제 2 교시

2022학년도 6월 모의평가 대비

미적분 EBS 선별

홀수형

성명	

수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

우주설

제 2 교시

1. 일반항이 $a_n = \dfrac{an^2+2n}{n^2+1}$ 인 수열 $\{a_n\}$과 함수 $f(x) = x^2 + x$ 에 대하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)-b}{a_n-a} = a+3$ 이 성립할 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

① -8　② -4　③ 0　④ 4　⑤ 8

2. 자연수 n 에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(n, n^2)$이 있다. 직선 OP 에 평행하고 곡선 $y=x^2$ 에 접하는 직선을 l_n 이라 하고, 점 P 와 직선 l_n 사이의 거리를 d_n 이라 하자. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{n+1}$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.)

① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

3. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{S_n\}$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{na_n+\sqrt{4n^2+n}}$의 값을 구하시오.

4. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{n+1}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right)=3$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\times\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

5. 두 상수 a, b에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}-a\right)=b$일 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

6. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$이고 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}\left(b_k+\frac{k^2}{n^3}\right)=\frac{n}{n+1}$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+3b_n)$의 값은?

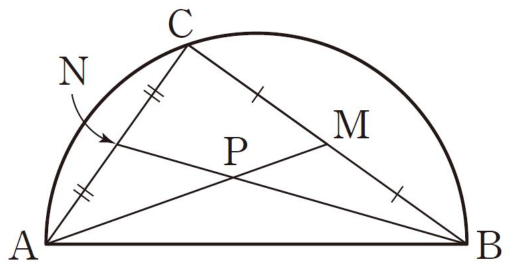
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. $a_2=-\frac{1}{2}$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하자. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하고 모든 자연수 n에 대하여 $S_{n+1}+S_n=2n+a_1-\frac{pn^2+1}{n+1}$일 때, $p\times\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값을 구하시오. (단, p는 상수이다.)

8. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)=5$일 때,

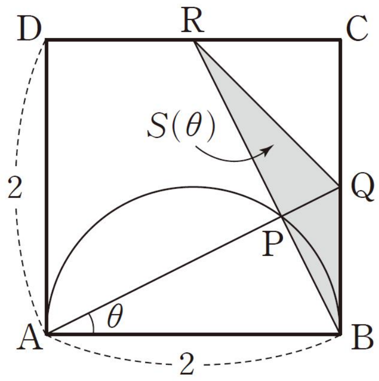
$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-3n+\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$의 값을 구하시오.

9. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위의 점 C에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 선분 AC의 중점을 N, 선분 AM과 선분 BN의 교점을 P라 하자. $\tan(\angle \mathrm{CBN}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$일 때, $\sin(\angle \mathrm{APB})$의 값은?



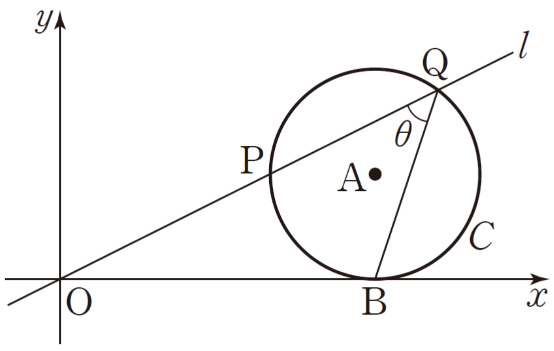
① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{7\sqrt{3}}{18}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{9}$

10. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD의 내부에 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 반원의 호 위의 점 P에 대하여 직선 AP가 선분 BC와 만나는 점을 Q, 직선 BP가 선분 CD와 만나는 점을 R라 하고, $\angle \mathrm{PAB} = \theta$라 하자. 삼각형 BQR의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? $\left(단, 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \right)$



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

11. 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(3, 1)$을 중심으로 하고 점 B에서 x축과 접하는 원 C가 있다. 원점 O를 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 원 C와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 원점에서 가까운 점을 P, 원점에서 먼 점을 Q라 하고 $\angle\mathrm{BQO}=\theta$라 하자. 선분 OP의 길이를 $f(\theta)$라 할 때, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은? (단, 직선 l의 기울기는 $\frac{3}{4}$보다 작다.)



① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

12. 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 2\pi\}$인 함수 $f(x)=\ln(4+a\sin x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 x축에 접할 때, 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는? (단, a는 $0<a<4$인 상수이다.)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

1) 정답 ⑤

풀이

(ⅰ) $a=0$일 때

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=0$$

(ⅱ) $a\neq 0$일 때

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+2n}{n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a+2\times\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{a+2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=a$$

한편, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)-b}{a_n-a}=a+3$에서 $a_n=t$로 놓으면 $n\to\infty$일 때, $t\to a$이므로

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-b}{t-a}=a+3 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

$t\to a$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$에서

$$\lim_{t\to a}\{f(t)-b\}=0$$

그러므로 $b=\lim_{t\to a}f(t)=f(a)$

이때 $f'(x)=2x+1$이므로 ㉡은

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=f'(a)=2a+1=a+3$$

이때 $a=2$이고 $b=f(2)=6$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$a+b=2+6=8$

2) 정답 ①

풀이

직선 OP의 기울기는

$$\frac{n^2-0}{n-0}=n$$

그러므로 직선 OP와 평행한 직선 l_n의 방정식은

$y=nx+k$ (단, k는 상수)

이때 이 직선이 곡선 $y=x^2$과 접해야 하므로 방정식 $x^2=nx+k$, 즉 $x^2-nx-k=0$은 중근을 가져야 한다.,

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-n)^2+4k=0$이므로

$$k=-\frac{n^2}{4}$$

그러므로 구하는 직선 l_n의 방정식은

$$y=nx-\frac{n^2}{4}$$

이때 점 $\mathrm{P}(n,\ n^2)$과 직선 $nx-y-\frac{n^2}{4}=0$사이의 거리 d_n은

$$d_n=\frac{\left|n^2-n^2-\frac{n^2}{4}\right|}{\sqrt{n^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{n^2}{4\sqrt{n^2+1}}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4(n+1)\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{1}{4\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\times\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{1}{4}$$

3) 정답 1

풀이

수열 $\{S_n\}$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{na_n+\sqrt{4n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{a_n+\sqrt{4+\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{2+3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{2+3\times 0}{0+\sqrt{4}+0}=1$$

4) 정답 ③

풀이

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right)$에서 $b_n=\frac{\sqrt{n}}{n+1}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$이라 하고,

이 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\left(\frac{\sqrt{1}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{4}}{5}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{\sqrt{n-1}}{n}-\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)+\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{2}{n}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1+2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{n+1}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right)=3$에서

$\frac{a_n}{2}+b_n=c_n$이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=3$이고

$a_n=2(c_n-b_n)$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}2(c_n-b_n)$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}c_n-2\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

$$=2\times3-2\times\frac{1}{2}=5$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\times\sum_{n=1}^{\infty}b_n=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

5) **정답** ③

풀이

$a_n=\frac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}-a$라 하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 b에 수렴한다.

그러므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}-a\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}-a$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}-a$$

$$=\frac{1+3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{1+3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}-a$$

$$=1-a=0$$

에서 $a=1$

이때

$$a_n=\frac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}-1=\frac{1}{n^2+3n+2}$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

이때

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$$

이므로 $b=\frac{1}{2}$

따라서 $a+b=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

6) **정답** ④

풀이

$\sum_{k=1}^{n}\left(b_k+\frac{k^2}{n^3}\right)=\frac{n}{n+1}$에서

$$\sum_{k=1}^{n}b_k+\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}b_k+\frac{1}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{n}{n+1}-\frac{1}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{n}{n+1}-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$n\to\infty$일 때,

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}-\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}-\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}$$

$$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+3b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+3\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

$$=2+3\times\frac{2}{3}=4$$

7) **정답** 3

풀이

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=S$$

이때

$$S_{n+1}+S_n=2n+a_1-\frac{pn^2+1}{n+1}\quad\cdots\cdots㉠$$

에서 좌변의 극한은

$$\lim_{n\to\infty}(S_n+S_{n+1})=\lim_{n\to\infty}S_n+\lim_{n\to\infty}S_{n+1}$$

$$=S+S=2S\quad\cdots\cdots㉡$$

또 우변의 극한은

$$\lim_{n\to\infty}\left(2n+a_1-\frac{pn^2+1}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+a_1)(n+1)-pn^2-1}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{2n^2+(a_1+2)n+a_1\}-pn^2-1}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2-p)n^2+(a_1+2)n+a_1-1}{n+1}$$

이 극한값이 존재하려면 $p=2$이어야 한다.

