20. 함수 $f(x)=e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)\,dt$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(\sqrt{\pi})>0$

ㄴ. $f'(a)>0$ 을 만족시키는 a 가 열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$ 에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $f'(b)=0$ 을 만족시키는 b 가 열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$ 에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f(x) = e^{-x} \int_0^x \sin(t^2)\,dt$

$f'(x) = -e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)\,dt + e^{-x}\cdot\sin(x^2)$

$\quad = e^{-x}\left\{\sin(x^2) - \int_0^x \sin(t^2)\,dt\right\}$

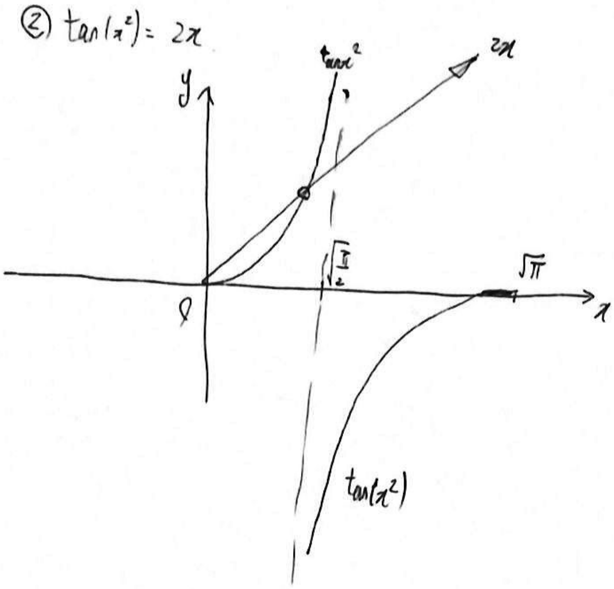
let. $F(x) = \sin(x^2) - \int_0^x \sin(t^2)\,dt$

$F'(x) = 2x\cos(x^2) - \sin(x^2)$

$\quad = \cos(x^2)\left(2x - \tan(x^2)\right)$

① $\cos(x^2) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ $\quad (0, \sqrt{\pi})$

② $\tan(x^2) = 2x$



특점 교점을 α로 두면,

$F'(x)$는 $0 \sim \alpha$: 양의 값

$\alpha \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}$: 음의 값

$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sim \sqrt{\pi}$: 양의 값

즉 $F(x)$는 $(0, \alpha)$에서 증가

$(\alpha, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$에서 감소

$(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\pi})$에서 증가.

ㄴ $f'(a) > 0$가 참 → $F(a) > 0$인 실수 a.

a가 $(0, \sqrt{\pi})$에 존재함은 자명함.

ㄷ 현장식 풀이 시의

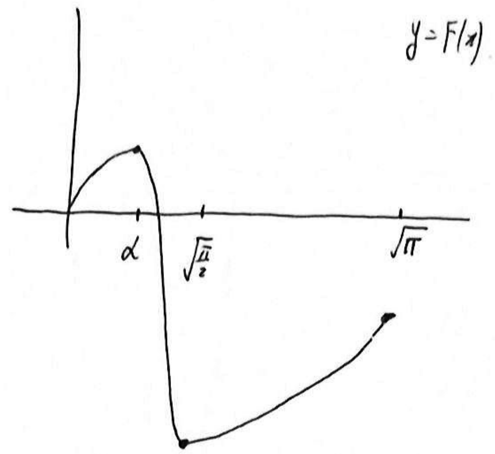
$F(x)$의 개형 추론은

이전 단계까지 풀어진 상태라면 간단하다

$F(0) = 0$

$F(\sqrt{\pi}) < 0$.

즉



$f'(b) = 0$인 실수 b는

$F(b) = 0$을 만족.

그 b는 존재한다,

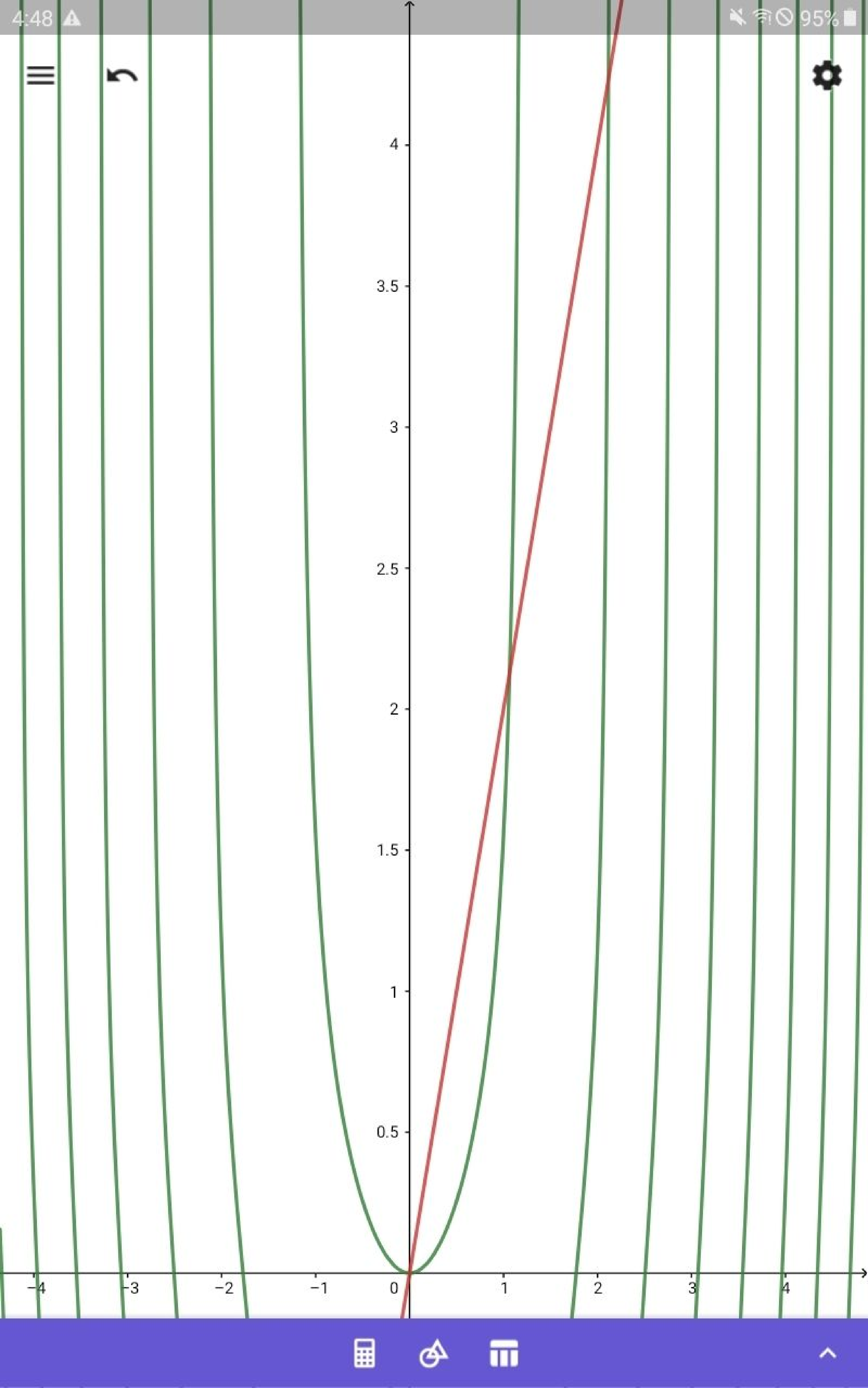
$(0, \sqrt{\pi})$에서는 오직 1개.

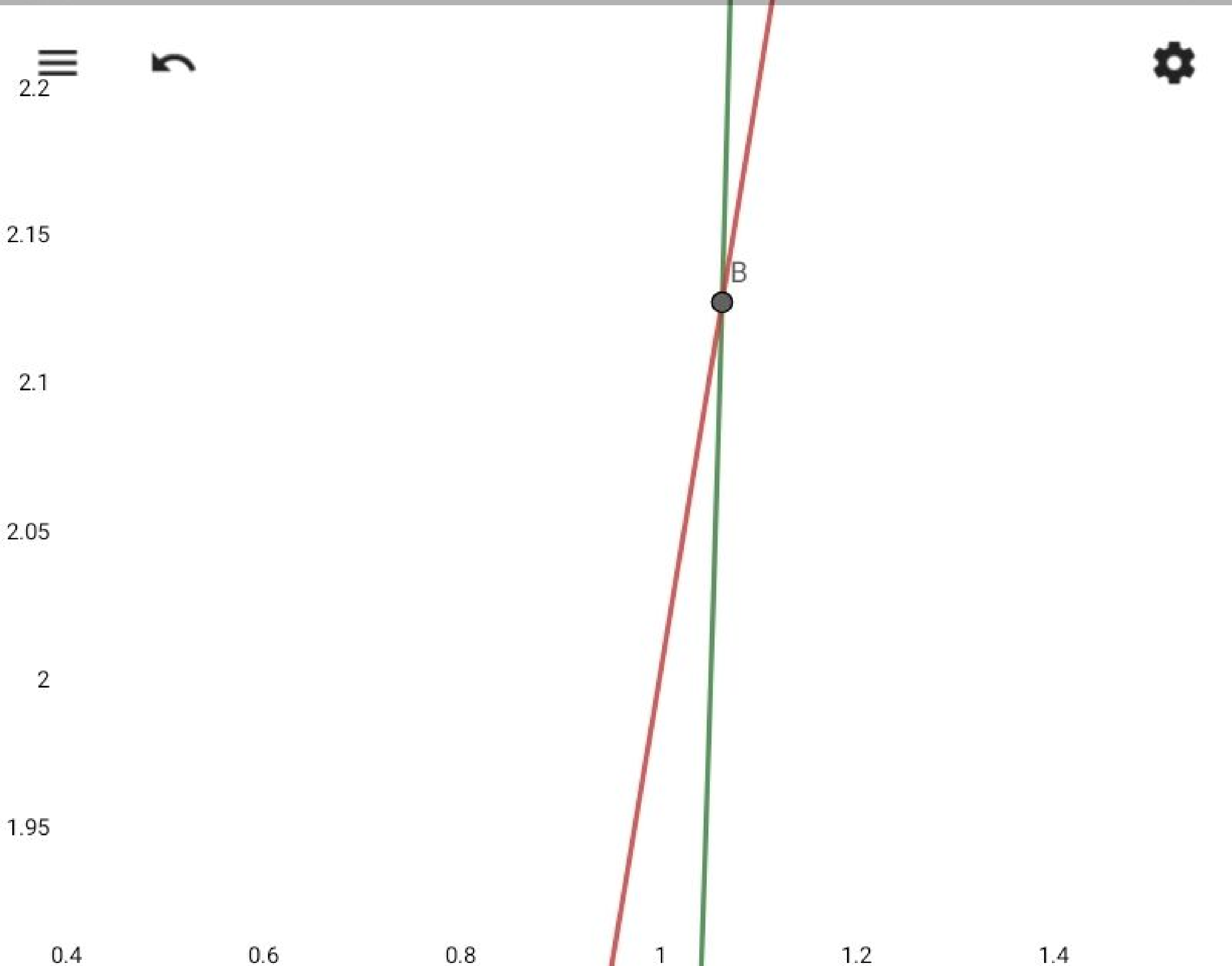
QED ∎

ㄱ $e^{-\sqrt{\pi}} > 0$

$\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)\,dt > 0$

ㄱ은 너무 쉬운 거라...


4:48
95%
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4



$f(x) = \tan(x^2)$

$g(x) = 2x$

B = 교점(f, g, (1.0636607907491, 2.1273215815106))

$\longrightarrow$ (1.0636607907491, 2.1273215815106)

입력...

30. $x>a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.
(단, a는 상수이다.)

> (가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여
> $(x-a)f(x)=g(x)$이다.
> (나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는
> $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다.
> (단, $M>0$)
> (다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는
> 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다
> 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점]

Phase 1. A. $x>a$ 에서 $f(x)$는 3차함수로 정의 vs B. A는 틀렸다. $f(x)$는 $\frac{g(x)}{(x-a)}$의 분수함수다.

if A, $g(x) = (x-a)f(x)$.

($f(x)$ 최고차항 계수 -1)

(나)에서 $f(\alpha)=f(\beta)=M$, $x=\alpha$, $x=\beta$ 에서 극대.

3차함수에 극대가 2번 나타날 수 없으니 모순.

$\sim A \to B$.

Phase 2. 수식 정리. $f(x)=\frac{g(x)}{x-a}$ $(x>a)$.

$g(x)=(x-a)f(x) \to$ 미분

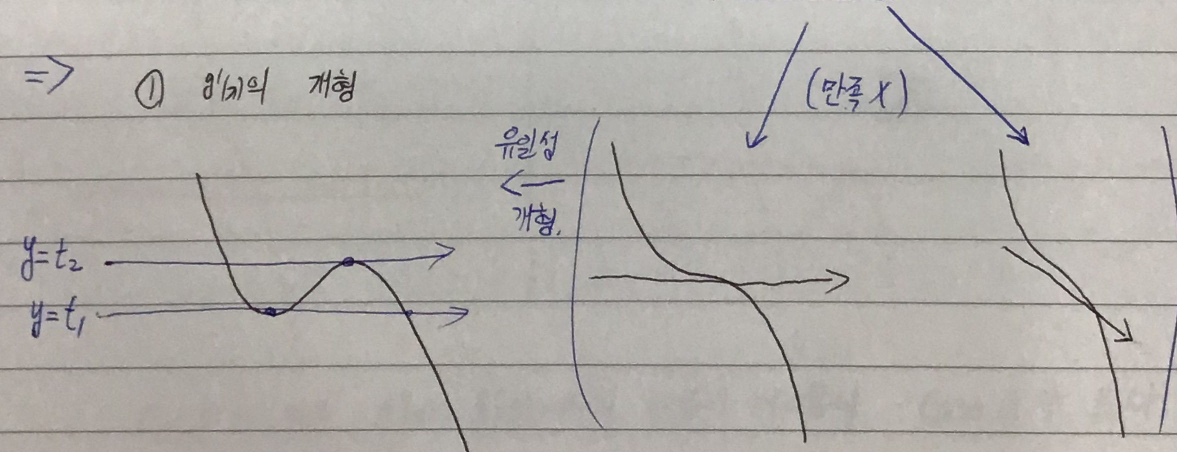
$g'(x)=f(x)+(x-a)f'(x)$

Sub. $x=\alpha \to M+(\alpha-a)f'(\alpha)=g'(\alpha)$

Sub. $x=\beta \to M+(\beta-a)f'(\beta)=g'(\beta)$

($y=f(x)$와 $y=g(x)$가 미분가능함이 주어짐) + ($f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ (극대이므로) $\downarrow\downarrow$ $g'(\alpha)=g'(\beta)=M$) + ($g'(x)$는 최고차 계수 -4인 3차함수)

=> ① $g'(x)$의 개형



$g'(x)$에서 $y=t_1$, $y=t_2$는 중근을 가지는 상수함수다. $g'(x)=M$의 근은 α, β. 최소 2개 이상.

즉 $t_1<M<t_2$이다. 그런데 $M>0$이므로 $g'(x)=0$의 근이라면 그 극값의 개수로

3개 또는 1개만이 가능하다

(Case D) (Case E)

하지만 Case D를 살피면 (다)에 의해

f는 극값 4개 이상이어야 하는데,

$$f'(x) = \frac{(x-a)g'(x)-g(x)}{(x-a)^2}$$ (분자식이 4차라 가능할지도 모른다.)

