2022학년도 6월 평가원 대비 혝사곤 모의평가 정답표

<수학> 영역

공통과목						선택과목					
						확률과 통계			미적분		
문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점
1	⑤	2	12	③	4	23	④	2	23	①	2
2	②	2	13	②	4	24	②	3	24	③	3
3	③	3	14	①	4	25	③	3	25	④	3
4	②	3	15	⑤	4	26	⑤	3	26	②	3
5	①	3	16	7	3	27	①	3	27	①	3
6	④	3	17	35	3	28	②	4	28	⑤	4
7	⑤	3	18	12	3	29	15	4	29	15	4
8	③	3	19	80	3	30	804	4	30	1	4
9	④	4	20	19	4						
10	①	4	21	13	4						
11	④	4	22	32	4						

주요 출제 문항 (TEAM HEXAGON)

HeavyBass (팀장)
15번, 미적분 28번

증류수
11번 , 미적분 27번, 29번

메리
10번. 12번. 20번. 확통 27, 29번

Quicktime
14번. 21번. 확통 28, 30번. 미적분 30번.

정연
13번 . 22번

헥사곤 모의고사 해설지 [공통]

1. 정답 ⑤

$\tan\theta = \frac{4}{3}$

2. 정답 ②

$f'(x) = 3x^2 - 4x$, $f'(2) = 4$

3. 정답 ③

$\int_{-1}^{2}(4x^3+6x)dx = [x^4+3x^2]_{-1}^{2} = 24$

4. 정답 ②

$\lim_{x\to -1+} f(x) + \lim_{x\to 1-} f(x) = 2+0 = 2$

5. 정답 ①

$a_n = a_1 \times 2^{n-1}$, $S_n = a_1 \times (2^n - 1)$라고 둘 수 있다.
세 수 a_m, S_m, a_{m+1}가 등차수열을 이루므로
$a_m + a_{m+1} = 2S_m$
$= a_1(2^{m-1}+2^m) = 2a_1(2^m-1)$이고, 정리하면
$2^{m-1} = 2$. 따라서 $m=2$

6. 정답 ④

$f'(x) = x^3 + x$의 양변을 x에 대해 부정적분하면
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$ (단, C는 상수)
$f(1) = C + \frac{3}{4} = 1$이므로, $C = \frac{1}{4}$.
따라서 $f(3) = 25$

7. 정답 ⑤

$(\cos x - 1)^2 + (\sin x - 1)^2 = 1$을 정리하면
$\sin x + \cos x = 1$이다. 이를 풀어주기 위해 $\sin x = 1 - \cos x$로 변형하고 양변을 제곱하자.
$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \cos^2 x - 2\cos x + 1$이므로 정리하면
$2\cos x(\cos x - 1) = 0$
주어진 범위에 해당하는 근은 $x = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$인데 제시된 방정식을 제곱한 것의 근이므로
방정식 $\sin x = -(1-\cos x)$의 근도 포함되어 있다.
따라서 원래의 방정식에 다시 대입하여 실근을 확정해주면,
$x = 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$이다.
그러므로 모든 해의 합은 $\frac{5\pi}{2}$

<다른 풀이>
$\cos x$와 $\sin x$는 각각 동경이 x인 단위원 위의 점의 x좌표, y좌표임을 이용하여
단위원 $x^2+y^2=1$과 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$의 교점으로 해석하여 풀 수도 있다.

8. 정답 ③

원의 중심 $(1,0)$을 M이라 하면, 원주각과 중심각의 성질에 의해
$\angle OMA = \frac{\pi}{3}$이고, $\triangle OMA$가 이등변삼각형이므로, $\triangle OMA$는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.
따라서 $A(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$이고, 이는 $y = \log_a x$의 그래프 위의 점이므로
대입해주면 $\log_a \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.
$\therefore a = 4^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

9. 정답 ④

(가)에 의해, $a = 2^n$이다. (단, n은 100 이하의 자연수)
$a^{\frac{1}{k}} = 2^{\frac{n}{k}}$이므로 조건 (나)에 의해, $2^{\frac{n}{k}}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 k의 개수가 홀수임을 알 수 있다. $2^{\frac{n}{k}}$가 자연수가 되려면 k로 가능한 값은 n의 약수이다.
이때 k의 개수가 홀수이므로, n은 약수의 개수가 홀수개인 자연수이고, 이를 만족하는 n은 m^2꼴이어야 한다. (m은 자연수)
따라서 n은 자연수의 제곱수 중 100 이하의 값만 가능하다.
$\therefore n = 1, 4, 9, \cdots, 100$. 10개

10. 정답 ①

$g(x) = x\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대해 미분하면,
$g'(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x)$
$g'(a) = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a (2t^2 - 2at)dt = [\frac{2}{3}t^3 - at^2]_0^a = -\frac{a^3}{3} = 9$이므로,
$a = -3$
따라서 $f'(-3) = -6$

11. 정답 ④

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)=(우변)= $\boxed{p=6}$ 이므로
(*)이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면
$$\sum_{k=1}^{m} a_k = 2^{m+1}\times(m+1)! - 2$$
이다. $n = m+1$일 때,
$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = 2^{m+1}\times(m+1)! - 2 + \boxed{f(m) = (2m+3)\times 2^{m+1}\times(m+1)!}$$
$$= 2^{m+1}\times(m+1)!\times\boxed{g(m) = 2(m+2)} - 2$$
$$= 2^{m+2}\times(m+2)! - 2$$
이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2^{n+1} \times (n+1)! - 2$$

이다.

$$\therefore \ \frac{f(3)}{p \times g(10)} = \frac{9 \cdot 16 \cdot 24}{6 \cdot 2 \cdot 12} = 24$$

참고) 거꾸로 풀면 쉽다.

12. 정답 ③

이차함수와 직선의 위치 관계를 생각해보면서 함수 $g(m)$를 파악해보면, (가)에서 $g(m)$이 $m=2$에서 불연속이므로 방정식 $f(x)-2(x-2)=0$이 중근을 가짐을 알 수 있다. - ㉠

이때 (나)에서 함수 $f(m)g(m)$이 실수 전체의 집합에서 연속이라고 제시했으므로, $m=2$일 때 $f(m)$의 값이 0이어야 한다. 따라서 $f(2)=0$ - ㉡

㉠과 ㉡을 이용하자. $h(x)=f(x)-2(x-2)$라 하면
$h(2)=h'(2)=0$이다.
따라서 $h(x)=2(x-2)^2=f(x)-2(x-2)$이므로
$f(x)=2(x-2)^2+2(x-2)$이다.
$\therefore f(4)=12$

13. 정답 ②

주어진 부등식은 $\{f(x)\}^{-f(x)} \le \{f(x)\}^p$이다.
주어진 부등식이 지수부등식이므로 밑의 범위를 나눠서 풀이하자.

