제 2 교시

수학 영역

심상범 in Orbi

홀수형

5지선다형

1. $\dfrac{3^{\sqrt{5}+1}}{3^{\sqrt{5}-1}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

$3^{\sqrt{5}+1} \div 3^{\sqrt{5}-1} = 3^{\sqrt{5}+1-(\sqrt{5}-1)} = 3^2 = \boxed{9}$

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3+a)dx=4$ 일 때, 상수 a의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\int_{-1}^{1} x^3+a\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4+ax\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{4}+a\right)-\left(\frac{1}{4}-a\right) = 2a = 4$

$\boxed{a=2}$

3. 함수 $y=2^x$의 그래프를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프가 점 $(-1,\ 2)$를 지날 때, 상수 m의 값은? [3점] y 대신 y-m 주입

대입

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$y=2^x$를 y축 방향으로 m만큼 평행이동시키면 $y=2^x+m$이다.

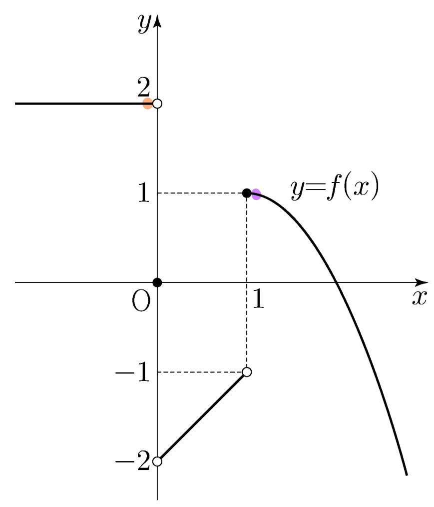
이 그래프가 $(-1,2)$를 지나므로 대입해보자.

$2=2^{-1}+m$

$m=2-2^{-1}$

$=2-\frac{1}{2}=\boxed{\frac{3}{2}}$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)-\lim\limits_{x\to 1+}f(x)$ 의 값은? [3점]

2 1

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 θ에 대하여 $\sin\theta \cos\theta = -\frac{12}{25}$일 때,
θ는 제2사분면 위에 있다. θ가 제2사분면에 있으므로 양수 음수
$\sin\theta - \cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{4}{5}$ ② 1 ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

θ가 제2사분면에 있는 각이므로 $\sin\theta > 0$, $\cos\theta < 0$ 이다.

$\sin\theta\cos\theta = -\frac{12}{25}$ 이고 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 이므로
문제에서 준 조건 알아야하는 상식

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 + 2\sin\theta\cos\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 - \frac{24}{25} = 1$$

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25}$$

$$\sin\theta - \cos\theta = \pm\frac{7}{5}$$

$\sin\theta > 0$, $\cos\theta < 0$ 이므로

$$\boxed{\sin\theta - \cos\theta = +\frac{7}{5}}$$

6. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x) = 3x^2 - kx + 1, \quad f(0) = f(2) = 1$$

적분하여 f(x) 구하기 가능 적분상수 맞추기용

을 만족시킬 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$$\int f'(x)dx = \int 3x^2 - kx + 1\, dx = x^3 - \frac{1}{2}kx^2 + x + C = f(x)$$

$f(0) = f(2) = 1$ 이므로

$f(0) = C = 1$

$f(2) = 8 - 2k + 2 + C = 1$

$11 - 2k = 1$

$\boxed{k = 5}$

7. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x - 4 & (x < a) \\ x + 3 & (x \geq a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때,
상수 a의 값은? [3점]
불연속의 후보들을 생각해보자. $x = a$

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

주어진 f(x)는 각각의 구간에서는 일차함수이기에 절댓값 처리해도 연속이다.

그러나 함수가 바뀌는 경계에서는 알 수 없으므로 $x = a$ 에서 연속을 따지자.

① 좌극한 = 우극한

i) $a > 4$

$$\lim_{x \to a^-} |f(x)| = \lim_{x \to a^-} x - 4 = a - 4$$

$$\lim_{x \to a^+} |f(x)| = \lim_{x \to a^+} x + 3 = a + 3$$

$a = ?$ 단순히 처리하니 답을 구할 수 없다.

|f(x)|이므로 어느 하나가 음수가 되어
(−)를 붙여줘야 할 것 같다.

ii) $-3 < a < 4$

$$\lim_{x \to a^-} |f(x)| = \lim_{x \to a^-} -(x-4) = \lim_{x \to a^-} -x + 4 = -a + 4$$

$$\lim_{x \to a^+} |f(x)| = \lim_{x \to a^+} x + 3 = a + 3$$

$a = \frac{1}{2}$

주어진 전제를 만족시키므로

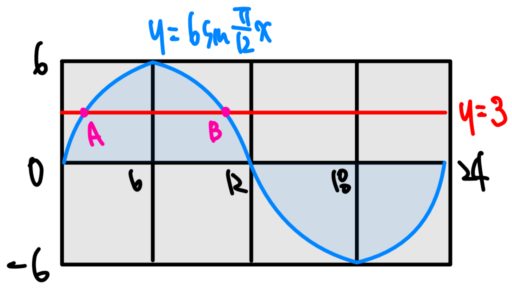
$\boxed{a = \frac{1}{2}}$

8. 함수 $y=6\sin\frac{\pi}{12}x\ (0 \le x \le 12)$의 그래프와 직선 $y=3$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

최대: 6
최소: -6
• 주기: 24

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

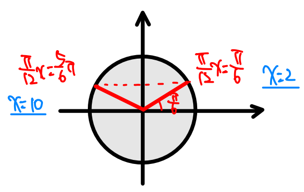
단순히 머리로 계산하기는 어려우므로 그래프를 대략 그려보자.