이때 극한값은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+2)n+a_1-1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+2)+\frac{a_1-1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{(a_1+2)+(a_1-1)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$$

$$=a_1+2 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

한편, ㉠에 $n=1$을 대입하면

$$S_2+S_1=2+a_1-\frac{2\times1^2+1}{1+1}$$

$$2a_1+a_2=a_1+\frac{1}{2}$$

$$a_1+a_2=\frac{1}{2}$$

한편, $a_2=-\frac{1}{2}$이므로 $a_1=1$

㉡, ㉢에서

$$2S=3,\ S=\frac{3}{2}$$

따라서 $p\times\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2\times\frac{3}{2}=3$

8) 정답 8

풀이

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)=5$이므로 $b_n=a_n-3$이라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=5$$

이 때 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(b_n+3)$$

$$=\lim_{n\to\infty}b_n+3$$

$$=0+3=3$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-3n+\sum_{k=1}^{n}a_k\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{a_n-3n+\sum_{k=1}^{n}(b_k+3)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(a_n-3n+\sum_{k=1}^{n}b_k+3n\right)$$

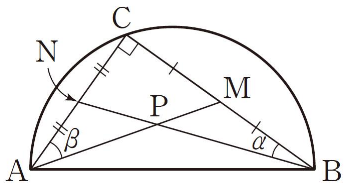
$$=\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}a_n+\sum_{k=1}^{\infty}b_k$$

$$=3+5=8$$

9) 정답 ①

풀이



반원에 대한 원주각의 크기는 직각이므로

$$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$$

직각삼각형 CNB에서

$\angle CBN=\alpha$라 하면 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로

$\overline{BC}=4a\ (a>0)$으로 놓으면

$$\overline{CN}=\sqrt{2}a$$

$$\overline{BN}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{CN}^2}=\sqrt{16a^2+2a^2}$$

$$=\sqrt{18a^2}=3\sqrt{2}a$$

$$\sin\alpha=\frac{\overline{CN}}{\overline{BN}}=\frac{\sqrt{2}a}{3\sqrt{2}a}=\frac{1}{3}$$

$$\cos\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{BN}}=\frac{4a}{3\sqrt{2}a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

직각삼각형 CAM에서

$\overline{AC}=2\overline{CN}=2\sqrt{2}a,\ \overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=2a$이므로

$$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CM}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2}a)^2+(2a)^2}$$

$$=\sqrt{12a^2}=2\sqrt{3}a$$

$\angle CAM=\beta$라 하면

$$\sin\beta=\frac{\overline{CM}}{\overline{AM}}=\frac{2a}{2\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\beta=\frac{\overline{AC}}{\overline{AM}}=\frac{2\sqrt{2}a}{2\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

한편,

$$\angle APB=\pi-(\angle PAB+\angle PBA)$$

$$=\pi-\{(\angle CAB-\beta)+(\angle CBA-\alpha)\}$$

$$=\pi-\{(\angle CAB+\angle CBA)-(\alpha+\beta)\}$$

$$=\pi-\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}+(\alpha+\beta)$$

따라서 삼각함수의 성질과 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\sin(\angle APB)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+(\alpha+\beta)\right)=\cos(\alpha+\beta)$$

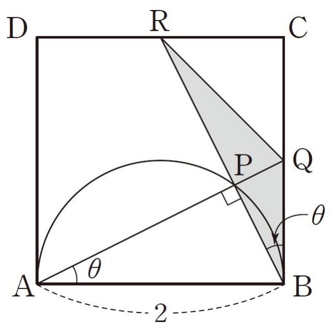
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

10) 정답 ④

풀이



삼각형 ABQ에서 $\frac{\overline{BQ}}{\overline{AB}} = \tan\theta$이므로

$\overline{BQ} = 2\tan\theta$

$\angle APB = \frac{\pi}{2}$에서 $\angle PBC = \theta$이고,

삼각형 BCR에서 $\frac{\overline{BC}}{\overline{BR}} = \cos\theta$이므로

$\overline{BR} = \frac{2}{\cos\theta}$

그러므로 삼각형 BQR의 넓이 $S(\theta)$는

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{BR} \times \overline{BQ} \times \sin(\angle QBR)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{\cos\theta} \times 2\tan\theta \times \sin\theta$$

$$= 2\tan^2\theta$$

따라서

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta \to 0+}\left(2 \times \frac{\tan^2\theta}{\theta^2}\right)$$

$$= \lim_{\theta \to 0+}\left\{2 \times \left(\frac{\tan\theta}{\theta}\right)^2\right\}$$

$$= 2 \times 1^2 = 2$$

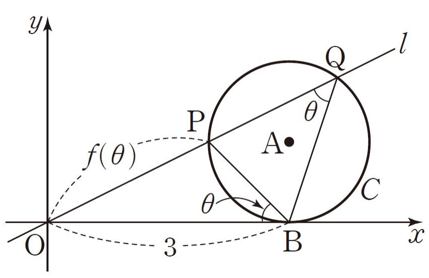
11) 정답 ②

풀이

원 C가 점 $A(3, 1)$을 중심으로 하고 x축에 접하므로 원 C의 반지름의 길이는 1이고, 점 B의 좌표는 (3, 0)이다.