$f(x)=1$이면 p의 값에 관계없이 부등식이 성립한다.
$f(x) \ge 1$이면 $x<1$또는 $x>2$이고, 주어진 부등식은 $-f(x)<p$와 같다.
$f(x)<1$이면 $1<x<2$이고, 주어진 부등식은 $-f(x)>p$와 같다.

이를 정리하면
$x<1$또는 $x>2$일 때 $f(x)>-p$, $1<x<2$일 때 $f(x)<-p$이다.
1과 2를 제외한 모든 실수 x에 대해 이 부등식이 성립해야 하므로 만족하는 p의 값은 -1이다.

14. 정답 ①

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{f(x-k)}$가 발산하기 위해서는 $f(a-k)=0$이어야 하고, 분자의 극한값에 따라 경우를 나눠볼 수 있다.

(1) $f(a)\ne 0$이면 극한은 발산한다.

(2) $f(a)=0$이면 두 방정식 $f(x)=0$, $f(x-k)=0$의 실근이 중복된다.
$x\to a$이므로 $\frac{f(x)}{f(x-k)}$에서 분모 분자의 공통인수 $(x-a)$를 약분할 수 있다,
이 과정을 더이상 약분이 불가능할 때까지 반복하면, 극한 내에서 $f(x-k)=0$인 x가 줄어들게 됨을, 즉 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{f(x-k)}$가 발산하게 하는 a값 하나가 제거됨을 알 수 있다.

하지만 이는 두 방정식 $f(x)=0$, $f(x-k)=0$이 인수 $(x-a)$를 동일한 개수만큼 가질 때 성립하는 것이다.
$f(x)=0$이 더 많은 개수의 인수를 가진다면, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{f(x-k)}$는 0으로 수렴하므로, a값 하나가 제거된다. - ㉠
$f(x-k)=0$이 더 많은 개수의 인수를 가진다면, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{f(x-k)}$는 발산하므로, a값 하나가 제거되지 않는다. - ㉡

따라서 이 문제는 먼저 $f(x-k)=0$인 x들을 찾고, (2)의 방식을 거쳐 그 a값들을 줄인 후 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{f(x-k)}$가 발산하게 하는 a값을 하나로 확정시켰을 때, k값이 2뿐인지를 확인하며 풀이하면 될 것이다.

$f(x)$가 삼차함수이므로, $f(x)=0$의 실근 개수에 따라 경우를 나누어 접근하자.

(i) $f(x)=0$이 세 실근 p,q,r을 갖는 경우 $(p<q<r)$
$f(x-k)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (2)의 방식을 거쳐 이 세 실근 중 하나의 값만을 남겨야 하므로, 세 실근 중 2개를 제외하자.
따라서 $f(x)=0$와 $f(x-k)=0$은 서로 2개의 실근이 중복되게 해야 한다.
$f(x)=0$의 실근은 p,q,r이고 $f(x-k)=0$의 실근은 $p+k, q+k, r+k$이므로

$k>0$이라고 가정하면 $p+k=q$, $q+k=r$이다. 정리하면 $k=q-p=r-q$
$k<0$이라고 가정하면 $q+k=p$, $r+k=q$이다. 정리하면 $k=p-q=q-r$

각각의 k에 대해 a값은 하나로 존재하나, k의 값이 양수, 음수일 때 총 2개가 가능하므로 주어진 조건에 부합하지 않는다.

(ii) $f(x)=0$이 두 실근 s,t를 갖는 경우 $(s<t)$

$(ii)-1.$ $f(x)=(x-s)^2(x-t)$
$f(x-k)=0$은 서로 다른 두 실근 $s+k, t+k$를 갖는다. (2)의 방식을 거쳐이 두 실근 중 하나의 값만을 남겨야 하므로, 한 실근을 제외하자.

$k>0$이라고 가정하면 $s+k=t$인데, 이때 $a=s+k=t$라 두면 ㉡의 상황이다. 따라서 a로 가능한 값은 $t, t+k$이므로 주어진 조건에 부합하지 않는다.

$k<0$이라고 가정하면 $s=t+k$인데, 이때 $a=s=t+k$라 두면 ㉠의 상황이다. 따라서 a로 가능한 값은 $s+k$뿐이므로 조건에 부합한다.
하지만 이 경우 만족하는 k의 값이 음수이므로, 2가 될 수 없다.
따라서 주어진 조건에 부합하지 않는다.

$(ii)-2.$ $f(x)=(x-s)(x-t)^2$
$f(x-k)=0$은 서로 다른 두 실근 $s+k, t+k$를 갖는다. (2)의 방식을

거쳐 이 두 실근 중 하나의 값만을 남겨야 하므로, 한 실근을 제외하자.

$k>0$이라고 가정하면 $s+k=t$인데, 이때 $a=s+k=t$라 두면 ㉠의 상황이다. 따라서 a로 가능한 값은 $t+k$뿐이다.

$k<0$이라고 가정하면 $s=t+k$인데, 이때 $a=s=t+k$라 두면 ㉡의 상황이다. 따라서 a로 가능한 값은 $s+k, s$이므로 주어진 조건에 부합하지 않는다.

만족하는 k값도 양수 하나이고, 이때 a의 값도 하나 존재하므로 주어진 조건에 부합하는 상황이다.
따라서 $f(x)=(x-s)(x-s-2)^2$이고, $f(0)=0$이므로 $-s(s+2)^2=16$이다. 이를 만족하는 s의 값은 오직 -4뿐이므로 $f(x)=(x+4)(x+2)^2$이다.

(iii) $f(x)=0$이 오직 한 실근 u를 갖는 경우
k로 가능한 값이 0이 아닌 모든 실수이므로 주어진 조건에 부합하지 않는다.