$\overline{AB}$를 구하기 위해서는 $6\sin\frac{\pi}{12}x=3$의 두 근을 구할 필요가 있어보인다.

$6\sin\frac{\pi}{12}x=3$

$\sin\frac{\pi}{12}x=\frac{1}{2}$



$x=2, 10$이므로 A와 B의 x좌표는 각각 $2, 10$이다.

그러므로 $\overline{AB}=10-2=\boxed{8\text{이다.}}$

9. 원점을 지나고 곡선 $y=-x^3-x^2+x$에 접하는 모든 직선의 기울기의 합은? [4점]

(0,0)을 지나므로 기울기만 생각하면 된다.

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

곡선 $y=-x^3-x^2+x$ 위의 한 점을 $(a, -a^3-a^2+a)$라고 하자.

이 점을 접점으로 하고 원점을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{-a^3-a^2+a}{a-0}=-a^2-a+1$이다.

접점이 $(a, -a^3-a^2+a)$이므로 미분계수는 $f'(a)=-3a^2-2a+1$이다.

$f(x)=-x^3-x^2+x$라고 하자.

이 두 기울기는 하나의 직선을 나타내는 것이므로 같아야한다.

$$-a^2-a+1=-3a^2-2a+1$$
$$2a^2+a=0$$
$$a(2a+1)=0$$

$a=0$ or $-\frac{1}{2}$

접점이 (0,0)? 너다!

접점의 x좌표가 $-\frac{1}{2}$이므로 기울기는

$f'(-\frac{1}{2})=-3\cdot\frac{1}{4}+1+1=\frac{5}{4}$이다.

접점의 x좌표가 0이므로 $f'(0)=1$이다.

$$\boxed{1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}}$$

10. $\frac{1}{2}<\log a<\frac{11}{2}$인 양수 a에 대하여 $\frac{1}{3}+\log\sqrt{a}$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? [4점]

처리하여 a의 범위를 구하자.

① 10^{10} ② 10^{11} ③ 10^{12} ④ 10^{13} ⑤ 10^{14}

앞에서 준 조건으로 a의 범위를 구해보자.

$$\frac{1}{2}<\log a<\frac{11}{2}$$
$$10^{\frac{1}{2}}<a<10^{\frac{11}{2}}$$

a의 범위를 구했으니 $\frac{1}{3}+\log\sqrt{a}$의 범위도 구해보자.

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\log a$

$$\frac{1}{4}<\underbrace{\frac{1}{2}\log a}_{=\log\sqrt{a}}<\frac{11}{4}$$

$$\frac{7}{12}<\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\log a<\frac{37}{12}$$

1보다 작다. 3보다 크다.

이 사이에 자연수는 1, 2, 3이다.

그때 각각의 a값은 $10^{\frac{4}{3}}, 10^{\frac{10}{3}}, 10^{\frac{16}{3}}$이다.

$$\boxed{10^{\frac{4}{3}}\times10^{\frac{10}{3}}\times10^{\frac{16}{3}}=10^{10}}$$

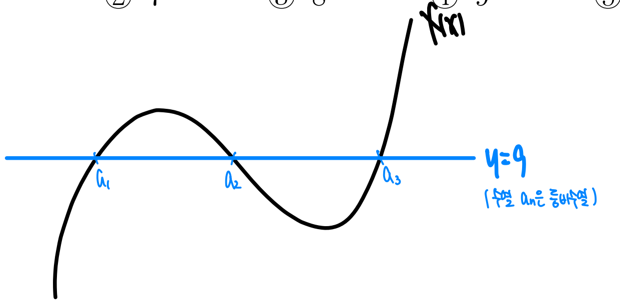
11. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

은 힌트가 될 수도

방정식 $f(x)=9$는 서로 다른 세 실근을 갖고, 모두 교점. 이 세 실근은 크기 순서대로 등비수열을 이룬다.

$f(0)=1$, $f'(2)=-2$일 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10



$y=f(x)$와 $y=9$의 교점을 순서대로 a_1, a_2, a_3라고 하자. 등비수열이므로 $a_2^2=a_1\cdot a_3$이다.

식으로 이를 정리하면

$f(x)-9=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$이다.

문제에서 $f(0)=1$이라고 하였으므로 대입해보자.

$f(0)-9=(0-a_1)(0-a_2)(0-a_3)=-a_1\cdot a_2\cdot a_3=-a_2^3=1-9$

$a_1\cdot a_3=a_2^2$　$=-8$

그렇다면 $a_2=2$이다.

문제에서 $f'(2)=-2$라고 하였으므로 대입해보자.

$f'(x)=(x-2)(x-a_3)+(x-a_1)(x-2)+(x-a_1)(x-a_3)$

$f'(2)=(2-a_1)(2-a_3)$

$=4-2(a_1+a_3)+\underbrace{a_1\cdot a_3}_{4}$

$=8-2(a_1+a_3)=-2$

$a_1+a_3=5$, $a_1\cdot a_3=4$) 합은 5, 곱은 4인 두 숫자는?　$1, 4$ ($1=a_1$, $4=a_3$) ($a_1<a_3$이므로)

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-4)+9$

$\boxed{f(3)=2\cdot1\cdot-1+9=7}$

12. $0<a<b$인 모든 실수 a, b에 대하여

대표가 중요한가보다

$$\int_a^b (x^3-3x+k)\,dx>0$$

이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

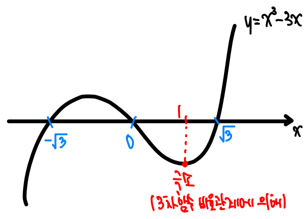
① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$\int_a^b (x^3-3x+k)\,dx$의 값이 무조건 양수이려면 적분하는 식의 그래프가 $x\geq0$에서 x축 위에 있어야 한다.

x^3-3x+k는 x^3-3x를 y축 방향으로 k만큼 이동시킨 그래프이므로 x^3-3x의 그래프로 개형을 파악하자.

