

제보 기다리겠습니다

제 2 교시

수학 영역

1. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = \begin{cases} n & (n \text{은 홀수}) \\ \frac{a_n}{2} & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{30} a_n$ 의 값을 구하시오.

2. 다음 조건을 만족시키는 40 이하의 자연수 k 의 개수는?

구간 $(0, \frac{k\pi}{4}]$ 에서 $y = \sin kx$ 와 $y = \cos kx$ 의 교점의 x 좌표의 값의 합은 $n\pi$ 이다. (단, n 은 자연수)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $a_1 = 1$
(나) 모든 자연수 n 에 대하여
 $(a_{n+1} - a_n - 1)(a_{n+1} - 2a_n) = 0$ 이다.

자연수 k 에 대하여 $a_m = k$ 를 만족시키는 자연수 m 의 최솟값을

b_k 라 할 때, $\sum_{k=1}^{16} b_k$ 의 값을 구하시오.

4. 0부터 10까지의 수가 적힌 카드가 한 개씩 들어있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 카드 한 장을 꺼내서 수를 확인한 후 다시 넣고 카드에 적힌 수만큼 주머니에서 카드를 뽑고 다시 넣지 않는다. 주머니 속 남은 카드에 적힌 모든 수의 합을 확률변수 X 라고 할 때, $E(X)$ 의 값을 구하시오.

5. 집합 $X = \{1, 2, 3, 5, 8, 13\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하시오.

$\alpha, \beta, \alpha + \beta$ 가 모두 X 의 원소이면 $f(\alpha) + f(\beta)$ 도 X 의 원소이다.

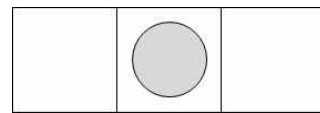
6. 그림과 같이 3개의 칸이 있는 게임판의 가운데에 말이 있다. 동전을 던져서 다음 규칙과 같이 말을 이동시킨다.

앞면이 나오고 말의 오른쪽에 칸이 있을 경우, 말을 오른쪽으로 한 칸 이동시킨다.

뒷면이 나오고 말의 왼쪽에 칸이 있을 경우, 왼쪽으로 한 칸 이동시킨다.

나머지 경우에는 말을 이동시키지 않는다.

동전을 던지는 시행을 10번 할 때, 말이 가운데 칸에 있을 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

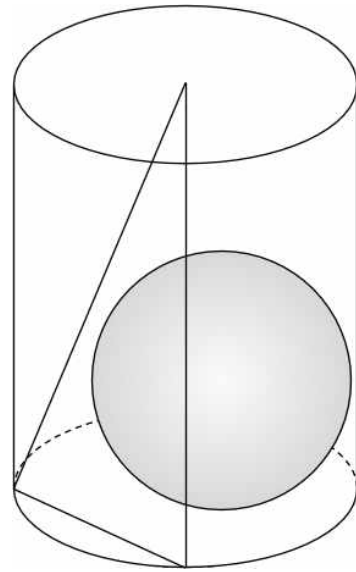


7. 두 상수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = ax + b$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $|27f(0)|$ 의 값을 구하시오. (단, $a \neq 0$)

(가) $y = f(x)$ 와 $y = \frac{f(x)}{x^2}$ 는 두 점에서 만난다.

(나) $y = \sqrt{f(x)}$ 와 $y = \frac{f(x)}{x^2}$ 는 두 점에서 만난다.

8. 다음 그림과 같이 밑면인 원의 반지름의 길이가 4이고 높이가 $2\sqrt{6}$ 인 원기둥이 있다. 윗면의 중심 O와 밑면의 두 점 A, B를 연결한 삼각형 OAB의 밑면 위로의 정사영은 직각삼각형이다. 원기둥의 밑면, 옆면과 삼각형 OAB에 모두 접하는 구의 밑면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 $(p + q\sqrt{2} - r\sqrt{3} - s\sqrt{6})\pi$ 이다. $p + q + r + s$ 의 값을 구하시오. (단, p, q, r, s 는 자연수)



9. 좌표평면 위의 서로 다른 다섯 개의 점 A, B, C, D, E가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

- (가) A, B, C, D, E는 모두 반지름의 길이가 12인 한 원 위에 있다.

(나) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC}$ 의 최댓값을 구하시오.