원의 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의하여

$\angle OBP = \angle BQO = \theta$



원 C는 삼각형 BQP의 외접원이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BP}}{\sin\theta} = 2$에서 $\overline{BP} = 2\sin\theta$

삼각형 POB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{OP}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BP}^2 - 2 \times \overline{OB} \times \overline{BP} \times \cos\theta$$

$$= 3^2 + (2\sin\theta)^2 - 2 \times 3 \times 2\sin\theta \times \cos\theta$$

$$= 4\sin^2\theta - 12\sin\theta\cos\theta + 9$$ 이므로

$f(\theta) = \overline{OP}$

$$= \sqrt{4\sin^2\theta - 12\sin\theta\cos\theta + 9}$$

이고,

$$f'(\theta) = \frac{8\sin\theta\cos\theta - 12(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{2\sqrt{4\sin^2\theta - 12\sin\theta\cos\theta + 9}}$$

$$= \frac{4\sin\theta\cos\theta - 6(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\sqrt{4\sin^2\theta - 12\sin\theta\cos\theta + 9}}$$

따라서

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} - 6\left(\cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{4} - 12 \times \sin\frac{\pi}{4} \times \cos\frac{\pi}{4} + 9}}$$

$$= \frac{4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 6\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{4 \times \frac{1}{2} - 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 9}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

다른 풀이

$f(\theta) = \sqrt{4\sin^2\theta - 12\sin\theta\cos\theta + 9}$ 에서

$\{f(\theta)\}^2 = 4\sin^2\theta - 12\sin\theta\cos\theta + 9$ …… ㉠

㉠에 $\theta = \frac{\pi}{4}$를 대입하면

$$\left\{f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}^2 = 4 \times \frac{1}{2} - 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 9$$

$$= 2 - 6 + 9 = 5$$

$f(\theta) > 0$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{5}$

㉠의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$2f(\theta)f'(\theta)$

$= 8\sin\theta\cos\theta - 12(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$ …… ㉡

㉡에 $\theta = \frac{\pi}{4}$를 대입하면

$$2 \times \sqrt{5} \times f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 12\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$2 \times \sqrt{5} \times f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$$

따라서 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

12) 정답 ③

풀이

$f(x) = \ln(4 + a\sin x)$에서

$f'(x) = \frac{a\cos x}{4 + a\sin x}$

$0 < a < 4$이므로 $0 \le x \le 2\pi$에서

$4 + a\sin x > 0$

즉, $f'(x) = 0$에서 $\cos x = 0$이므로

$x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}\pi$

$0 \le x \le 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음

과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$2\ln 2$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	$2\ln 2$

$f(0)=f(2\pi)=2\ln 2>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}\pi$에서 극소이면서 최소이고, 최솟값은

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\ln\left(4+a\sin\frac{3}{2}\pi\right)$$
$$=\ln(4-a)$$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하고

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(0)=f(2\pi)>0$이므로 $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0$이어야 한다.

$\ln(4-a)=0$에서

$a=3$

즉, $f(x)=\ln(4+3\sin x)$

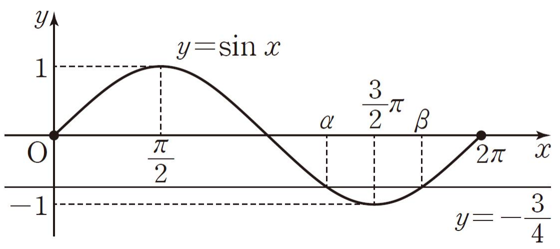
$f'(x)=\frac{3\cos x}{4+3\sin x}$에서

$$f''(x)=\frac{-3\sin x\times(4+3\sin x)-3\cos x\times 3\cos x}{(4+3\sin x)^2}$$
$$=\frac{-12\sin x-9}{(4+3\sin x)^2}$$

$f''(x)=0$에서

$\sin x=-\frac{3}{4}$

$0\le x\le 2\pi$에서 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=-\frac{3}{4}$이 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 $x=\alpha$, $x=\beta$ 좌우에서 함수 $f''(x)$의 부호가 각각 바뀌므로 두 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.



따라서 $0\le x\le 2\pi$에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 2이다.

참고

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.