어차피 인생은 정시?
2021.06.03

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

$2^2 = 4$

2. 함수 $f(x)$가

$$f'(x) = 3x^2 - 2x, \quad f(1) = 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x) = x^3 - x^2 + 1$

$f(2) = 8 - 4 + 1 = 5$

3. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta = \frac{12}{5}$일 때, $\sin\theta + \cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ 0 ④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$

$\sin\theta < 0$

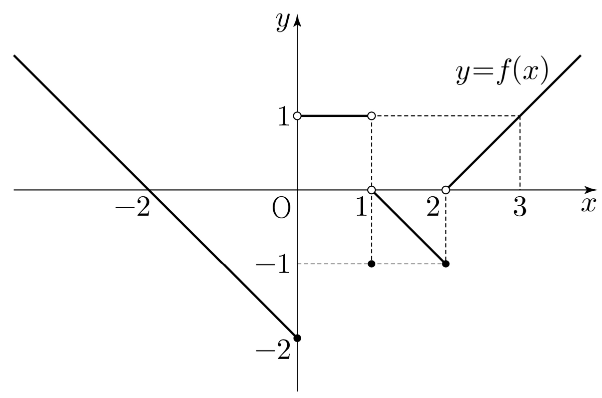
$\cos\theta < 0$

$\sin\theta = -\frac{12}{13}$

$\cos\theta = -\frac{5}{13}$

$\therefore \sin\theta + \cos\theta = -\frac{17}{13}$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$f(0^-) + f(2^+) = (-2) + 0 = -2$

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2+3)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+3)f'(x)$

$g'(1)=2f(1)+4f'(1)$

$=2\times2+4\times1=8$

6. 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$3x^2-6x=0$, $x=0, 2$

$S=\frac{3}{6}\cdot2^3=\frac{1}{2}\cdot2^3=4$

7. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_6=2(S_3-S_2)$$

일 때, S_{10}의 값은? [3점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

$a_6=2a_3$

12 6

$a_n=2n$

$S_n=2(1+2+\cdots+n)=n(n+1)$

$S_{10}=10\times11=110$

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6 & (x<a) \\ 2x-a & (x\ge a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$(-2a+6)^2=(2a-a)^2$

$4a^2-24a+36=a^2$

$3a^2-24a+36=0$

$a^2-8a+12=0$ ∴ $\boxed{8}$

∴ $a=2,6$ ⇒ 둘다 가능.

2, 2 −6, 6

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이고 $a_{12}=\frac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

$a_{12}=\frac{1}{2} \leftarrow a_{11}=2 \leftarrow a_{10}=\frac{1}{4}$

$\leftarrow a_9=4 \leftarrow a_8=\frac{1}{2} \leftarrow a_7=2 \cdots$

반복

$a_1=a_9=4$

$a_4=a_{12}=\frac{1}{2}$

∴ $4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

10. $n\ge 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x,\quad y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

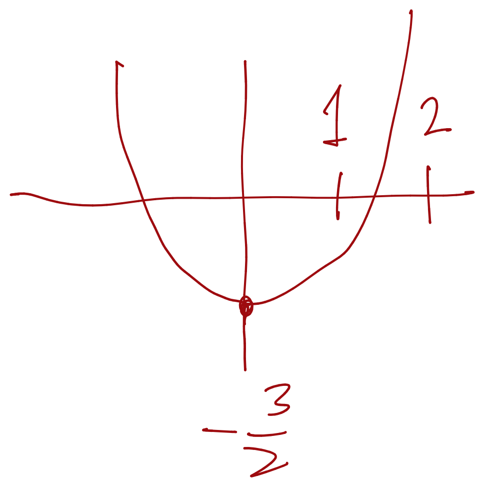
① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

$n\ge 2$

$\log_n x=-\log_n(x+3)+1$

$\log_n(x^2+3x)=1$

$f(x)=x^2+3x-n=0$



$f(1)<0,\ f(2)>0$

$4-n<0,\ 10-n>0$

∴ $4<n<10$

$n=5,6,7,8,9$

∴ 합 $\boxed{35}$

11. 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$$

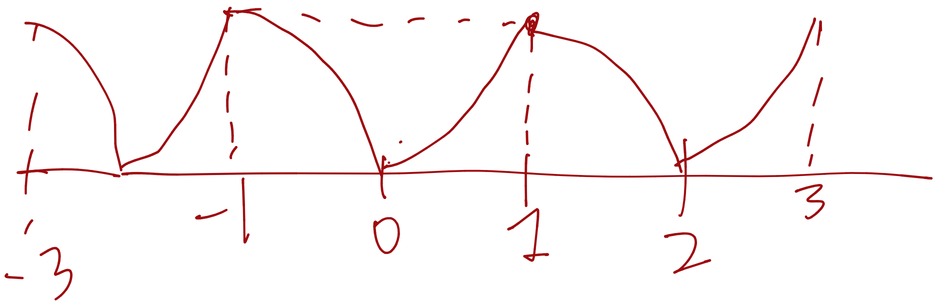
을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$의 값은? [4점]

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 1) \end{cases}$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

$g(x)$



$\therefore \int_{-3}^{2} g(x)\,dx$

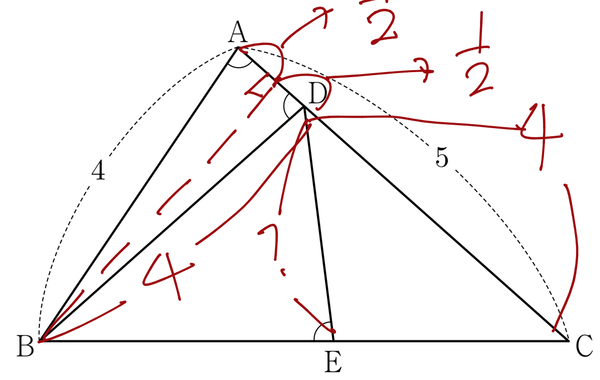
$= 3 \times \underbrace{\int_{-1}^{1} g(x)\,dx}_{1} - \int_0^1 f(x)\,dx$