그럼, $f'(x)$의 분자에서 $(x-a)g'(x)-g(x) = r(x)$를 관찰하자.

$$r'(x) = (x-a)g''(x).$$

$g''(x)$가 2개의 근을 $x>a$에서 가져도,

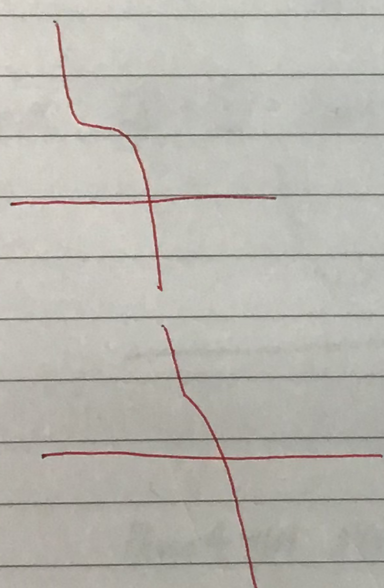
$(x-a)$의 존재로 인해 근이 4개일 위험은 사라진다.

즉 Case E가 옳다. $g(x)$의 극값은 1개다.

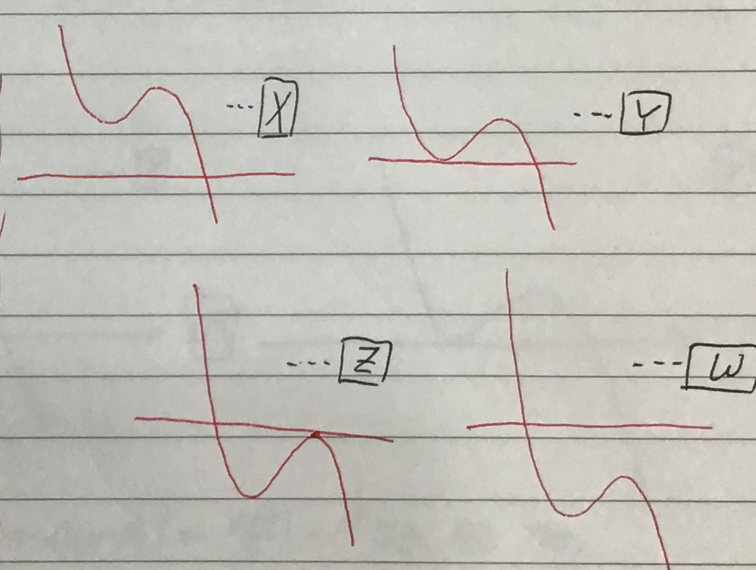
Phase 3. Case E는 $g''(x)=0$의 근이 0개, 1개인 Case F와,

서로 다른 근 2개로 이루어지는 Case G로 나눌 수 있다.

ex. Case F.



ex. Case G



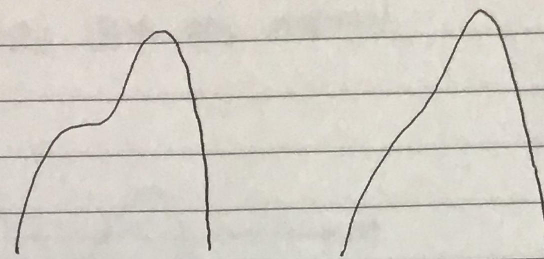
CaseF의 경우 $g'(\alpha)=g'(\beta)=M$의 만족이 어려우니 Case G가 옳다.

즉 $g'(x) = -4(x-k)^2(x-l)+T$ 정도의 일반 꼴로 정의 가능하다.

하지만 $g'(\alpha)=g'(\beta)=M>0$ 이므로 $\boxed{X}$, $\boxed{Y}$ 만 Case G 중 건질 수 있다.

이게 최선이었다. 후.. 나란 녀석

Phase 4. $\boxed{X}$, $\boxed{Y}$ 덕에 우리는 $g(x)$가 다음과 같음을 알았다.



이에 더해 $g(x) = M(x-a)$의 근이 α, β 임과,

$g'(\alpha) = g'(\beta) = M$ 또한 이미 알고 있다.

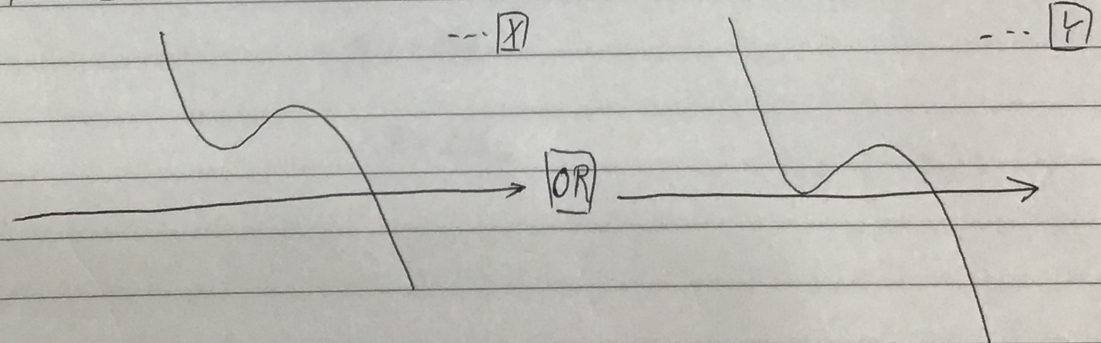
let. $h(x) = g(x) - M \cdot (x-a)$.

$$\begin{pmatrix} h(\alpha)=0 & h'(\alpha)=0 \\ h(\beta)=0 & h'(\beta)=0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(x)\text{는 다항함수,} \\ \text{근 개수 정해진 함수} \end{pmatrix}.$$

$\therefore \; h(x) = -(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$.

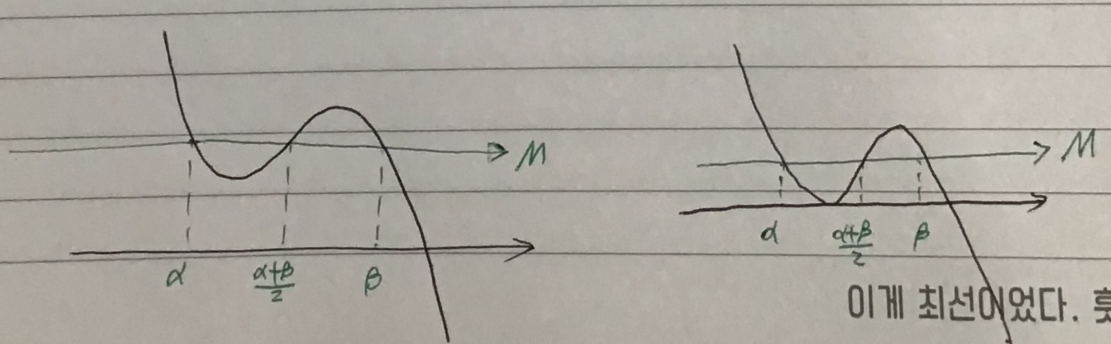
$$g(x) = -(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 + M(x-a).$$

Phase 5. $\boxed{X} + \boxed{Y} = g'(x)$의 단초.



Phase 4에서 $g'(x) = -4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + M$ 임은 추론 가능,

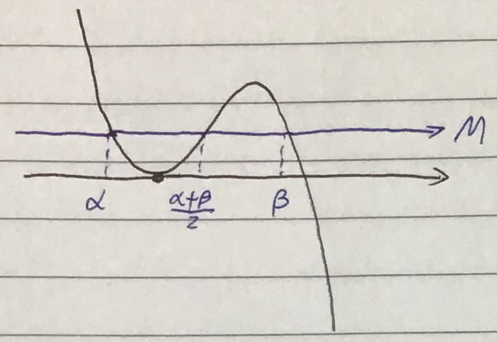
$g'(x) = M$의 근은 $\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta}{2}$.



이게 최선이었다. 흣.. 나란 녀석

$\boxed{X}$와 $\boxed{Y}$는 평행이동 시 동일 형태.

M의 최솟값은 $\boxed{Y}$일 때가 자명하다.



(α, β가 근일 때 $\frac{\alpha+\beta}{2}$도 근인 경우는 변곡점일 때다. 삼차함수라서 가능한 추론.)

비율 관계보다는 $\alpha=-3\sqrt{3}$, $\beta=3\sqrt{3}$ 대입이 편하다. → ($\beta-\alpha=6\sqrt{3}$에서 이미 답은 고정된 상태.)

이때 극소의 x 값은 -3이고,

$$g'(-3)-M=-4(-3+3\sqrt{3})(-3-3\sqrt{3})(-3)$$

$$=-216.$$

$g'(-3)=0$인 $\boxed{Y}$이므로

$$-M=-216$$

$$\therefore M=216_{//}$$

이게 최선이었다. 훗.. 나란 녀석

171130. $(\alpha-a)f(\alpha)=g(\alpha)=M(\alpha-a)$ ← (가), (나)

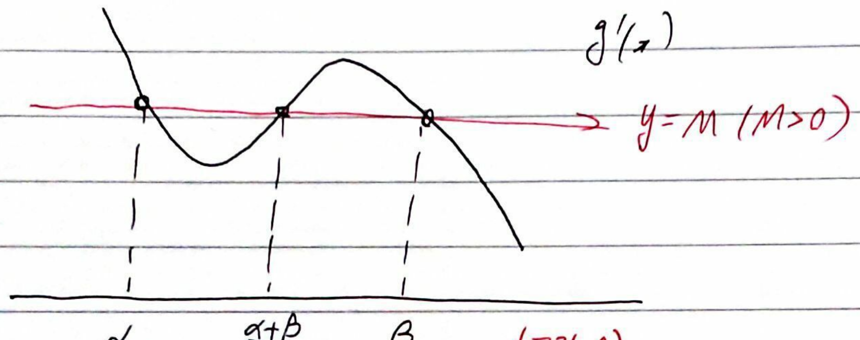
$(\beta-a)f(\beta)=g(\beta)=M(\beta-a)$.

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$,

$g'(x)=(x-a)f'(x)+f(x)$, → $g'(\alpha)=g'(\beta)=M$.

∴ $g(x)-M(x-a)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$, → $f(x)=M-\dfrac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x-a}$

$g'(x)=M-(x-\alpha)(x-\beta)(4x-2\alpha-2\beta)$

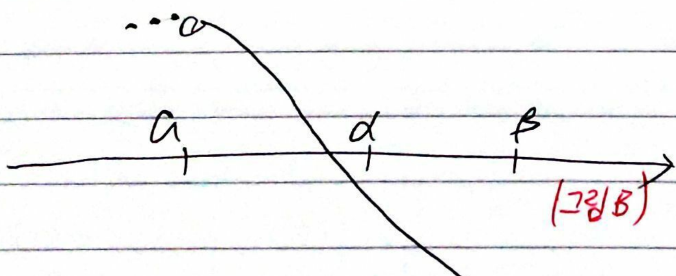


(그림 A)

(다) → $f'(x)=\dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)\{(x-\alpha)(x-\beta)-2(x-a)(2x-\alpha-\beta)\}}{(x-a)^2}$

$x=\alpha$, $x=\beta$, 그리고 근이 2개까지 더 가능.

let. $(x-\alpha)(x-\beta)-2(x-a)(2x-\alpha-\beta)=r(x)$.



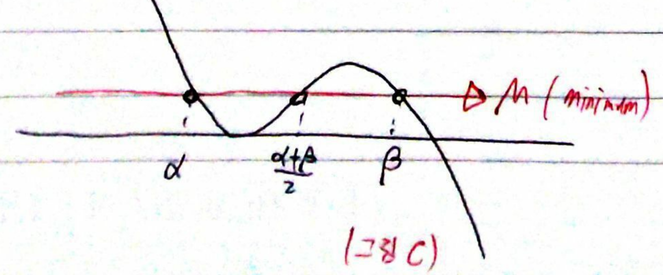
(그림 B)

한 근은 a 이하. 즉 근은 1개.

(다)에서 $f(x)$의 극의 개수 = 3.

$g(x)$는 극값이 2개, 1개, 0개 중 하나.

그림 A를 통해 1개일 때만 가능. 확인.



(그림 C)

→ 이후 N.G.D. Ans. 216.

30. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0과 2뿐이고 허근은 존재하지 않는다.
(나) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^3}{f(x)}$이 존재한다.
(다) 함수 $\left\lvert \frac{g(x)}{x} \right\rvert$는 $x=\frac{5}{4}$에서 연속이고 미분가능하지 않다.

함수 $g(x)$의 극솟값을 k라 할 때, $27k$의 값을 구하시오. [4점]

Q. 최고차 계수 1인 다항함수 f(x) (2017-4-30.나2)

$$g = x - \frac{f}{f'}$$

(가) $f(x)=0$ 의 실근 $0, 2$, 허근 x

(나) $\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^3}{f(x)}$ 이 존재

(다) $\left|\frac{g(x)}{x}\right|$ 는 $x=\frac{5}{4}$에서 연속 o, 미가 x

$g(x)$의 극솟값 $=k$. $27k=?$

sol) (교육청의 풀이와 다르다. 애초에 교육청 풀이대로 푸는 것도 실전 무용하다. 궁금하면 찾아보자. 머리가 말리게 될 것이다)

(다)에서 $\left|\frac{g(x)}{x}\right|$가 연속이나 미분 불가인 $x=\frac{5}{4}$

당연히 $x=\frac{5}{4}$가 근이다

$$g\left(\tfrac{5}{4}\right) = \frac{5}{4} - \frac{f}{f'} = 0$$

$$\frac{f\left(\frac{5}{4}\right)}{f'\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{5}{4}.$$

(가),(나)에서

$f = x^n (x-2)^m$ 으로 두고,

$m \geq 4$ 이면 (나)에 위배,

$m=0$ 은 (가)에 위배.

즉 m의 후보 $m=1,2,3$.

	$m=1$	$m=2$	$m=3$
f	$x^n(x-2)$	$x^n(x-2)^2$	$x^n(x-2)^3$
f'	$x^{n-1}(n(x-2)+x)$	$x^{n-1}(x-2)(n(x-2)+2x)$	$x^{n-1}(x-2)^2(n(x-2)+3x)$
$\frac{f}{f'}$	$\frac{x(x-2)}{n(x-2)+x}$	$\frac{x(x-2)}{n(x-2)+2x}$	$\frac{x(x-2)}{n(x-2)+3x}$

Use $\left(\frac{f}{f'}\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4}\right)$

Sub $5/4$	$\frac{-\frac{15}{16}}{-\frac{3}{4}n+\frac{5}{4}}$	$\frac{-\frac{15}{16}}{-\frac{3}{4}n+\frac{5}{2}}$	$\frac{-\frac{15}{16}}{-\frac{3}{4}n+\frac{15}{4}}$
	(X)	(X)	(O)

$m=3$ 에서 $n=6$ 근이 유일하다

$f(x) = x^6(x-2)^3$ 임이 확정된다.

(참 쉬운 문제긴 하다. 하지만...)

N.G.D 하면

$$g = x - \frac{f}{f'} = \frac{8x^2-10x}{9x-12} \quad \left(x=\tfrac{4}{3}\text{에서} \sim \text{req}\right)$$

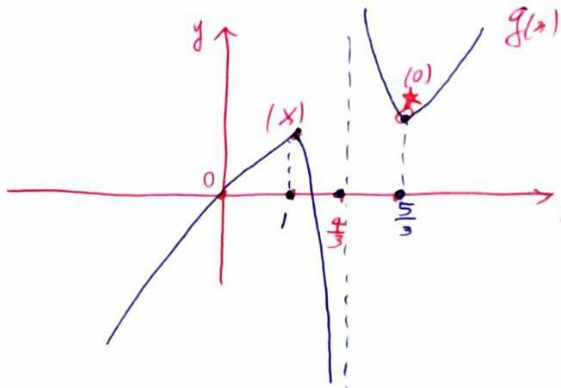
$$g' = \frac{2}{3}\cdot\frac{12x^2-32x+20}{(3x-4)^2}.$$

$x=1$, $x=\frac{5}{3}$ 에서 $g'(x)=0$.

$g(1) = \frac{2}{3}$, $g\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{50}{27}$,

주의 ★ → 극소를 구한다고 해서 그게 작은 값을 의미한다고 착각하지 말자.

g는 분수 형태다 $x=\frac{4}{3}$에서 정의 불가하므로



항상 그래프를 그려서 자신이 어떤 풀이를 하고 있는지 알아야 하며, 풀이 과정 중 무심코 가정했던 고정 변수가 예외를 가지진 않는지, 극대 구하기인데 극소를 구한다는 실수 등은 정확한 문제 해석 뒤에는 따라오지 않는 법이다.