$f(x)=x^3-3x=x(x^2-3)$

$x=0, \pm\sqrt{3}$에서 x축과 만난다.



x^3-3x+k는 이 그래프를 위로 k만큼 올린 것인데 $x\geq0$의 그래프가 모두 x축에 접하거나 위에 있기 위해서는 극소인 점의 y좌표가 0이 되도록 올려줘야한다.

$(1, f(1))=(1,-2)$

2만큼 올려주면 된다.

$\boxed{k=2}$

13. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k!}=\frac{1}{(n+1)!}$$

Box안의 가이드를 따르자.

이 성립할 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$을 구하는 과정이다.

> $n=1$일 때, $a_1=S_1=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{a_1}=2$이다.
>
> $n=2$일 때, $a_2=S_2-S_1=-\frac{7}{6}$이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{a_k}=\frac{8}{7}$이다.
>
> $n\ge3$인 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$\frac{S_n}{n!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k!}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{S_k}{k!}=-\frac{\boxed{(가)}}{(n+1)!}$$
>
> 즉, $S_n=-\dfrac{\boxed{(가)}}{n+1}$이므로
>
> $$a_n=S_n-S_{n-1}=-\left(\boxed{(나)}\right)$$
>
> 이다. 한편 $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}k(k+1)=-8+\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$이므로
>
> $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{8}{7}-\sum_{k=3}^{n}k(k+1)$$
> $$=\frac{64}{7}-\frac{n(n+1)}{2}-\sum_{k=1}^{n}\boxed{(다)}$$
> $$=-\frac{1}{3}n^3-n^2-\frac{2}{3}n+\frac{64}{7}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(k)$라 할 때, $f(5)\times g(3)\times h(6)$의 값은? [4점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15 V

(가) $\dfrac{S_n}{n!}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k!}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{S_k}{k!}=-\frac{\boxed{(가)}}{(n+1)!}$

$=\dfrac{1}{(n+1)!}-\dfrac{1}{n!}=\dfrac{1-(n+1)}{(n+1)!}=\dfrac{-n}{(n+1)!}$

(가) $=f(n)=n$

(나) $a_n=S_n-S_{n-1}=-\left(\boxed{(나)}\right)$

$S_n=-\dfrac{n}{n+1}$이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}=-\dfrac{n}{n+1}-\left(-\dfrac{n-1}{n}\right)=\dfrac{-n^2+n^2-1}{n(n+1)}=-\dfrac{1}{n(n+1)}$

(나) $=g(n)=\dfrac{1}{n(n+1)}$

(다) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{8}{7}-\sum_{k=3}^{n}k(k+1)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{a_k}=\frac{8}{7}$

$=\dfrac{64}{7}-\underbrace{\dfrac{n(n+1)}{2}}_{=\sum_{k=3}^{n}k}-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\boxed{k^2}$

(다) $=h(k)=k^2$

$\boxed{f(5)\times g(3)\times h(6)=5\times\frac{1}{12}\times36=15}$

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 가속도가

$$a(t)=3t^2-12t+9\ (t\ge0)$$

이고, 시각 $t=0$에서의 속도가 k일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 구간 $(3,\infty)$에서 점 P의 속도는 증가한다.

ㄴ. $k=-4$이면 구간 $(0,\infty)$에서 점 P의 운동 방향이 두 번 바뀐다.

ㄷ. 시각 $t=0$에서 시각 $t=5$까지 점 P의 위치의 변화량과 점 P가 움직인 거리가 같도록 하는 k의 최솟값은 0이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
V ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

시각 $t=0$에서의 속도가 k이므로 가속도 식을 사용하여 속도의 식을 구하자.

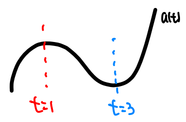
$\int a(t)\,dt=\int 3t^2-12t+9\,dt=t^3-6t^2+9t+C=v(t)$ 속도에 대한 식

$v(0)=C=k$

$v(t)=t^3-6t^2+9t+k$

ㄱ. 속도가 증가하는지 체크하려면 가속도의 부호를 보면 된다.

$a(t)=3t^2-12t+9=(t-3)(3t-3)$ $t=3$에서 극소 $t=1$에서 극대.



$t>3$이면 계속 증가하므로 옳다 (O)

ㄴ. $k=-4$라면 $v(t)=t^3-6t^2+9t-4$이다.

운동방향의 변화는 속도의 부호변화와 같다.

$v(t)=t^3-6t^2+9t-4$

$=(t-1)(t^2-5t+4)$

$=(t-1)^2(t-4)$

$t=1$일때 부호변화 X → $t=1$일때도 잠깐 멈출 뿐 운동방향의 변화는 X

$t=4$일때 부호변화 O → $t=4$일때 운동방향 바뀐다.

1번 바뀌네 (ㄴ은 X)

ㄷ. $t=0$에서 $t=5$까지 위치 변화 = 이동 거리이려면 운동 방향 변화가 없어야 한다.

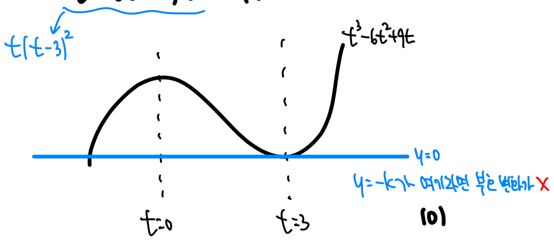
속도 식의 부호 변화가 없어야 한다.