$= 3 - \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$$

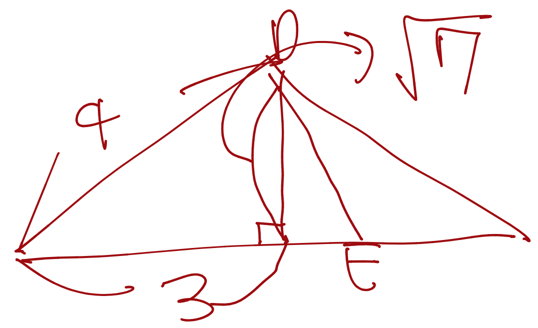
일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

$\overline{BC} = \sqrt{4^2+5^2-2\times4\times5\times\frac{1}{8}}$

$= \sqrt{16+25-5} = \sqrt{36} = 6$



$\overline{DE} = \sqrt{17} \times \frac{1}{\sin\angle DEB}$

$= \sqrt{17} \times \frac{1}{\frac{3\sqrt{17}}{8}}$

$= \boxed{\frac{8}{3}}$

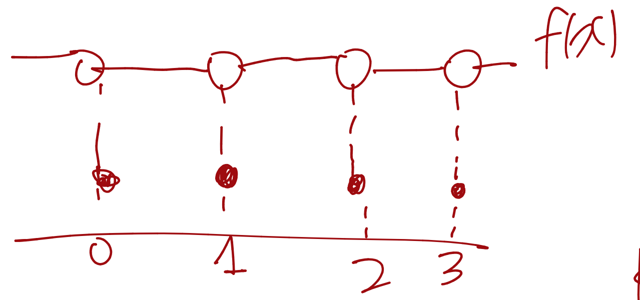
13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0, 1]$에서

$$f(x) = \begin{cases} 3 & (0 < x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1) = f(x)$를 만족시킨다.

$\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190



$k=1, 4, 9, 16$

$\sqrt{k} = 1, 2, 3, 4 \rightarrow f(\sqrt{k}) = 1$

$\sqrt{k} \neq 1, 2, 3, 4 \rightarrow f(\sqrt{k}) = 3$

$\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3} = \sum_{k=1}^{20} \frac{3}{3} \cdot k - \frac{3}{3}(1+4+9+16)$

$10 + \frac{1}{3}(1+4+9+16)$

$= \frac{\cancel{20} \times 21}{\cancel{2}} - \frac{2}{3} \times (30)$

$= 210 - 20 = \boxed{190}$

14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

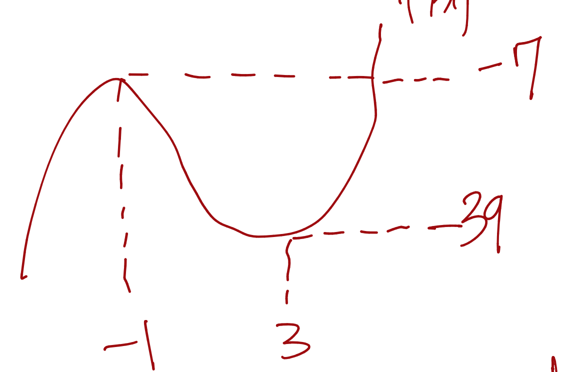
> (가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x) = |xf(x-p) + qx|$이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x = a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 12$

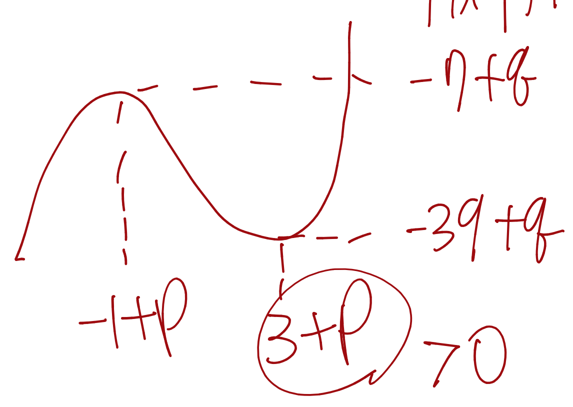
$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$

$f'(-1) = f'(3) = 0$

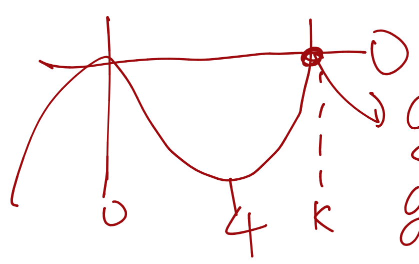


$x\,g(x) = |x||f(x-p)+q|$

(나) → $x=0$ or $f(x-p)+q=0$인 때 주목.



$-1+p=0$, $-7+q=0$인 상황



$g(x)$ 미분불가

$g(k-) = -f(x-p)-q$

$g(k+) = f(x-p)+q$

$g'(k-) = -g'(k+)$

$\therefore p=1,\ q=7$

$p+q=8$ (답) ③

15. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2} - t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2} - t\right) = 0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

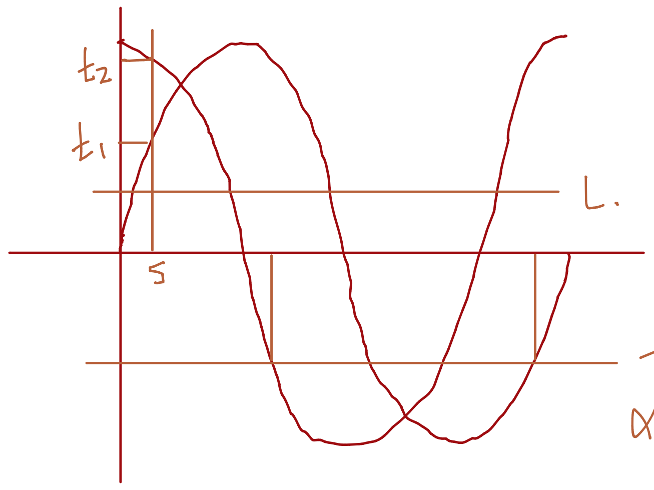
<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t) + \beta(t) = 5$이다.

