수학 영역

5지선다형

1. $\left(\sqrt{3^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$\sqrt{3^{\sqrt{2}}} = (3^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\left(\sqrt{3^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(3^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 3^1 = \boxed{3}$

2. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 - a_2$의 값은? [2점]

$d=2$

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

구해야하는 $a_5 - a_2$의 뜻은 공차의 3배를 구하라는 것이다.

$a_5 = a+4d$
$a_2 = a+d$

$(a+4d)-(a+d)$
$=3d$

공차=2이므로 $a_5 - a_2 = 3d = \boxed{6}$

3. 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 1$의 최댓값은? [3점]

x가 작아질수록 커진다.

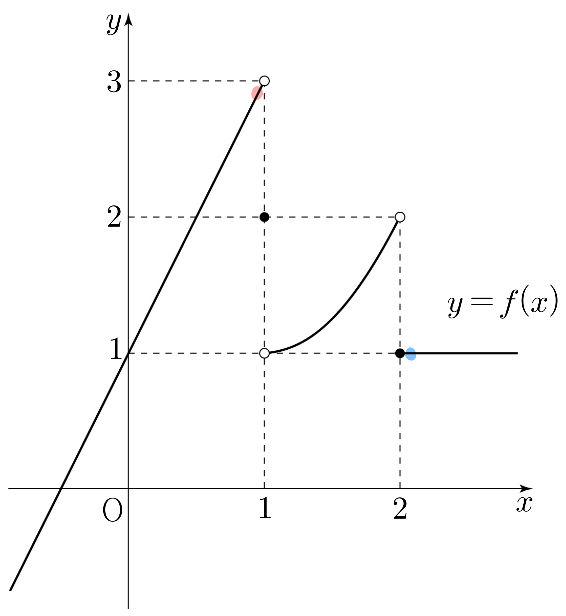
① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

함수 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+1$은 x값이 작아질수록 함숫값이 커지므로

구간 $[0,4]$에서 가장 작은 0을 x에 대입하자.

$f(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^{0-2}+1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+1 = 9+1 = \boxed{10}$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 1-} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

3 1

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=2x+4$이고 $f(-1)+f(1)=0$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

도함수를 아니까 적분하면 된다.
적분상수는...?

이거로 적분상수 처리

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

$f'(x)=2x+4$이므로 $f(x)=x^2+4x+C$ (C는 적분상수)이다.

$f(-1)+f(1)=0$이므로 $f(-1)$과 $f(1)$을 구해서 넣어보자.

$$\begin{cases} f(1)=1+4+C=C+5 \\ f(-1)=1-4+C=C-3 \end{cases}$$

$$f(-1)+f(1)=(C-3)+(C+5)=2C+2=0$$

$$C=-1$$

$$\downarrow$$

$$f(x)=x^2+4x-1$$

$$\boxed{f(2)=4+8-1=11}$$

6. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\sin\left(ax+\dfrac{\pi}{6}\right)$의 주기가 4π일 때, $f(\pi)$의 값은? [3점]

주기는 a에 의해서만 결정!
주기 $=\dfrac{2\pi}{|a|}$

① 0 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ 1

sin함수의 주기는 $\dfrac{2\pi}{|a|}$이고 이가 4π이므로 $a=\dfrac{1}{2}$이다.

$$\downarrow$$

$$f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$f(\pi)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\boxed{=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

7. 함수 $f(x)=x^3-3x$에서 x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k, f(k))$에서의 접선의 기울기가 서로 같을 때, 양수 k의 값은? [3점]

$(1, f(1))$과 $(4, f(4))$ 사이의 기울기

$x=k$에서의 미분계수.

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

• $(1, f(1))$과 $(4, f(4))$ 간의 기울기

$(1,-2)$와 $(4,52)$간의 기울기이므로 $\dfrac{52-(-2)}{4-1}=\dfrac{54}{3}=18$

• $f(x)$의 $x=k$에서의 미분계수

$$f'(x)=3x^2-3$$

$$f'(k)=3k^2-3$$

$$3k^2-3=18$$

$$3k^2=21$$

$$k=\pm\sqrt{7}$$

k는 양수이므로

$$\boxed{k=\sqrt{7}}$$

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+3x+a}{x-2} & (x<2) \\ -x^2+b & (x \ge 2) \end{cases}$$

가 $x=2$에서 연속일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

좌극한 = 우극한 = 극한값 = 함숫값

[3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

x=2에서 좌극한 = 우극한이어야 한다.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+3x+a}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+3x-10}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} x+5 = 7$$