$v(t)=t^3-6t^2+9t+k$

$t^3-6t^2+9t+k=0$

$t^3-6t^2+9t=-k$

$t(t-3)^2$



(O)

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

$a_1+a_2+\cdots+a_{100}$

(가) $a_5 = 5$

정해주었네

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 6 & (a_n \geq 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n < 0) \end{cases}$$

수열의 부호가 중요하구나.

이다.

① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

수열 문제의 기초는 '직접 해서 규칙 파악하기'이다.

수열 a_n의 한 항을 주었고 대략의 규칙도 주었으므로 해보자.

$a_5=5$ $a_{n+1}=\begin{cases} a_n-6 & (a_n\geq 0) \\ -2a_n+3 & (a_n<0) \end{cases}$

$a_5=5 \longrightarrow a_6=-1 \longrightarrow a_7=5 \longrightarrow a_8=-1 \longrightarrow a_9=5 \cdots$

$a_6=a_5-6$ ($a_5\geq 0$ 이므로) $a_7=-2a_6+3$ ($a_6<0$) $a_8=a_7-6$ ($a_7\geq 0$) $a_9=-2a_8+3$ ($a_8<0$)

a_5 이후부터는 5, -1의 반복이다. 그렇다면 $a_5 \sim a_{100}$의 합을 구할 수 있다.

홀수번째 항 : 5

짝수번째 항 : -1

$a_{홀}+a_{짝}=5+(-1)=4$

$a_5 \sim a_{100}$에는 위의 세트가 48개이다.

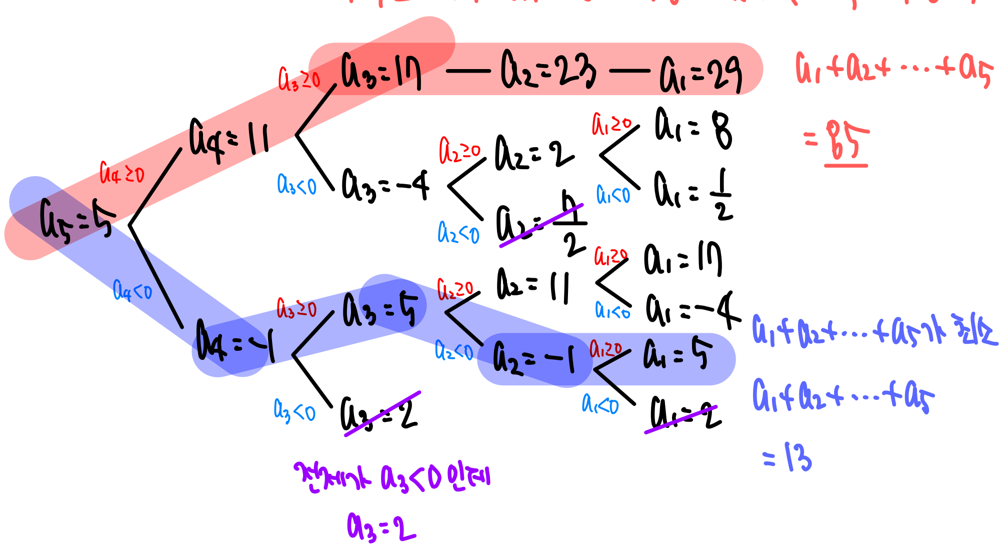
항이 96개

$a_5+a_6+\cdots+a_{100}=4\times 48=192$

$a_5 \sim a_{100}$의 합은 일정하므로 $a_1 \sim a_4$에서 최대와 최소가 구별될 것이다.

주어진 식과 $a_5=5$를 이용해서 $a_4 \sim a_1$을 역추적해보자.

이 루트가 $a_1 \sim a_4$의 합이 가장 컸었다. (계속 6씩 증가)



$\boxed{(192+85)-(192+13)=72}$

단답형

16. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3=7$, $a_2+a_5=16$일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

$a_3=a+2d=7$

$a_2+a_5=(a+d)+(a+4d)=2a+5d=16$

$\begin{cases} a+2d=7 \\ 2a+5d=16 \end{cases} \longrightarrow a=3,\ d=2$

$a_n=2n+1$ $\boxed{a_{10}=21}$

17. 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=2$, $f'(1)=4$를 만족시킬 때, 함수 $g(x)=(x+1)f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하시오. [3점]

$g(x)$에 $f(x)$가 엮여있네.

$g'(1)$

$g'(x)=f(x)+(x+1)f'(x)$

$g'(1)=f(1)+2f'(1)=2+8=\boxed{10}$

18. 두 양수 x, y가

주의

$$\log_2(x+2y)=3,\quad \underbrace{\log_2 x+\log_2 y}_{=\log_2 xy}=1$$

을 만족시킬 때, x^2+4y^2의 값을 구하시오. [3점]

56

$\log_2(x+2y)=3 \longrightarrow x+2y=8$

$\log_2 x+\log_2 y=\log_2 xy=1 \longrightarrow xy=2$

직접 구하기는 어렵고 구해야하는 값이 x^2+4y^2이므로

$x+2y=8$, $xy=2$ 연립

$(x+2y)^2-4xy$

$x^2+4y^2=(x+2y)^2-4xy=64-8=\boxed{56}$

19. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^4+kx+10$이 $x=1$에서 극값을 가질 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

7

$f'(x)$는 $x=1$에서 부호가 바뀐다.

$\rightarrow f'(1)=0$

$f'(x)=4x^3+k$

$f'(1)=4+k=0$

$k=-4$

$f(x)=x^4-4x+10$

$\boxed{f(1)=1-4+10=7}$

20. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3+a_5=0,\quad \sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=30$$

수열 a_n은 등차수열이니까 $a_4=0$ 이어야 한다.