ㄴ. $\{t \mid \beta(t) - \alpha(t) = \beta(0) - \alpha(0)\} = \left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2 = \frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



ㄱ. (O)
$\alpha(t)$, $\beta(t)$가 $\frac{5}{2}$ 대칭

ㄴ. (O) $0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta(t) - \alpha(t) = 3 = \beta(0) - \alpha(0)$
$t > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta(t) - \alpha(t) > 3$
$t < 0 \Rightarrow \beta(t) - \alpha(t) < 3$

ㄷ. (X) $\sin\frac{\pi s}{2} = t_1$ $\cos\frac{\pi s}{2} = t_2$
$t_1^2 + t_2^2 = 1$
$t_2 - t_1 = \frac{1}{2} \rightarrow t_1^2 + t_2^2 - 2t_1 t_2 = \frac{1}{4}$
$\therefore t_1 t_2 = \frac{3}{8}$
$\therefore$ ㄱ, ㄴ

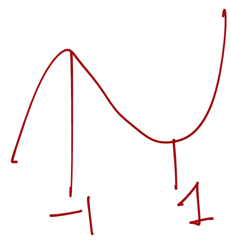
단답형

16. $\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24$의 값을 구하시오. [3점]

$\log_4\left(\frac{2}{3} \cdot 24\right) = \log_4 16 = \boxed{2}$

17. 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 12$가 $x = a$에서 극소일 때, $a + f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = -1, 1$



$a = 1$
$f(a) = f(1) = 1 - 3 + 12 = 10$
$\therefore a + f(a) = 11$
[답] 11

18. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2 = 36,\quad a_7 = \frac{1}{3}a_5$$

일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

$r^2 = \frac{1}{3},\ r = \frac{1}{\sqrt{3}}\ (\because r>0)$

$a_2 = 36 \rightsquigarrow a_6 = 36\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = 36\cdot\frac{1}{9} = 4$

[답] 4

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

$s(t) = t^3 - 2t^2 + kt + \cancel{C}$
위치

$S(1) = 1 - 2 + k = -3,\ k = -2$

$S(3) - S(1) = (27 - 18 - 6) - (1 - 2 - 2)$

$= 3 - (-3) = 6$ [답] 6

20. 실수 a와 함수 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 3$에 대하여 함수

$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^4\, dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

$g(x) = f(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt - \int_a^x \{f(t)\}^5 dt$

$g'(x) = \cancel{\{f(x)\}^5} - f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt - \cancel{\{f(x)\}^5}$

$g'(x) = 0$: $f'(x) = 0$ or $\int_a^x \{f(t)\}^4 dt = 0$

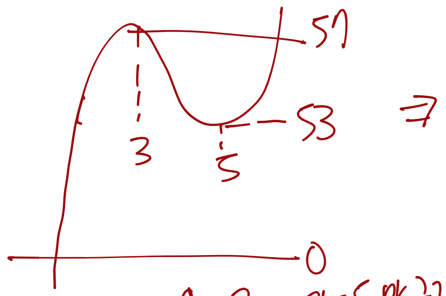
$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45 = 0$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

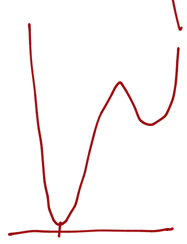
$x = 3, 5$

$f(3) = 27 - 108 + 135 + 3 = 57$

$f(5) = 125 - 300 + 225 + 3 = 53$



$\Rightarrow$



$\int_a^x \{f(t)\}^4 dt \ge 0$

$\int_a^x \{f(t)\}^4 dt = 0$

$\therefore x = a$

$\therefore a = 3 \to x = 5$ 만 극값

$a = 5 \to x = 3$ 만 극값

$a \ne 3, 5 \to x = 3,\ x = 5$ 모두 극값

$\therefore 3 + 5 = \boxed{8}$

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

n: 짝수

$n=2k \to x^n-64=0 \sim x=\pm\sqrt[2k]{64}$

$f(x)=0 \sim x=\pm\sqrt[2k]{64}$

$\to (x-\sqrt[2k]{64})(x+\sqrt[2k]{64})$

최솟값 $=-(\sqrt[2k]{64})^2$

$=-64^{\frac{1}{k}}=-2^{\frac{6}{k}}$ → 음의 정수

$\therefore \frac{6}{k}$ ∋ 자연수 ∵ 2 : 소수

$\Rightarrow k=1,2,3,6$

$n=2,4,6,12$

$\Rightarrow 2+4+6+12=\boxed{24}$

[답] 24

22. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

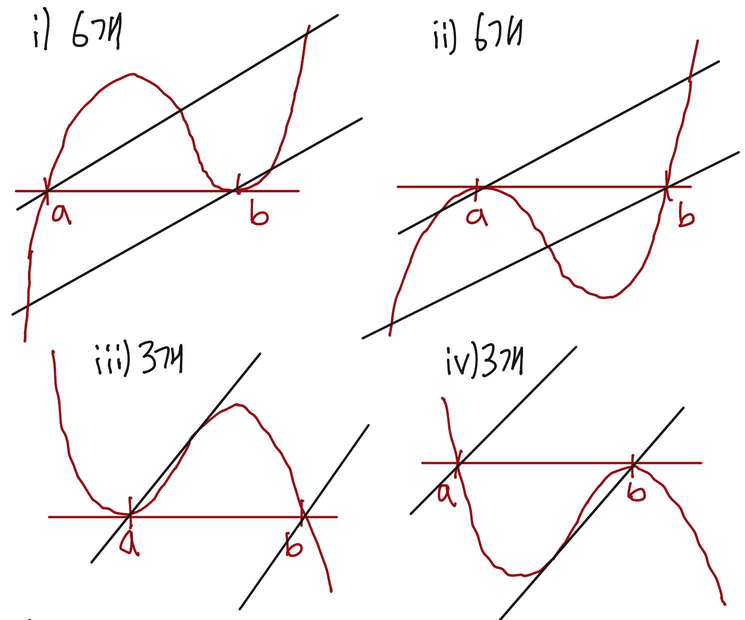
$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) $f(x)=k(x-a)^2(x-b)$ or $k(x-a)(x-b)^2$ $(a<b)$

(나) $x-f(x)=a$ or b ⇒ 실근 3개

$f(x)=x-a$, $f(x)=x-b$ 실근 3개.

