

제 2 교시

수학 영역 (가형)

[5 지선다형]

9. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(2x+1) = (x^2+1)^2$$

을 만족시킬 때, $f'(3)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

10. 어느 실험실의 연구원이 어떤 식물로부터 하루 동안 추출하는 호르몬의 양은 평균이 30.2mg, 표준편차가 0.6mg인 정규분포를 따른다고 한다. 어느 날 이 연구원이 하루 동안 추출한 호르몬의 양이 29.6mg 이상이고 31.4mg 이하인 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

- ① 0.3830 ② 0.5328 ③ 0.6247
 ④ 0.7745 ⑤ 0.8185

10. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t > 0)$ 에서의 위치 (x, y) 가

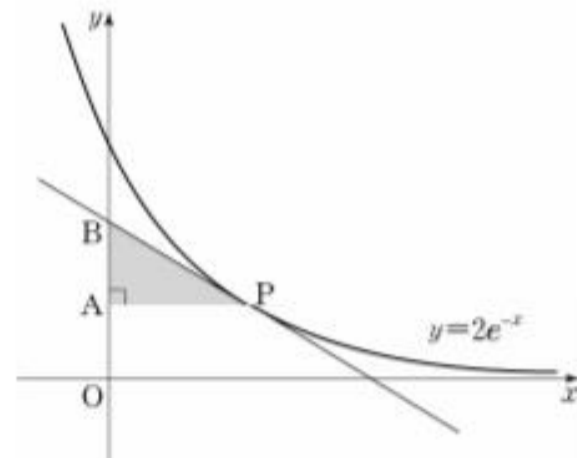
$$x = t - \frac{2}{t}, \quad y = 2t + \frac{1}{t}$$

이다. 시각 $t=1$ 에서 점 P의 속력은? [3점]

- ① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

15. 곡선 $y = 2e^{-x}$ 위의 점 $P(t, 2e^{-t})$ ($t > 0$)에서 y 축에 내린 수선의 발을 A라 하고, 점 P에서의 접선이 y 축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 APB의 넓이가 최대가 되도록 하는 t 의 값은? [4점]

- ① 1 ② $\frac{e}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ e



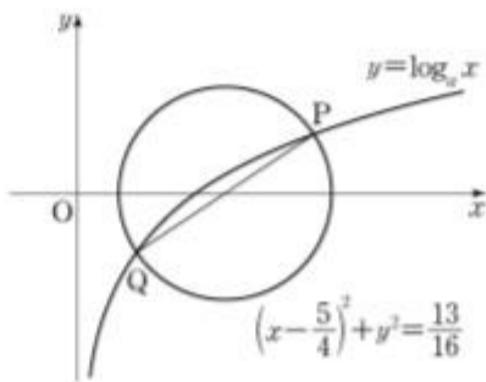
15. 그림과 같이 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 카드가 각각 3장씩 12장이 있다. 이 12장의 카드 중에서 임의로 3장의 카드를 선택할 때, 선택한 카드 중에 같은 숫자가 적혀 있는 카드가 2장 이상일 확률은? [4점]



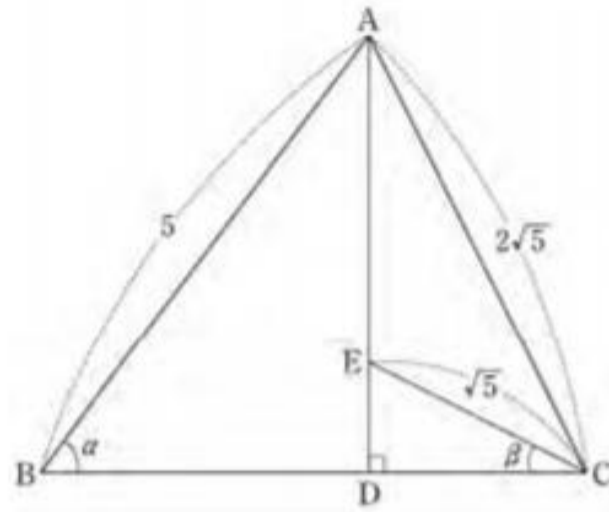
- ① $\frac{12}{55}$
- ② $\frac{16}{55}$
- ③ $\frac{4}{11}$
- ④ $\frac{24}{55}$
- ⑤ $\frac{28}{55}$

