6. 부정적분과 정적분

#85p Level2 7번 우함수, 기함수의 미분과 적분

#86p Level3 1번 부정적분 눈썰미 $f(x)+xf'(x)$

#86p Level3 2번

#86p Level3 3번 부정적분끼리는 y축 방향 평행이동 관계

#85p Level2 7번 우함수, 기함수의 미분과 적분

$f(0)=1$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는대로 고른 것은?

$\boxed{ㄱ, ㄴ}$

< 보 기 >

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=-g(x)$이다.
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$이면 $g(1)=2$이다.
ㄷ. $g(1)=0$이면 $\int_{0}^{1} g(x)dx=1$이다.

ㄱ $g(-x)=\int_{x}^{-x} f(t)dt$
$=-\int_{-x}^{x} f(t)dt=-g(x)$

ㄴ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$
$2b=0$
$g(1)=\int_{-1}^{1} \cancel{ax^3}+\cancel{cx}+1\,dx$
$=2$

ㄷ $g(1)=0$
$=\int_{-1}^{1} \cancel{ax^3}+bx^2+\cancel{cx}+1\,dx$
$=2\times\left(\frac{b}{3}+1\right)$ $\therefore b=-3$
$g(x)=\int_{-x}^{x} \cancel{ax^3}-3x^2+\cancel{cx}+1\,dx$
$=2\times(-x^3+x)$
$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 -2x^3+2x\,dx$
$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_0^1$
$=\frac{1}{3}$

$*$ 참고 (우함수)$'$=(기함수), (기함수)$'$=(우함수),
$\int$(우함수) = (0, c) 대칭 $\int$(기함수) = (우함수)

#86p Level3 1번 부정적분 눈썹미 $f(x)+xf'(x)$

다항함수 $f(x)$와 삼차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

$\boxed{5}$

(가) $f(1)=3,\ g(0)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+xf'(x)=3x^2-6x+4+g'(x)$이다.
(다) 함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(p, 0)\ (p\neq 0)$에서 x축에 접한다.

$(xf(x))'$

(가), (다) → $g(x)=x(x-p)^2$

$(xf(x))'=3x^2-6x+4+g'(x)$
$xf(x)=x^3-3x^2+4x+g(x)+C$
$x=0$ $0=g(0)+C$, $C=0$
$x=1$ $3=2+g(1)$, $g(1)=1=(1-p)^2$, $\therefore p=2$
$xf(x)=x^3-3x^2+4x+x(x-2)^2$
$x=3$ $3f(3)=12+3=15$ $\therefore f(3)=5$

#86p Level3 2번 $\boxed{18}$

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(a+b)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x \{f(t)+f'(t)\}dt = xf(x)+\frac{3}{4}x^4+ax^3+3x^2$ 이다.

(나) 함수 $|f(x)|$는 서로 다른 두 개의 극솟값 $f(b)$, 16을 갖는다. (단, $b>0$)

(가) $\cancel{f(x)}+f'(x) = \cancel{f(x)}+xf'(x)+3x^3+3ax^2+6x$

$(1-x)f'(x) = 3x^3+3ax^2+6x$

$x=1 \triangleright 0 = 9+3a,\ a=-3.$

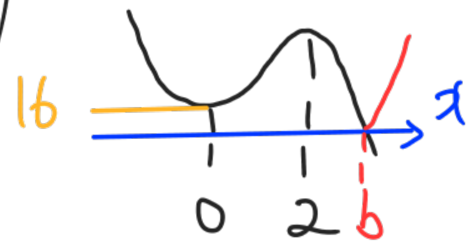
$(1-x)f'(x) = 3x(x-1)(x-2)$

$f'(x) = -3x(x-2) = -3x^2+6x$

$f(x) = -x^3+3x^2+16$

$= -(x-4)(x^2+x+4)$

$\hookrightarrow b=4$

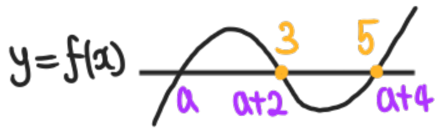


$f(a+b) = f(1) = 18$

#86p Level3 3번 부정적분끼리는 y축 방향 평행이동 관계

삼차함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 함수 $F(x)$의 사차항의 계수는 1이고, 함수 $y=F(x)$의 그래프는 그림과 같이 두 점 $(a, 0)$, $(b, 0)$에서 x축에 접한다. $F(p)=32$일 때, 두 함수

$$S(x)=\int_p^x f(t)dt,\ T(x)=\int_p^x |f(t)|dt$$

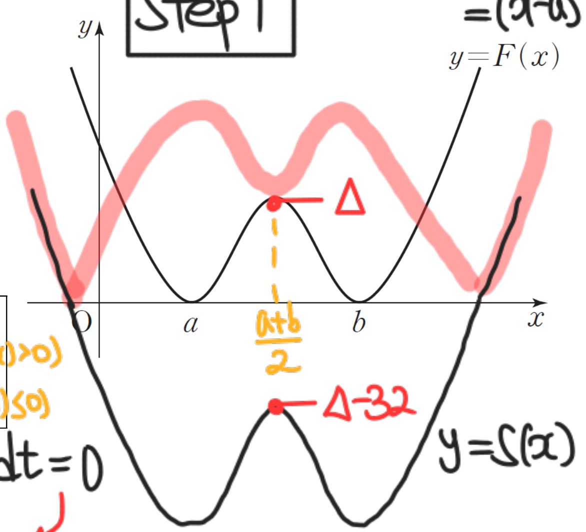


가 다음 조건을 만족시킨다. $f(2)$의 값은? (단, p는 상수이고, $0<a<3<b$이다.)

(가) 두 함수 $y=F(x)$, $y=|S(x)|$의 그래프의 한 교점 $(k, F(k))$에서의 접선의 기울기가 서로 같다.

(나) $S(3)+T(3)=S(5)+T(5)$

Step 1



$=(x-a)^2(x-b)^2$

$F'(x)=S'(x)=f(x)$

$\rightsquigarrow S(x)=F(x)+C$

$x=p.\ \ 0=32+C$

$S(x)=F(x)-32$

$\Delta+(\Delta-32)=0$

$\Delta=16$

$F\left(\frac{a+b}{2}\right)=16=\left(\frac{a-b}{2}\right)^4$

$\therefore b-a=4$

Step2 $\hookrightarrow T(5)-T(3)+S(5)-S(3)=0$

$\int_p^5|f(t)|dt-\int_p^3|f(t)|dt+\int_p^5 f(t)dt-\int_p^3 f(t)dt=0$

$\int_3^5|f(t)|dt+\int_3^5 f(t)dt=0.$

$\triangleright \int_3^5 \underbrace{\left(|f(t)|+f(t)\right)}_{\geq 0}dt=0$

$\begin{cases} 2f(x) & (f(x)>0) \\ 0 & (f(x)\leq 0) \end{cases}$

$|f(t)|+f(t)=0$

$3\leq t\leq 5$에서 $f(t)\leq 0$

$a+2=3,\ a+4=5$

$\therefore a=1,\ b=5$

Step3 $F(x)=(x-1)^2(x-5)^2$

$f(x)=F'(x)=2(x-1)(x-5)(2x-6)$

$f(2)=12$

$\boxed{12}$