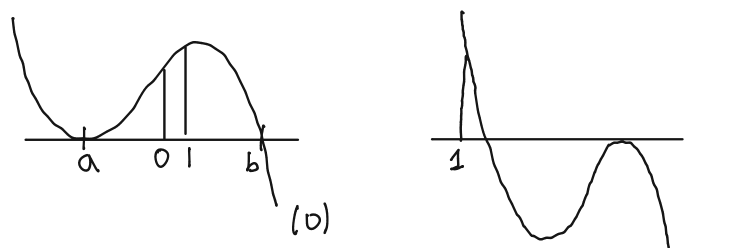
우선, $f(a)=a-a=0$, $f(b)=b-b=0$. 나머지 실근이 1개.



case 4가지 check!

☆ (나)의 실근의 개수가 최소인 경우

iii) $f(1)>0$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$ iv) $f(1)>0$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$



$\Rightarrow a<0,\ b>0$ $f(1)>0$ & $f'(1)>0$ (X)

$f'(1)=1 \to y=x-a$가 $x=1$에서 $f(x)$와 접함

$1-a=f(1)=4,\ a=-3$

$f(x)=k(x+3)^2(x-b)$, $f'(x)=k\{(x+3)^2+2(x+3)(x-b)\}$

$f(1)=k\cdot 16\cdot(1-b)=4$

$f'(1)=k\cdot(16+8(1-b))=1$

$\Rightarrow 16-16b:24-8b=4:1$

$96-32b=16-16b,\ b=5$

$-64\cdot k=4,\ k=-\frac{1}{16}$

$f(0)=k\cdot 9\cdot(-5)=\frac{45}{16}$

"계산"

[답] 61

> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(2x+1)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는? [2점]

① 20　② 40　③ 60　④ 80　⑤ 100

$2^3 \cdot 1^2 \cdot {}_5C_2 = 80$

24. 어느 동아리의 학생 20명을 대상으로 진로활동 A와 진로활동 B에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 진로활동 A와 진로활동 B 중 하나를 선택하였고, 각각의 진로활동을 선택한 학생 수는 다음과 같다.

(단위 : 명)

구분	진로활동 A	진로활동 B	합계
1학년	7	5	12
2학년	4	4	8
합계	11	9	20

이 조사에 참여한 학생 20명 중에서 임의로 선택한 한 명이 진로활동 B를 선택한 학생일 때, 이 학생이 1학년일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{5}{9}$　③ $\frac{3}{5}$　④ $\frac{7}{11}$　⑤ $\frac{2}{3}$

$\frac{5}{9}$

25. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 선택할 때, 선택한 수가 3500보다 클 확률은? [3점]

① $\frac{9}{25}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{11}{25}$ ④ $\frac{12}{25}$ ⑤ $\frac{13}{25}$

전체: 5^4

3500~ :

35이상 마음대로

⇓

11가지

35, 41~45, 51~55

$\therefore 11 \times 5^2$

$\Rightarrow \frac{11\times 5^2}{5^4} = \frac{11}{5^2} = \frac{11}{25}$

26. 빨간색 카드 4장, 파란색 카드 2장, 노란색 카드 1장이 있다. 이 7장의 카드를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생이 있도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색 카드끼리는 서로 구별하지 않고, 카드를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 78 ② 84 ③ 90 ④ 96 ⑤ 102

R	B	Y
r_1	b_1	1
r_2	b_2	0
r_3	b_3	0

누가 Y 받을지 : ${}_3C_1$

$r_1 \geq 1,\quad b_1 \geq 1$

$r_1' + r_2 + r_3 = 3$

$b_1' + b_2 + b_3 = 1$

$\therefore {}_3H_3 \times {}_3H_1 \times {}_3C_1 = {}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_3C_1$

$= 10 \times 3 \times 3 = 90$

[답] 90

27. 주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던질 때, 나오는 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 같을 확률은? [3점]

① $\frac{3}{64}$ ② $\frac{5}{96}$ ③ $\frac{11}{192}$ ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{13}{192}$

앞면 동전 주사위
1 1, 1
2 1, 2 2, 1
3 1, 3 3, 1
4 1, 4 2, 2 4, 1

$\frac{{}_4C_1}{2^4} \times \frac{1}{36} + \frac{{}_4C_2}{2^4} \times \frac{2}{36} + \frac{{}_4C_3}{2^4} \times \frac{2}{36} + \frac{{}_4C_4}{2^4} \times \frac{3}{36}$

$= \frac{4+12+8+3}{576} = \frac{27}{576} = \frac{3}{64}$ [답] $\frac{3}{64}$

28. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이하이면 나온 눈의 수를 점수로 얻고, 나온 눈의 수가 4 이상이면 0점을 얻는다. 이 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 할 때, 얻은 네 점수의 합이 4가 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [4점]

① 187 ② 190 ③ 193 ④ 196 ⑤ 199

4이상 0번 → (1, 1, 1, 1) ①
1번 → (2, 1, 1, 0) ②
2번 → (3, 1, 0, 0), (2, 2, 0, 0)
③ ④
3번 → (X)
4번 → (X)

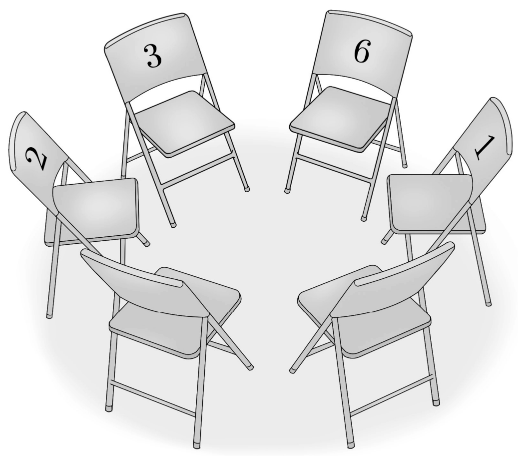
(점수 순서쌍, 순서무관)

