2022학년도 6월 모의평가 대비

수학I - 지수로그함수

by 심상범 in Orbi

수학 I - 지수로그함수

6월 모의평가 대비

by 심상범 in Orbi

1. 거듭제곱근

방정식 $x^n=a$를 만족시키는 실근 x를 'a의 n제곱근'이라고 한다.

이제부터는 좌표에서 그릴 수 있는 실근만 본다.

예)

$x^6=4$의 근 ⟶ x는 4의 여섯제곱근

$x^3=28$의 근 ⟶ x는 28의 세제곱근

a의 n제곱근 중 실수인 것은 기호 $\sqrt[n]{a}$로 나타낼 수 있다.

예)

- 4의 6제곱근 $=\sqrt[6]{4}$

그리고 a의 부호와 n의 짝수·홀수 여부에 따라 제곱근의 개수가 달라진다.

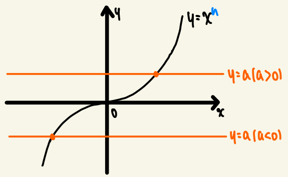
실수인 제곱근

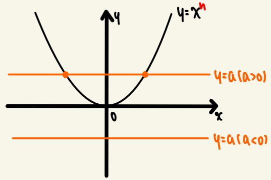
a의 부호 / n이 짝수 or 홀수	$a<0$	$a=0$	$a>0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$ 1개	0 1개	$\sqrt[n]{a}$ 1개
n이 짝수	X 0개	0 1개	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$ 2개

⟶ n이 홀수라면 a의 부호에 상관없이 1개이다.

⟶ n이 짝수라면 a의 부호에 따라 실근의 개수가 다르다.

이것을 그래프로 살펴보자.





∘ 거듭제곱근의 성질과 지수법칙

거듭제곱근의 성질

① $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

지수법칙

→ 계산의 기초가 된다.

실수 x, y에 대해 $(a\neq0, b\neq0)$

① $a^x\times a^y=a^{x+y}$

② $a^x\div a^y=a^x\times\dfrac{1}{a^y}=\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$

③ $(a^x)^y=a^{xy}$

④ $(ab)^x=a^xb^x$

※ 지수법칙에 대한 생각들

∘ $a^0=1$

계산에서 곱셈을 할때는 시작하기 전에 $1\times\cdots$가 깔려있다고 생각해야한다.

a^0이 a를 0개 곱하는 것이므로 $\boxed{a^0=1\times=1}$이다.

∘ $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

지수법칙에 의하면 $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$이므로

$a^x\cdot a^{-x}=a^0=1$이 되어야 한다.

$a^x\cdot a^{-x}=1$ ⟶ $\boxed{a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}}$

2. 로그

$a^x = N$을 만족시키는 실근 x를 $\log_a N$ 라고 한다.

이제부터는 좌표에서
그릴 수 있는 실근만 본다.

$(a>0,\ a\neq 1,\ N>0)$

로그에서 숨겨진
또 다른 조건이 될 수 있다.

$$\log_{a} N = x$$

진수

밑

$$\log_{a} N = x$$

② N이다.

① a의 x제곱(a^x)이

이해해보기

ex) $\log_2 64 = 6$

② 64이다.

① 2의 6제곱(2^6)이

○ 로그의 성질과 밑변환 $(a>0,\ a\neq 1,\ M, N>0)$

로그끼리 — 로그 안에서

① $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

② $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

덧셈 → 곱하기
뺄셈 → 나누기

③ $\log_a M^r = r\log_a M$) 진수의 지수는 로그 앞으로 뺄 수 있다.

④ $\log_a 1 = 0$

1이다.

a의 0제곱(a^0)은

) $a^0 = 1$이 당연하듯 $\log_a 1 = 0$도 당연하게

→ 로그 간의 계산은 $\boxed{\text{밑의 통일}}$이 중요하다.

밑변환 : 계산을 위해서는 밑의 통일이 필요하므로 통일시키는 방법

진수는 위로

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

계산에서 필요한 수로 변환

밑은 아래로

이로부터 파생된 것들

① $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \boxed{\dfrac{1}{\log_b a}}$ 밑과 진수의 위치가 바뀌면 역수가 된다.

밑을 b로 설정

② $\log_a b \times \log_b c = \dfrac{\cancel{\log_a b}}{\log_a a} \cdot \dfrac{\log_a c}{\cancel{\log_a b}} = \boxed{\log_a c}$ 로그 간의 곱셈은 $\frac{\text{진수}}{\text{밑}} \times \frac{\text{진수}}{\text{밑}}$으로 생각해도 될 듯? (서로 나눠지는 경우)

③ $a^{\log_b c} = \boxed{c^{\log_b a}}$ 지수가 로그라면 밑과 지수의 진수를 바꿀 수 있다.

○ 상용로그 : 밑이 10인 로그

우리가 다루는 숫자가 10진법이니까
중요하게 다룬다.