16. $a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 곡선 $y = \log_a x$ 와 원 $C: \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{13}{16}$ 의 두 교점을 P, Q라 하자. 선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a 의 값은? [4점]

- ① 3
- ② $\frac{7}{2}$
- ③ 4
- ④ $\frac{9}{2}$
- ⑤ 5

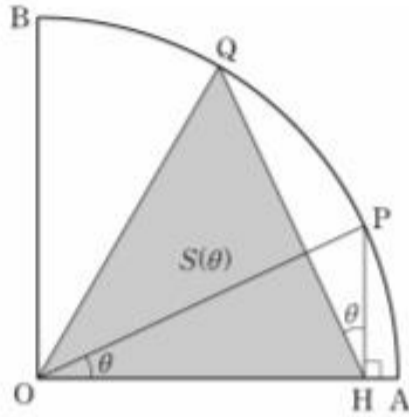


14. 그림과 같이 $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 2\sqrt{5}$ 인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 선분 AD를 3:1로 내분하는 점 E에 대하여 $\overline{EC} = \sqrt{5}$ 이다. $\angle ABD = \alpha$, $\angle DCE = \beta$ 라 할 때, $\cos(\alpha - \beta)$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- ② $\frac{7\sqrt{5}}{20}$
- ③ $\frac{3\sqrt{5}}{10}$
- ④ $\frac{\sqrt{5}}{4}$
- ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

16. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, 호 BP 위에 점 Q를 $\angle POH = \angle PHQ$ 가 되도록 잡는다. $\angle POH = \theta$ 일 때, 삼각형 OHQ의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값은?
(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$) [4점]



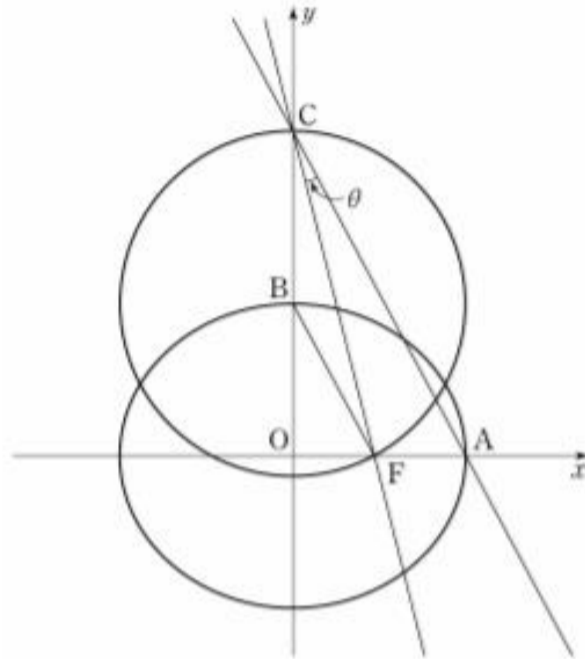
- ① $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$
 ④ $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{5+\sqrt{2}}{2}$

12. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 초콜릿 8개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? [3점]

- (가) 각 학생은 적어도 1개의 초콜릿을 받는다.
 (나) 학생 A는 학생 B보다 더 많은 초콜릿을 받는다.

- ① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

17. 그림과 같이 한 초점이 $F(c, 0)$ 인 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과 두 점 $A(a, 0)$, $B(0, b)$ 가 있다. 점 B를 중심으로 하고 점 F를 지나는 원이 y 축과 만나는 점 중에서 y 좌표가 양수인 점을 C라 할 때, 직선 CF와 직선 CA가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하자. $\tan(\angle CFB) = \frac{1}{4}$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은?
(단, a, b, c 는 양수이다.) [4점]