① ⇒ 1
② ⇒ ${}_4C_2 \times {}_2C_1 \times 3 = 36$
③ ⇒ ${}_4C_1 \times {}_3C_1 \times 3 \times 3 = 108$
④ ⇒ ${}_4C_2 \times 3 \times 3 = 54$

∴ 1+36+108+54 = 199

단답형

29. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



$2-6,\ 3-4$ 이웃 (x)

i) ② 고정, 6 ... ii과 대칭, iii

ii) ② ... 6

3,4가 이웃한 경우 $\Rightarrow 4 \times 2! = 8$

34
43
34
43

$\therefore 4! - 8 = \boxed{16}$

iii) ② ... ⑥

3,4 이웃 ⇒ 4가지 (3,4 배열)

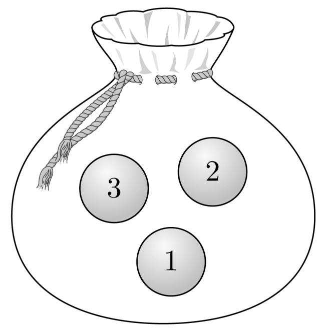
$\therefore 4 \times 2! = 8$

$\therefore 4! - 8 = \boxed{16}$

$\therefore 16 \times 2 + 16 = 48$

[답] 48

30. 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 5번 반복하여 확인한 5개의 수의 곱이 6의 배수일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



2가 적어도 1개, 3이 적어도 1개

1 a개, 2 b개, 3 c개

$\Rightarrow a+b+c=5 \quad b'=b-1,\ c'=c-1$

$a+b'+c'=3$

여사건) ① 2가 0개 $\Rightarrow 2^5$

② 3이 0개 $\Rightarrow 2^5$

③ 2,3 모두 0개 $\Rightarrow 1$

$\therefore \frac{3^5-2^5-2^5+1}{3^5} = \frac{180}{243} = \frac{20}{27}$

[답] 47

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{n+1}=\frac{2}{1}=\boxed{2}$

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^t+\cos t,\quad y=\sin t$$

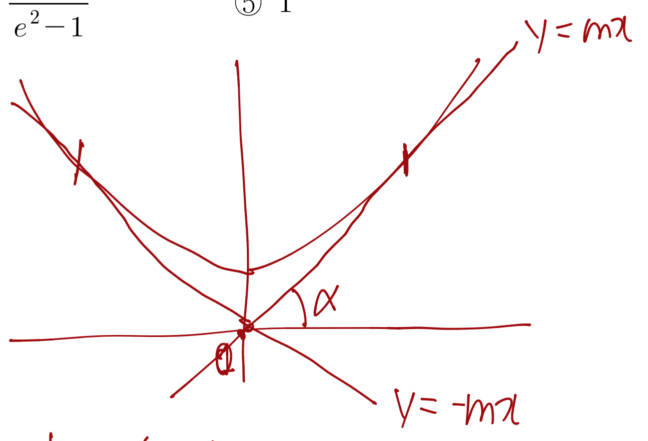
에서 $t=0$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\cos t}{e^t-\sin t}=\frac{1}{1-0}=1$

25. 원점에서 곡선 $y=e^{|x|}$에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $\dfrac{e}{e^2+1}$ ② $\dfrac{e}{e^2-1}$ ③ $\dfrac{2e}{e^2+1}$ ④ $\dfrac{2e}{e^2-1}$ ⑤ 1



$\tan\alpha = m$

$y=e^x$, $y=mx$ 접함

접점(t, e^t) ① $e^t = mt$ ② $e^t = m$ $\therefore t=1, m=e$

$\tan\alpha = e$

$\tan(-\alpha) = e$ $e>1$ $\therefore \tan\alpha > 1$

$\alpha > \frac{\pi}{4}$

$2\alpha > \frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = \pi - 2\alpha$

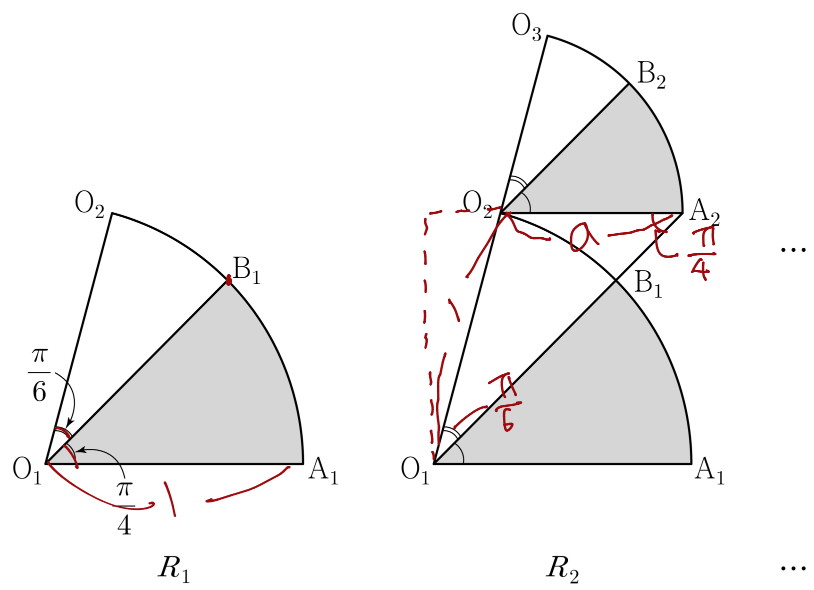
$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{2e}{1-e^2}$

$\therefore \tan\theta = \tan(\pi-2\alpha) = -\tan 2\alpha = \boxed{\dfrac{2e}{e^2-1}}$

26. 그림과 같이 중심이 $\mathrm{O_1}$, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $\mathrm{O_1A_1O_2}$가 있다. 호 $\mathrm{A_1O_2}$ 위에 점 $\mathrm{B_1}$을 $\angle \mathrm{A_1O_1B_1} = \frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $\mathrm{O_1A_1B_1}$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 $\mathrm{O_2}$를 지나고 선분 $\mathrm{O_1A_1}$에 평행한 직선이 직선 $\mathrm{O_1B_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{A_2}$라 하자. 중심이 $\mathrm{O_2}$이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $\mathrm{O_2A_2O_3}$을 부채꼴 $\mathrm{O_1A_1B_1}$과 겹치지 않도록 그린다. 호 $\mathrm{A_2O_3}$ 위에 점 $\mathrm{B_2}$를 $\angle \mathrm{A_2O_2B_2} = \frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $\mathrm{O_2A_2B_2}$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