일 때, a_9의 값을 구하시오. [4점]

25

• $a_3+a_5=0$

a_3와 a_5은 절댓값은 같지만 부호만 다른 두 수이다.

예를 들어 $a_3=-k$ 라면 $a_5=k$이다.

그런데 수열 a_n은 등차수열이므로 $a_4=0$이고 공차가 k이다.

수열의 일반항을 찾기 위해서는 한 항의 값과 공차가 필요하다.

$a_4=0$ 공차$=k$

$\rightarrow a_n=k\cdot n-4k$

• $\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=30$

$|a_k|+a_k$에서 $a_k<0$라면 $|a_k|+a_k=0$이 된다.

$|a_k|+a_k$에서 $a_k>0$라면 $2a_k$이 된다.

$\rightarrow a_4=0$을 중심으로 어디가 음수이고 어디가 양수일까

① a_5부터 양수이다 (= 공차가 양수이다)

$\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=\sum_{k=5}^{6}(|a_k|+a_k)=2a_5+2a_6=2k+4k=30$

$\sum_{k=1}^{4}(|a_k|+a_k)=0$

$\boxed{k=5}$ (정수O)

② a_5부터 음수이다 (= 공차가 음수이다)

$\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=\sum_{k=1}^{3}(|a_k|+a_k)=2a_1+2a_2+2a_3=-6k-4k-2k=30$

$k=-\frac{5}{2}$ (정수X)

$k=5$이므로 수열 $a_n=5n-20$이다.

$\boxed{a_9=5\cdot 9-20=25}$

21. 그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD 의 외심을 각각 O, O′이라 하고 ∠ABC $=\alpha$, ∠ADC $=\beta$라 할 때,

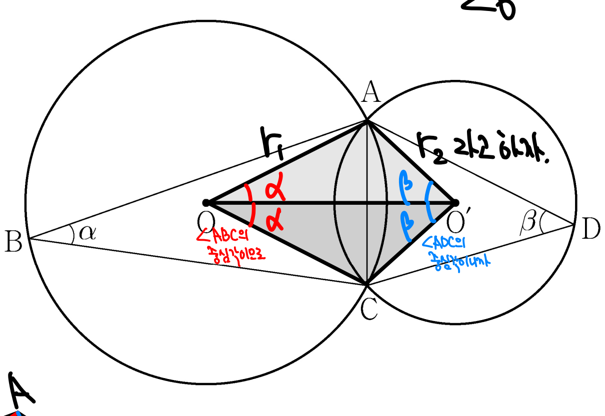
삼각형의 외접원?→sin법칙

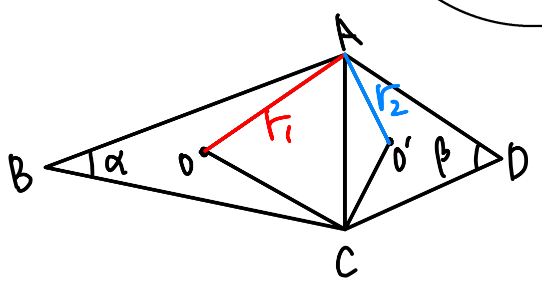
$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{2},\quad \cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3},\quad \overline{OO'}=1$$

이 성립한다. 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

ΔABC에서 (각+각의 대변) 한 쌍만 있으면 된다.

26





위의 상황에서 ΔABC는 반지름이 r_1인 원에 내접하므로 $\frac{\overline{AC}}{\sin\alpha}=2r_1$

사인법칙을 써서

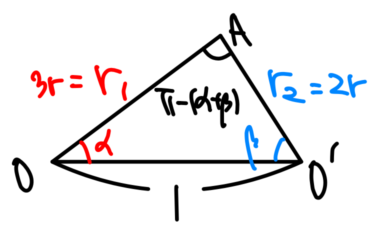
위의 상황에서 ΔACD는 반지름이 r_2인 원에 내접하므로 $\frac{\overline{AC}}{\sin\beta}=2r_2$

$\sin\alpha:\sin\beta=2:3$이므로 $r_1:r_2=3:2$

그러면 $r_1=3r$, $r_2=2r$이라고 하자.

주어진 조건 중 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$와 $\overline{OO'}=1$이라는 조건을 사용해야한다.

ΔAOO′를 만들면 사용 가능!



ΔAOO′에서

$$r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cdot\cos(\pi-(\alpha+\beta))=1^2$$
$$9r^2+4r^2+12r^2\cdot\cos(\alpha+\beta)=1$$
$$13r^2+4r^2=1$$
$$17r^2=1$$
$$r=\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$r_1=3r$이므로 $r_1=\frac{3}{\sqrt{17}}$

원의 넓이 $=\left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right)^2\cdot\pi=\frac{9}{17}\pi$

$\boxed{p+q=17+9=26}$

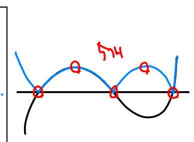
22. 함수

$$f(x)=x^3-3px^2+q \longrightarrow f'(x)=3x^2-6px=3x(x-2p)$$

$x=0,\ 2p$에서 극값을 가진다.