$(i),(ii),(iii)$를 조합하면, $f(x)=(x+4)(x+2)^2$이다.
$\therefore f(1)=45$

15. 정답 ⑤

x축과 y축은 직각이므로, $\overline{OP}\perp\overline{OQ}$이다. 그러므로, 삼각형 OPQ가 이등변삼각형일 조건은 오직 $\overline{OP}=\overline{OQ}$이다. (두 점 P,Q가 각각 x,y축의 어떤 방향으로 움직이더라도 상관없다.)
두 점 P,Q의 위치를 각각 $p(t),q(t)$라 하면, 두 점 모두 원점에서 출발하므로
$p(0)=q(0)=0$. 따라서 $p(t)=t^3+\frac{k}{2}t^2+2t$, $q(t)=2t$라고 둘 수 있다.
$\overline{OP}=\overline{OQ}$ 조건을 식으로 해석하면, $|p(t)|=|q(t)|$의 $t>0$에서의 서로 다른 실근이 2개라고 이해할 수 있다.
이는 방정식 $t^3+\frac{k}{2}t^2+2t=\pm 2t$의 근 중 양수인 것이 2개인 것으로 이해할 수 있다.
각각의 경우를 인수분해하면
$t^3+\frac{k}{2}t^2=t^2(t+\frac{k}{2})=0$ - ㉠과 $t(t^2+\frac{k}{2}t+4)=0$ - ㉡이다.
이때 ㉠의 0이 아닌 근은 $-\frac{k}{2}$인데 이를 ㉡에 대입하면 성립하지 않음을 알 수 있다.
따라서 ㉠과 ㉡에서 중복되는 근은 발생하지 않는다. - ㉢
이제 k값의 부호에 따라 경우를 나눠보자.
$k>0$이면 ㉠과 ㉡이 모두 음의 실근을 가지므로 모순이다.
$k=0$이면 ㉠과 ㉡이 양의 실근을 갖지 않으므로 모순이다.
따라서 k는 음수이다.

$k<0$이면 ㉠이 양의 실근을 하나 가지므로, ㉢에 의해 ㉡은 양의 중근을 갖는다.
따라서 $k=-8$이고, $f(t)=3t^2-8t+2$이므로 $f'(t)=6t-8$이다.
$\therefore p'(4)=16$

16. 정답 7

$M=5$, $m=1$이므로, $\therefore M+2m=7$

17. 정답 35

$y'=3x^2+12x=3x(x+4)$이므로, $x=-4$에서 극댓값을 갖는다.
대입해주면, 극댓값은 $-64+96+3=35$

18. 정답 12

여러 가지 풀이가 가능하다.
수열 a_n의 공비를 r이라 하면, $a_n=a_1\times r^{n-1}$이고,
$S_n=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$이다.
주어진 식의 양변에 S_n을 빼주면, $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}=S_n+3$이고, 위의 식을 대입해주면
$a_1r^n=\frac{a_1r^n}{r-1}-\frac{a_1}{r-1}+3$이므로, $r=2, a_1=3$이다.
따라서 $a_3=12$

19. 정답 80

$x^2-2=|x|$를 풀면 $x=\pm 2$이고, $-2\le x\le 2$에서 $|x|\ge x^2-2$이므로
$k=\int_{-2}^{2}(|x|-x^2+2)dx=\int_{-2}^{0}(-x-x^2+2)dx+\int_{0}^{2}(x-x^2+2)dx$
$=\frac{4^3}{6}-4$
따라서 $12k=80$

<다른 풀이>
그래프를 그린 후, $\int_{\alpha}^{\beta}a(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{a(\beta-\alpha)^3}{6}$을 이용하여 풀이할 수도 있다.

20. 정답 19

$\angle ACB=\angle ACD$이므로, 사인법칙에 의하여 $\overline{AD}=\overline{AB}$이다.
$\overline{AD}=\overline{AB}=l$이라 하자.
원주각의 성질에 의해 $\angle ADC=\pi-\angle ABC$이다. $\angle ABC=\theta$라 하면
$\cos\angle ADC=\cos(\pi-\theta)=\frac{1}{4}$이다.

코사인법칙에 의해, $\overline{AC}^2=7^2+l^2-14l\times\frac{1}{4}=4^2+l^2-8l\times(-\frac{1}{4})$이고 정리하면
$l=6, \overline{AC}=8$이다.

$\triangle ADC$에서 내심의 성질을 적용하자. $\triangle ADC$의 내접원의 반지름을 r이라 하면, $\triangle ADC$의 넓이는
$\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{CD}+\overline{AC})\times r=\frac{1}{2}\times 7\times 6\times\sin\theta$이므로 정리하면 $r=\frac{\sqrt{15}}{2}$
구하는 값은 $\frac{15}{4}\pi$. $\therefore p+q=19$

헥사곤 모의고사 해설지 [공통]

21. 정답 13

(가)에서, $|a_n| \geq 0$이므로 초항과 공차가 모두 음이 아닌 실수이다.
(나)에서, $n=1$을 대입해보면 $a_1 = 1$이고, 임의의 자연수 m에 대하여 $n=m$과 $n=m+1$을
대입해보면 각각 $\sum_{k=1}^{4m-3} a_k = 1$, $\sum_{k=1}^{4m+1} a_k = 1$을 얻는다, 두 식을 빼면

$a_{4m-2} + a_{4m-1} + a_{4m} + a_{4m+1} = 0$을 얻는다. 공차가 0이면 $\sum_{k=1}^{7} b_k = 7$이 될 수밖에 없으므로
모순이다. 즉 공차는 양수이고,
$|a_{4m-2}| < |a_{4m-1}| < |a_{4m}| < |a_{4m+1}|$이므로 a_{4m-2}와 a_{4m+1}의 부호는 같고, a_{4m-1}와 a_{4m}의 부호는 같다. (a_{4m-2}와 a_{4m-1}의 부호는 반대이다.)
$b_1 = a_1$이고, 부호에 상관없이 $b_2 + b_3 = |a_3| + |a_4|$, $b_4 + b_5 = |a_7| + |a_8|$, $b_6 + b_7 = |a_{11}| + |a_{12}|$이다. ($\because$등차중항) 즉 $\{|a_n|\}$의 공차를 d라 하면 $\sum_{k=1}^{7} b_k = 7 + 39d = 85$에서 $d = 2$이고 $|a_7| = 1 + 6d = 13$이다.