$\frac{0}{0}$꼴이 되야 말이 되므로

$4+6+a=0$

$a=-10$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} -x^2+b = -4+b$$

같아야하니 $b=11$

$\boxed{a+b=-10+11=1}$

9. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\{2f(x)-3g(x)\}=1,\ \lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$$

$\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ 이므로 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ 이다

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)}$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{x\to\infty}\{2f(x)-3g(x)\}=1$$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ 인데

이렇게 처리하면 무한대가 아닌 '수'이므로

∞로 극한을 보냈을때 2f(x)와 3g(x)는 거의 동일하다.

$$\lim_{x\to\infty} 2f(x) \doteq \lim_{x\to\infty} 3g(x) \rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{g(x)}{f(x)}}{3-\frac{g(x)}{f(x)}} = \lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{2}{3}}{3-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{14}{3}}{\frac{7}{3}} = \boxed{2}$$

10. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=4t-10$$

위치$(t)=2t^2-10t+C$

이다. 점 P의 시각 $t=1$에서의 위치와 점 P의 시각 $t=k(k>1)$에서의 위치가 서로 같을 때, 상수 k의 값은? [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

t=1에서의 위치 : $x(1)=C-8$

t=k에서의 위치 : $x(k)=2k^2-10k+C$

같아야한다.

$2k^2-10k=-8$

$2k^2-10k+8=0$

$(k-1)(2k-8)=0$

$k\neq1$이므로

$\boxed{k=4}$

11. $0 < x < 2\pi$일 때, 방정식 $2\cos^2 x - \sin(\pi + x) - 2 = 0$의 모든 해의 합은? [4점]

한 바퀴 내에서

① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

$2\cos^2 x - \sin(\pi + x) - 2 = 0$

$\sin(\pi + x) = -\sin x$

$2\cos^2 x + \sin x - 2 = 0$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 = 0$

$2 - 2\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$

$-2\sin^2 x + \sin x = 0$

$\sin x(-2\sin x + 1) = 0$

$\sin x = 0$ or $\sin x = \frac{1}{2}$

$x = \pi$ $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

$\boxed{\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi = 2\pi}$

12. 닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a$의 최댓값이 12일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$= 3(x^2 - 4x + 3)$

$= 3(x-1)(x-3) \longrightarrow$ $x=1$에서 극대, $x=3$에서 극소

구간이 [0,3]이라면 여기가 최대

$f(1) = 1 - 6 + 9 + a$

$= a + 4 = 12$

$\boxed{a = 8}$

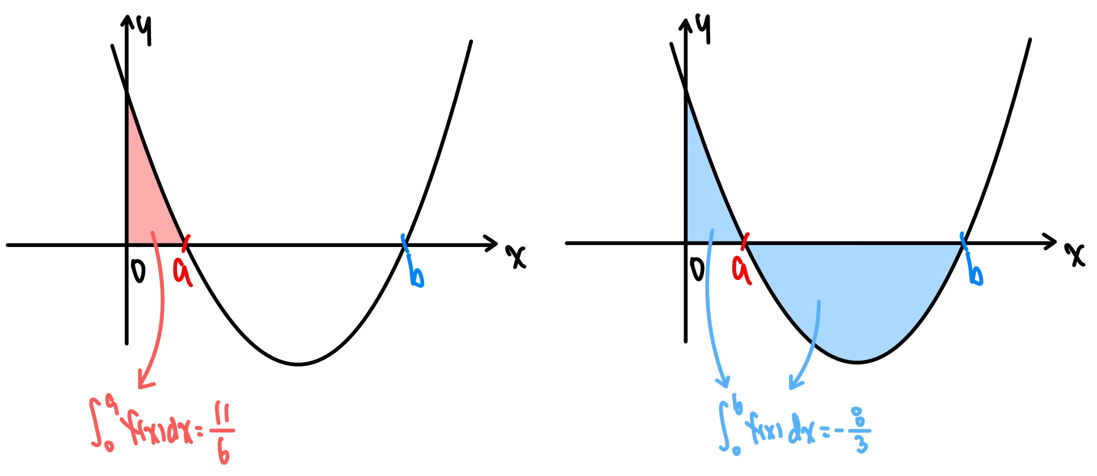
13. 두 양수 a, $b(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를
$f(x)=(x-a)(x-b)$라 하자.

$x=a, b$에서 x축과 만난다.

$$\int_0^a f(x)dx=\frac{11}{6},\ \int_0^b f(x)dx=-\frac{8}{3}$$

일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6



구해야하는 부분이 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$이므로 주어진 값들로 구해보자.