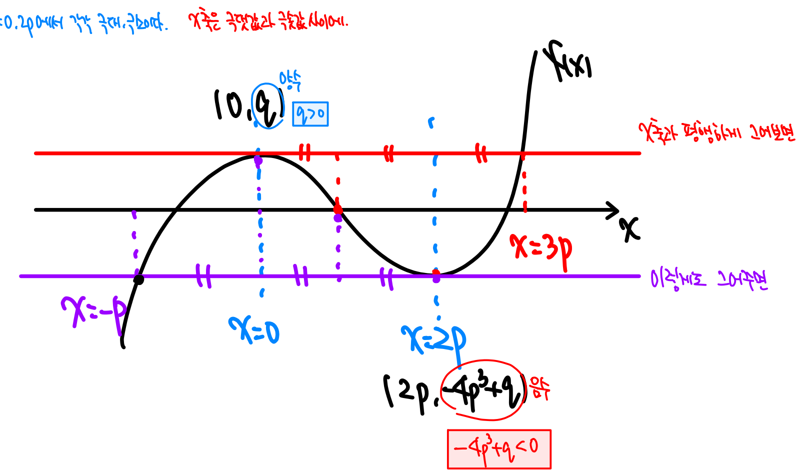
가 다음 조건을 만족시키도록 하는 25 이하의 두 자연수 p, q의 모든 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하시오. [4점] 14

(가) 함수 $\lvert f(x)\rvert$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 5이다. x축이 극댓값과 극솟값 사이에 있어야 한다.
(나) 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $\lvert f(x)\rvert$의 최댓값과 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $\lvert f(x)\rvert$의 최댓값은 같다.

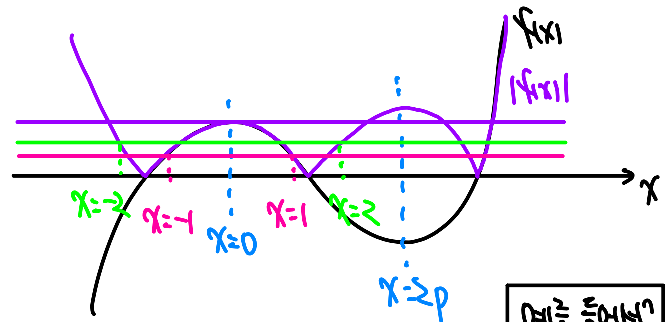


박스 위 문제의 조건과 조건 (가)를 종합하면 $f(x)$를 이렇게 그릴 수 있다.

$f(x)$는 $x=0,2p$에서 각각 극대, 극소이다. x축은 극댓값과 극솟값 사이에.



조건 (나)를 생각해보면 $x=0$을 중심으로 거리가 1이면, 2이면 최댓값은 $f(0)=q$이어야 하므로 $|f(-2)|$가 $f(0)$보다 작거나 같아야한다.



$|f(-2)|=-(-8-12p+q)=\boxed{12p-q+8\le q}$ $=f(0)$

문제에서 구한 $\boxed{3개의\ 식을}$ 모아보면 아래와 같다.

① $q>0$

② $-4p^3+q<0$ $\xrightarrow{p>0이니}$ $q<4p^3$

③ $12p-q+8\le q$ ⟶ $6p+4\le q$

⟶ $6p+4\le q\le 4p^3$

p와 q는 25이하 자연수이므로 p를 대입해서 가능한 q를 구해보자.

i) p=1
$\cancel{10\le q\le 4}$

ii) p=2
$16\le q\le 32$
q는 16∼25 ⇒ 10개

iii) p=3
$22\le q\le 108$
q는 22∼25 ⇒ 4개

$\boxed{10개+4개=14개}$

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(80,\ \frac{1}{8}\right)$을 따를 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [2점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

$E(X) = n \times p = 80 \times \frac{1}{8} = \boxed{10}$

24. $\left(\underbrace{x^5}_{2개} + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{4개}\right)^6$의 전개식에서 x^2의 계수는? [3점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

${}_6C_2 \cdot (x^5)^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^4 = 15 \cdot x^2$

$\boxed{15}$

25. 두 사건 A, B에 대하여 A^C과 B는 서로 배반사건이고,

그렇다면 A안에 B가 있다는 뜻이네

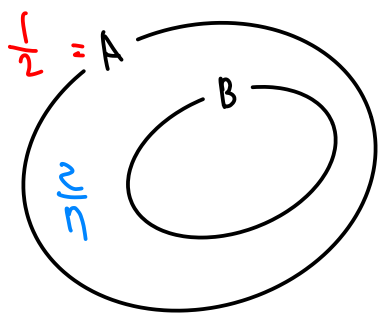
$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{2}{7}$$

B의 밖, A의 안이 $\frac{2}{7}$이다.

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{5}{28}$ ② $\frac{3}{14}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{9}{28}$

문제 조건을 이해하여 벤다이어그램을 그려보자.



A가 $\frac{1}{2}$이고 A에서 B를 제외한 부분이 $\frac{2}{7}$이므로

$$\boxed{P(B)=\frac{1}{2}-\frac{2}{7}=\frac{7-4}{14}=\frac{3}{14}}$$

26. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$을 따르고 $\mathrm{P}(X\le 50)=0.2119$일 때, m의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

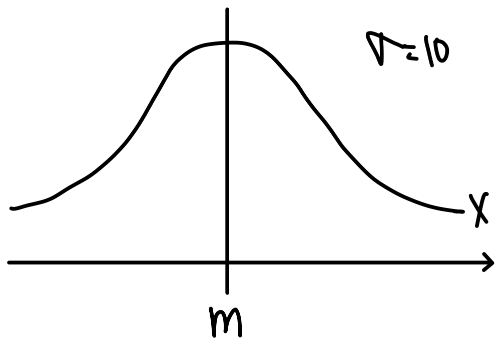
평균이 m, 표준편차가 10

0.2881 더하면 0.5다.

찾자.

