 갔을 때

마지막으로 4번 자리에 갔을 때를 해봅시다. 그러면 3과 4는 2, 3번, 5, 6번 자리에 앉는 거만 안 됩니다. 이거도 똑같은데요? 경우의 수는 16입니다.

결국 구하는 경우의 수는 $16+16+16=48$이네요.

14. 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 5번 반복하여 확인한 5개의 수의 곱이 6의 배수일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 〔2022학년도 6월 확통 30〕



14. 정답 47 〔2022학년도 6월 확통 30〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

그림과 같이 1, 2, 3이 있는데 이 중에서 하나를 꺼내고 숫자를 확인한 후 다시 넣는 걸 5번할 때 확인한 숫자의 곱이 6의 배수일 확률을 구하랍니다. 구하는 확률은 $\dfrac{5\text{개 수의 곱 }6\text{의 배수}}{3\text{개 중 한 개 꺼내기 }5\text{번}}$이네요.

분모를 구해볼까요? 그냥 3개 중 한 개 꺼내는 경우의 수는 3인데 이걸 5번 반복하니까 3^5이겠네요.

이제 분자로 가봅시다. 5개 수의 곱이 6의 배수가 되어야 한답니다. 곱해서 6의 배수가 되려면 어떻게 해야 하죠? 일단 최소한 2와 3은 가지고 있어야 합니다. 적어도 2 그리고 3은 가지고 있어야 한다는 말이죠.

2-1) 여사건

적어도라는 표현이 있으니까 여사건을 사용해봅시다. 그러면 2가 없는 경우, 3이 없는 경우를 전체에서 뺀 후 겹치는 2, 3 모두가 없는 경우를 더해주면 되겠죠?

2가 없는 경우 1, 3만 있습니다. 그러면 5번 각각에 대하여 뭘 할지만 정하면 되죠. 경우의 수는 2^5입니다.
3이 없는 경우도 마찬가지입니다. 2^5이네요.
2, 3 모두가 없다면 1만 가능하죠. 경우의 수는 1입니다. 따라서 구하는 경우의 수는
$3^5-2^5-2^5+1=180$입니다. 구하는 확률은 $\dfrac{180}{3^5}=\dfrac{20}{27}$이네요. $p=27$, $q=20$이니까 $p+q=47$입니다.

2-2) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

천천히 2와 3이 몇 개씩 가져야 할지 기준 잡고 분류해봅시다. 기준은 1의 개수가 몇 개인지로 해볼까요?
2와 3은 최소한 하나는 가져야 하니까 1은 3개까지 가질 수 있습니다.

1이 3개인 경우 11123이어야 합니다. 이건 그냥 배열만 하면 되니까 경우의 수는 $\dfrac{5!}{3!}=20$이네요.

1이 2개인 경우 가능한 경우는 11223, 11233입니다. 배열하면 $\dfrac{5!}{2!\times2!}+\dfrac{5!}{2!\times2!}=60$이네요.

1이 1개인 경우 가능한 건 12223, 12233, 12333이네요. 12223, 12333은 배열하면 $\dfrac{5!}{3!}=20$이구요, 12233은

$\dfrac{5!}{2! \times 2!} = 30$입니다. 따라서 $20+20+30=70$이네요.

1이 없으면 22223, 22233, 22333, 23333이 가능합니다. 22223, 23333은 $\dfrac{5!}{4!} = 5$이구요, 22233, 22333은 $\dfrac{5!}{3! \times 2!} = 10$입니다. 따라서 $5+5+10+10=30$이네요.

구하는 확률은 $\dfrac{20+60+70+30}{3^5} = \dfrac{20}{27}$입니다. $p=27$, $q=20$이니까 $p+q=47$이네요.