22. 정답 32

$\int_0^x f(t)dt = F(x)$라 하면, $g(x) = F(f'(x))$이다.
따라서 (나) 조건은 $\{x \mid f(x) = 0\} \subset \{x \mid F(f'(x)) = 0\}$라고 해석할 수 있다.
방정식 $g(x) = F(f'(x)) = 0$의 실근은 $f'(x) = t$라고 치환 후, $F(t) = 0$을 만족하는 t를 찾고, 다시 방정식 $f'(x) = t$의 실근을 찾으면 구할 수 있을 것이다.

방정식 $f(x) = 0$의 실근 개수에 따라 경우를 나누어 접근해보자.
편의상 $A = \{x \mid f(x) = 0\}$, $B = \{x \mid F(f'(x)) = 0\}$라 하자.

(i) 방정식 $f(x) = 0$이 오직 하나의 실근을 갖는 경우
이때 $f(x) = x^3$이고, $F(x) = \frac{1}{4}x^4$이며 $f'(x) = 3x^2$이므로
집합 A의 원소는 0이고, 집합 B의 원소도 0이므로 조건을 만족한다.

(ii) 방정식 $f(x) = 0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우
(가)에 의해, 양수 a, b에 대해 $f(x) = x^2(x-a)$ 또는 $f(x) = x(x-b)^2$라고 둘 수 있다.

$(ii) - 1.$ $f(x) = x^2(x-a)$
이때 집합 A의 원소는 0, a이므로 집합 B도 0, a를 원소로 갖는다.
방정식 $F(x) = 0$의 근을 찾으면 $x = 0$, $\frac{4}{3}a$이므로 집합 B의 원소는,
방정식 $f'(x) = 0$과 $f'(x) = \frac{4}{3}a$의 서로 다른 실근과 같다.
$f'(x) = 3x(x - \frac{2a}{3})$이므로 방정식 $f'(x) = 0$의 실근은 0, $\frac{2}{3}a$이다.
따라서 방정식 $f'(x) = \frac{4}{3}a$는 $x = a$를 실근으로 가져야하므로,
$f'(a) = \frac{4}{3}a$이고 정리하면 $a = \frac{4}{3}$이다. $\therefore f(x) = x^2(x - \frac{4}{3})$

$(ii) - 2.$ $f(x) = x(x-b)^2$
이때 집합 A의 원소는 0, b이므로 집합 B도 0, b를 원소로 갖는다.
방정식 $F(x) = 0$의 근을 찾으면 $x = 0$뿐이므로 집합 B의 원소는,
방정식 $f'(x) = 0$의 서로 다른 실근과 같다.
$f'(x) = 3(x - \frac{b}{3})(x - b)$인데, $f'(0) \neq 0$이므로 $A \subset B$에 모순이다.

(iii) $f(x) = x(x-c)(x-d)$ (단, $0 < c < d$)
이때 집합 A의 원소는 0, c, d이므로 집합 B도 0, c, d를 원소로 갖는다. 따라서 $F(x) = 0$의 실근 중 $f'(0)$, $f'(c)$, $f'(d)$가 존재해야한다.
여기서 $f'(c) = c(c-d) < 0$이므로, 방정식 $F(x) = 0$은 음의 실근을 갖는다.
그런데 $y = F(x)$의 그래프를 그려보면, $x = 0$에서 극솟값을 갖고, $x < 0$에서 실근이 존재하지 않는 개형이다. 따라서 모순이다.

(i), (ii), (iii)의 경우를 조합하면, 조건을 만족하는 $f(x)$는 $f(x) = x^3$ 또는 $f(x) = x^2(x - \frac{4}{3})$이다. 따라서 가능한 모든 $f(2)$의 값의 합은 $\frac{32}{3}$.
$\therefore$ $3S = 32$

헥사곤 모의고사 해설지 [확률과 통계]

[확률과 통계]

23. 정답 ④

이항정리에 의하여 전개식에서 x^4의 개수는

${}_6\mathrm{C}_4 \times 1^4 \times 2^2 = 60$이다.

24. 정답 ②

${}_n\mathrm{P}_2 = {}_\mathrm{n}\mathrm{H}_2$

$\Leftrightarrow\ {}_n\mathrm{P}_2 = {}_{\mathrm{n}+1}\mathrm{C}_2$

$\Leftrightarrow\ n(n-1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

따라서 2 이상의 자연수 n은 3이다.

25. 정답 ③

$\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{3}$

$\mathrm{P}(B)$의 값을 b라 하면

$\mathrm{P}(A \cup B) = \dfrac{1}{3} + b - \dfrac{1}{3}b = \dfrac{5}{6}$

$\therefore\ b = \mathrm{P}(B) = \dfrac{3}{4}$

26. 정답 ⑤

세 학생 A, B, C를 한 명으로 간주하여, 4명의 학생을 원탁에 앉히는 경우의 수를 구하고, 한 명으로 간주했던 자리에 A, B, C 세 명의 학생을 앉히는 경우의 수를 곱하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{4} \times 3 = 36$이다.

27. 정답 ①

전체 경우의 수는 $6 \times 6 \times 6 = 216$이다.

이제, $a+b=c$인 경우의 수를 구하자. 이 경우의 수를 한 번에 구하기는 힘드니, c의 값에 따라 나누어 생각하는 것이 자연스럽다.

$c=1$일 때, 조건을 만족시키는 a와 b의 순서쌍 (a,b)는 존재하지 않는다.

$c=2$일 때, 조건을 만족시키는 a와 b의 순서쌍 (a,b)의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_0$이다.

$c=3$일 때, 조건을 만족시키는 a와 b의 순서쌍 (a,b)의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_1$이다.

$c=4$일 때, 조건을 만족시키는 a와 b의 순서쌍 (a,b)의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_2$이다.

$c=5$일 때, 조건을 만족시키는 a와 b의 순서쌍 (a,b)의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_3$이다.

$c=6$일 때, 조건을 만족시키는 a와 b의 순서쌍 (a,b)의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_4$이다.

따라서 $a+b=c$인 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_0 + {}_2\mathrm{H}_1 + {}_2\mathrm{H}_2 + {}_2\mathrm{H}_3 + {}_2\mathrm{H}_4 = 15$이다.