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.6	0.2257
0.7	0.2580
0.8	0.2881
0.9	0.3159

① 55 ② 56 ③ 57 ④ 58 ⑤ 59

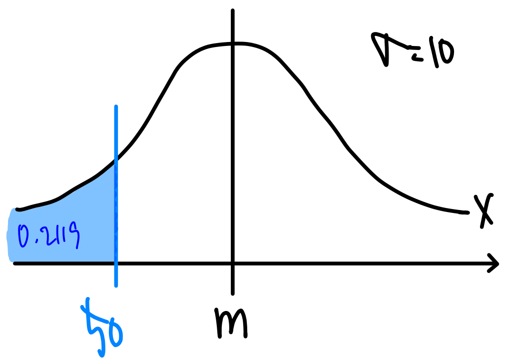


확률변수 X의 정규분포도 열과 같다.

X가 50보다 작을 확률이 0.5보다 적으므로 50은 평균보다 왼쪽에 있다고 할 수 있다.

50보다 작다.

X<50



$P(X\le 50)=0.2119$이므로 $P(50\le X\le m)=0.5-0.2119=0.2881$이어야 한다.

표에 의하면 $z=0.8$

(50이 m에 표준편차의 0.8배 떨어져있다)

50이 m에 $10\times0.8=8$ 만큼 떨어져 있으므로 $\boxed{m=50+8=58}$

27. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f : X \to X$의 개수는? [3점]

정의역=치역

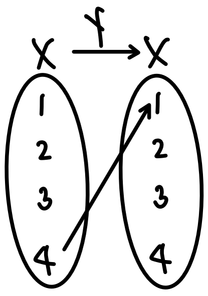
> (가) $f(1)+f(2)+f(3) \geq 3f(4)$ 너를 기준으로 해보자.
> (나) $k=1, 2, 3$일 때 $f(k) \neq f(4)$이다.
> f(4)의 값은 유일하다.

① 41 ② 45 ③ 49 ④ 53 ⑤ 57

조건 (가)를 보고 f(1)+f(2)+f(3)의 값의 적합성을 부여하는 수가 f(4)의 값에 의해 갈리므로 f(4)의 값으로 경우의 수를 나누자.

i) $f(4)=1$

$\boxed{\begin{array}{l} f(1)+f(2)+f(3) \geq 3 \\ f(1),\ f(2),\ f(3)\text{은 1이 될 수 없다.} \end{array}}$

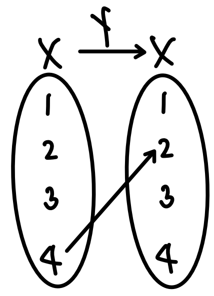


f(1), f(2), f(3)은 2, 3, 4중 아무거나 가능

$\underset{\substack{f(1)\\2\text{or}3\text{or}4}}{\underline{3}} \times \underset{\substack{f(2)\\2\text{or}3\text{or}4}}{\underline{3}} \times \underset{\substack{f(3)\\2\text{or}3\text{or}4}}{\underline{3}} = 27$가지

ii) $f(4)=2$

$\boxed{\begin{array}{l} f(1)+f(2)+f(3) \geq 6 \\ f(1),\ f(2),\ f(3)\text{은 2가 될 수 없다.} \end{array}}$

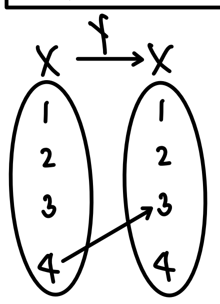


f(1), f(2), f(3)의 숫자 조합이 $\underbrace{(1,1,1)}_{1개}$, $\underbrace{(1,1,3)}_{3개}$일때 빼고 가능.

$\underset{\substack{f(1)\\1\text{or}3\text{or}4}}{\underline{3}} \times \underset{\substack{f(2)\\1\text{or}3\text{or}4}}{\underline{3}} \times \underset{\substack{f(3)\\1\text{or}3\text{or}4}}{\underline{3}} - (1+3) = 23$가지

iii) $f(4)=3$

$\boxed{\begin{array}{l} f(1)+f(2)+f(3) \geq 9 \\ f(1),\ f(2),\ f(3)\text{은 3이 될 수 없다.} \end{array}}$

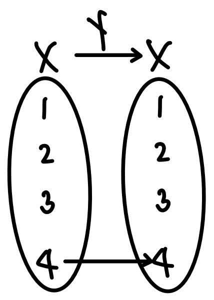


f(1), f(2), f(3)의 숫자 조합이 $\underbrace{(4,4,4)}_{1개}$, $\underbrace{(4,4,2)}_{3개}$, $\underbrace{(4,4,1)}_{3개}$일때 가능

$1+3+3=7$가지

xi) $f(4)=4$

$\boxed{\begin{array}{l} f(1)+f(2)+f(3) \geq 12 \\ f(1),\ f(2),\ f(3)\text{은 4가 될 수 없다.} \end{array}}$



가능한 경우의 수가 없다...

0가지

$\boxed{\begin{array}{l} 27+23+7+0 \\ =57\text{가지} \end{array}}$

28. 1부터 10까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택한다. 선택한 세 개의 수의 곱이 짝수일 때, 조건부확률이다. 그 세 개의 수의 합이 3의 배수일 확률은? [4점] (전체 경우의 수)−(다 홀수)

① $\frac{14}{55}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{19}{55}$ ④ $\frac{43}{110}$ ⑤ $\frac{24}{55}$

전형적인 조건부확률 문제이다. 우선 세 수의 곱이 짝수가 되는 경우의 수를 구하자.

세 수를 곱하여 홀수가 되는 경우의 수가 $\underbrace{\text{한 가지이므로}}_{\text{All 홀수 } {}_5C_3}$ $\underbrace{\text{전체에서}}_{{}_{10}C_3}$ 빼주자.

$${}_{10}C_3 - {}_5C_3 = \frac{10 \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} - \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}$$
$$= 120 - 10 = 110(\text{가지})$$

그 다음에 세 수의 합이 3의 배수인지 구해야하는데 $\underbrace{\text{앞의 조건}}_{\text{세 수의 곱이 짝수}}$을 생각하지 말고 구한 후 $\underbrace{\text{전체}}_{\text{세 수의 곱셈이 짝수}}$에 맞지 않는 것을 빼주자.