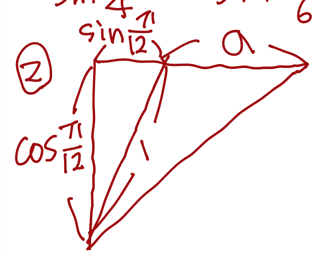


① $\dfrac{3\pi}{16}$ ② $\dfrac{7\pi}{32}$ ③ $\dfrac{\pi}{4}$ ④ $\dfrac{9\pi}{32}$ ⑤ $\dfrac{5\pi}{16}$

$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$

① $\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} = \dfrac{a}{\sin\frac{\pi}{6}} \rightarrow a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ "sin법칙"

②



$a = \cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}$ "덧셈정리"

$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\therefore a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore r = a^2 = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{\pi}{4}$

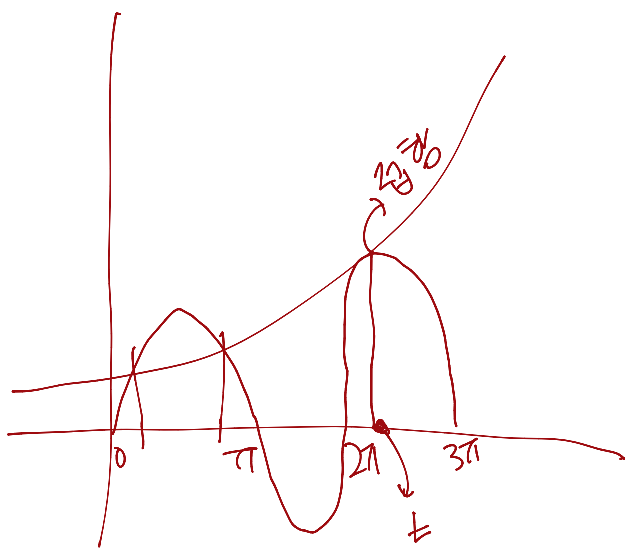
[답] ③

27. 두 함수

$$f(x)=e^{x}, \quad g(x)=k\sin x$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$ ② $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$ ③ $\sqrt{2}e^{2\pi}$ ④ $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$ ⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}}$



$e^{t}=k\sin t$

$e^{t}=k\cos t$

$\therefore \sin t=\cos t>0$

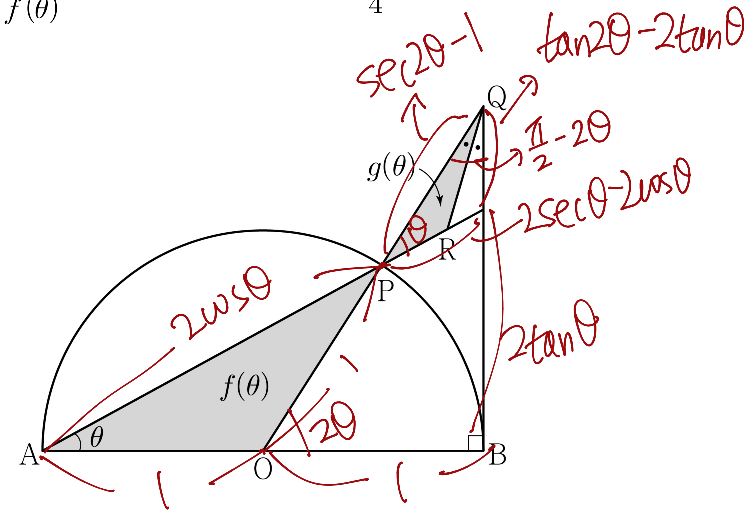
$\rightarrow t=\frac{\pi}{4}+2\pi$

$=\frac{9}{4}\pi$

$e^{\frac{9\pi}{4}}=k\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\therefore k=\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, ∠OQB의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. ∠OAP $=\theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^{4}\times f(\theta)}$ 의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

$f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\cos\theta\cdot\sin\theta=\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin2\theta$

$\overline{PQ}=\sec2\theta-1=\frac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}=\frac{2\sin^{2}\theta}{\cos2\theta}$

$\overline{PR}=(2\sec\theta-2\cos\theta)\cdot\frac{\sec2\theta-1}{\sec2\theta-1+\tan2\theta-2\tan\theta}$

$\cos2\theta=\cos^{2}\theta-\sin^{2}\theta=1-2\sin^{2}\theta$

$2\sec\theta-2\cos\theta=2\left(\frac{1-\cos^{2}\theta}{\cos\theta}\right)=\frac{2\sin^{2}\theta}{\cos\theta}$

$\frac{\sin2\theta}{\cos2\theta}-\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{2\sin\theta\cos^{2}\theta-\sin\theta(2\cos^{2}\theta-2\sin^{2}\theta)}{\cos2\theta\cos\theta}$

$=\frac{2\sin^{3}\theta}{\cos2\theta\cos\theta}$

PQ

$g(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sin^{2}\theta}{\cos2\theta}\cdot\frac{2\sin^{2}\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\frac{2\sin^{2}\theta}{\cancel{\cos2\theta}}}{\frac{2\sin^{2}\theta}{\cancel{\cos2\theta}}+\frac{2\sin^{3}\theta}{\cancel{\cos2\theta}\cos\theta}}\cdot\sin\theta$

$=2\cdot\frac{\sin^{4}\theta}{\cos2\theta\cos\theta}\cdot\frac{2}{\frac{2\cos\theta+2\sin\theta}{\cos\theta}}\cdot\sin\theta$

$\rightarrow 2\cdot\theta^{4}\cdot1\cdot\theta\rightarrow2\theta^{5}$

$\therefore\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^{4}f(\theta)}=\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{2\theta^{5}}{\theta^{4}\cdot\frac{2\theta}{2}}=\boxed{2}$