(극소 = 작은 값 = $\frac{2}{3}$, 답 : 18)이라는 오답이 나오지 않도록 주의하자는 말이다.

g를 그려보도록 하고, 항상 그릴 수 있는 그래프들을 가시화해 예외, 반례를 줄여야 완벽한 풀이가 현장에서 가능하다.

$k = g\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{50}{27}$, $27k=50$ Ans) 50 (QED)

30. 실수 a와 함수 $f(x)=\ln(x^4+1)-c$ ($c>0$인 상수)에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

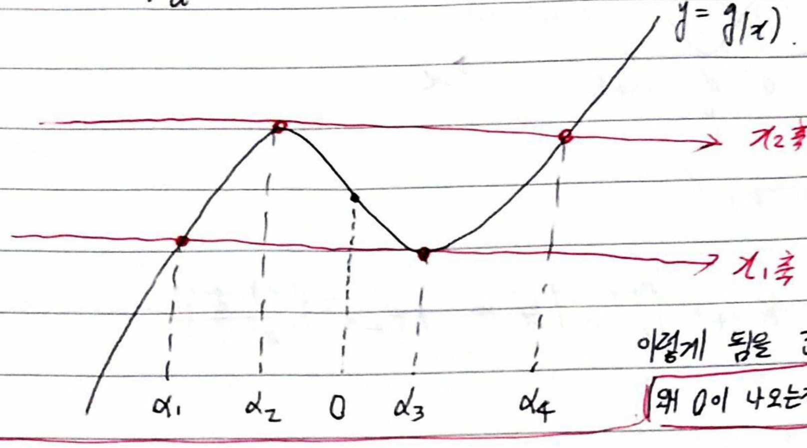
라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 α_1, α_2, $\cdots$, α_m (m은 자연수)이다. $a=\alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
(나) $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)\,dx = k\alpha_m\int_0^1 \lvert f(x)\rvert\,dx$

$mk\times e^c$의 값을 구하시오. [4점]

$f(x) = \ln(x^4+1) - C$. $(C > 0)$

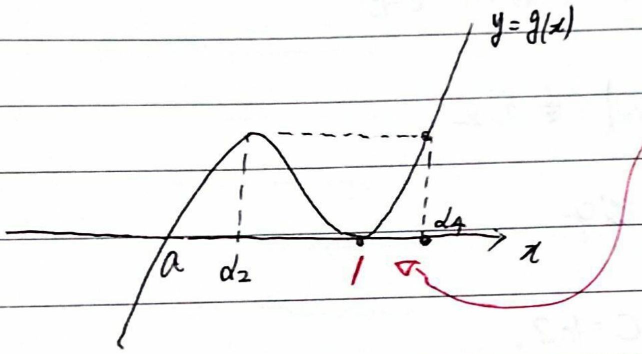
$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $g'(x) = f(x)$, $g(x)$를 x축 없이 그리면 (검은펜)



이렇게 됨을 간단히 알 수 있다.
(왜 0이 나오는지는 후술.)

$g(x)$가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 2가지 x축 설정을 고려해야 하며,
이때의 가능한 a 값은 각각 2가지씩, $m=4$이다. (빨간펜)

문제에서 m의 설정 이후엔 $\alpha = \alpha_1$으로 잡으니 그래프를 특정하자.



(가) → 1의 위치와, $g'(1)=0$에서 C의 값이 나옴.

$C = \ln 2$.

$f(x) = \ln(x^4+1) - \ln 2$.

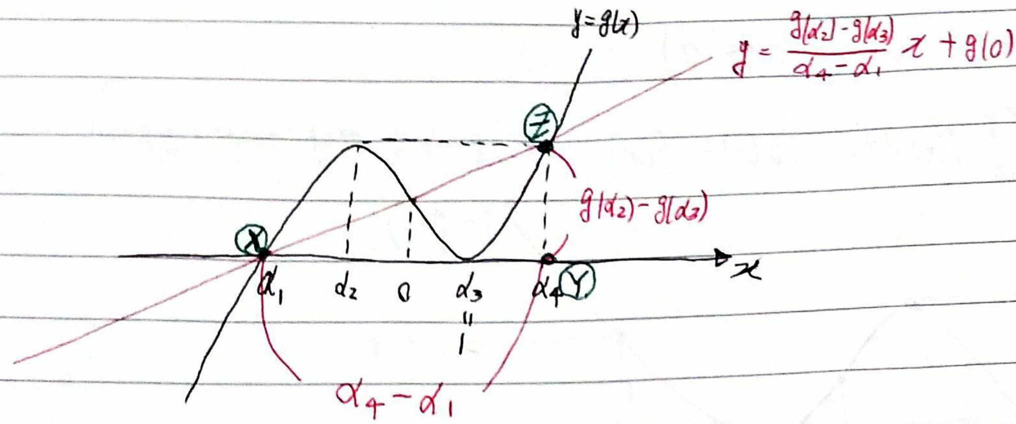
(4) 혼동 방지를 위해 $\int_0^1 |f(x)|\,dx$를 먼저 보면 $\int_0^1 |f(x)|\,dx = -\int_0^1 f(x)\,dx = g(0) - g(1) = g(0) - g(\alpha_3)$

$= \dfrac{g(\alpha_2) - g(\alpha_3)}{2}$

Q. 0을 어떻게 파악하는가?

A. $f(x) = f(-x)$이므로 $f(x)$는 y축 선대칭 함수다. 따라서
이 $f(x)$를 적분한 $g(x)$는 $(0, g(0))$을 중심으로 한 점대칭함수임을 알 수 있다.

x_1축과 x_2축의 중간인 x축을 잡을 경우 $(0, g(0))$이 $g(x)$의 변곡점임은 보인다.



(나) → $\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)\,dx = k\alpha_4 \cdot \int_0^1 |f(x)|\,dx = k\alpha_4 \cdot \frac{g(\alpha_2)-g(\alpha_3)}{2}$

$y=g(x)$는 $(0, g(0))$을 중심으로 하는 점대칭함수이다.

따라서 $\alpha_4=-\alpha_1$ 이므로 $\alpha_4 = \frac{\alpha_4-\alpha_1}{2}$ 이며,

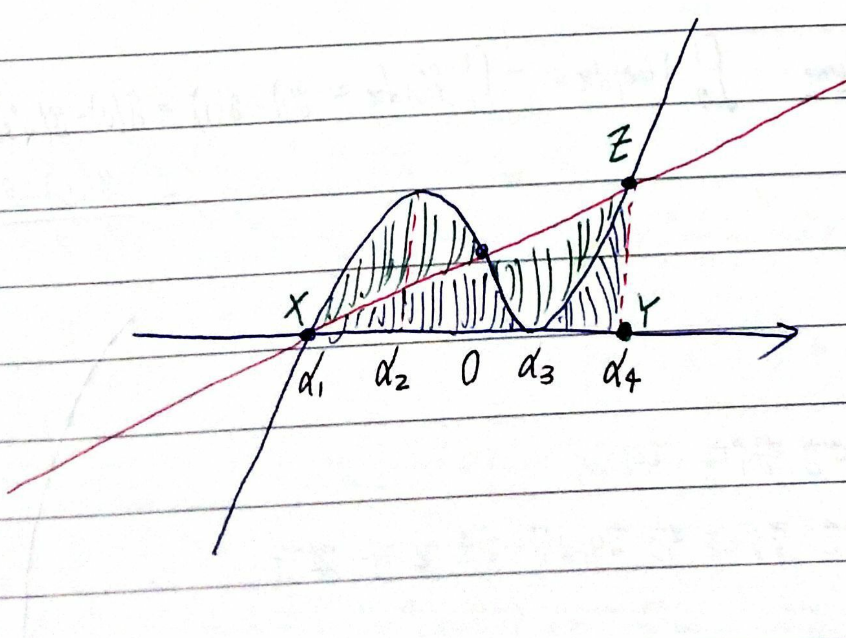
$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)\,dx$는 삼각형 XYZ의 넓이와 같다.

이는 $(\alpha_4-\alpha_1)\cdot(g(\alpha_2)-g(\alpha_3))\cdot\frac{1}{2}$ 이므로

$k=2$ 임을 밝힐 수 있다.

$\therefore$ $n=4$, $k=2$, $C=\ln 2$.

Ans. 16.



30. 상수항을 포함한 모든 항의 계수가 유리수인 이차함수 $f(x)$가 있다. 함수 $g(x)$가

$$g(x)=|f'(x)|e^{f(x)}$$

일 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
(나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $4\sqrt{e}$이다.
(다) 방정식 $g(x)=4\sqrt{e}$의 근은 모두 유리수이다.

$|f(-1)|$의 값을 구하시오. [4점]

$f(x)$ = 이차 함수. (2017-7-30)

$g(x) = |f'(x)|\, e^{f(x)}$

(가) g는 $x=2$에서 극소

(나) $g(x)$는 최대 $4e^{\frac{1}{2}}$

(다) $g(x) = 4e^{\frac{1}{2}}$ 의 근 모두 유리수.

$|f(-1)| = ?$

sol) $g(x) = |f'(x)|\, e^{f(x)} = |f'(x)\, e^{f(x)}|$.

$f(x)$의 최고차항 계수가 양수라면

$g(x)$에 최댓값은 존재하지 않는다.

즉 g는 $\lim_{x\to\infty} g = 0^-$ 이다.

let. $f(x) = ax^2+bx+c \quad (a<0)$

Set. $h(x) = f'(x)\, e^{f(x)}$

$= (2ax+b)\, e^{f(x)}$

$h'(x) = (f''(x) + f'(x)^2)\, e^{f(x)}$

$f''(x) = 2a < 0$ 이므로,

g를 그릴때 극값인 $f''(x)+f'(x)^2$의 2개 근을 가지며,

$g(x)$를 그릴 때 $f'(x)=0$ 의 근

$-\frac{b}{2a}$ 또한 g의 극값의 근일 수 있다

· 앞의 근 2개는

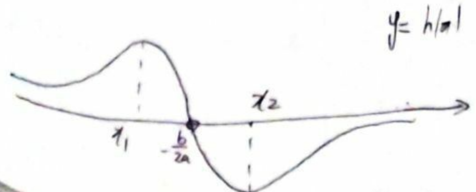
$(2ax+b)^2 + 2a = 0$ 의 근은

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{-2a}}{2a}$ (x_1, x_2로 let.)

$x = -\frac{b}{2a}$를 사이에 둔다.

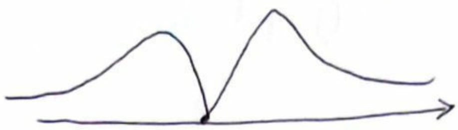
$h(x)$의 개형은 대충 아래와 같다 (확정적)

$y = h(x)$



$y = g(x) = |h(x)|$ 의

대략 개형.



즉 $x = -\frac{b}{2a}$에서 극소인데 이는 $x=2$이다.

$-\frac{b}{2a} = 2$.

$\therefore b = -4a$.

$\downarrow$

$g(x) = (-2a)|x-2|\, e^{ax^2-4ax+c}$, $(a<0)$

$x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{-2a}}{2a} = 2 \pm \dfrac{\sqrt{-2a}}{2a}$

x_1, x_2 중 g 대입시 더 큰 값이 최댓값.

그 근이 둘 다임을 알 수 있다.

$(g(x_1) = g(x_2))$

$g(x_2) = g(x_1) = (-2a)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{-2a}}{-2a}\right)\cdot e^{c-\frac{1}{2}-4a}$

$= \sqrt{-2a}\cdot e^{c-\frac{1}{2}-4a}$

$= 4e^{\frac{1}{2}}$.

두 근이 모두 유리수이므로,

$\sqrt{-2a}$가 유리수이다.

$\sqrt{-2a} = 4$, $c - \frac{1}{2} - 4a = \frac{1}{2}$ 임을

확정지을 수 있다.

$\therefore a = -8 \rightarrow b = -4a = 32$.

$c = -31$

$|f(-1)| = |a-b+c| = |-8-32-31|$

$= \underline{71}$

(Q.E.D).

→ Q.E.D.는 꼭 증명 문제에만 쓰는 줄 아니라서…

곧잘 쓰는 편…

71

21. $\frac{3}{5} < x < 4$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=2$이고

$$f'(x)=\frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $g'(2)=-\frac{4}{7}$

ㄴ. $g(x)=\frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3-\frac{5}{3}$

ㄷ. $2 < g(1) < \frac{5}{2}$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

☆ 역함수와 적분의 관계성 넘기.

$$\frac{3}{5} < x < 4 \rightarrow f'(x) = \frac{1 - x^2 f(x)^3}{x^3 f(x)^2}. \qquad f(1) = 2.$$

sol. [1] $x \rightarrow g(t)$ $\quad f'(g(t)) = \dfrac{1}{g'(t)} = \dfrac{1 - g(t)^2 \cdot t^3}{g(t)^3 \cdot t^2}.$

$$g'(t) = \frac{t^2 g(t)^3}{1 - t^3 g(t)^2} \quad \left(\frac{3}{5} < g(t) < 4\right).$$

$$\left(ㄱ.\ g'(2) = \frac{4 g(2)^3}{1 - 8 g(2)^2} = -\frac{4}{7} \right) \leftarrow \left(\frac{3}{5} < g(2) = 1 < 4 \right)$$

$f(1) = 2$

$g(2) = 1$

$$t^2 g(t)^3 = g'(t)\left(1 - t^3 g(t)^2\right)$$

$$\underbrace{t^2 g(t)^3 + t^3 g(t)^2 g'(t)}_{\text{미분꼴}} = g'(t)$$

$$\rightarrow t^3 g(t)^3 = 3g(t) + C.$$

$$g(2) = 1 \rightarrow C = 5. \rightarrow 3g(t) + 5 = t^3 g(t)^3.$$

$$\left(ㄴ.\ g(t) = \frac{1}{3} t^3 g(t)^3 - \frac{5}{3}. \quad \left(\frac{3}{5} < g(t) < 4\right) \right)$$

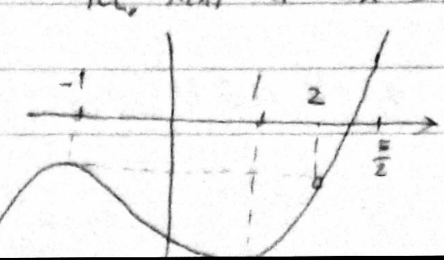
ㄴ 이용시 $g(1) = \frac{1}{3} g(1)^3 - \frac{5}{3}$. $\quad g(1)^3 - 3g(1) - 5 = 0.$

($g(2) = 1$ 이고, $f(1) = 2$ 일 때 $f'(1) < 0$ 이여 f의 역함수가 존재하므로

$f' \leq 0 \rightarrow g' \leq 0$. 즉 $g(1) > g(2)$. $g(1) > 1$ 이다.)

let, $h(x) = x^3 - 3x - 5$ ($g(1)$은 $h(x)=0$의 근).

(ㄷ. 그래프 추정 시 $2 < g(1) < \frac{5}{2}$)



Ans. ㄱ,ㄴ,ㄷ.

이게 최선이었다. 훗.. 나란 녀석

Sol $\boxed{2}$ $f(x)$의 원함수를 구하는 것도 가능하다.

(대부분의 문제들은 원함수 설정 후 조건 생성으로 만들어지므로 의외로 원함수가 쉬울 때도 많아.)