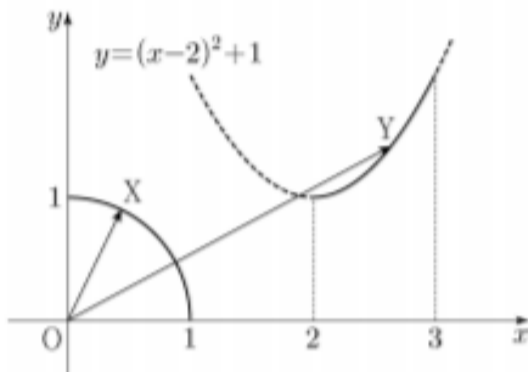
- ① $\frac{36}{145}$ ② $\frac{41}{145}$ ③ $\frac{46}{145}$ ④ $\frac{51}{145}$ ⑤ $\frac{56}{145}$

19. 좌표평면 위에 두 점 $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ 이 있다. 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB 의 호 AB 위를 움직이는 점 X 와 함수 $y=(x-2)^2+1$ ($2 \leq x \leq 3$)의 그래프 위를 움직이는 점 Y 에 대하여

$$\vec{OP} = \vec{OY} - \vec{OX}$$

를 만족시키는 점 P 가 나타내는 영역을 R 라 하자. 점 O 로부터 영역 R 에 있는 점까지의 거리의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, M^2+m^2 의 값은? (단, O 는 원점이다.) [4점]

- ① $16-2\sqrt{5}$ ② $16-\sqrt{5}$ ③ 16
- ④ $16+\sqrt{5}$ ⑤ $16+2\sqrt{5}$



19. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4 의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4) 의 개수는? [4점]

(가) $n=1, 2, 3$ 일 때, $x_{n+1}-x_n \geq 2$ 이다.

(나) $x_4 \leq 12$

- ① 210 ② 220 ③ 230 ④ 240 ⑤ 250

20. 점 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 에서 곡선 $y = \sin x (x > 0)$ 에 접선을 그어 접점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n 번째 수를 a_n 이라 하자. 모든 자연수 n 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

㉠. $\tan a_n = a_n + \frac{\pi}{2}$

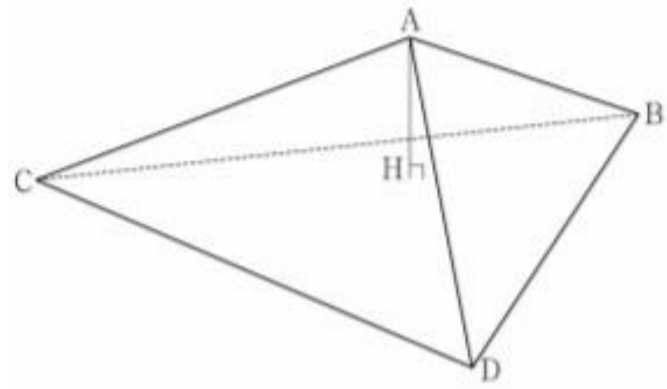
㉡. $\tan a_{n+2} - \tan a_n > 2\pi$

㉢. $a_{n+1} + a_{n+2} > a_n + a_{n+3}$

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

19. 한 변의 길이가 12인 정삼각형 BCD를 한 면으로 하는 사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 놓여 있다. 삼각형 CDH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 3배, 삼각형 DBH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 2배이고 $\overline{AH} = 3$ 이다. 선분 BD의 중점을 M, 점 A에서 선분 CM에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 선분 AQ의 길이는? [4점]

- ① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$



21. 좌표평면에서 두 점 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 직사각형의 넓이의 최댓값은? [4점]

직사각형 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 값은 점 P 의 좌표가 $(0, 6)$ 일 때 최대이고 $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ 일 때 최소이다.

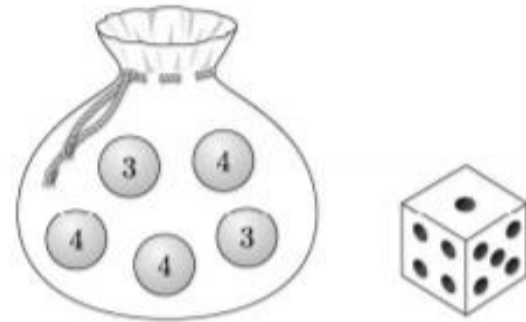
- ① $\frac{200}{19}$ ② $\frac{210}{19}$ ③ $\frac{220}{19}$ ④ $\frac{230}{19}$ ⑤ $\frac{240}{19}$