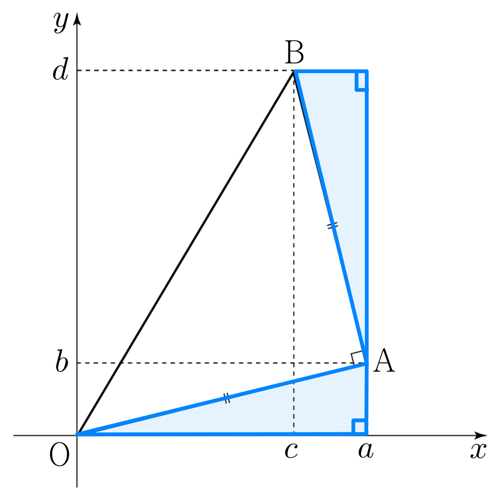
$\int_0^b f(x)dx-\int_0^a f(x)dx=-\frac{8}{3}-\frac{11}{6}=-\frac{27}{6}=\int_a^b f(x)dx$

$\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\frac{27}{6}=\boxed{\frac{9}{2}}$

14. 4 이상의 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 n 이하의 네 자연수 a, b, c, d가 있다.

- ○ $a>b$
- ○ 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(c, d)$와 원점 O에 대하여 삼각형 OAB는 $\angle \mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이다.

다음은 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 T_n이라 할 때, $\sum_{n=4}^{20} T_n$의 값을 구하는 과정이다.



점 $\mathrm{A}(a, b)$에 대하여
점 $\mathrm{B}(c, d)$가 $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$를 만족시키려면
$c=a-b$, $d=a+b$이어야 한다. 그려봐

이때, $a>b$이고 d가 n 이하의 자연수이므로 $b<\frac{n}{2}$이다.
a와 b를 더해서 n이어야 하는데 a가 b보다 크니까

$\frac{n}{2}$ 미만의 자연수 k에 대하여
$b=k$일 때, $a+b\le n$을 만족시키는 자연수 a의 개수는
a는 k+1보다 크거나 같다 ~ a=n-k까지
$n-2k$이다.
2 이상의 자연수 m에 대하여

(i) $n=2m$인 경우 (짝수)
b가 될 수 있는 자연수는 1부터 (가) $m-1$ 까지이므로

$$T_{2m}=\sum_{k=1}^{(가)\ m-1}(2m-2k)=\text{(나)}$$

(ii) $n=2m+1$인 경우 (홀수) b는 1부터 m까지

$$T_{2m+1}=\text{(다)}$$

(i), (ii)에 의해 $\sum_{n=4}^{20} T_n=614$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$, $h(m)$이라 할 때, $f(5)+g(6)+h(7)$의 값은? [4점]