Sol $\boxed{1}$ 의 부분적분 방식으로 $x^3 f(x)^2$을 넘기면

$$x^3 f(x)^2 f'(x) + x^2 f(x)^3 = 1.$$

$$x^3 f(x)^3 = 3x + C.$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow C = 5.$$

$$f(x)^3 = \frac{3x+5}{x^3}.$$

$$\left(f(x) = \frac{1}{x} \cdot (3x+5)^{\frac{1}{3}} \right)$$

let. $x = g(t)$ $\quad t = \dfrac{3g(t)+5}{g(t)^3}$

이 식에서 ㄴ, ㄷ은 동일한 방식으로 풀리며,

~~Sol $\boxed{3}$과 달리 f의 사용 없이~~

바로 g를 미분해 $g'(2)$를 구할 수 있다.

$$t\,g(t)^3 = 3g(t) + 5.$$

$$g'(t) \cdot 3t\,g(t)^2 + g(t)^3 = 3g'(t) + 5.$$

$$g(2) = 1$$

$$g'(2) = -\frac{4}{7}.$$

물론 $f(x) = \frac{1}{x} \cdot (3x+5)^{\frac{1}{3}}$ 의 도함수에 $g(x)$ 대입도 가능하다.

Ans. ㄱ, ㄴ, ㄷ

⇒ 이 문제 첫 풀이를 Sol $\boxed{2}$로 푼 본인, 목 멕었다 ㅠㅠ.

(학교에서 이거로 풀어하다가...)

30. 함수 $f(x)=e^x(ax^3+bx^2)$과 양의 실수 t에 대하여 닫힌 구간 $[-t, t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $M(t)$, 최솟값을 $m(t)$라 할 때, 두 함수 $M(t)$, $m(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 t에 대하여 $M(t)=f(t)$이다.

(나) 양수 k에 대하여 닫힌 구간 $[k, k+2]$에 있는 임의의 실수 t에 대해서만 $m(t)=f(-t)$가 성립한다.

(다) $\int_1^5 \{e^t \times m(t)\}dt = \frac{7}{3}-8e$

$f(k+1)=\frac{q}{p}e^{k+1}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, a와 b는 0이 아닌 상수, p와 q는 서로소인 자연수이고, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=0$이다.) [4점]

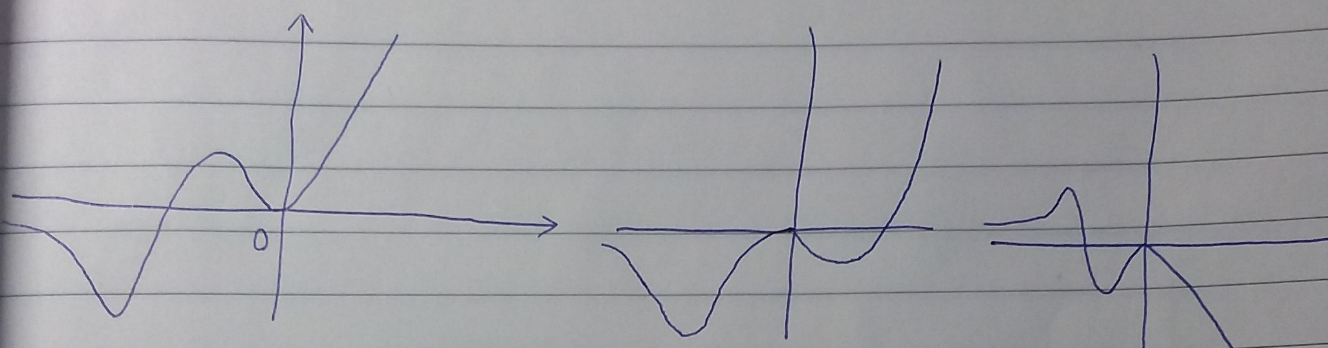
Date Page

2018학년도 4월 30번. 도함수 추론 문제. (가장 잘 만들어진 킬러 Top 5 (주관적)).

$f(x) = e^{x}(ax^3+bx^2) = x^2e^{x}(ax+b)$.

$f'(x) = xe^{x}(ax^2+(3a+b)x+2b)$

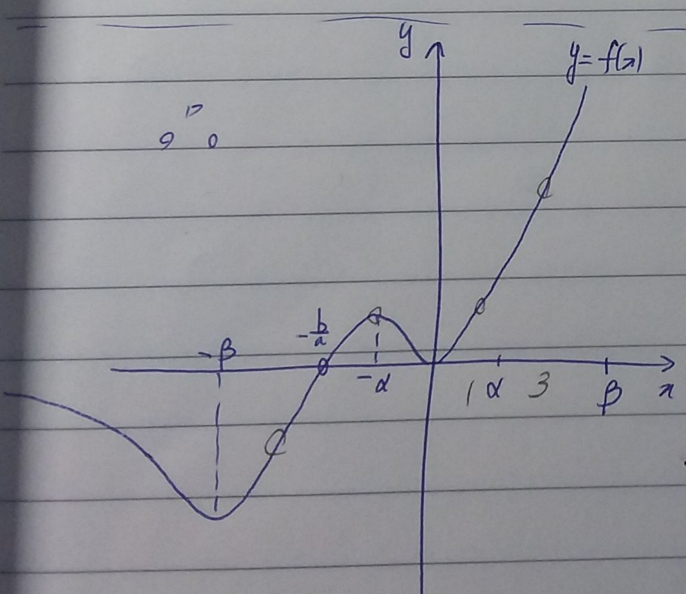
$f(x)$의 개형 추론



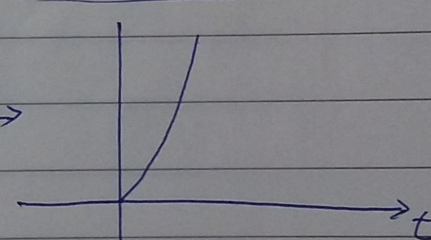
(O) (X) (X) a= 음수.

↓ ↓

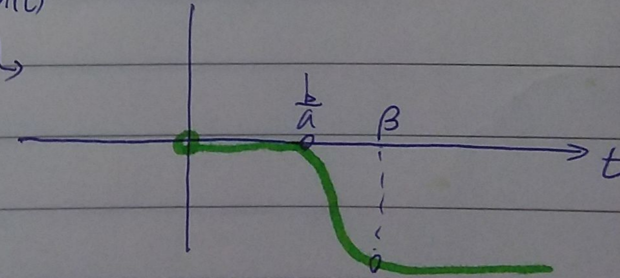
(a는 양수) (나) 위배. (가) 위배.



max $m(t)$



min $m(t)$



즉, $t=-k-2$)

$m(t)$는 (나) 조건에서 $[k, k+2]$ 중 ($t=k+2$)에서를 제외하고 최솟값을 0에서 가지는 것이 자연스러우며, (나) 조건의 $m(t) = f(-t)$를 만족할 t는 $\frac{b}{a}$, β 뿐이다.

따라서 $\frac{b}{a} = k$, $-\beta = -(k+2)$. $f'(-\alpha) < f'(-\beta) = 0 = f'(-k-2)$

이에 맞는 k는 2. $-\alpha = -1$, $-\beta = -4$가 4온다. ($b=2a$)

이제 (나) 조건을 보면

$$\int_1^5 e^t m(t)\,dt = \int_2^4 e^t m(t)\,dt + \int_4^5 e^t m(t)\,dt + \int_1^2 e^t m(t)\,dt$$

$$= -\frac{a}{4}t^4 + \frac{2}{3}at^3 \Big|_2^4 + \int_4^5 e^t f(-4)\,dt + 0$$

$$= -\frac{68}{3}a + (-32a)\cdot\int_4^5 e^{t-4}\,dt$$

$$= -32a\cdot e + \frac{28}{3}a$$

$$= -8e + \frac{7}{3}$$

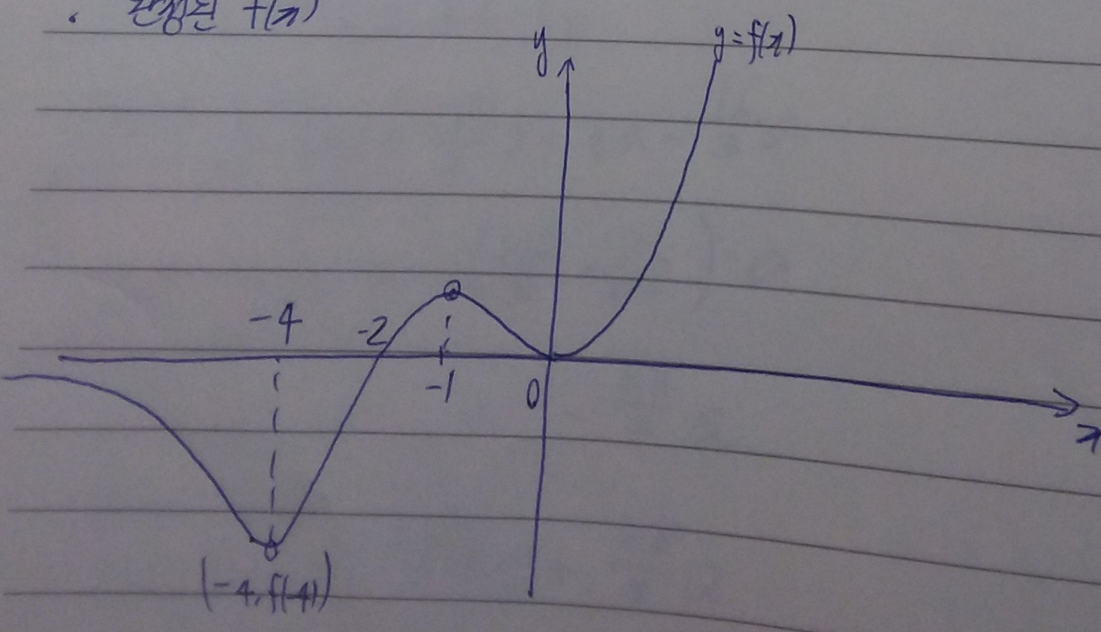
$$\therefore a = \frac{1}{4},$$

$$f(k+1) = f(3) = e^3\cdot(27a+9b)$$

$$= 45a\cdot e^3 = \frac{45}{4}e^3$$

Ans) 49

∴ 완성된 $f(x)$



상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin^3 x+b\sin x$가

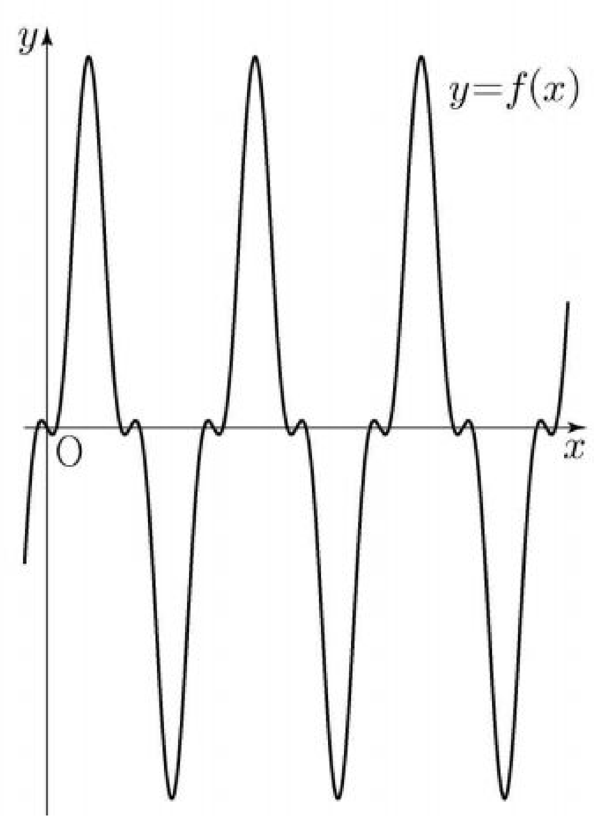
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2},\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=5\sqrt{3}$$

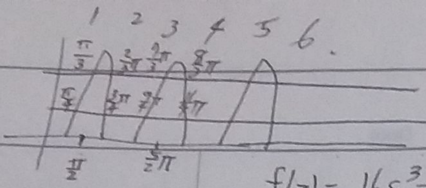
을 만족시킨다. 실수 $t\ (1<t<14)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 x_n이라 하고

$$c_n=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_n)}dt$$

라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{101}c_n=p+q\sqrt{2}$일 때, $q-p$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 유리수이다.)





$f(x) = 16s^3 - 2s = t$. 의 근 x_n, ($f(x)$ 구하기는 노동...).

$C_1 + C_2 = 0$, $C_3 + C_4 = 0$ ....

즉 C_1을 다시 구하라. ($p + q\sqrt{2} = C_1$)

$$C_1 = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x)}\, dt$$

$\left(x = \frac{\pi}{4} \sim \frac{\pi}{3}\right)$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}$ $\quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5\sqrt{3}$.

$t = f(a)$ (여기, $t = f(a)$).

$dt = f'(a)\, da$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{f(a)}{\cancel{f'(a)}} \cdot \cancel{f'(a)}\, da.$$

$1 - c^2$

$8s^2 - 1$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2s(7 - 8c^2)\, dx.$$

$c = a$

$-s = da$

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} 2(7 - 8a^2)(-da)$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 14 - 16a^2\, da.$$

$$= 14a - \frac{16}{3}a^3 \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= 7\sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

$$-7 + \frac{2}{3} = -\frac{19}{3} + \frac{17}{3}\sqrt{2}.$$

$\therefore q - p = 12$

30. $ab<0$ 인 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$f(x)=(ax+b)e^{-\frac{x}{2}}$ 이고 함수 $g(x)$는 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ 이다.

실수 k $(k>0)$에 대하여 부등식

$$g(x)-k \geq xf(x)$$

를 만족시키는 양의 실수 x가 존재할 때, 이 x의 값 중 최솟값을 $h(k)$라 하자.

함수 $g(x)$와 $h(k)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 극댓값 α를 갖고 $h(\alpha)=2$이다.
(나) $h(k)$의 값이 존재하는 k의 최댓값은 $8e^{-2}$이다.

$100(a^2+b^2)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$) [4점]

ab<0 인 상수 a, b.

$f(x)=(ax+b)e^{-\frac{x}{2}}$, $g(x)=\int_0^x f(t)dt$

k>0인 k에서

$g(x)-k \ge xf(x)$ 만족하는

양의 실수 x 중 최소를 h(k)라 하자.

(가) g(x)는 극댓값 α, $h(\alpha)=2$

(나) h(k)가 존재하는 k의 최댓값 $8e^{-2}$.

$100(a^2+b^2)$는?

sol) $g(x)-xf(x) \ge k$ 일 때,

g(x) → $H(x)=g(x)-xf(x)$ 로 두어 파악하면

h(k)를 짐작할 수 있고,

H(x)가 상수 a,b 조건 덕에

고정된 함수이므로

(나) 조건에서 $(k=8e^{-2}) \rightarrow (max)$임은

큰 힌트다.

$H(x)=\int_0^x f(t)dt-(ax^2+bx)e^{-\frac{x}{2}}$

$H'(x)=-xf'(x)$

$=-x\left(-\frac{a}{2}x+a-\frac{b}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

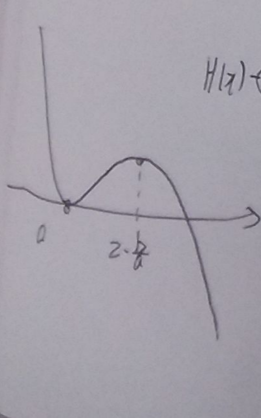
$=\frac{1}{2}x(ax+b-2a)e^{-\frac{x}{2}}$

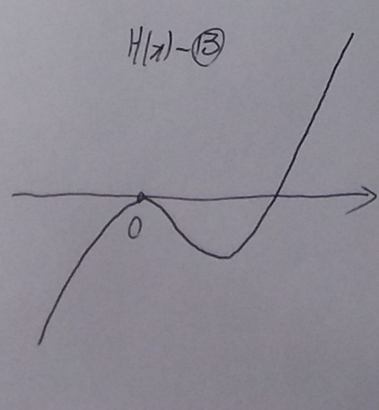
H(x)는 $x=0$, $x=2-\frac{b}{a}$ 에서 극값. $(H(0)=0)$

ab<0 이므로 $0<2-\frac{b}{a}$

a, b의 부호 파악이 아직 불가한 상태.