19. 숫자 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어
 꺼낸 공에 적힌 수가 3이면 주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합을 점수로 하고,
 꺼낸 공에 적힌 수가 4이면 주사위를 4번 던져서 나오는 네 눈의 수의 합을 점수로 한다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 10점일 확률은? [4점]

- ① $\frac{13}{180}$ ② $\frac{41}{540}$ ③ $\frac{43}{540}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{47}{540}$



20. 함수 $f(x) = \pi \sin 2\pi x$ 에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0, 1\}$ 인 함수 $g(x)$ 와 자연수 n 이 다음 조건을 만족시킬 때, n 의 값은? [4점]

함수 $h(x) = f(nx)g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$$\int_{-1}^1 h(x) dx = 2, \quad \int_{-1}^1 xh(x) dx = -\frac{1}{32}$$
 이다.

- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

19. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 공집합이 아닌 모든 부분집합 15개 중에서 임의로 서로 다른 세 부분집합을 뽑아 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 A, B, C 라 할 때, $A \subset B \subset C$ 일 확률은? [4점]

- ① $\frac{1}{91}$ ② $\frac{2}{91}$ ③ $\frac{3}{91}$ ④ $\frac{4}{91}$ ⑤ $\frac{5}{91}$

21. 닫힌구간 $[-2\pi, 2\pi]$ 에서 정의된 두 함수

$$f(x) = \sin kx + 2, \quad g(x) = 3\cos 12x$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k 의 개수는? [4점]

실수 a 가 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 의 교점의 y 좌표이면
 $\{x|f(x)=a\} \subset \{x|g(x)=a\}$
 이다.

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$F(x) = \ln|f(x)|$$

라 하고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 에 대하여

$$G(x) = \ln|g(x)\sin x|$$

라 하자.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)F'(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{1}{4}$$

일 때, $f(3)+g(3)$ 의 값은? [4점]

- ① 57 ② 55 ③ 53 ④ 51 ⑤ 49

21. 양수 t 에 대하여 구간 $[1, \infty)$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & (1 \leq x < e) \\ -t + \ln x & (x \geq e) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y = g(x)$ 의 기울기의 최솟값을 $h(t)$ 라 하자.

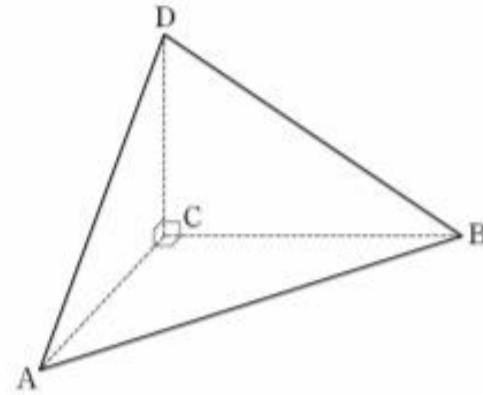
1 이상의 모든 실수 x 에 대하여 $(x - e)\{g(x) - f(x)\} \geq 0$ 이다.

미분가능한 함수 $h(t)$ 에 대하여 양수 a 가 $h(a) = \frac{1}{e+2}$ 을 만족시킨다. $h\left(\frac{1}{2e}\right) \times h'(a)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{(e+1)^2}$ ② $\frac{1}{e(e+1)}$ ③ $\frac{1}{e^2}$
 ④ $\frac{1}{(e-1)(e+1)}$ ⑤ $\frac{1}{e(e-1)}$

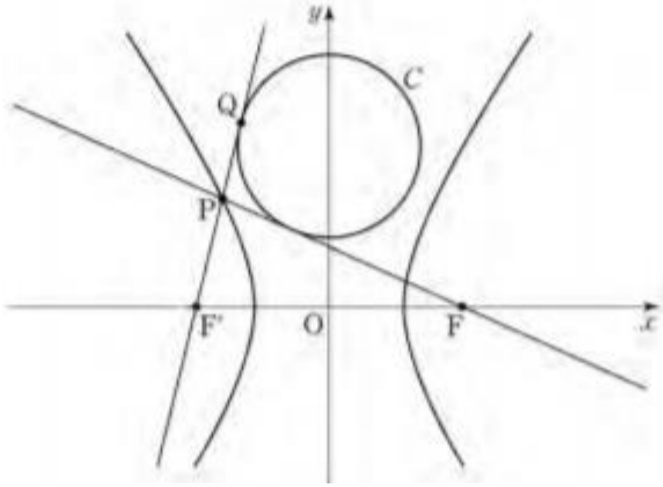
[단답형]