① 71 ② 74 ③ 77 ④ 80 ⑤ 83

(나) $T_{2m}=\sum_{k=1}^{(가)\ m-1}(2m-2k)=\text{(나)}$

$=\sum_{k=1}^{m-1}2m-2\sum_{k=1}^{m-1}k=2m(m-1)-2\cdot\frac{(m-1)m}{2}$

$=2m^2-2m-m^2+m$

$=\boxed{m^2-m}$

(다) $T_{2m+1}=\text{(다)}$

$=\sum_{k=1}^{m}(2m+1-2k)=\sum_{k=1}^{m}2m+1-2\cdot\sum_{k=1}^{m}k$

$=m(2m+1)-2\cdot\frac{m(m+1)}{2}$

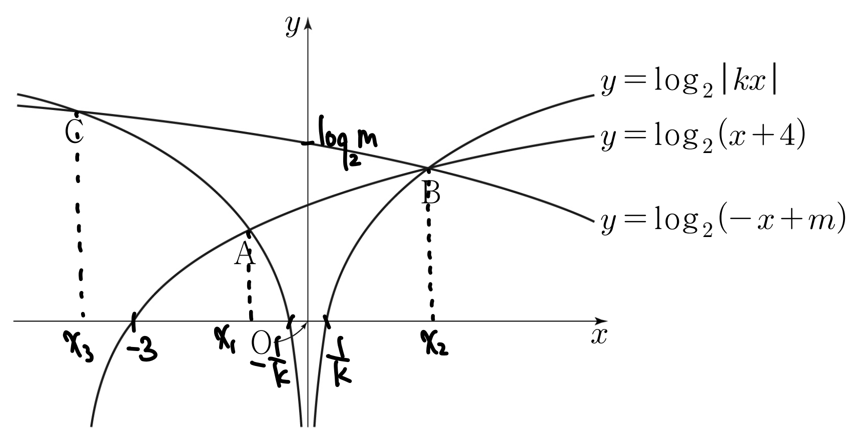
$=2m^2+m-m^2-m$

$=\boxed{m^2}$

$f(5)=5-1=4$, $g(6)=36-6=30$, $h(7)=49$

$\boxed{f(5)+g(6)+h(7)=83}$

15. 그림과 같이 1보다 큰 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_2|kx|$와 $y=\log_2(x+4)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하고, 점 B를 지나는 곡선 $y=\log_2(-x+m)$이 곡선 $y=\log_2|kx|$와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1 < x_2$이고, m은 실수이다.) [4점]



〈보 기〉

ㄱ. $x_2=-2x_1$이면 $k=3$이다.

ㄴ. $x_2{}^2=x_1x_3$ 등비중항?

ㄷ. 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기의 합이 0일 때, $m+k^2=19$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 점 B에서 세 그래프가 서로 만난다.
그러므로

$\log_2|kx_2|=\log_2(x_2+4)=\log_2(-x_2+m)$ 이다.

$=\log_2(kx_2)$

$\longrightarrow x_2=\frac{4}{k-1}$

점 A에서는 두 그래프가 만난다.
그러므로 $\log_2|kx_1|=\log_2(x_1+4) \longrightarrow x_1=\frac{-4}{k+1}$

$=\log(-kx_1)$

$x_1<0, k>1$이므로

$x_2=-2x_1$이라면 $\frac{4}{k-1}=-2\times\frac{-4}{k+1}$, $\frac{4}{k-1}=\frac{8}{k+1}$, $k=3$ (O)

ㄴ. $x_2^2=x_1\cdot x_3$

등비중항인지 물어보네. 식으로 x_1, x_2, x_3를 구해보자.

ㄱ에서 $x_1=\frac{-4}{k+1}$, $x_2=\frac{4}{k-1}$

점 B에서 $\log_2(kx_2)=\log_2(-x_2+m) \longrightarrow x_2=\frac{m}{k+1}$

점 C에서 $\log_2(-kx_3)=\log_2(-x_3+m) \longrightarrow x_3=\frac{-m}{k-1}$

$x_2^2=x_2\cdot x_2=\frac{4}{k-1}\cdot\frac{m}{k+1}=\frac{4m}{(k-1)(k+1)}$

$x_1\cdot x_3=\frac{-4}{k+1}\cdot\frac{-m}{k-1}=\frac{4m}{(k-1)(k+1)}$ 같다. (O)

ㄷ. $r=\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_3}{x_2}$

ㄴ을 통해 x_1, x_2, x_3은 등비수열을 이룬다는 것을 안다. 그렇다면 이 수열의 공비를 r, $x_1=a$라고 가정하여 기울기를 식으로 써보자.

$f(x)=\log_2|kx|$

A, B간의 기울기: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\log_2(-r)}{ar-a}=\frac{\log_2(-r)}{a(r-1)}$

A, C간의 기울기: $\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}=\frac{2\cdot\log_2(-r)}{ar^2-a}=\frac{2\log_2(-r)}{a(r^2-1)}=\frac{\log_2(-r)}{a(r-1)}\cdot\frac{2}{r+1}$

더하면 0이어야 하므로

$r=-3$

그런데 $x_1=\frac{-4}{k+1}$, $x_2=\frac{m}{k+1}$이므로

$r=-\frac{m}{4}=-3$, $m=12$

$x_2=\frac{4}{k-1}=\frac{12}{k+1} \longrightarrow k=2$ ($m=12$)

$m+k^2=12+4=16$ (X)

단답형

16. 함수 $f(x)=x^2+ax$에 대하여 $f'(1)=4$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점] 2

$f'(x)=2x+a$

$f'(1)=2+a=4$

$\boxed{a=2}$

17. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 $\sin\theta\cos\theta=\frac{7}{18}$일 때, $30(\sin\theta+\cos\theta)$의 값을 구하시오. [3점]

제1사분면에 존재 → $\sin, \cos\theta>0$

$\begin{cases}\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \\ \sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{7}{18}\end{cases}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+\frac{14}{18}=\frac{32}{18}=\frac{16}{9}$

$\sin\theta+\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{3}$

$\boxed{30(\sin\theta+\cos\theta)=40}$

18. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2-2x)f(x)$$

라 하자. 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값 2를 가질 때, $g'(3)$의 값을 구하시오. [3점]

도함수 $f'(x)$가 $x=3$에서 부호가 바뀐다.