그러므로 구하는 확률은 $\dfrac{15}{216} = \dfrac{5}{72}$

다른 풀이)

c의 값은 $a+b$의 값에 따라서 자동으로 결정된다.

a, b, c의 값은 모두 6 이하의 자연수이므로 $a+b \le 6$이다.

$a = a'+1$, $b = b'+1$로 놓으면 a'과 b'은 음이 아닌 정수이고 $a'+b' \le 4$이다.

이때 $a+b+w=4$를 만족시키는 적당한 음이 아닌 정수 w를 생각하자. 그러면 $a+b \le 6$을 만족시키는 자연수 (a,b)의 순서쌍은 $a+b+w=4$인 순서쌍 (a,b,w)의 개수와 동일하다.

따라서 $a+b=c$인 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_4 = 15$이고 전체 경우의 수는 $6^3 = 216$이므로 구하려는 확률은 $\dfrac{15}{216} = \dfrac{5}{72}$이다.

28. 정답 ②

숫자 2는 몇 번 선택되든 선택되는 숫자의 합의 홀/짝에 영향을 주지 않는다.

선택되는 숫자의 합의 홀/짝에 영향을 주는 것은 숫자 1과 숫자 3이 선택된 횟수이다.

숫자 1과 숫자 3이 선택된 횟수가 홀수여야 선택되는 숫자의 합이 홀수이다.

따라서 숫자 1과 숫자 3이 선택된 횟수에 따라 경우를 나누어 생각해 보자.

숫자 1과 숫자 3이 선택된 횟수가 1인 경우:

숫자 2는 5번 선택된다. 자연수의 여섯 자리 중 숫자 2를 배치할 다섯 자리를 선택하는 경우의 수는 6이고, 나머지 한 자리에 1 또는 3을 배치할 수 있으므로, 나머지 한 자리에 들어갈 숫자를 선택하는 경우의 수는 2이다.

따라서, 경우의 수는 $6 \times 2 = 12$이다.

숫자 1과 숫자 3이 선택된 횟수가 3인 경우:

숫자 2는 3번 선택된다. 자연수의 여섯 자리 중 숫자 2를 배치할 세 자리를 선택하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_4 = 20$이고, 나머지 세 자리에 각각 1 또는 3을 배치할 수 있으므로, 나머지 세 자리에 들어갈 숫자를 선택하는 경우의 수는 $2^3 = 8$이다.

따라서, 경우의 수는 $20\times8=160$이다.

숫자 1과 숫자 3이 선택된 횟수가 5인 경우:

숫자 2는 1번 선택된다. 자연수의 여섯 자리 중 숫자 2를 배치할 한 자리를 선택하는 경우의 수는 6이고, 나머지 다섯 자리에 각각 1 또는 3을 배치할 수 있으므로, 나머지 다섯 자리에 들어갈 숫자를 선택하는 경우의 수는 $2^5=32$이다.

따라서, 경우의 수는 $6\times32=192$이다.

이상에서 구하는 경우의 수는 $12+160+192=364$

29. 정답 15

상자 안에 2가 적힌 공을 남아있게 하려면 2와 3이 적힌 공만 동시에 뽑지 않으면 된다.

따라서 확률은 첫 번째 시행 후 상자 안에 들어있는 3이 적힌 공의 개수에 따라 정해지므로 첫 번째 시행에서 3이 적힌 공 2개를 동시에 뽑은 경우의 유무에 따라 상황을 나누자.

(i) 첫 번째 시행에서 3이 적힌 공 2개를 동시에 뽑지 않았을 때

전체 ${}_5\mathrm{C}_2$에서 2와 3이 적힌 공을 뽑을 때와 3을 모두 뽑을 경우를 제외하면 모두 7가지이다.

두 번째 시행에서는 2와 3이 적힌 공만 뽑지 않으면 되므로 전체 ${}_4\mathrm{C}_2$에서 4가지이다.

따라서 확률은 $\frac{7}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{4}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{7}{15}$

(ii) 첫 번째 시행에서 3이 적힌 공 2개를 동시에 뽑았을 때

3이 적힌 공 2개를 동시에 뽑을 확률은 $\frac{1}{10}$이고, 상자 안에는 1, 1, 2, 3이 적힌 공이 남아있다. 마찬가지로 2와 3이 적힌 공을 뽑으면 안 되므로 경우는 5가지이다.

따라서 확률은 $\frac{1}{10}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{12}$

이제 두 번째 시행 후 상자 안에 2와 3이 적힌 공이 모두 남아있는 상태에서 3이 적힌 공이 하나만 남아있을 확률을 구하자.

그러기 위해서는 두 번의 시행 중 한 번은 3이 적힌 공을 상자에 넣지 않아야 하므로 3이 적힌 공 2개를 동시에 뽑아야 한다.

이 중 첫 번째 시행에서 3이 적힌 공 2개를 동시에 뽑을 확률은 (ii)와 동일하게 $\frac{1}{12}$이므로 두 번째 시행에서 3이 적힌 공 2개를 뽑을 확률을 구하자.

첫 번째 시행에서도 마찬가지로 2와 3이 적힌 공을 동시에 뽑으면 안 되므로 확률은 $\frac{7}{10}$이다.

두 번째 시행에서 3이 적힌 공 두 개를 동시에 뽑을 확률은 $\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}$이므로 이때의 확률은 $\frac{7}{10}\times\frac{1}{6}=\frac{7}{60}$이다.

구하려는 확률은 조건부확률이므로 $\dfrac{\frac{1}{12}+\frac{7}{60}}{\frac{7}{15}+\frac{1}{12}}=\frac{4}{11}$이다.

$p=11$, $q=4$이므로 구하려는 답은 $p+q=15$이다.

30. 정답 804

$f(k)=0$을 만족하는 정수 k의 개수는 2, $f(k)=1$을 만족하는 정수 k의 개수는 4,

$f(k)=2$을 만족하는 정수 k의 개수는 4, $f(k)=3$을 만족하는 정수 k의 개수는 4,

$f(k)=4$을 만족하는 정수 k의 개수는 4, $f(k)=5$을 만족하는 정수 k의 개수는 3이다.

조건을 만족하는 순서쌍의 개수를 한 번에 구하기는 어려우므로, t가 0 또는 5일 때에만 $f(k)=t$를 만족하는 정수 k의 개수가 달라진다는 점을 참고하면서 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$의 값에 따라 경우를 나누어 생각해 보도록 하자.