H(x)-Ⓐ H(x)-Ⓑ





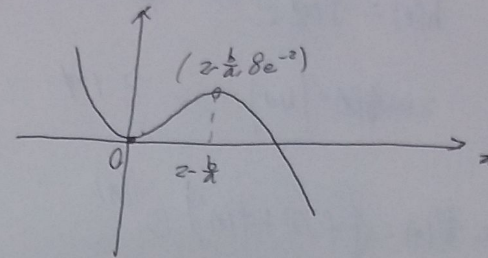
(나) 조건에서 $max(k)=8e^{-2}$이고,

h(k)의 정의 上

(양의 실수 x중 최소)를 고려하면

Ⓐ, Ⓑ 중 Ⓑ는 max(k)를 정의 불가.

Ⓐ가 옳으며, $H(2-\frac{b}{a})=8e^{-2}$.



$a<0$, $b>0$ 임은 도함수 부호 변화로 파악.

(가) 조건에서 g(x)의 극대를 알기 위해 g'(x) 구하자.

$g'(x)=f(x)=(ax+b)e^{-\frac{x}{2}}$,

유의미한 극값은 $x=-\frac{b}{a}$에서 생성

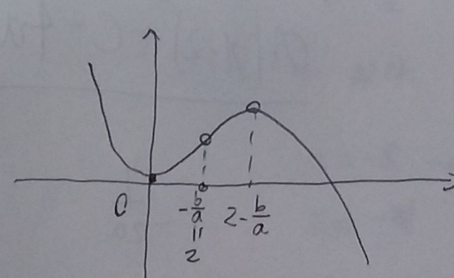
$g(-\frac{b}{a})=\alpha$ $(-\frac{b}{a}>0$, $ab<0$ 이므로$)$.

그런데 $f(-\frac{b}{a})=0$ 이므로

$H(x)=g(x)-xf(x)$ 에서

$H(-\frac{b}{a})=G(-\frac{b}{a})=\alpha$ 이다.

$-\frac{b}{a}<2-\frac{b}{a}$ 이며, $h(\alpha)=2$ 라고 했으므로



$-\frac{b}{a}=2$이다. $b=-2a$.

↳ $2-\frac{b}{a}=4$

N.G.D → $f=a(x-2)e^{-\frac{x}{2}}$

$g=-2axe^{-\frac{x}{2}}$

$H=-ax^2e^{-\frac{x}{2}}$

$H(4)=8e^{-2}=-16ae^{-2}$. $a=-\frac{1}{2}$, $b=1$ → Ans) 125

QED

30. 최고차항의 계수가 6π인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

함수 $g(x)=\dfrac{1}{2+\sin(f(x))}$이 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소이고,

$\alpha \geq 0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1,

α_2, α_3, α_4, α_5, $\cdots$ 라 할 때, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1=0$이고 $g(\alpha_1)=\dfrac{2}{5}$이다.
(나) $\dfrac{1}{g(\alpha_5)}=\dfrac{1}{g(\alpha_2)}+\dfrac{1}{2}$

$g'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a\pi$라 할 때, a^2의 값을 구하시오.

(단, $0<f(0)<\dfrac{\pi}{2}$) [4점]

최고차 계수 6π, 삼차함수 $f(x)$

$g(x) = \dfrac{1}{2+\sin f(x)} > 0$.

$x=\alpha$에서 극대 or 극소.

$\alpha \geq 0$인 α들 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$,

(가) $\alpha_1 = 0$ $g(\alpha_1) = \frac{2}{5}$.

(나) $\dfrac{1}{g(\alpha_5)} = \dfrac{1}{g(\alpha_2)} + \dfrac{1}{2}$

$g'(-\frac{1}{2}) = a\pi$, $a^2 = ?$ $(0 < f(0) < \frac{\pi}{2})$

Sol] (가) 조건을 먼저 살피면

$\alpha_1 = 0$, $\sin f(\alpha_1) = \frac{1}{2}$

$0 < f(0) < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $f(\alpha_1) = f(0) = \frac{\pi}{6}$

(자명)

문제가 $g'(-\frac{1}{2})$ 구하기이므로 궁극적으로는

복잡한 $g(x)$ 자체를 파악하는 것보다는

f의 구조를 알고 $g'(x)$ 함수에

$-\frac{1}{2}$ Substitute만 쓰겠다고 생각하는 것이

지극히 자연스럽다.

(나)에서 $\sin f(\alpha_5) = \sin f(\alpha_2) + \frac{1}{2}$.

이제 g'과 α를 알아보자.

$$g'(x) = \frac{-f'(x)\cos f(x)}{(2+\sin f(x))^2} \quad (N.G.D.)$$

$\alpha_1 = 0$ 인데 $f(\alpha_1) = \frac{\pi}{6}$ 이므로 α_1은 $f'(x)$의 근.

따라서 $f(x) = 6\pi x^3 + dx^2 + \frac{\pi}{6}$로 둘 수 있다.

$(f(0) = \frac{\pi}{6}, f'(0) = 0)$

$f'(x) = 18\pi x^2 + 2dx = 2x(9\pi x + d)$

Q. $-\frac{d}{9\pi}$도 극값으로 인정되는가?

아니다 (A) / 그렇다 (B)

if A. $\alpha_1 = 0$ 이후의 α는 모두

필연적으로 $\cos f(x) = 0$의 근들에 포함.

$\sin f(x) = \pm 1$.

But (4)의 해석에서 A는 위배된다.

$\sim A \to B \to x = -\frac{d}{9\pi}$도 극값을 가진다.

$f'(x) = 0$의 근 2개,

$\cos f(x) = 0$의 근 α들로 α는 이루어진다.

이제 α_5, α_2 중 어느 것이 $-\frac{d}{9\pi}$인지 결정해야 하는데...

A에서 논거했지만 둘 중 하나는 $\sin f(\alpha) = \pm 1$ 의 근이므로

이 조건에 맞게 적절히 Case를 나누면

f_1 / f_2

① $\sin f(\alpha_5) = 1$

$\sin f(\alpha_2) = \frac{1}{2}$

($f'(x) = 0$의 근은 α_2 Case)

② $\sin f(\alpha_2) = -1$

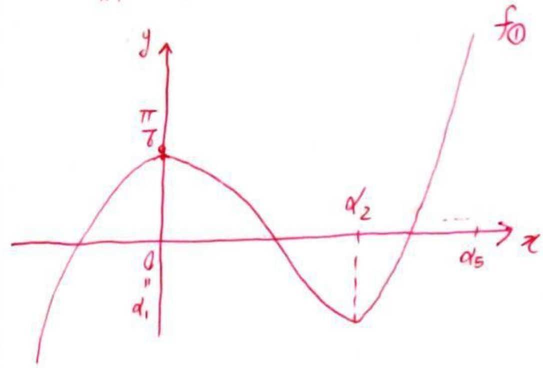
$\sin f(\alpha_6) = -\frac{1}{2}$

($f'(x) = 0$의 근은 α_5 Case)

①, ② 중 어느 쪽을 먼저 시도해도 좋다. ①, ② 모두 논리적으로

참·거짓을 판단하는데 무리가 없고, 제 3의 변수(절댓값 같은 거)

없기 때문에... 먼저는 거짓인 ①부터 파악하겠다.



아. 참고로 α_5, α_2 둘 다 $f'(x) = 0$의 근이 아닐 수도 있지

않나고 하며 그래프 그리기도 두려워하던 멘티들이

친구들이 몇 있었는데, (4) 조건을 조금만 들여다보면

예외의 가능성을 평가원이 대응한 조건 설정으로

없애고 있음을 확정지을 수 있다 (참 잘 낸 문제다.)

①로 돌아가, $\sin f(\alpha_2) = \frac{1}{2}$이 되려면 $f(\alpha_2) = -\frac{7}{6}\pi$ 정도부터

시작한다. 허나 $\frac{\pi}{6}$와 $-\frac{7}{6}\pi$ 사이에 $\cos f(x) = 0$의 근이

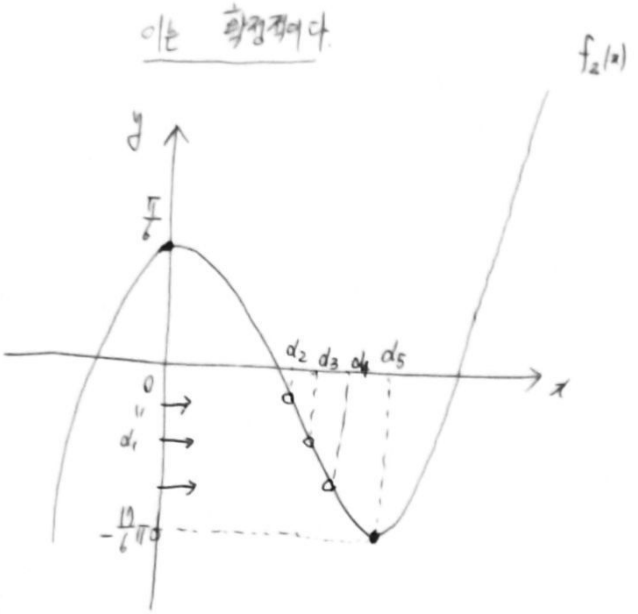
나오므로 α_1과 α_2의 위치 관계가 모순.

즉 ①은 거짓이다.

①과 ② 중 하나만 참인데

(~①) → ② 이므로 ②가 답이 되겠다

이는 확정적이다.



위 그림처럼 흐르듯 나타낼 수 있다.

$\cos f(x) = 0$ 의 근 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 이므로

순서에 맞게 $f(\alpha_2) = -\frac{\pi}{2}$

$f(\alpha_3) = -\frac{3}{2}\pi$

$f(\alpha_4) = -\frac{5}{2}\pi$.

$f(\alpha_5) = -\frac{17}{6}\pi$ 가 나온다. (N. G. D. 하자)

$\alpha_5 = -\frac{d}{9\pi}$ 이므로

$f\left(-\frac{d}{9\pi}\right) = -\frac{17}{6}\pi$

$f(x) = 6\pi x^3 + dx^2 + \frac{\pi}{6}$.

$\mathrm{Sub}\left(-\frac{d}{9\pi}\right)$

$\rightarrow -\frac{17}{6}\pi = \frac{d^3}{243\pi^2} + \frac{\pi}{6}$

$\rightarrow d = -9\pi$,

$-\frac{d}{9\pi} = 1$

$\therefore f(x) = \pi\left(6x^3 - 9x^2 + \frac{1}{6}\right)$

$$g'(x) = \frac{-f'(x)\cos f(x)}{(2+\sin f(x))^2}$$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi\left(-\frac{19}{6}\right)$, $\sin f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

$\cos f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$g'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) f'\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{9}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{27}{2}\pi}{\frac{9}{4}} = 3\sqrt{3}\pi.$$

$f'(x) = \pi(18x^2 - 18x)$

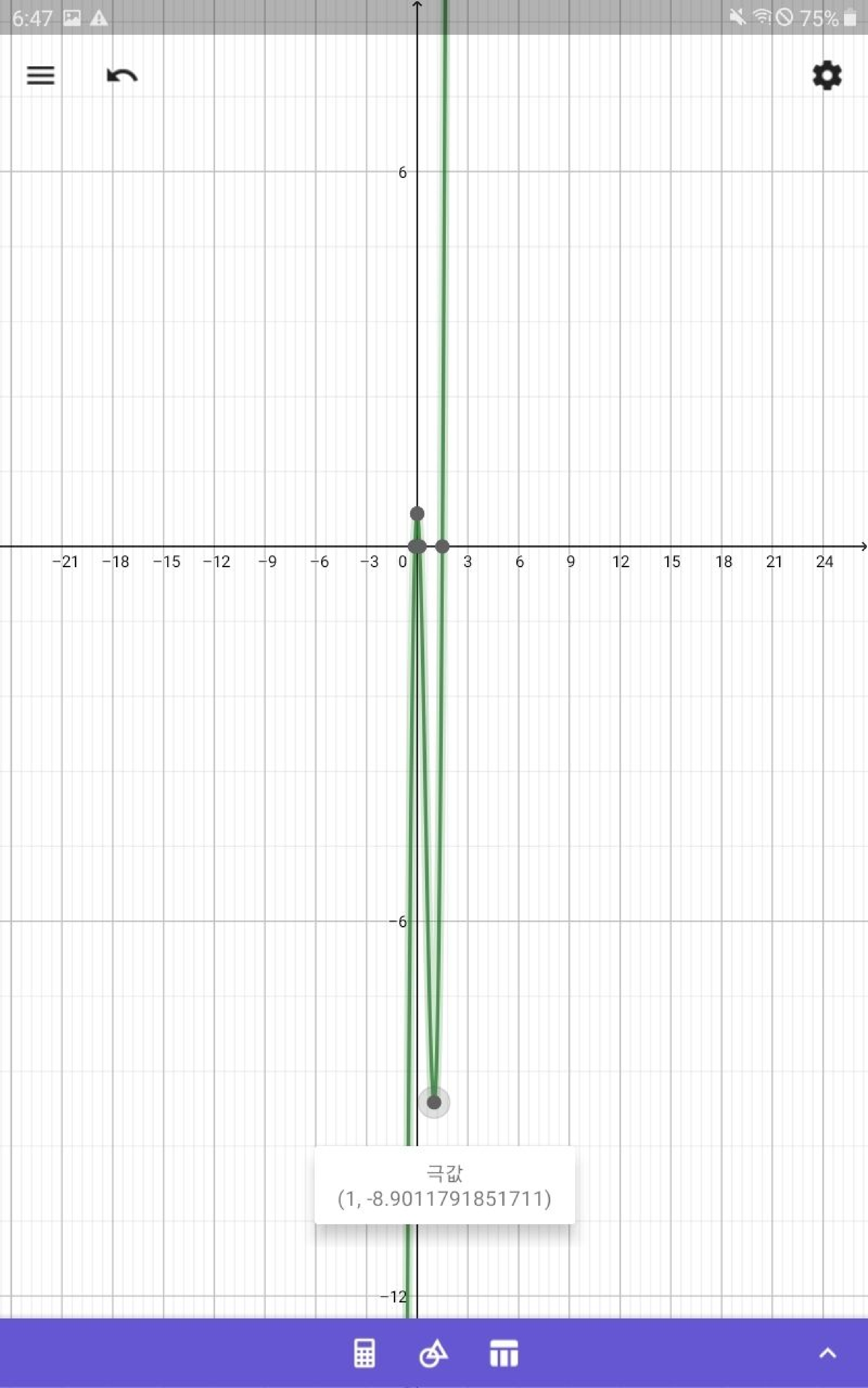
$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{2}\pi$

$\therefore a = 3\sqrt{3}$. $a^2 = 27$.

Ans) 27

Q. E. D.

1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3


6:47
75%
6
−6
−12
−21 −18 −15 −12 −9 −6 −3 0 3 6 9 12 15 18 21 24
극값
(1, -8.9011791851711)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x^2+x+1)=\pi f(1)\sin\pi x+f(3)x+5x^2$$

을 만족시킬 때, $f(7)$의 값을 구하시오.

$f'(x^2+x+1) = \pi f(1)\sin\pi x + f(3)x + 5x^2$

딴 생각하지 말고

(2x+1) 부터 곱한다. 기본 충실!!

신박한 풀이를 현장에서 써먹기는 매우 어렵다.

$$(2x+1)f'(x^2+x+1) = 10x^3 + 5x^2 + 2f(3)x^2 + f(3)x$$
$$+ \pi f(1)(2x+1)\sin\pi x$$

$$f(x^2+x+1) = f(1)\left(-(2x+1)\cos\pi x + \frac{2}{\pi}\sin\pi x\right)$$
$$+ \frac{5}{2}x^4 + \frac{5+2f(3)}{3}x^3 + \frac{f(3)}{2}x^2 + C.$$

$$x=0 \rightarrow f(1) = C + f(1)(-1)$$

$$C = 2f(1)$$

$$f(x^2+x+1) = \frac{5}{2}x^4 + \frac{5+2f(3)}{3}x^3 + \frac{f(3)}{2}x^2$$
$$+ f(1)\left(-(2x+1)\cos\pi x + \frac{2}{\pi}\sin\pi x + 2\right)$$

A. $x=1 \rightarrow f(3) = \frac{5}{2} + \frac{5+2f(3)}{3} + \frac{f(3)}{2}$
$$+ f(1)(5)$$

$$-\frac{25}{6} = 5f(1) + \frac{1}{6}f(3)$$

B. $x=-2 \Rightarrow f(3) = 40 - \frac{40}{3} - \frac{16}{3}f(3) + 2f(3)$
$$+ f(1)(5)$$

$$\frac{80}{3} + 5f(1) = \frac{13}{3}f(3)$$

$A+B \rightarrow f(3)=5,\ f(1)=-1.$ (노동하자...)