$f'(3)=0$, $f(3)=2$

$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x)f'(x)$

$g'(3)=(6-2)f(3)+(9-6)f'(3)$

$=4f(3)+3f'(3)$

$=8+0=\boxed{8}$

19. 첫째항이 $\frac{1}{4}$이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_n=\frac{1}{4}\cdot r^{n-1}$

$$a_3+a_5=\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}$$

a_3와 a_5가 서로 역수관계라는거?

일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

주어진 식을 해석해보면 a_3와 a_5가 서로 역수가 되어야한다.

$a_3=\frac{1}{4}\cdot r^2$

$a_5=\frac{1}{4}\cdot r^4$

$\rightarrow a_3=\frac{1}{a_5}$

$\frac{1}{4}\cdot r^2=\frac{1}{\frac{1}{4}\cdot r^4}$

$\frac{1}{16}r^6=1$

$r^6=16$

$r^3=4$

$a_{10}=\frac{1}{4}\cdot r^9=\frac{1}{4}\cdot(r^3)^3=\frac{1}{4}\cdot 4^3=\boxed{16}$

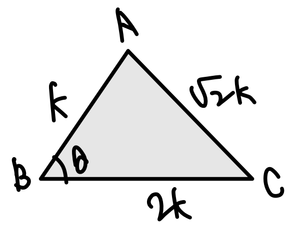
20. $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{CA}}=1:2:\sqrt{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 28π일 때, 선분 CA의 길이를 구하시오. [4점]

반지름$=2\sqrt{7}$

$\overline{\mathrm{CA}}$의 길이를 알기 위해서는 마주보는 각인 $\angle \mathrm{ABC}$의 크기가 필요하다.

$=\theta$라고 하자.

sin법칙을 사용할꺼면



각 θ의 정보를 알기 위해서는 삼각형의 세 변의 길이를 알고 있으므로 cos법칙으로 cosθ를 구하자.

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\,\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\cdot\cos\theta=\overline{\mathrm{AC}}^2$

$k^2+4k^2-4k^2\cos\theta=2k^2$

$5k^2-4k^2\cos\theta=2k^2$

$\cos\theta=\frac{3}{4} \rightarrow \sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$

외접원의 반지름이 $2\sqrt{7}$이므로

$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\theta}=4\sqrt{7}$

$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=4\sqrt{7}$

$\boxed{\overline{\mathrm{AC}}=7}$

21. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-2 & (a_n \geq 0) \\ a_n+5 & (a_n < 0) \end{cases}$$

0보다 크거나 같다면 계속 2씩 빼주자.
음수가 되면 5를 더해주자.

을 만족시킨다. $a_{15}<0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값을 구하시오. [4점]

수열의 기본 태도인 '해보자'를 실천하자.

$a_1=1$이라고 해보자.

$1, -1, 4, 2, 0, -2, 3, 1, -1, 4, 2, 0, -2, \ldots$

이렇게 반복이네 7개씩

$a_1=a_8=a_{15}$이다
주기가 7이므로

a_1이 곧 a_{15}이므로 a_1을 가정해보자.

a_1의 값이 주기에 있는 자연수 中 1개

i) $a_1=1$
$a_1=a_{15}=1$

ii) $a_1=2$
$a_1=a_{15}=2$ 1, −1, 4, 2, 0, −2, 3, 1, −1, 4, 2, 0, −2,......
Start Fin 이게 2번

iii) $a_1=3$
$a_1=a_{15}=3$ 1, −1, 4, 2, 0, −2, 3, 1, −1, 4, 2, 0, −2, 3, 1, −1, 4, 2.....
Start Fin 이게 2번

iv) $a_1=4$
$a_1=a_{15}=4$ 1, −1, 4, 2, 0, −2, 3, 1, −1, 4, 2, 0, −2, 3, 1, −1, 4, 2.....
Start Fin 이게 2번

v) $a_1=5$ 5, 3, 1, −1, 4, 2, 0, −2, 3, 1, −1, 4, 2, 0, −2, 3, 1, −1, 4, 2.....
Start Fin 이게 2번

$a_{15}=-2$
이게 맞다.

$\boxed{a_1=5}$

22. 실수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=3x+a,\ g(x)=\int_2^x (t+a)f(t)dt=\int_2^x (t+a)(3t+a)dt=(x-2)\{x^2+2(a+1)x+(a+2)^2\}$$

라 하자. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(-1)$의 최솟값은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

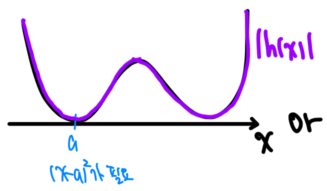
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 어떤 점에서의 접선이 x축이다.
(나) 곡선 $y=|h(x)|$가 x축에 평행한 직선과 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 4이다.