그렇기에 자릿수에 대한 문제는 상용로그를 쓰자.

ex) 2^{30}의 자릿수를 구하여라.

$$\log 2^{30} = 30\log 2 = \underline{9}.03$$

$9 + (1) = 10$자리 수다.

3. 지수함수

지수의 형태를 가지는 함수관계를 뜻한다.

$f(x)=a^x$의 형태를 지닌다.

이동이 없는 기본형

조금 다르게 생각해보면 x값이 1 증가할 때, 함숫값이 a^1배가 되는 함수이다.

2 증가하면, 함숫값이 a^2배가 되는 함수이다.

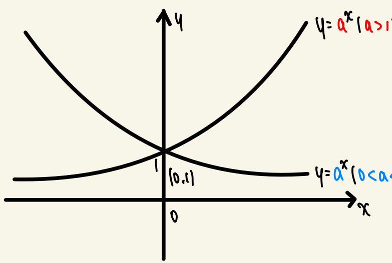
예) Q. $f(x)=2^{x-m+n}$이 $(2,8)$을 지날 때 $(5,a)$ 역시 $f(x)$를 지난다.

$\boxed{a\text{의 값은?}}$

A. 좌표의 x값이 3 증가하였으므로 함숫값이 2^3배 되어야한다.

$$\boxed{a=8\cdot 2^3=64}$$

○ 그래프



- a의 값이 클수록 y축에 가까워진다.
- a의 값이 작을수록 y축에 가까워진다.

- $y=a^x$의 그래프는 무조건 $(0,1)$을 지나고 점근선을 가진다.

정점

○ 지수함수 그래프의 이동

모든 그래프는 x축 방향으로 m, y축 방향으로 n 이동하면

x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 넣어주면 된다.

x축 대칭하면 모든 y값의 부호가 바뀌므로 → y 대신 $-y$ 대입

y축 대칭하면 모든 x값들의 부호가 바뀌므로 → x 대신 $-x$ 대입

원점대칭하면 x, y값들의 부호가 모두 바뀌므로 → x 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 대입

※ $y=a^{x-m}$만이 x축 방향의 이동은 아니다.

예) $y=5\cdot 2^x$

$$=2^{\log_2 5}\cdot 2^x=2^{\underline{x+\log_2 5}}$$

x축 방향으로 $-\log_2 5$ 이동

○ 지수함수의 최대·최소

변형되지 않은 $y=a^x$의 그래프는 한 가지의 경향성을 띠기에

증가 or 감소

주어진 구간의 경계를 가장 먼저 의심하자.

4. 로그함수

로그의 형태를 가지는 함수관계를 뜻한다.

$f(x)=\log_a x$ 의 형태를 지닌다.

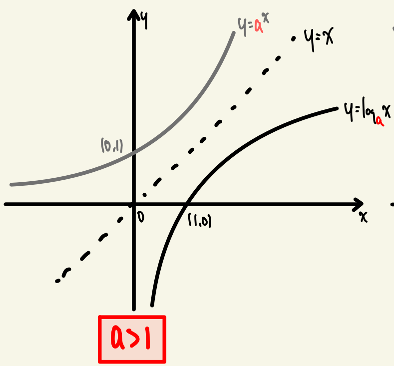
이동이 없는 기본형

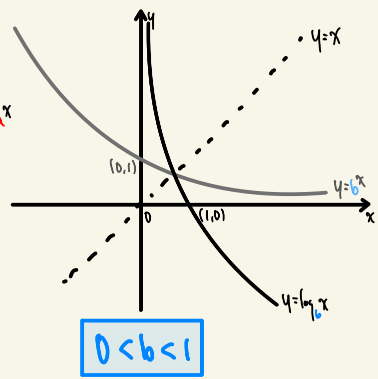
조금 다르게 생각해보면 x값이 a^1배가 되면 함숫값이 1 증가한다.

x값이 a^2배가 되면 함숫값이 2 증가한다.

• 지수함수에서의 것과 순서가 바뀌어 있다.
→ 서로 역함수 관계이기에

• 그래프





그래프 $y=\log_a x$는 무조건 (1,0)을 지나고 $y=x$를 축으로 $y=a^x$와 대칭이다.

• 로그함수 그래프의 이동

모든 그래프는 x축 방향으로 m, y축 방향으로 n 이동하면

x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 넣어주면 된다.

x축 대칭하면 모든 y값의 부호가 바뀌므로 → y 대신 $-y$ 대입

y축 대칭하면 모든 x값들의 부호가 바뀌므로 → x 대신 $-x$ 대입

원점대칭하면 x, y값들의 부호가 모두 바뀌므로 → x 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 대입

• 로그함수의 최대·최소

변형되지 않은 $y=\log_a x$ 의 그래프는 한 가지의 경향성을 띄기에

증가 or 감소

주어진 구간의 양끝 값을 가장 먼저 의심하자.

문제에서의 TIP

• 식을 정리하다가 (지수식)=(로그식)의 형태가 나오면 빠르게 포기하자.

절대 해결 X