1. 세 함숫값 중 5가 있으면, 나머지 두 개의 함숫값은 0이다.

그렇다면, 세 함숫값 중 5가 될 함숫값이 결정되기만 한다면, 경우의 수 계산을 할 수 있을 것이다.

이때, $f(a)=5$인 경우의 수, $f(b)=5$인 경우의 수, $f(c)=5$인 경우의 수는 모두 같다.

따라서 우선 $f(a)=5$일 때의 경우의 수를 구한 뒤, 3을 곱하면 1. 상황의 경우의 수를 구할 수 있다.

2. 세 개의 함숫값 중 5가 하나도 없을 때를 생각해 보자.

2-1. 2.의 상황에서, 세 개의 함숫값 중 0이 하나도 없을 경우를 생각하자.

세 함숫값이 모두 1 이상 4 이하의 자연수이다. t가 1 이상 4 이하의

헥사곤 모의고사 해설지 [확률과 통계]

자연수이면, $f(k)=t$를 만족하는 정수 k의 개수는 항상 4이다.
그렇다면 방정식 $x+y+z=5$의 자연수 해 순서쌍 개수를 구한 다음에,

$x=f(a)$를 만족하는 정수 a의 개수, $y=f(b)$를 만족하는 정수 b의 개수, $z=f(c)$를 만족하는 정수 c의 개수를 모두 곱하면 2-1.의 경우의 수를 구할 수 있을 것이다.

2-2. 2.의 상황에서, 세 개의 함숫값 중 오직 하나만 0일 때를 생각해 보자(세 개의 함숫값 중 두 개가 0이면, 나머지 하나의 함숫값은 5여야 하므로, 2.의 상황이 아니다. 따라서 세 개의 함숫값 중 두 개가 0인 상황은 2-2.에서 고려할 필요가 없다.).

나머지 두 개의 함숫값은 모두 1 이상 4 이하의 자연수이다.

그렇다면, 세 함숫값 중 0인 것이 결정되기만 하면, 이후의 경우의 수 계산은 2-1.과 유사하게 진행할 수 있다.

이때, $f(a)=0$인 경우의 수, $f(b)=0$인 경우의 수, $f(c)=0$인 경우의 수는 모두 같다.

따라서 $f(a)=0$일 때의 경우의 수를 구한 뒤, 3을 곱하면 2-2.의 상황의 경우의 수를 구할 수 있다.

더 이상의 경우는 없으므로 1, 2-1, 2-2 세 가지 상황의 경우의 수를 실제로 계산해 보자.

1. $f(a)=5$일 때의 경우의 수부터 구하자.

이때 $f(b)=f(c)=0$이다. $f(a)=5$인 정수 a의 개수는 3이고, $f(b)=0$인 정수 b의 개수, $f(c)=0$인 c의 개수는 각각 2이다.

따라서 $f(a)=5$인 경우의 수는 $3\times2\times2=12$이다.
여기에 3을 곱하면 36을 1.에 해당하는 경우의 수로 얻을 수 있다.

2-1. $x+y+z=5$를 만족하는 세 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_2$이다.

이때, $x=f(a)$를 만족하는 정수 a의 개수, $y=f(b)$를 만족하는 정수 b의 개수, $z=f(c)$를 만족하는 정수 c의 개수는 모두 4이다.

따라서 2-1에 해당하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_2\times4\times4\times4=384$이다.

2-2. $f(a)=0$일 때의 경우의 수를 구하자.

$f(a)=0$를 만족하는 정수 a의 개수는 2이다.

그리고 $x+y=5$를 만족하는 두 자연수 x, y의 모든 순서쌍 (x, y)의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_3$이고, 이때 $x=f(b)$를 만족하는 정수 b의 개수, $y=f(c)$를 만족하는 정수 c의 개수는 모두 4이다.

따라서 $f(a)=0$일 때의 경우의 수는 $2\times{}_2\mathrm{H}_3\times4\times4=128$이다.

여기에 3을 곱하면 $128\times3=384$를 2-2에 해당하는 경우의 수로 얻을 수 있다.

따라서 구하는 경우의 수는 $36+384+384=804$

[미적분]

23. 정답 ①

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}=\frac{1}{e^2}$

24. 정답 ③

$y'=1+\ln x+\frac{1}{2}x^2+2ax$, $y''=\frac{1}{x}+x+2a$에서 $\frac{1}{x}+x$는 $x=1$에서

극솟값 2를

가지고 y''의 부호가 $y''(k)=0$을 만족하는 k에 대하여 y''의 부호가 $x=k$의 좌우에서 바뀌어야 하므로 $2a+2<0$에서 $a<-1$이므로

정수 a의 최댓값은 -2

25. 정답 ④

$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$이므로, 식을 정리하면

$(1+\tan\theta)^2=4(1-\tan\theta)^2$에서 $\tan\theta=3$을 얻는다. (θ의 범위에 유의)

<다른 풀이>

각 $\frac{\pi}{4}+\theta$을 나타내는 동경과 각 $\frac{\pi}{4}-\theta$을 나타내는 동경이

$y=x$대칭임을 이용하여 계산할 수도 있다.

26. 정답 ②

점 $\mathrm{A_1}$에서 선분 $\mathrm{B_1C}$에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 $\mathrm{A_1B_1H}$은

이등변직각삼각형이므로, $\mathrm{A_1H}=\mathrm{B_1H}=4$를 얻는다. $\mathrm{CH}=2$이고 피타고라스의

정리에 의해 $\mathrm{A_1C}=2\sqrt{5}$이다.

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\mathrm{B_1C}\times\mathrm{A_1H}=\frac{1}{2}\times\mathrm{A_1C}\times\mathrm{B_1A_2}$에서

$\mathrm{A_2B_1}=\frac{12}{5}\sqrt{5}$를 얻는다. 피타고라스의 정리에 의해 $\mathrm{A_1A_2}=\frac{4}{5}\sqrt{5}$를

얻는다. 초항은

$\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{5}}{5}\times\frac{12\sqrt{5}}{5}=\frac{24}{5}$이다. $\mathrm{A_2A_3}=k$라 하면 $\mathrm{A_3C}=\frac{3}{2}k$이다.