$\therefore f(7) = 93$

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x+1)-g(x)=-\pi(e+1)e^{x}\sin(\pi x)$
(나) $g(x+1)=\int_{0}^{x}\{f(t+1)e^{t}-f(t)e^{t}+g(t)\}dt$

$\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{10}{9}e+4$일 때, $\int_{1}^{10}f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 에서 $g(x+1)-g(x) = -\pi(e+1)e^{x}\sin\pi x$

$= \pi e^{x+1}\sin\pi(x+1) - \pi e^{x}\sin\pi x$

↳ $\therefore g(x) = \pi e^{x}\sin\pi x$ (ㅋㅋㅋ)

((나)에 Sub. $x=0 \Rightarrow g(1)=0$, (가)에 Sub. $x=0 \Rightarrow g(0)=0$. 만-족 ㅋㅋ)

이상 (가) 조건 다 씀.

(나) 미분 $g'(x+1) - g(x) = \{f(x+1)-f(x)\}e^{x}$.

$g'(x) = \pi e^{x}(\sin\pi x + \pi\cos\pi x)$

$g'(x+1) - g(x) = \pi e^{x}(-(e+1)\sin\pi x - \pi e\cos\pi x) = (f(x+1)-f(x))e^{x}$.

$f(x+1)-f(x) = -\pi(e+1)\sin\pi x - \pi^{2}e\cos\pi x$.

적분 → $\int_{x}^{x+1} f(t)dt = (e+1)\cos\pi x - \pi e\sin\pi x + C$.

Sub. $x=0 \rightarrow C = \frac{1}{9}e+3$. $\left(\int_0^1 f(t)dt = \frac{10}{9}e+4\right)$.

let. $H(x) = \int_{x}^{x+1} f(t)dt$.

$\boxed{\text{Ans}} = \sum_{x=1}^{9} H(x)$

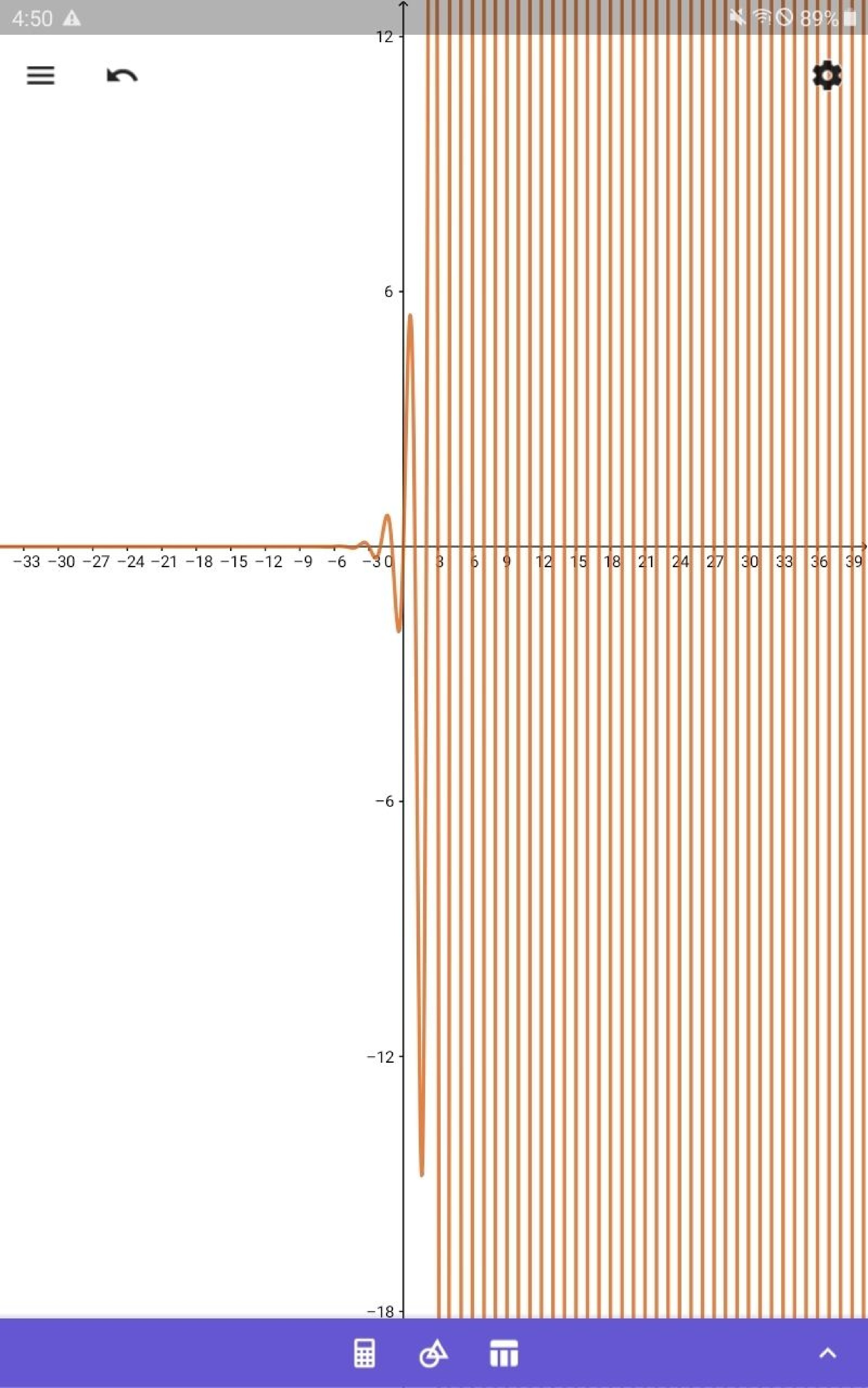
$\sum_{x=1}^{9} H(x) = \sum_{x=1}^{9}\left\{(e+1)\cos\pi x - \pi e\sin\pi x + \frac{1}{9}e+3\right\}$

$= -(e+1) + 0\times 9 + 9\left(\frac{1}{9}e+3\right)$

$= \underline{26}$ ///■

QED.

Ans. 26.



12
6
−6
−12
−18
−33 −30 −27 −24 −21 −18 −15 −12 −9 −6 −3 0 3 6 9 12 15 18 21 24 27 30 33 36 39

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

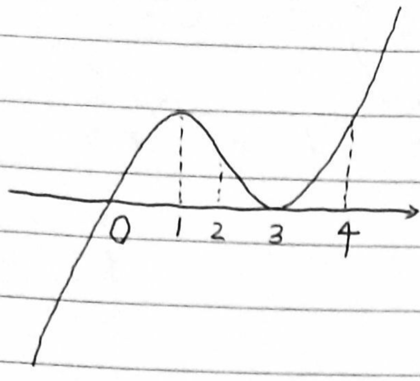
$f(0)=0$, $f'(1)=1$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

let. $f(x)-x=h(x)$. let. $h(x)$의 최고차항 계수 $=a$. $(a>0)$

$h(0)=0$ $h'(1)=0$. ($0=h(x)$는 중근 가짐)

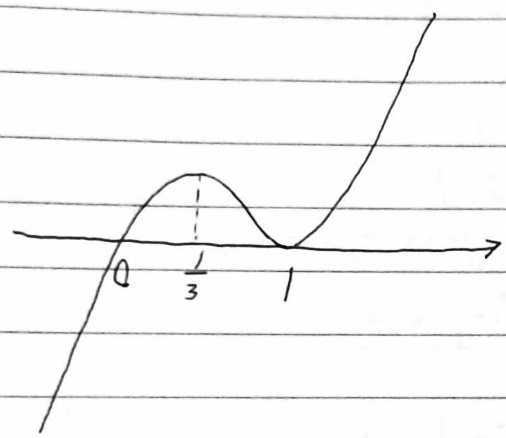
Case A. 0이 중근이 아닌 경우

①



$h(x)=ax(x-3)^2$

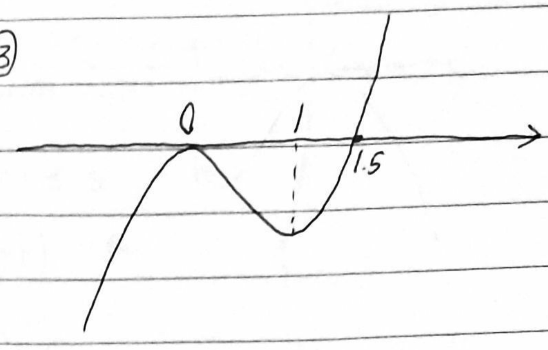
②



$h(x)=ax(x-1)^2$

Case B. 0이 중근인 경우.

③



$h(x)=ax^2(x-1.5)$

(4) $y=h(x)+2x$ 도 서로 다른 실근 2개.

그러나 Case A에서 $ax(x-b)^2+2x=0$ ($b=1$ 또는 3)

$x(a(x-b)^2+2)=0$. 근이 1개뿐이므로 불가.

즉 Case B만 옳다.

N.G.D. $ax^2(x-1.5)+2x=0$.

$x(ax(x-1.5)+2) = x(\underbrace{ax^2-\frac{3}{2}ax+2})$.

근 1개 중근! let $g(x)$. $g(x)$의 $D=\frac{9}{4}a^2-8a=0$, $a>0$.

$\therefore a=\frac{32}{9}$.

이게 최선이었다. 훗.. 나란 녀석

$h(x)+x=f(x)=\frac{32}{9}x^3-\frac{16}{3}x^2+x$. $f(3)=96-48+3=51$.

30. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_t^x f(s)ds$$

라 하자. 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(a)=0$ (나) 함수 $\lvert g(x)-g(a)\rvert$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1이다.

실수 t에 대하여 $g(a)$의 값을 $h(t)$라 할 때, $h(3)=0$이고 함수 $h(t)$는 $t=2$에서 최댓값 27을 가진다.

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(ii) $a=\frac{1}{3}$ 일 때

$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{3}x\right)+b$ 에서

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+b$

$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+b$

$=-1+b=0$

이므로 $b=1$

이때 $f\left(\frac{7}{2}\pi\right)=0$ 이다.

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{3}$, $b=1$ 이고

$30(a+b)=30\times\left(\frac{1}{3}+1\right)=40$

29. [출제의도] 수열의 합을 이용하여 문제를 해결한다.

직선 AB 의 방정식은

$y=-\frac{n+5}{n+4}x+n+5$

자연수 a 에 대하여 $x=a$ 일 때

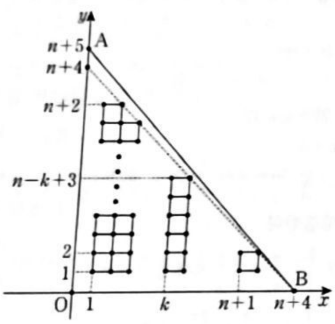
$y=-\frac{n+5}{n+4}a+n+5$

$=n+5-\left(1+\frac{1}{n+4}\right)a$

$=n+5-a-\frac{a}{n+4}$

$0<a<n+4$ 일 때, $0<\frac{a}{n+4}<1$ 이므로

$x=a$ 일 때, y 좌표가 자연수인 점의 개수는 $n+4-a$ 이다.



두 자연수 a, b 에 대하여 삼각형 AOB 의 내부에 포함되는 한 변의 길이가 1이고 각 꼭짓점의 좌표가 자연수인 정사각형의 네 꼭짓점의 좌표를 각각

(a, b), $(a+1, b)$, $(a+1, b+1)$, $(a, b+1)$

이라 하면

$a=1$ 일 때, $1\le b\le n+1$ 이므로 정사각형의 개수는 $(n+1)$ 이다.

$a=2$ 일 때, $1\le b\le n$ 이므로 정사각형의 개수는 n 이다.

$a=3$ 일 때, $1\le b\le n-1$ 이므로 정사각형의 개수는 $(n-1)$ 이다.

⋮

$a=n+1$ 일 때, $b=1$ 이므로 정사각형의 개수는 1 이다.

따라서

$a_n=(n+1)+n+(n-1)+\cdots+1$

$=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

$=\frac{1}{2}(n^2+3n+2)$

$\sum_{n=1}^{8}a_n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8}(n^2+3n+2)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{8\times9\times17}{6}+3\times\frac{8\times9}{2}+2\times8\right)$

$=164$

30. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이용하여 문제를 해결한다.

$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 4 인 삼차함수이므로

$g(x)=\int_t^x f(s)ds$ 는 최고차항의 계수가 1 인 사차함수이고 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)-g(a)$ 는 미분가능하다.

$g(x)\ge g(a)$ 일 때, $|g(x)-g(a)|=g(x)-g(a)$

$g(x)<g(a)$ 일 때, $|g(x)-g(a)|=-\{g(x)-g(a)\}$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$ 은 $g(x)-g(a)\ne0$ 인 모든 x 에서 미분가능하다.

$g(x)-g(a)=0$ 를 만족시키는 x 의 값을 k 라 하면, $g(k)=g(a)$ 이므로

$\frac{|g(x)-g(a)|-|g(k)-g(a)|}{x-k}=\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$

(i) $x=k$ 의 좌우에서 $g(x)-g(a)$ 의 부호가 같을 때

$\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$ 는 $x=k$ 에서 미분가능하다.

(ii) $x=k$ 의 좌우에서 $g(x)-g(a)$ 의 부호가 다르고 $f(k)=0$ 일 때

$\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$ 는 $x=k$ 에서 미분가능하다.

(iii) $x=k$ 의 좌우에서 $g(x)-g(a)$ 의 부호가 다르고 $f(k)\ne0$ 일 때,

$\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(a)|}{x-k}\ne\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(a)|}{x-k}$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$ 는 $x=k$ 에서 미분가능하지 않다.

(나)에서 함수 $|g(x)-g(a)|$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수가 1 이므로

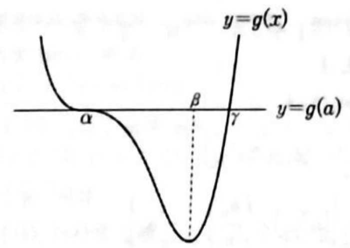
$g(x)-g(a)=0$, $g'(x)=f(x)\ne0$

인 x 가 단 하나 존재한다는 것을 알 수 있다.

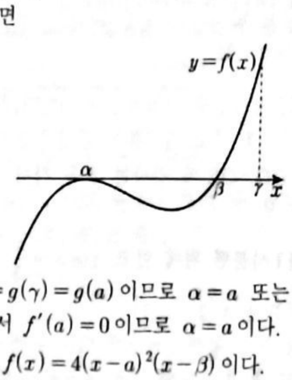
그러므로 사차함수 $y=g(x)$ 는 단 하나의 극솟값을 갖고 함수 $g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(a)$ 는 서로 다른 두 점에서 만난다.

$g'(x)=0$ 인 방정식 $g(x)-g(a)=0$ 의 근을 α, 함수 $g(x)$ 가 극솟값을 가질 때의 x 의 값을 β 라 하면 α, β 의 대소관계에 따라 다음과 같이 두 경우로 나눌 수 있다.

(i) $\alpha<\beta$ 인 경우 (단, $g(\gamma)=g(\alpha)$, $\beta<\gamma$)



함수 $y=g(x)$ 의 도함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 보면



$g(\alpha)=g(\gamma)=g(a)$ 이므로 $\alpha=a$ 또는 $\gamma=a$

(가)에서 $f'(a)=0$ 이므로 $\alpha=a$ 이다.

따라서 $f(x)=4(x-a)^2(x-\beta)$ 이다.