25. $\overline{AB} = 8$, $\angle ACB = 90^\circ$ 인 삼각형 ABC 에 대하여 점 C 를 지나고 평면 ABC 에 수직인 직선 위에 $\overline{CD} = 4$ 인 점 D 가 있다. 삼각형 ABD 의 넓이가 20일 때, 삼각형 ABC 의 넓이를 구하시오. [3점]



28. 방정식 $x + y + z = 10$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 중에서 임의로 한 개를 선택한다. 선택한 순서쌍 (x, y, z) 가 $(x - y)(y - z)(z - x) \neq 0$ 을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

27. 그림과 같이 두 초점이 F, F' 인 쌍곡선 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{17} = 1$ 위의 점 P 에 대하여 직선 FP 과 직선 $F'P$ 에 동시에 접하고 중심이 y 축 위에 있는 원 C 가 있다. 직선 $F'P$ 와 원 C 의 접점 Q 에 대하여 $\overline{F'Q} = 5\sqrt{2}$ 일 때, $\overline{FP}^2 + \overline{F'P}^2$ 의 값을 구하시오. (단, $\overline{F'P} < \overline{FP}$) [4점]



29. 흰 공 4개와 검은 공 6개를 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

28. 두 상수 $a, b (a < b)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = (x-a)(x-b)^2$$

이라 하자. 함수 $g(x) = x^3 + x + 1$ 의 역함수 $g^{-1}(x)$ 에 대하여 합성함수 $h(x) = (f \circ g^{-1})(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$ 의 값을 구하시오. [4점]

- (가) 함수 $(x-1)|h(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
- (나) $h'(3) = 2$

29. 좌표평면에서 중심이 O 이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 한 점을 A , 중심이 O 이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 한 점을 B 라 할 때, 점 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$$

$$(나) |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 = 20$$

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최솟값은 m 이고 이때 $|\overrightarrow{OP}| = k$ 이다. $m+k^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 좌표공간에 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 이 평면 $x + 2z - 5 = 0$ 과 만나서 생기는 원 C 가 있다. 원 C 위의 점 중 y 좌표가 최소인 점을 P 라 하고, 점 P 에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 Q 라 하자. 원 C 위를 움직이는 점 X 에 대하여

$|\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{QX}|^2$ 의 최댓값은 $a + b\sqrt{30}$ 이다.

$10(a+b)$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 유리수이다.) [4점]

18. 빨간색 공 6개, 파란색 공 3개, 노란색 공 3개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내는 시행을 하여, 다음 규칙에 따라 세 사람 A, B, C가 점수를 얻는다. (단, 한 번 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣지 않는다.)

- 빨간색 공이 나오면 A는 3점, B는 1점, C는 1점을 얻는다.
- 파란색 공이 나오면 A는 2점, B는 6점, C는 2점을 얻는다.
- 노란색 공이 나오면 A는 2점, B는 2점, C는 6점을 얻는다.

이 시행을 계속하여 얻은 점수의 합이 처음으로 24점 이상인 사람이 나오면 시행을 멈춘다. 다음은 얻은 점수의 합이 24점 이상인 사람이 A뿐일 확률을 구하는 과정이다.

30. $x > a$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 -1 인 사차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a 는 상수이다.)

- (가) $x > a$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $(x-a)f(x) = g(x)$ 이다.
- (나) 서로 다른 두 실수 α, β 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 $x = \alpha$ 와 $x = \beta$ 에서 동일한 극댓값 M 을 갖는다. (단, $M > 0$)
- (다) 함수 $f(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수는 함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수보다 많다.

$\beta - \alpha = 6\sqrt{3}$ 일 때, M 의 최솟값을 구하시오. [4점]