단답형

29. $t>2e$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$인 실수 α에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$f'(x)=2t\ln x\cdot\frac{1}{x}-2x=0 \rightarrow 2t\ln k-2k^2=0$

$k^2-t\ln k=0$

$k=g(t)$

$\{g(t)\}^2-t\ln g(t)=0$

$g(\alpha)=e^2 \rightarrow e^4-\alpha\,\cancel{\ln 2}\,\ln e^2=e^4-2\alpha=0$

$\alpha=\frac{e^4}{2}$

미분

$2g(t)g'(t)-\ln g(t)-\frac{tg'(t)}{g(t)}=0$

$t=\alpha \rightarrow 2\cdot e^2\cdot g'(\alpha)-\ln(e^2)-\frac{\frac{e^4}{2}\cdot g'(\alpha)}{e^2}=0$

$\frac{3}{2}e^2g'(\alpha)=2,\ g'(\alpha)=\frac{4}{3}e^{-2}$

$\therefore \alpha\times\{g'(\alpha)\}^2$

$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$ [답] 17

30. $t>\frac{1}{2}\ln 2$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2)=\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})=x+t$

$1+e^{2x}-e^{-2t}=e^x\cdot e^t$

$e^{2x}-e^t\cdot e^x+1-e^{-2t}=0$

$(e^x-(e^t-e^{-t}))(e^x-e^{-t})=0$

$\therefore x=\ln(e^t-e^{-t}),\ -t$

$e^t-e^{-t}>e^{-t}$ ($\because t>\frac{1}{2}\ln 2$)

$\therefore f(t)=\sqrt{2}\{\ln(e^t-e^{-t})+t\}$

$=\sqrt{2}\ln(e^{2t}-1)$

$f'(t)=\sqrt{2}\,\frac{2e^{2t}}{e^{2t}-1}$, $f'(\ln 2)=\sqrt{2}\cdot\frac{8}{4-1}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$

[답] 11

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(기하)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a} = (k+3,\ 3k-1)$과 $\vec{b} = (1,\ 1)$이 서로 평행할 때, 실수 k의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$k+3 = 3k-1, \quad k=2$

24. 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점 $(2,\ \sqrt{2})$에서의 접선의 x절편은? [3점]

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

$\frac{2x}{8} + \frac{\sqrt{2}y}{4} = 1 \rightarrow$ (4,0)이 x축과 만나는 점

25. 좌표평면 위의 두 점 A(1, 2), B(−3, 5)에 대하여

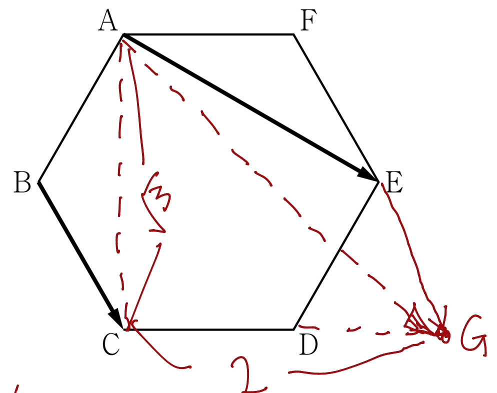
$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 10π ② 12π ③ 14π ④ 16π ⑤ 18π

$|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AP}|$
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$
$\therefore |\overrightarrow{AP}| = 5$ 인 원 $\therefore 10\pi$

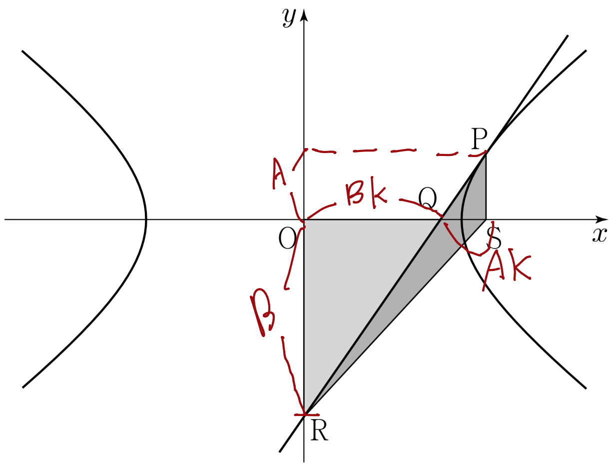
26. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 $|\overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}|$의 값은? [3점]



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EG}$
$|\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AG}| = \sqrt{3+4} = \sqrt{7}$

27. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\,k)\,(k>0)$ 에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, y축과 만나는 점을 R라 하자. 점 $\mathrm{S}(4,\,0)$에 대하여 삼각형 QOR의 넓이를 A_1, 삼각형 PRS의 넓이를 A_2라 하자. $A_1 : A_2 = 9:4$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, O는 원점이고, a와 b는 상수이다.) [3점]



① $2\sqrt{10}$　② $2\sqrt{11}$　③ $4\sqrt{3}$　④ $2\sqrt{13}$　⑤ $2\sqrt{14}$

접선: $\frac{4x}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=1$

$A_1 : A_2 = \frac{1}{2}B^2k : \frac{1}{2}AK(A+B) = 9:4$

$B^2 : A(A+B) = 9:4$

$\frac{B^2}{A^2} : 1+\frac{B}{A} = 9:4$

x^2　　x

$9+9x=4x^2$

$4x^2-9x-9=0$

$(4x+3)(x-3)=0,\ x=3$

$A=k,\ B=\frac{b^2}{k}$　$\therefore 3=\frac{\frac{b^2}{k}}{k}=\frac{b^2}{k^2}$

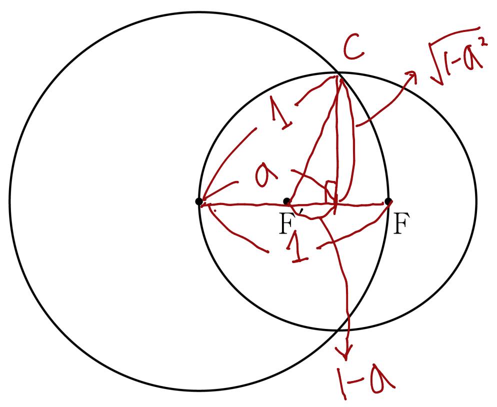
$b^2=3k^2$

$\frac{16}{a^2}-\frac{k^2}{3k^2}=1,\ a=2\sqrt{3}$

$\therefore$ 주축 $=2a=\boxed{4\sqrt{3}}$

28. 두 초점이 F, F′이고 장축의 길이가 $2a$인 타원이 있다. 이 타원의 한 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 이 타원의 서로 다른 두 꼭짓점과 한 초점을 지날 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$　② $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$　③ $\sqrt{3}-1$　④ $2\sqrt{2}-2$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\overline{CF'}=a=\sqrt{(1-a)^2+(1-a^2)}$