$h(t)=g(a)=\int_t^a f(s)ds=-\int_a^t f(s)ds$ 에서

$h'(t)=-f(t)$

함수 $h(t)$ 가 $t=2$ 에서 최댓값, 즉 극댓값을 가지므로 $h'(2)=-f(2)=0$

따라서 $a=2$ 또는 $\beta=2$ 이다.

$a=2$ 이면 $h(2)=\int_2^2 f(t)dt=0\ne27$

이므로 $a\ne2$

$\beta=2$ 이면

$h(3)=\int_3^a f(s)ds=0$ 이고,

$h(2)=\int_2^a f(s)ds=27$ 이므로

$h(2)-h(3)=\int_2^3 f(s)ds=27$ 이다.

$\int_2^3 f(s)ds$

$=\int_2^3 4(s-a)^2(s-2)ds$

$=\int_2^3 4\{s^3-2(a+1)s^2+(a^2+4a)s-2a^2\}ds$

$=\left[s^4-\frac{8}{3}(a+1)s^3+2(a^2+4a)s^2-8a^2s\right]_2^3$

$=65-\frac{152}{3}(a+1)+10(a^2+4a)-8a^2$

$=2a^2-\frac{32}{3}a+\frac{43}{3}=27$

이므로

$3a^2-16a-19=0$

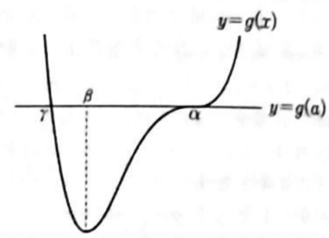
$(a+1)(3a-19)=0$

$a=-1$ 또는 $a=\frac{19}{3}$

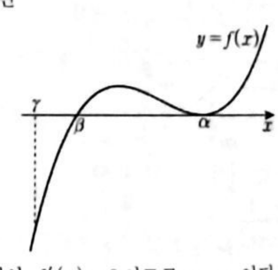
$a<2$ 이므로 $a=-1$ 이다.

$f(x)=4(x+1)^2(x-2)$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $\alpha>\beta$ 인 경우 (단, $g(\gamma)=g(\alpha)$, $\gamma<\beta$)



함수 $y=g(x)$ 의 도함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 보면



(가)에서 $f'(a)=0$ 이므로 $\alpha=a$ 이다.

따라서 $f(x)=4(x-a)^2(x-\beta)$ 이다.

$\alpha<\beta$ 인 경우와 마찬가지로 $\beta=2$ 이다.

$f(x)=4(x-a)^2(x-2)$

$a\ne3$ 이면 $h(3)=\int_3^a f(s)ds\ne0$ 이므로 $a=3$

따라서 $f(x)=4(x-3)^2(x-2)$ 이고

$h(2)=\int_2^a f(s)ds=\int_2^3 4(s-3)^2(s-2)ds=\frac{1}{3}$

$h(2)\ne27$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 가 존재하지 않는다.

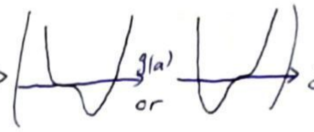
따라서 $f(x)=4(x+1)^2(x-2)$ 이다.

$f(5)=4\times36\times3=432$

Solution. $g(x) = \int_t^x f(s)\,ds$

$g(a) = \int_t^a f(s)\,ds = -\int_a^t f(s)\,ds = h(t).$

$h'(t) = -f(t)$. (a는 상수이므로 무시).

(4)에서 $g(x) = (x-\alpha)^3(x-\beta) + g(\alpha)$ 꼴임은 잘 알 수 있다. ($\alpha \neq \beta$) $\Rightarrow$ 

α, β 중 하나는 a. ··· ①

$h(t) = g(a) = \int_t^a f(s)\,ds = g(a) - g(t) = -(t-\alpha)^3(t-\beta).$

$g'(x) = f(x) = (x-\alpha)^2(4x-3\beta-\alpha)$

$g(x)$의 개형을 보면 $\alpha, \frac{3\beta+\alpha}{4}$ 중 하나는 a ··· ②

①, ②에 의해 $a = \alpha$ ($\alpha \neq \beta$이므로 겹침 X)

남은 조건은 $h(t) = -(t-\alpha)^3(t-\beta)$ 에서
$h(3) = 0$
$h(2) = 27$
$h'(2) = 0$.

$h'(x) = -f(x) = -(x-\alpha)^2(4x-3\beta-\alpha).$

$\alpha, \frac{3\beta+\alpha}{4}$ 중 하나는 2. ··· ③

$h(x)$를 통해 $\rightarrow$ α, β 중 하나는 3. ··· ④

$\rightarrow$ $-(2-\alpha)^3(2-\beta) = 27$ $\rightarrow$ $\alpha \neq 2, \beta \neq 2$. ··· ⑤

③, ⑤에서 $\alpha \neq 2$ 이므로 $\frac{3\beta+\alpha}{4} = 2$, $\alpha = 8-3\beta$.

④를 사용하면 $8-3\beta$ 와 β 중 하나는 3. $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} \beta = 3 \\ \downarrow \\ \alpha = -1 \end{pmatrix}$ 또는 $\begin{pmatrix} \beta = \frac{5}{3} \\ \downarrow \\ \alpha = 3 \end{pmatrix}$

Case A. Case B.

A. $h(t) = -(t+1)^3(t-3)$ B. $h(t) = -(t-3)^3(t-\frac{5}{3})$.

이중 $h(2) = 27$을 만족하는 Case는 A뿐.

$\therefore$ $h(t) = -(t+1)^3(t-3)$. $f(x) = (x-\alpha)^2(4x-3\beta-\alpha)$

$= (x+1)^2(4x-8)$

$\rightarrow$ $f(5) = 36 \cdot 12 = 432$.

432

QED.

21. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1 < x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

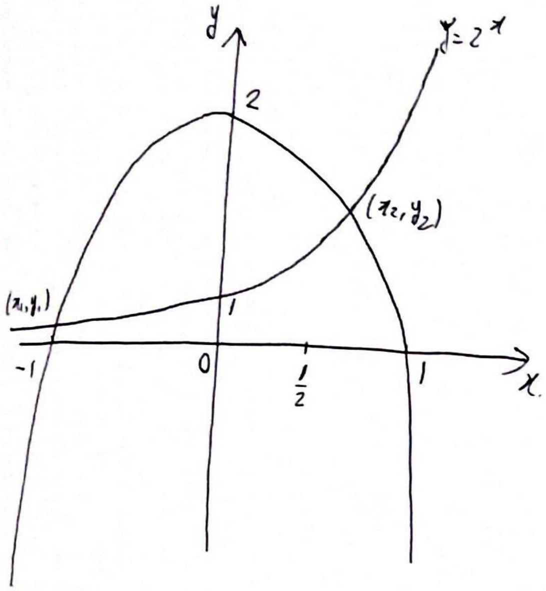
① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$y=2^x$

$y=-2x^2+2$

(20210621-4 평가원)

sol. $y=2^x$는 y축 대칭하기 좋다.



(그림 왜곡됨...)

식 정리부터. $2^{x_2}=2-2x_2^2=y_2$

$2^{x_1}=2-2x_1^2=y_1$

(ㄱ) x_2와 $\frac{1}{2}$. 대소비교.

$2^{x_2}=2-2x_2^2$.

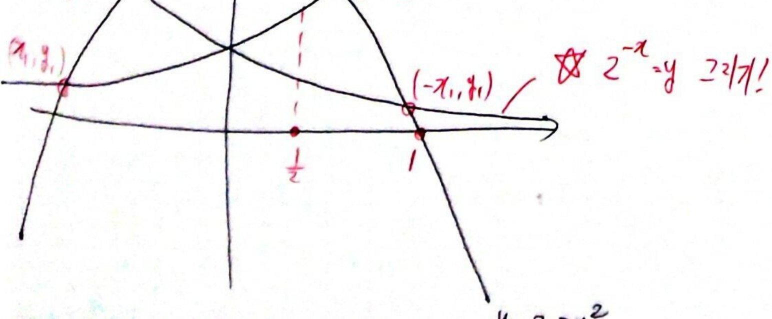
$2^{\frac{1}{2}}<2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\therefore x_2>\frac{1}{2}$. (ㄱ=참)

(이전 문제들 풀이처럼 차이함수 설정하기도 Good.)

(ㄴ,ㄷ) $y=2^x$의 y축 대칭

간단히 보면



☆ $2^{-x}=y$ 그리기!

$(x_1, y_1)\longrightarrow(-x_1, y_1)$ 대칭을 통해

① $x_2<-x_1$ 이며, $\boxed{① \rightarrow x_1+x_2<0}$

② ㄱ추론으로 $\frac{1}{2}<x_2<1$ 이므로

$\frac{1}{2}<-x_1<1$ 도 추론됨.

$\frac{1}{2}<x_2<1$

$-1<x_1<\frac{1}{2}$

$\boxed{② \rightarrow -\frac{1}{2}<x_1+x_2<\frac{3}{2}}$.

$\therefore -\frac{1}{2}<x_1+x_2<0$

ㄴ의 식은 $y_2-y_1<x_2-x_1$.

$y_2-y_1=(2-2x_2^2)-(2-2x_1^2)$

$=-2(x_2-x_1)(x_2+x_1)$.

$(x_2-x_1)>0$, $x_2+x_1>-\frac{1}{2}$ 이므로

$y_2-y_1=-2(x_2-x_1)(x_2+x_1)<(x_2-x_1)$은

자명하다. (ㄴ=참)

ㄷ의 식은 $\frac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2=2^{x_1+x_2}<1$.

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x_1+x_2<0$.

(ㄴ선지와 ㄷ선지가 수식상 겹친다. 본래의 의도된 풀이가 기울기 관찰이니 그렇겠지만 살짝 아쉽다.)

이 식은 ㄴ,ㄷ 선지 이전에 살폈다.

(ㄷ=참)

Ans). ㄱ.ㄴ.ㄷ.

18. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ \{\ln(1+x^4)\}^{10} & (x>0) \end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)\,dt$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x \le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=0$이다.

ㄴ. $g(1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. $g(a) \ge 1$인 실수 a가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ \left(\ln(1+x^4)\right)^{10} & (0 < x) \end{cases}$$

$$g(x) = \int_0^x f(t) f(1-t)\, dt.$$

(20210918 (가) 평가원)

sol. $\boxed{\text{대칭성 파악}}$

$$g(1-x) = \int_0^{1-x} f(t) f(1-t)\, dt.$$

let. $t = 1-a$.

$$= \int_1^x f(a)\cdot f(1-a)\cdot(-da)$$

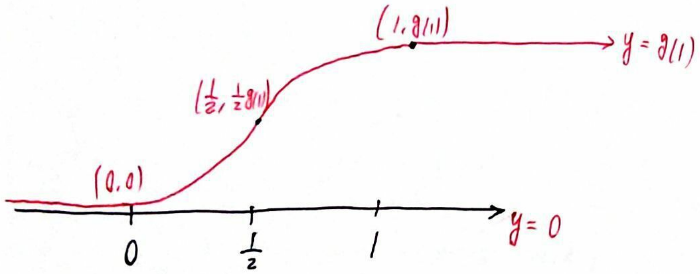
$$= -\int_1^x f(a)\cdot f(1-a)\, da.$$

$$= -\int_0^x f(t) f(1-t)\, dt + \int_0^1 f(t) f(1-t)\, dt.$$

$\therefore\ g(x) + g(1-x) = g(1).$

즉 $g(x)$는 $\left(\frac{1}{2}, g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$을 중심으로 점대칭.

$2g\left(\frac{1}{2}\right) = g(1)$, $g(0) = 0$.



$y = g(x)$에서 미분.

$$g'(x) = f(x)\cdot f(1-x).$$

$$g'(x) = \begin{cases} x \le 0 \to 0 & (\text{상수함수}) \\ 0 \le x \le 1 \to \left(\ln(1+x^4)\right)^{10}\cdot\left(\ln(1+(1-x)^4)\right)^{10} \ge 0 & (\text{증가함수}) \\ 1 \le x \to 0 & (\text{상수함수}) \end{cases}$$

$g(x)$가 점대칭함수이므로 $g'(x)$는 선대칭의 값을 가진다.

즉 위와 같이 그려짐이 자명하다. ($g(1) > 0$의 해석).

ㄱ, ㄴ이 참임은 밝혀짐.

($g'(x) \ge 0$ 임을 밝히는 과정은 여러 가지다.)

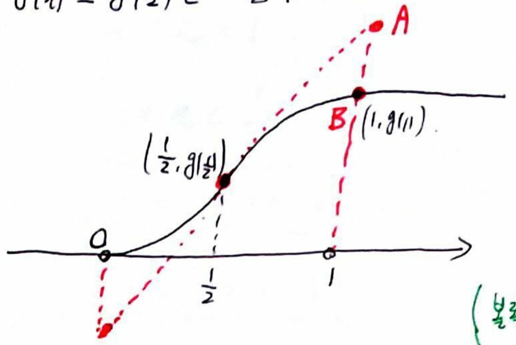
$g(x)$가 점대칭이므로 $\left(g(x) + g(1-x) = g(1)\right)$

$g'(x)$는 $\left(\frac{1}{2}, g'\left(\frac{1}{2}\right)\right)$을 중심으로 선대칭한다.

이는 곧 $g'(x)$가 $g'\left(\frac{1}{2}\right)$이라는 극대를 가짐을 의미.

$\boxed{\text{(g' 그래프 그리는 시간 낭비할 필요가 없다.)}}$

$g'(x) \le g'\left(\frac{1}{2}\right)$은 이렇게 나타낼 수 있다.



(볼록성은 결정되므로 굳이 $g''(x)$ 없어도 됨.)

$y = g'\left(\frac{1}{2}\right)x + g\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{g'\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$ 을 그렸을 때.

A, B 비교.

$A\left(1,\ g\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} g'\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$B\left(1,\ g(1)\right)$

$g(x)$의 점대칭성에 의해

$$\frac{1}{2}g(1) + \frac{1}{2}g'\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}g'\left(\frac{1}{2}\right) \ge g(1) = 2g\left(\frac{1}{2}\right) \cdots (ㄷ)$$

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) \ge \underline{g(1) \ge g(x)}$$ ☆(최댓값의 논리)

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\ln\frac{17}{16}\right)^{10} < (\ln e)^{10} = 1.$$

$\therefore\ f\left(\frac{1}{2}\right) < 1.$

$g'\left(\frac{1}{2}\right) < 1$

$g(x) \le g(1) \le g'\left(\frac{1}{2}\right) < 1.$

$\to g(x) < 1$

ㄷ은 거짓

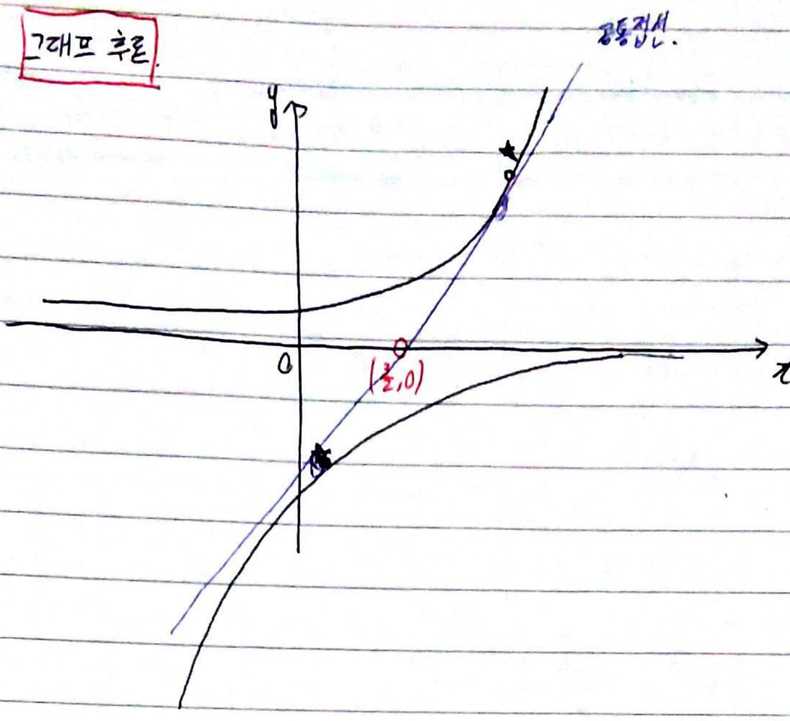
Ans. ㄱ, ㄴ

30. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

모든 실수 x에 대하여 부등식 $-e^{-x+1} \leq ax+b \leq e^{x-2}$ 이 성립한다.