$\mathrm{A_2C}=\frac{5}{2}k=\frac{6\sqrt{5}}{5}$에서 $k=\frac{12\sqrt{5}}{25}$이고 공비는 $\left(\frac{\frac{12\sqrt{5}}{25}}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}\right)^2=\frac{9}{25}$이다.

$\therefore\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{24}{5}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{15}{2}$

27. 정답 ①

$f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로 함수 $f(x)$를

$f(x)=x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-a)$ (a는 실수)라 하자.

$g(x)=|f(x)|\cos x$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{|f(x)|\cos x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left|x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-a)\right|\cos x}{x}$가 존재하는데

(우극한) : $\lim_{x\to0+}\frac{\left|x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-a)\right|\cos x}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}=\left|\frac{\pi}{2}a\right|$,

(좌극한) : $\lim_{x\to0-}\frac{\left|x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-a)\right|\cos x}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}=-\left|\frac{\pi}{2}a\right|$

$\left|\frac{\pi}{2}a\right|=-\left|\frac{\pi}{2}a\right|$이므로 $a=0$이다.

따라서 $f(x)=x^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$인데 $x>\frac{\pi}{2}$에서 $f(x)>0$이므로 $x>\frac{\pi}{2}$일 때,

$g(x)=f(x)\cos x$이다.

그러므로 $g'(\pi)=f'(\pi)\cos\pi-f(\pi)\sin\pi=-f'(\pi)=-2\pi^2$이다.

28. 정답 ⑤

$a_n=3\bullet\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1}-\frac{p}{n(n+1)}=3\bullet\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1}-\frac{p}{n}+\frac{p}{n+1}$에서

$S_n=\frac{3\left(1-\frac{1}{p^n}\right)}{1-\frac{1}{p}}-p+\frac{p}{n+1}$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{na_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3-\frac{3}{p^n}}{1-\frac{1}{p}}-p+\frac{p}{n+1}}{\frac{3n}{p^{n-1}}-\frac{p}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3-\frac{3}{p^n}}{1-\frac{1}{p}}(n+1)-p(n+1)+p}{\frac{3n(n+1)}{p^{n-1}}-p}$$

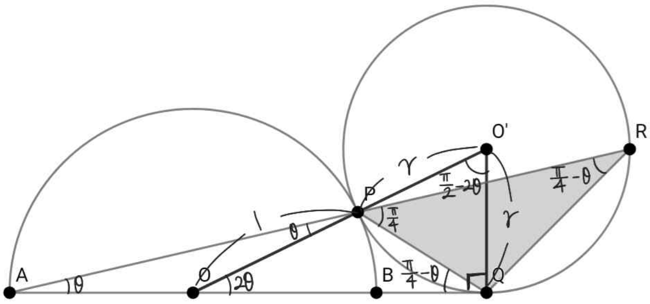
에서,

$\frac{3}{1-\frac{1}{p}}\neq p$이면 (분자)$\to\infty$인데 (분모)$\to-p$이므로 극한이 발산하여

모순이다. 즉 $p=4$이고,

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{na_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{4}{p^n}(n+1)+4}{\frac{3n(n+1)}{p^{n-1}}-4}=-1$이다. $\therefore p-k=5$

29. 정답 15



왼쪽 반원의 중심을 O라 하고, 오른쪽 원의 중심을 O′이라 하자.
$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OP}}$이므로 $\angle \mathrm{POQ}=2\theta$이고, 원에서의 접선의 성질에 의하여
$\overline{\mathrm{AQ}}$와 $\overline{\mathrm{O'Q}}$는 수직이므로 직각삼각형 $\mathrm{OQO'}$에서 $\overline{\mathrm{O'Q}}=r$라 하면
$\sin 2\theta=\dfrac{r}{1+r}$이므로 정리하면 $r=\dfrac{\sin 2\theta}{1-\sin 2\theta}$이다.

그리고 $\angle \mathrm{OO'Q}=\dfrac{\pi}{2}-2\theta$이고 중심각과 원주각의 관계에 의하여

$\angle \mathrm{QRP}=\dfrac{\pi}{4}-\theta$이며 원에서의 접선과 현이 이루는 각 사이의 관계에

의하여 $\angle \mathrm{OQP}=\dfrac{\pi}{4}-\theta$이다. 따라서 $\angle \mathrm{QPR}=\angle \mathrm{OQP}+\angle \mathrm{OAP}=\dfrac{\pi}{4}$이므로

사인법칙에 의하여 $\overline{\mathrm{QR}}=2r\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}r$이고,

$\angle \mathrm{PQR}=\pi-\angle \mathrm{QPR}-\angle \mathrm{QRP}=\dfrac{\pi}{2}+\theta$이므로 마찬가지로 사인법칙에

의하여 $\overline{\mathrm{PR}}=2r\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$이다. 따라서 삼각형 PQR의 넓이 $S(\theta)$는

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PR}}\times\overline{\mathrm{QR}}\times\sin(\angle PRQ)=\dfrac{1}{2}\times 2r\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)\times\sqrt{2}r\times\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$

이므로 $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\left\{S(\theta)\times\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)^3\right\}$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\left\{\frac{1}{2}\times 2r\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\times\sqrt{2}r\times\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\times\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)^3\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\left\{r^2\times\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\times\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)^3\times\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\left\{\left(\frac{\sin 2\theta}{1-\sin 2\theta}\right)^2\times\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\times\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)^3\times\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right\}$$

$\dfrac{\pi}{4}-\theta=\alpha$라 하면 $\theta\to\dfrac{\pi}{4}-$일 때 $\alpha\to 0+$이므로

$$=\lim_{\alpha\to 0+}\left\{\left(\frac{\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}\right)^2\times\sin\alpha\times\alpha^3\times\sqrt{2}\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)\right\}$$

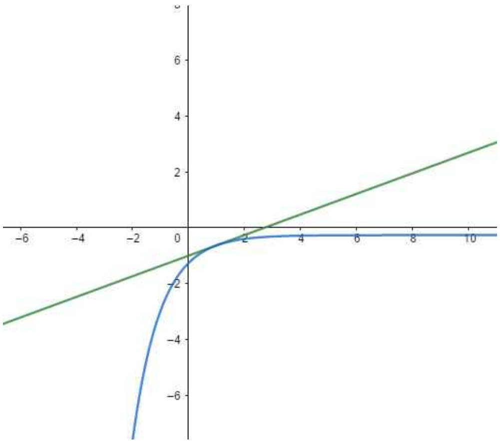
$$=\lim_{\alpha\to 0+}\left\{\frac{\alpha^4}{1-\cos 2\alpha}\times\frac{\sin\alpha}{\alpha}\times\sqrt{2}\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)\times\cos 2\alpha\right\}=\frac{1}{4}$$

따라서 $a=\dfrac{1}{4}$이므로 $60a=15$

30. 정답 1

부등식을 적절히 변형하면 $(k-1)x-1\geq -e^{-x}-a$를 얻는다.