10. 함수 $f(x) = \sqrt{\frac{x}{12-x}}$ 에 대하여 $\int_3^6 f(x)f'(12-x)dx$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{3}\ln 2$

② $\frac{1}{2}\ln 2$

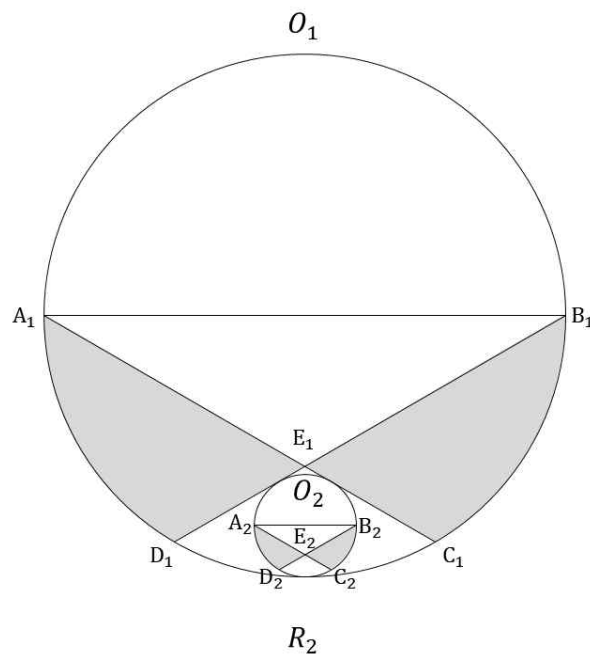
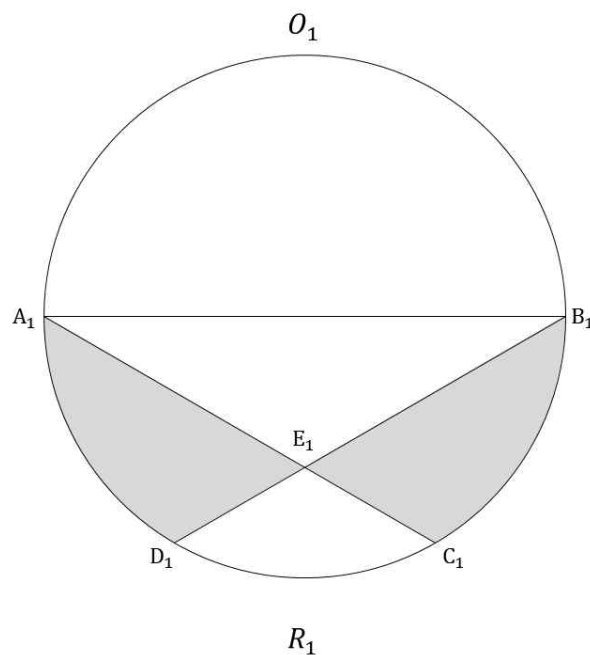
③ $\frac{2}{3}\ln 2$
- ④ $\frac{1}{3}\ln 3$

⑤ $\frac{1}{2}\ln 3$

11. 함수 $f(x) = 2xe^x$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = kx$ ($k > 0$)로 둘러싸인 부분의 넓이가 자연수 n 이 되도록 하는 k 의 값들 중 가장 작은 수를 a_n 이라 할 때, $\int_{\ln a_1 - \ln 2}^{\ln a_2 - \ln 2} xf(x)dx$ 의 값을 구하시오.

12. 길이가 2인 선분 A_1B_1 를 지름으로 하는 원 O_1 이 있다.

그림과 같이 $\angle C_1A_1B_1 = \frac{\pi}{6}$, $\angle D_1B_1A_1 = \frac{\pi}{6}$ 가 되도록 호 AB 위의 두 점 C_1, D_1 을 잡는다. 두 선분 A_1C_1, B_1D_1 의 교점을 E_1 이라 하고 두 선분 A_1C_1, B_1D_1 와 두 호 A_1D_1, B_1C_1 로 둘러싸인 부분인  모양의 도형을 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 모든 도형의 넓이의 합을 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은?



- | | |
|--|---|
| ① $\frac{(10\sqrt{3}+16)(\pi-\sqrt{3})}{198}$ | ② $\frac{(10\sqrt{3}+17)(\pi-\sqrt{3})}{99}$ |
| ③ $\frac{(10\sqrt{3}+17)(2\pi-\sqrt{3})}{198}$ | ④ $\frac{(10\sqrt{3}+16)(2\pi-\sqrt{3})}{99}$ |
| ⑤ $\frac{(10\sqrt{3}+16)(2\pi-\sqrt{3})}{198}$ | |