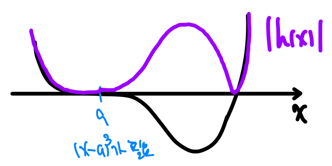
접선이 x축이려면 접점의 미분계수가 0 + 접점의 y좌표가 0

→ 개형에 대한 고민

$f(x)$가 1차, $g(x)$가 3차이므로 $h(x)$는 4차이다.



or



$h(x)=(3x+a)(x-2)\{x^2+2(a+1)x+(a+2)^2\}$

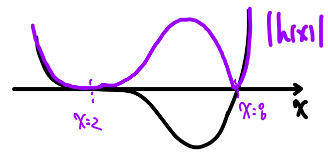
x=2에서 접한다고 가정
이렇게 x=2에서 접한다.
이렇게 2개가 인수를 공유
이 식이 완전제곱

i) $3x+a=3(x-2)$, 즉 $a=-6$

$h(x)=(3x-6)(x-2)\{x^2-10x+16\}$

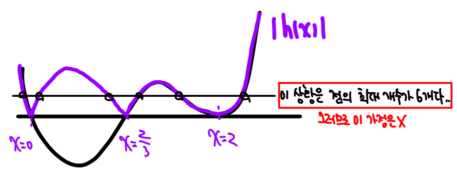
$=3(x-2)^2\{(x-2)(x-8)\}$

$=3(x-2)^3(x-8)$ → 이 상황이네



ii) $4+4(a+1)+(a+2)^2=0$, 즉 $a=-2$ or -6

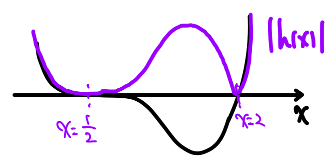
$h(x)=(3x-2)(x-2)(x^2-2x)=x(x-2)^2(3x-2)$ →



iii) $3x+a=0$, 즉 $x=-\frac{a}{3}$

$\frac{2}{9}(2a+3)(a+6)=0$
$a=-\frac{3}{2}$ $a=-6$은 앞에서 했다.

$h(x)=3(x-\frac{1}{2})^3(x-2)$ →



iv) $(a+1)^2-(a+2)^2=0$, 즉 $a=-\frac{3}{2}$
iii)과 같다.

i)에서 $x=-1$ 대입 : $h(-1)=729$
iii)에서 $x=-1$ 대입 : $h(-1)=\frac{243}{8}$
이게 제일 작다.

$\boxed{p+q=243+8=251}$

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. ${}_{n}\Pi_{2}=25$일 때, 자연수 n의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$n^2=25$

$\boxed{n=5}$

24. 다항식 $(x+2a)^5$의 전개식에서 x^3의 계수가 640일 때, 양수 a의 값은? [3점]

x를 3번, $+2a$를 2번 선택

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

$(x+2a)^5$

3번 2번

${}_5C_2\cdot x^3\cdot(2a)^2=10\cdot x^3\cdot 4a^2=\underbrace{40a^2}_{=640}x^3$

$a^2=16$

$\boxed{a=4}$

25. 빨간색 볼펜 5자루와 파란색 볼펜 2자루를 4명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜을 1자루도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

각각 다르게 보자.

중복조합 처리가 가능

① 560 ② 570 ③ 580 ④ 590 ⑤ 600

4명의 학생 : A, B, C, D

• 빨간색 볼펜 5자루

$A+B+C+D=5 \rightarrow {}_4H_5 = {}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 56$

• 파란색 볼펜 2자루

$A+B+C+D=2 \rightarrow {}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$

$\boxed{56 \times 10 = 560}$

26. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 5개를 택해 일렬로 나열하여 만든 다섯 자리의 자연수 중에서 다음 조건을 만족시키는 N의 개수는? [3점]

> (가) N은 홀수이다.
> 일의 자리 수가 1, 3, 5
> (나) $10000 < N < 30000$
> 만의 자리의 수를 1, 2로 제한

① 720 ② 730 ③ 740 ④ 750 ⑤ 760

(가) 일의 자리의 수는 1, 3, 5 중 하나

(나) 만의 자리의 수는 1 또는 2이다.