나머지 1	나머지 2	나머지 0
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10		

합이 3의 배수인지 판별하기에 3으로 나눴을 때의 나머지로 구분

세 수의 합이 3의 배수라면 3으로 나눴을 때의 나머지들의 합도 0 또는 3의 배수여야 한다.

i) 모두 나머지가 0

$(3, 6, 9) \longrightarrow 1$가지

$3 \times 6 \times 9 = 162 \to$ 짝수O

ii) 모두 나머지가 1

1, 4, 7, 10중 3개 선택$({}_4C_3) \longrightarrow 4$가지

짝수가 2개니 무조건 짝수가 하나는 선택됨

iii) 모두 나머지가 2

$(2, 5, 8) \longrightarrow 1$가지

$2 \times 5 \times 8 = 80 \to$ 짝수O

xi) 각각 1개씩

$\underset{나머지\ 1}{4} \times \underset{나머지\ 2}{3} \times \underset{나머지\ 0}{3} - 2 \times 2 \times 1 = 32$가지

여기서 홀수×홀수×홀수는 빼주자.
$2 \times 2 \times 1$

$$\frac{1+4+1+32}{110} = \frac{38}{110} = \boxed{\frac{19}{55}}$$

단답형

29. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점] 332가지

(가) $a+b+c+d=12$ $_4H_{12} = {}_{15}C_3 = 455$

(나) $a \neq 2$이고 $a+b+c \neq 10$이다. → $(a \neq 2)+(a+b+c \neq 10)$ 경우의 수 경우의 수
→($a \neq 2$와 $a+b+c \neq 10$을 모두 만족하는 경우의 수)

조건 (가)는 중복조합으로 구할 수 있는 상황이고 조건 (나)는 빼줘야하는 조건이므로 각각 구해서 빼주자.
$_4H_{12} = {}_{15}C_3 = 455$

(가) 음이 아닌 네 정수 a, b, c, d

$a+b+c+d=12 \rightarrow {}_4H_{12} = {}_{15}C_3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 455$가지

(나) $a \neq 2$이고 $a+b+c \neq 10$이다. $=$ ($a=2$이고 $a+b+c=10$인 경우의 수를 구해서 빼주자) and

and로 연결되어있으므로 경우의 수를 구하려면 각각 구한 것을 더한 뒤 교집합을 빼줘야 한다. ($a=2$이면서 $a+b+c=10$)

① $a=2$

$a=2$라면 $b+c+d=10$이다.
$_3H_{10} = {}_{12}C_2 = 66$가지

② $a+b+c=10$

$a+b+c=10$이라면 $d=2$로 고정이고 a, b, c만 따져주면 된다.

$a+b+c=10$
$_3H_{10} = {}_{12}C_2 = 66$가지

③ $a=2$이면서 $a+b+c=10$

$a=2$, $d=2$로 고정되고 $b+c=8$만 풀면 된다.
$_2H_8 = {}_9C_1 = 9$가지

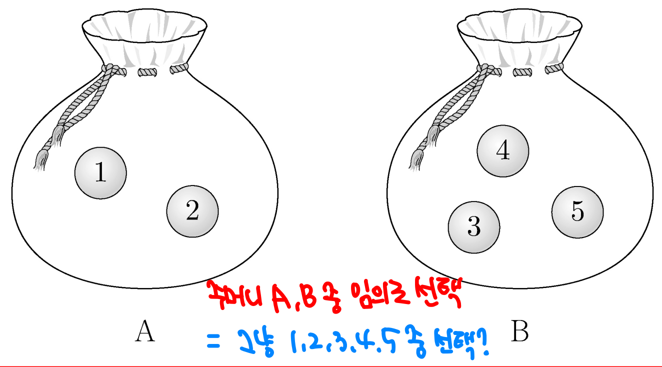
$66+66-9 = 123$

$\boxed{455-123=332\text{가지}}$

30. 주머니 A에는 숫자 1, 2가 하나씩 적혀 있는 2개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있다. 다음의 시행을 3번 반복하여 확인한 세 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자.

> 두 주머니 A, B 중 임의로 선택한 하나의 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 꺼낸 주머니에 다시 넣는다.

$\mathrm{P}(\overline{X}=2) = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. 71
평균이 2이려면 합이 6
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



주머니 A, B 중 임의로 선택
= 그냥 1,2,3,4,5 중 선택?

구해야하는 값의 상황을 정리해보자.

주머니 A, B 중 임의로 선택 후 공을 복원추출한다.
= 1~5 중에서 하나씩 복원추출

우리가 구해야하는 확률로 다르게 해석해보자.

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)$
→ 3번 뽑아서 평균이 2면 총합은 6이어야 한다.
그렇다면 1~5 중 3개 뽑아서 합이 6이 되는 경우를 구하자.

i) 1, 1, 4 (A, B)

$_3C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{32}$
(1,1,4의 순서배치, A를 2번, B를 1번, A에서 1을 두번, B에서 4를 한번)

ii) 1, 2, 3 (A, B)

$3! \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{16}$
(1,2,3의 순서배치, A를 2번, B를 1번, A에서 1 한번 2 한번, B에서 3 한번)

iii) 2, 2, 2 (A)

$1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{64}$
(2,2,2의 순서배치, A를 3번, A에서 2 세번)

$$\boxed{\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64} = \frac{2+4+1}{64} = \frac{7}{64} \quad p+q=64+7=71}$$

> ＊ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.