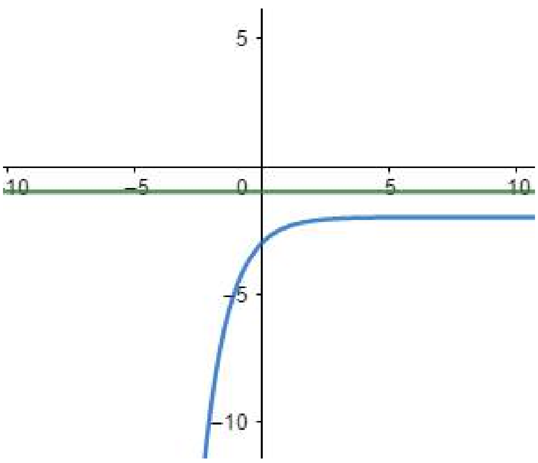
(i) $0<a<1$



그림과 같이 $(0,-1)$에서 $x>0$에 접선을 그었을 때 접선의 기울기가 $k-1$의 최소이다. 접점을 $(s,-e^{-s}-a)$라 놓으면 두 식
$-e^{-s}-a=(k-1)s-1$ (ㄱ), $e^{-s}=k-1$ (ㄴ)을 얻는다. (ㄴ)을 (ㄱ)에
대입하여 정리하면 $a=(-1-s)e^{-s}+1$이고 $a=1-\dfrac{2}{e}$을 대입하면
$s=1$을 얻는다. (ㄱ)의 양변을 a에 대하여 미분하면
$1=se^{-s}\cdot\dfrac{ds}{da}$에서 $s=1$을 대입하면
$\dfrac{ds}{da}=e$이다. (ㄴ)의 양변을 a에 대하여 미분하면 $-e^{-s}\cdot\dfrac{ds}{da}=\dfrac{dk}{da}$에서
$s=1$, $\dfrac{ds}{da}=e$를

대입하면 $\dfrac{dk}{da}=-1$을 얻는다. $\therefore f'\left(1-\dfrac{2}{e}\right)=-1$

(ii) $a>1$



$(k-1)<0$이면 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{(k-1)x-1\}=-\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(-e^{-x}-a)=-a$라
부등식에 모순이다.
$k-1=0$이면 그림과 같이 $(k-1)x-1$이 점근선과 평행하여 개형 상

만나지 않으므로
부등식을 만족한다.

즉 $f(a)=1$이고, $f'(a)=0$이다. $\therefore g'(2)=0$

$$\therefore f'(2)-f'\left(1-\frac{2}{e}\right)=1$$

<다른 풀이>

주어진 부등식의 양변을 x로 나누면 $k \geq 1+\dfrac{-e^{-x}+1-a}{x}$이다.

$g(x)=1+\dfrac{-e^{-x}+1-a}{x}$라 하면 $g(x) \leq k$로 해석할 수 있다.

$g'(x)=\dfrac{(x+1)e^{-x}-(1-a)}{x^2}$이고, 분모는 $x>0$에서 항상 양수이므로,

$g'(x)$의 부호 변화는 분자인 $(x+1)e^{-x}-(1-a)$를 따른다.
함수 $y=(x+1)e^{-x}$는 $x=0$에서 극댓값 1을 갖고, 그 그래프의 점근선은 $y=0$이다.
a가 양수이므로 a의 범위를 방정식 $(x+1)e^{-x}-(1-a)=0$에서 양의 실근의 발생 여부에 따라 나눌 수 있다.

(i) $0<a<1$
방정식 $(x+1)e^{-x}-(1-a)=0$이 하나의 양의 실근을 갖는다.
이를 t라 하면 관계식 $(t+1)e^{-t}=1-a$가 성립하고, 함수 $g(x)$는 $x=t$에서 극댓값이자 최댓값을 갖는다. 따라서 이 경우 $f(a)=g(t)$이다.

(ii) $a \geq 1$
방정식 $(x+1)e^{-x}-(1-a)=0$은 양의 실근을 갖지 않는다.
$x>0$에서 $g'(x)>0$이므로, 이때 함수 $g(x)$는 증가함수이고, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=1$이므로 점근선 1을 갖는 곡선이다. 따라서 이 경우 $f(a)=1$이다.

(i), (ii)의 경우를 조합하여 $f(a)$를 구하면 다음과 같다.

$$f(a)=\begin{cases} 1+\dfrac{-e^{-t}+1-a}{t} & (0<a<1) \\ 1 & (a \geq 1) \end{cases}$$

$f'(2)=0$이고, $f'(1-\dfrac{2}{e})$를 구하기 위해 $0<a<1$에서 $f'(a)$를 구해보자.
먼저 함수 $f(a)$의 분자의 $1-a$대신 관계식 $(t+1)e^{-t}=1-a$를 대입하여 $f(a)$를 t에 대해 정리한 후, 양변을 a에 대해 미분하면 $f'(a)=-e^{-t}\times\dfrac{dt}{da}$이다.

$\dfrac{dt}{da}$를 구하기 위해 관계식 $(t+1)e^{-t}=1-a$의 양변을 a에 대해 미분하자.

$\dfrac{dt}{da}\times te^{-t}=1$이므로 $\dfrac{dt}{da}=\dfrac{e^t}{t}$이다.

따라서 $0<a<1$에서 $f'(a)=-\dfrac{1}{t}$이고, $a=1-\dfrac{2}{e}$일 때의 t를 알아내기 위해 $(t+1)e^{-t}=1-a$에 대입하면 이때 $t=1$이다.

따라서 $f'(1-\dfrac{2}{e})=-1$이므로, $\therefore f'(2)-f'(1-\dfrac{2}{e})=1$