1 or 2 ＿ ＿ ＿ ＿ 1 or 3 or 5

제한X

경우의 수: $2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3 = 750$

27. 자연수 n에 대하여 $f(n)=\sum_{k=1}^{n} {}_{2n+1}C_{2k}$일 때, $f(n)=1023$을 만족시키는 n의 값은? [3점]

1024−1인가?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

f(n)을 잘 모르겠으니 해보자.

$f(2)=\sum_{k=1}^{2} {}_5C_{2k} = {}_5C_2+{}_5C_4$

짝수항인 합이? → 2^{5-1}
(${}_5C_0$ 만 없다면)

$f(n)=\sum_{k=1}^{n} {}_{2n+1}C_{2k} = 2^{2n}-1=1023$

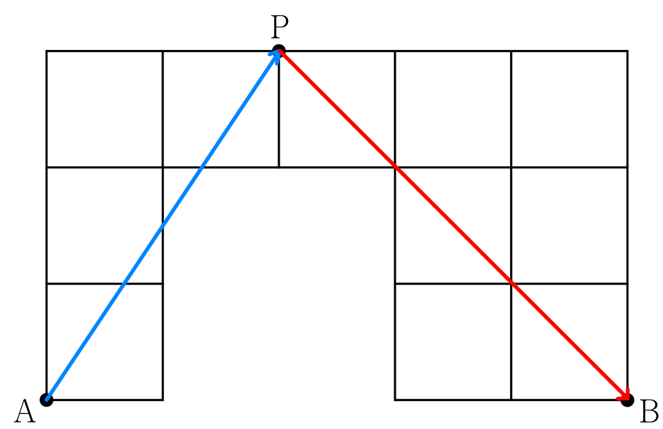
$2^{2n}=1024$

$2n=10$

$\boxed{n=5}$

28. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점으로 갈 때, 한 번 지난 도로는 다시 지나지 않으면서 최단거리로 가는 경우의 수는? [4점]

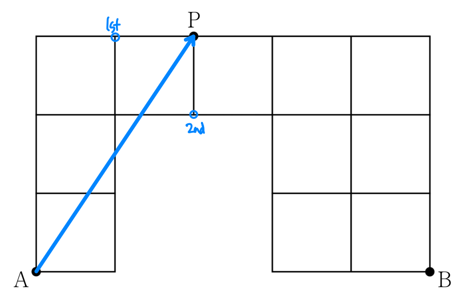
A→P 그리고 P→B



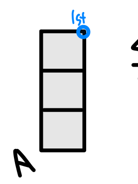
① 78 ② 82 ③ 86 ④ 90 ⑤ 94

A→P로 가는 경우의 수를 구하려면 P로 가는데 무조건 지나야하는 점을 찾자. (가야하는 방향을 가로지르게)

여기를 지나지 않으면 못 간다.

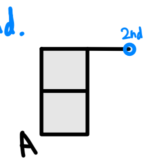


1st.



$\frac{4!}{3!}=4$가지

2nd.

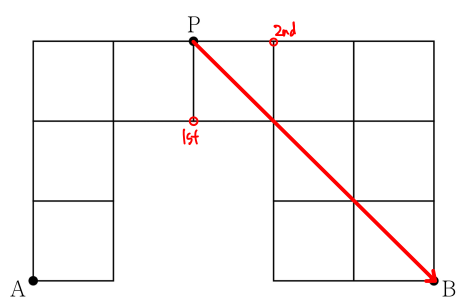


$\frac{3!}{2!}=3$가지

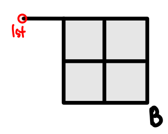
4+3=7가지

P→B로 가는 경우의 수를 구하려면 B로 가기 위한 점을 찾자. (가야하는 방향을 가로지르게)

여기를 지나지 않으면 못 간다.

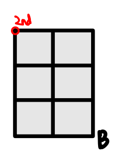


1st.



$\frac{4!}{2!2!}=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{4}=6$가지

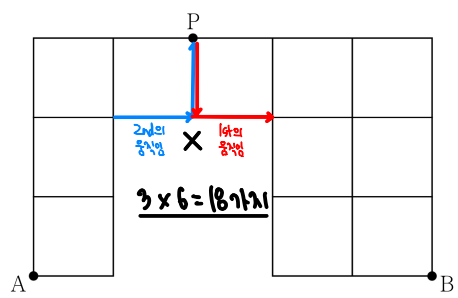
2nd.



$\frac{5!}{3!2!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=10$가지

10+6=16가지

그러나 밑과 같은 상황은 최단거리가 아니므로 빼줘야한다.



