

격자점 & 개수세기 12제

[주의사항]

1. 순서쌍 혹은 정수의 개수를 세는 문제는 최대한 포함시켰기 때문에 일부 교육과정에 맞지 않거나 교육과정과 거리가 있는 문제가 섞여 있을 수도 있습니다.
2. 가급적 수1, 수2의 기출을 모두 풀고 나신 후 푸는 것을 추천드립니다.

01

2013년 6월 A형 30번

자연수 k 에 대하여 $\log k$ 의 정수부분과 소수부분을 각각 x 좌표와 y 좌표로 갖는 점을 P_k 라 하자. 다음 조건을 만족시키는 자연수 m, n 의 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수를 구하시오.

(가) $1 \leq m < n < 100$

(나) $\overline{P_m P_n} = \sqrt{1 + (\log 2)^2}$

02

2014학년도 수능 A형
30번

좌표평면에서 $a > 1$ 인 자연수 a 에 대하여 두 곡선 $y = 4^x$, $y = a^{-x+4}$ 과 직선 $y = 1$ 로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수가 20이상 40이하가 되도록 하는 a 의 개수를 구하시오.

03

2014년 6월 A형 30번

양수 x 에 대하여 $\log x$ 의 소수부분을 $f(x)$ 라 하자. 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하시오.

$$(가) \ a \leq b \leq 20$$

$$(나) \ \log b - \log a \leq f(a) - f(b)$$

04

2014년 9월 A형 30번

다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하시오.

(가) $1 \leq a \leq 10, 1 \leq b \leq 100$

(나) 곡선 $y = 2^x$ 이 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$ 과 만나지 않는다.

(다) 곡선 $y = 2^x$ 이 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 4$ 와 적어도 한 점에서 만난다.

05

2015학년도 수능 A형
30번

좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 삼각형 OAB의 개수를 $f(n)$ 이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

(가) 점 A의 좌표는 $(-2, 3^n)$ 이다.

(나) 점 B의 좌표를 (a, b) 라 할 때, a 와 b 는 자연수이고 $b \leq \log_2 a$ 를 만족시킨다.

(다) 삼각형 OAB의 넓이는 50 이하이다.

06

2015년 6월 A형 30번

2 이상의 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수가 300 이상이 되도록 하는 가장 작은 자연수 k 의 값을 $f(n)$ 이라 할 때, $f(2) \times f(3) \times f(4)$ 의 값을 구하시오.

(가) $a < n^k$ 이면 $b \leq \log_n a$ 이다.

(나) $a \geq n^k$ 이면 $b \leq -(a - n^k)^2 + k^2$ 이다.

07

2015년 9월 A형 30번

양수 x 에 대하여 $\log x$ 의 정수부분과 소수부분을 각각 $f(x)$, $g(x)$ 라 하고,
 $h(x) = x + 5f(x)$ 라 하자. 두 조건

$$f(m) \leq f(x), \quad g(h(m)) \leq g(x)$$

를 만족시키는 자연수 m 의 개수를 $p(x)$ 라 할 때,

$\sum_{k=1}^{10} p(2k)$ 의 값을 구하시오.

08

2016년 6월 나형 30번

다음 조건을 만족시키는 20 이하의 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오.

$\log_2(na - a^2)$ 과 $\log_2(nb - b^2)$ 은 같은 자연수이고

$0 < b - a < \frac{n}{2}$ 인 두 실수 a, b 가 존재한다.

09

2016년 9월 나형 30번

좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 영역

$$\left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{x+3}}{2} \right\}$$

에 포함되는 정사각형 중에서 다음 조건을 만족시키는 모든 정사각형의 개수를 $f(n)$ 이라 하자.

- (가) 각 꼭짓점의 x 좌표, y 좌표가 모두 정수이다.
- (나) 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ 이하이다.

예를 들어 $f(14) = 15$ 이다. $f(n) \leq 400$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값을 구하시오.

10

2017학년도 수능 나형
21번

좌표평면에서 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x + 10 & (x < 10) \\ (x - 10)^2 & (x \geq 10) \end{cases}$$

과 자연수 n 에 대해서 점 $(n, f(n))$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_n 이 있다. x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점 중에서 원 O_n 의 내부에 있고 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 아랫부분에 있는 모든 점의 개수를 A_n , 원 O_n 의 내부에 있고 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 윗부분에 있는 모든 점의 개수를 B_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{20} (A_n - B_n)$ 의 값은?

- ① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

11

2017년 6월 나형 21번

함수

$$f(x) = \frac{k}{x-11} + 6 \quad (k \geq 36)$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k 의 개수는?

$|f(x)| \leq y \leq -x + 5$ 인 두 자연수 x, y 의 모든 순서쌍 (x, y) 의 개수는 2 이상 4 이하이다.

- ① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

12

2022학년도 예시문항 공통
22번

함수

$$f(x) = x^3 - 3px^2 + q$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 25 이하의 두 자연수 p, q 의 모든 순서쌍 (p, q) 의 개수를 구하시오.

- (가) 함수 $|f(x)|$ 가 $x = a$ 에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 a 의 개수는 5이다.
- (나) 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값과 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값은 같다.

정답

1. 12
2. 15
3. 71
4. 196
5. 120
6. 120
7. 65
8. 78
9. 65
10. 4
11. 1
12. 14