$a^2=\cancel{a^2}-2a+1+1-\cancel{a^2}$

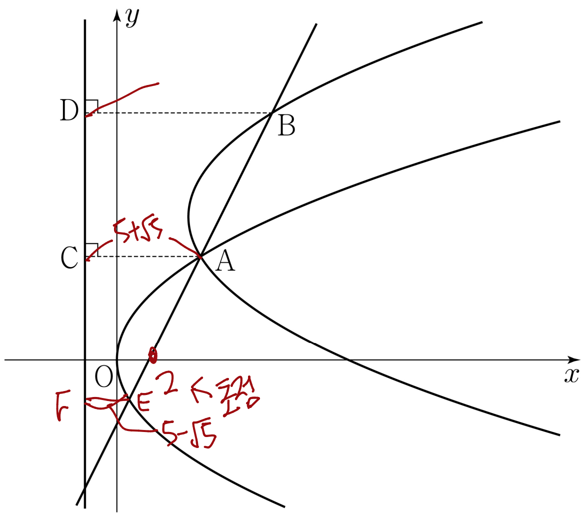
$\therefore a^2+2a-2=0$

$a=\frac{-2+\sqrt{12}}{2}$

$=\boxed{\sqrt{3}-1}$

단답형

29. 포물선 $y^2=8x$와 직선 $y=2x-4$가 만나는 점 중 제1사분면 위에 있는 점을 A라 하자. 양수 a에 대하여 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 점 A를 지날 때, 직선 $y=2x-4$와 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}}-\overline{\mathrm{AB}}=k$이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]



A → $4x^2-16x+16=8x$, $x^2-6x+4=0$

$x=3\pm\sqrt5$

$x_A=3+\sqrt5 \to \overline{AC}=5+\sqrt5$

$x_E=3-\sqrt5 \to \overline{EF}=5-\sqrt5$

$\overline{AB}=(x_B-x_A)\cdot\sqrt5=10$

$\Rightarrow \overline{BD}=\overline{AC}+2\sqrt5=5+3\sqrt5$

(∵ 평행이동 $\overline{AB}=\overline{AE}$)

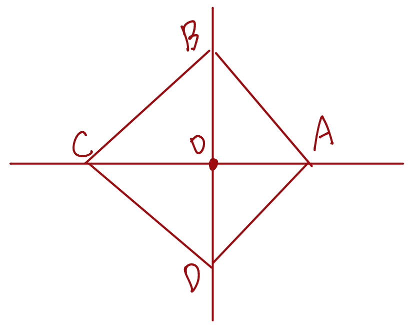
∴ $\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=(5+\sqrt5)+(5+3\sqrt5)-10=4\sqrt5$

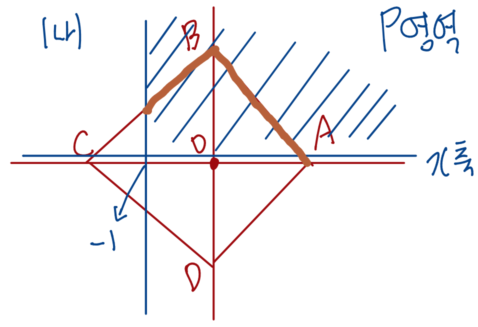
$k=4\sqrt5$, $k^2=80$ [답] 80

30. 좌표평면 위의 네 점 A(2, 0), B(0, 2), C(−2, 0), D(0, −2)를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 네 변 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}})=0$
> (나) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\ge-2$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\ge0$이다.
> (다) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\ge-2$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\le0$이다.

점 R(4, 4)에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

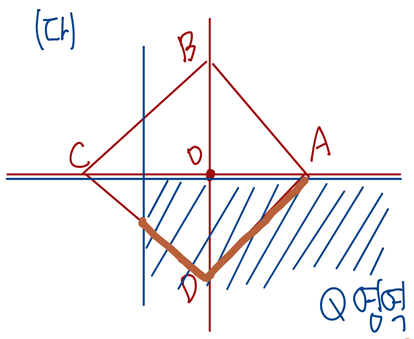


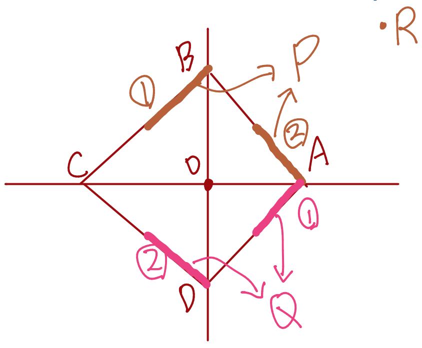


$\overrightarrow{PQ}=(x,y)$, $\overrightarrow{AB}=(-2,2)$, $\overrightarrow{AD}=(-2,-2)$

(가) $(-2x+2y)(-2x-2y)=0$

$4x^2-4y^2=0$, $|x|=|y|$





① $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$ 최소: P(0,2), Q(2,0)

$\Rightarrow (-4,-2)\cdot(-2,-4)=16$

〃 최대: P(−1,1), Q(1,−1)

$\Rightarrow (-5,-3)\cdot(-3,-5)=30$

② P(a, 2−a)

Q(a−2, −a)

$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=(a-4,-a-2)\cdot(a-6,-a-4)$

$=(a-4)(a-6)+(a+2)(a+4)$

$=2a^2-4a+32$

$=2(a-1)^2+30$

a=2 → 최대 32

a=1 → 최소 30

∴ ①,② ⇒ M=32, m=16

[답] 48

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.