$7\times16-18$
$=112-18=94$가지

단답형

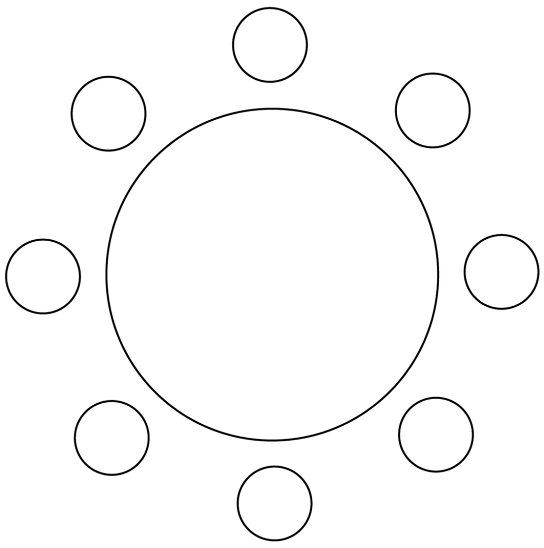
29. 두 남학생 A, B를 포함한 4명의 남학생과 여학생 C를 포함한 4명의 여학생이 있다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

원순열이네

(가) A와 B는 이웃한다. 하나로 묶어서?

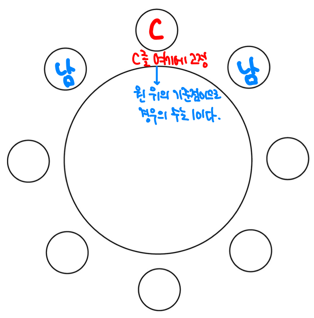
(나) C는 여학생과 이웃하지 않는다. 미리 배치 or 나중에 배치

남: A, B, 남$_1$, 남$_2$
하나로 묶어서 보자
여: C, 여$_1$, 여$_2$, 여$_3$



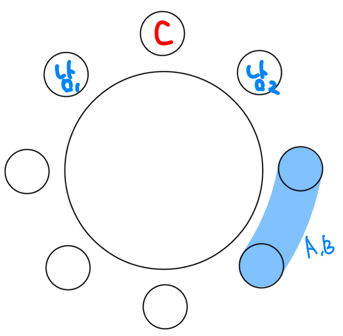
A와 B가 이웃해야 하므로 묶어서 처리한다고 생각하자.

C가 여학생과 이웃하면 안되므로 C 옆에 남학생을 미리 배치해보자.



C를 한 자리에 고정하고 양 옆에 배치할 남학생을 고르자.

$3 \times 2 = 6$가지



그렇다면 문제 조건은 모두 만족시켰으니 나머지 4명은 순열 처리하자.

$4! = 24$가지

그런데 A, B의 순서 변화도 신경써줘야 한다. ($\times 2$)

$24 \times 2 = 48$가지

$\boxed{6 \times 48 = 288\text{가지}}$

30. 다음 조건을 만족시키는 14 이하의 네 자연수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 34$

(나) x_1과 x_3은 홀수이고 x_2와 x_4는 짝수이다.

홀수는 2×(0을 포함한 자연수)+1로 표현가능　　짝수는 2×(0을 포함한 자연수)+2로 표현가능

이래야 중복조합 쓰기 편함

X_1과 X_3가 홀수이므로 각각 $2X_1+1$, $2X_3+1$이라고 하고
X_2와 X_4는 홀수이므로 각각 $2X_2+2$, $2X_4+2$라고 하자.
→ $X_1 \sim X_4$가 14이하이므로 $X_1 \sim X_4$는 6이하이다.

$$(2X_1+1)+(2X_2+2)+(2X_3+1)+(2X_4+2)=34$$

$$2X_1+2X_2+2X_3+2X_4=28$$

$$\underline{X_1+X_2+X_3+X_4}=14$$

모두 ≥0이므로 중복조합!

$${}_4H_{14} = {}_{17}C_3 = \frac{17 \cdot \cancel{16}^{8} \cdot \cancel{15}^{5}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 680$$

그러나 여기서 끝나면 30번이 아니겠죠.

우리가 센 경우의 수 중 빼줘야 하는 경우가 있다.

i) $X_1 \sim X_4$ 중 7 이상인 것이 2개

${}_4C_2 \times 1 = 6$

ii) $X_1 \sim X_4$ 중 7 이상인 것이 1개 (여기에 i의 경우도 포함)

${}_4C_1 \times {}_4H_7 = 4 \times {}_{10}C_3 = 480$

$\boxed{680 - 480 + 6 = 206\text{개}}$

※ 확인 사항

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.