$\left|M \times m^3\right| = \dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

SOL ① $\boxed{\text{그래프 추론}}$



$a>0$ 임은 자명.

① $b>0$ 일 때 최댓값 규명. $y=e^{x-2}$ 만 고려함.

$(0,b)$ (t, e^{t-2}) (접점의 x좌표 let, t)

$$\text{기울기} = a = \frac{e^{t-2}-b}{t} = e^{t-2}.$$

$$a=e^{t-2}, \quad b=(1-t)e^{t-2}.$$

$$ab=(1-t)e^{2t-4}.$$

let. $h(t)=(1-t)e^{2t-4}$.

$h'(t)=(1-2t)e^{2t-4}$.

$t=\frac{1}{2}$ 에서 $ab=\frac{1}{2}e^{-3}$ (최대, 오류X)

$\therefore \max(ab)=\frac{1}{2}e^{-3}$

② $b<0$ 에서 최솟값 규명.

$y=-e^{-x+1}$ 과 $y=e^{x-2}$ 는 $x=\frac{3}{2}$ 에서, $(\frac{3}{2}, 0)$에서 점대칭을 이룬다.

두 그래프가 양의 기울기인 공통접선을 가짐은 자명하며, $(\frac{3}{2},0)$을 지난다

$a>0$, $b<0$ 에서 ab의 최소가 공통접선에서 생성됨은 간단한 추론으로

증명 가능하다. [기울기↑: e^{x-2}에서 모순.
$-b$↑: $-e^{-x+1}$에서 모순.

이게 최선이었다. 훗.. 나란 녀석

$(d, -e^{-d+1})$ $(\frac{3}{2}, 0)$ (f, e^{f-2}) 를 지나는 공통접선 가정

기울기 $a = e^{-d+1} = e^{f-2} \Rightarrow \dfrac{e^{f-2}+e^{-d+1}}{f-d} = \dfrac{2e^{f-2}}{f-d}$

$f-d=2, \ f+d=3.$

$f=\frac{5}{2}, \ d=\frac{1}{2}.$

$\therefore a = e^{\frac{1}{2}}, \ b = -\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}$ $\quad \min(ab) = -\frac{3}{2}e.$

$\therefore |M \cdot m^3| = |-\frac{27}{16}| = \frac{27}{16}$ $\quad$ Ans) 43.

5DL ② $\boxed{\text{식 계산으로 미분 극점 파악}}$

우선, 그래프를 통해 $a>0$ 임은 추론 가능하다.

주어진 식: $-e^{-x+1} \le ax+b \le e^{x-2}$ (모든 실수 x).

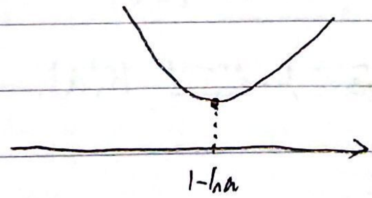
따로 봐주도록 한다.

① $-b \le ax + e^{-x+1}$

let $h(x) = ax + e^{-x+1}$.

$h'(x) = a - e^{-x+1}$.

$x = 1-\ln a$ 에서 $h'(x) = 0$.

$a>0$, $h(x)$가  형태.

$-b \le h(x) \Leftrightarrow -b \le h(1-\ln a) = a(2-\ln a).$

② $b \le e^{x-2} - ax$

① 에서와 동일한 방식으로 풀어하면

$b \le -a(1+\ln a)$ 를 구할 수 있다.

$\therefore\ -2a + a\ln a \le b \le -a - a\ln a.$

(부등식 최대-최소 문제로 바뀐다.)

$-2a^2 + a^2\ln a \le ab \le -a^2 - a^2\ln a.$

우선 a의 범위를 정하자. $-2a^2 + a^2\ln a \le -a^2 - a^2\ln a.$

$2a^2\ln a \le a^2.$

$\ln a \le \frac{1}{2}.$

$\therefore\ a \le \sqrt{e}$ 에서 성립.

let $-2a^2 + a^2\ln a = g(a)$

$-a^2 - a^2\ln a = k(a)$

$g(a) \le ab \le k(a)$ ($g(a)$의 최대, $k(a)$의 최소를 구한다.)

$g'(a) = -a(3 + 2\ln a).$

$a = 0,\ e^{-\frac{3}{2}}$ 에서 극값이나 0은 범위 포함 X.

$\therefore\ M = \frac{1}{2}e^{-3}.$

$k'(a) = a(2\ln a - 3).$

$a \le \sqrt{e}$ 일 때 $k(a)$는 감소함수.

즉, $a = \sqrt{e}$ 에서 최소인 $k(a).$

$\therefore\ m = -\frac{3}{2}e$

$\therefore\ |M \cdot m^3| = \frac{27}{16}$

Ans) 43

이게 최선이었다. 흫.. 나란 녀석

20. 함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0,\,1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은? [4점]

> 함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
> $$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx=2,\quad \int_{-1}^{1} x\,h(x)\,dx=-\frac{1}{32}$$
> 이다.

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$f(x) = \pi \sin 2\pi x$.

$g(x)$ 치역 $[0,1]$.

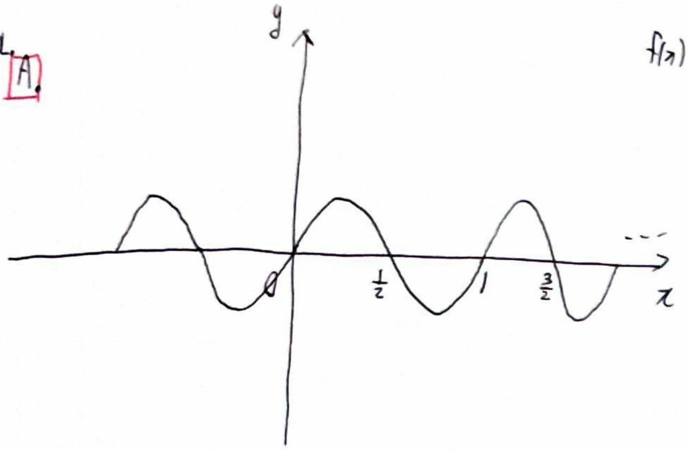
자연수 n.

$h(x) = f(nx)\, g(x)$는 연속함수.

$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 2$

$\int_{-1}^{1} x\,h(x)\,dx = -\frac{1}{32}$.

51. $\boxed{A}$



$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \pi \sin 2\pi x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2\pi x \Big|_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= 1$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2n}} f(nt)\cdot n\,dt = n\int_0^{\frac{1}{2n}} f(nx)\,dx = 1.$$

let. $x = nt$

$dx = n\,dt$

$$\int_0^{\frac{1}{2n}} f(nx)\,dx = \frac{1}{n}.$$

$y = f(nx) \geq 0$ 인 부분의 정적분은 $\frac{1}{n} \times 2n = 2$.

$$2 = \left(\begin{array}{c} f(nx) \geq 0 \text{ 에서의} \\ [-1,1]\text{의 정적분값.} \end{array}\right) \geq \int_{-1}^{1} f(nx)\,g(x)\,dx = 2$$

$\therefore \int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 2$ 이기 위해서

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (f(nx) \leq 0) \to (\text{음의 값 상쇄}) \\ 1 & (0 \leq f(nx)) \to (\text{양의 값 극대화}) \end{cases}$$

이후 풀이는
모두 $\boxed{A}$ 기반

→ 필수적인 요소.
이후 (4) 해석은 자신이 원하는 대로.

$\boxed{B-1.}$ 대칭성 활용 후 N.G.D. 실전적 풀이.

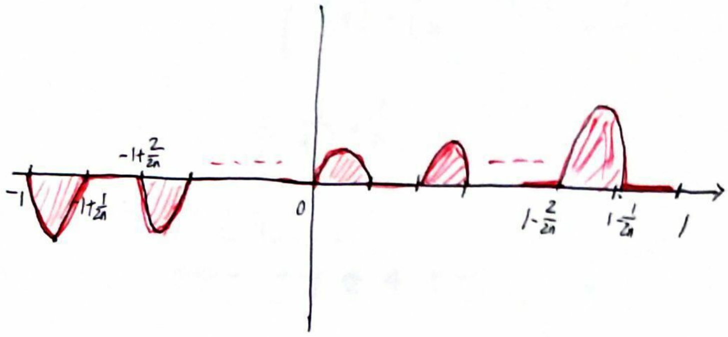
$\int_{-1}^{1} x\,h(x)\,dx$ 를 관찰

$y = x f(nx)$ 는 y축 선대칭.

이중 $xh(x)$에서 살리는 부분은

$$\int_{-1}^{-1+\frac{1}{2n}} x f(nx)\,dx + \int_{-1+\frac{2}{2n}}^{-1+\frac{3}{2n}} x f(nx)\,dx$$
$$+ \cdots + \int_{1-\frac{4}{2n}}^{1-\frac{3}{2n}} x f(nx)\,dx + \int_{1-\frac{2}{2n}}^{1-\frac{1}{2n}} x f(nx)\,dx.$$

↳ $y = xh(x)$ 그리면 대충... (크기는 좀 과장해서 그림)



여기서

$$\int_{-1}^{-1+\frac{1}{2n}} x f(nx)\,dx = \int_{1}^{1-\frac{1}{2n}} (-t)\, f(-nt)\cdot(-dt)$$
$$= \int_{1-\frac{1}{2n}}^{1} x f(nx)\,dx.$$

let. $x = -t$

$dx = -dt$

→ $g(x)$로 인해 상쇄된 부분 몰아주기.

→ $\int_{-1}^{1} x h(x)\,dx = \int_0^1 x f(nx)\,dx$. --- ⓐ

$$= \int_0^1 \pi x \sin 2n\pi x\,dx$$
$$= -\frac{x}{2n}\cos 2n\pi x + \frac{1}{4n^2\pi}\sin 2n\pi x \Big|_0^1$$
$$= -\frac{1}{2n}$$

$$-\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}$$

$\therefore n = 16$.

B-2. ⓐ 이후 적분법 (본인의 현장 풀이)

$$\int_{-1}^{1} x h(x)\,dx = \int_0^1 x f(nx)\,dx$$

$$= \frac{x}{n}F(nx)\Big|_0^1 - \int_0^1 n F(nx)\,dx.$$

($f(x) = \pi \sin 2\pi x$ 의 부정적분 중 $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2\pi x$ 설정)

$$= \frac{1}{n}F(n) - \int_0^1 n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2n\pi x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2n}\cos 2n\pi = -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}.$$

$\therefore n=16.$

C) $H(x)$ 설정 → 역함수 적분.

B-2 에서 $F(x)$ 설정 대신, 아예 처음부터

$F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2\pi x$ 사용.

$h(x)$는 0 또는 $f(nx)$.

$h(x)$의 부정적분은 0 또는 $\frac{1}{n}F(nx)$.

$$\rightarrow \int_{-1}^{-1+\frac{1}{2n}} x h(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} H^{-1}(x)\,dx = \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{n^2}(n)$$

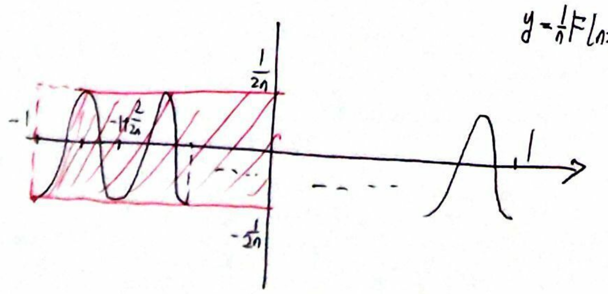
$$\int_{-1+\frac{2}{2n}}^{-1+\frac{3}{2n}} x h(x)\,dx = \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{n^2}(n-1)$$

⋮

$$\int_{1-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{2n}} x h(x)\,dx = \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{n^2}(n-1).$$

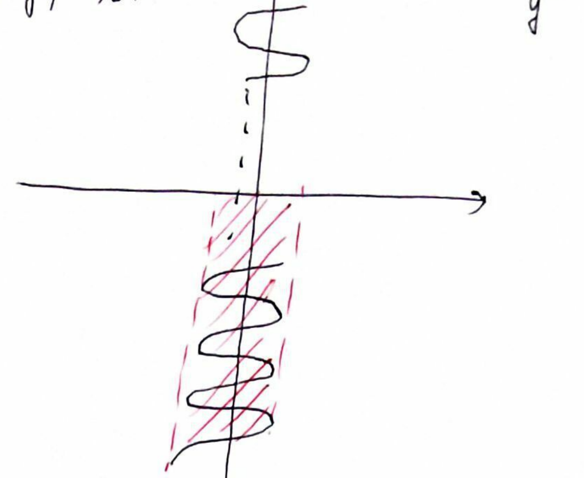
(왜?) → $H^{-1}(x)$와 $H(x)$ 그래프 그린 후

역함수의 면적을 살피면



ex. $\int_{-1}^{-1+\frac{1}{2n}} x h(x)\,dx \longleftrightarrow \int_{H(-1)}^{H(-1+\frac{1}{2n})} H^{-1}(x)\,dx$

이 y의 역함수는



$$\int_{-1}^{-1+\frac{1}{2n}} x h(x)\,dx = \int_{H(-1)}^{H(-1+\frac{1}{2n})} H^{-1}(x)\,dx$$

$$= -\left(\frac{2}{2n}\times 1 - \left(\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{n} - \int_{-1}^{-1+\frac{1}{2n}}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n}\cos 2n\pi x\right)dx\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{n}.$$

이후 구간에 $\frac{1}{n^2}$ 씩 더해진다.

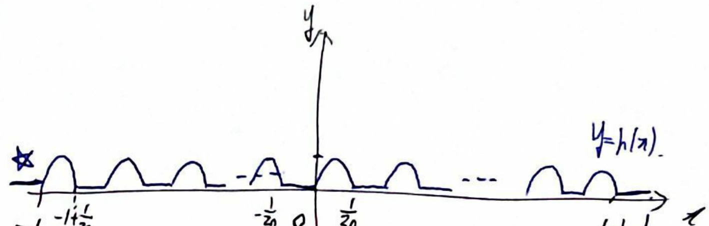
그래프 관찰을 통해 알 수 있다.

$$\therefore \frac{1}{4n^2}\cdot 2n - \frac{n}{n^2} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}$$

$\therefore n=16.$

D) 그래프 읽어내기 (가장 합당한, 좋은 풀이)

$h(x)$를 바로 그려보자.



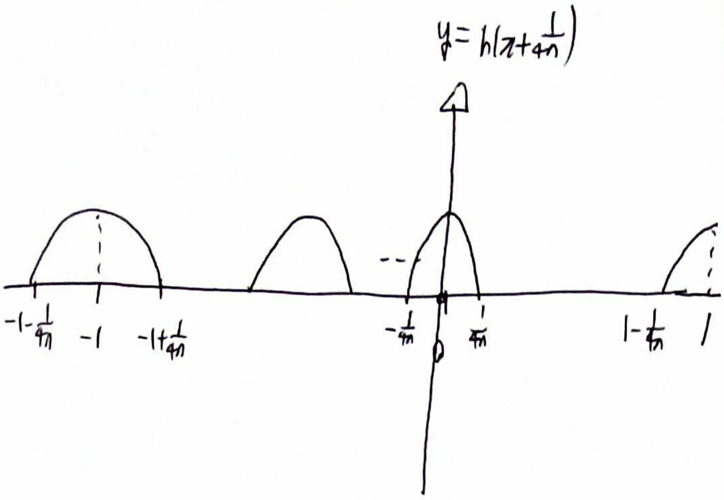
$$\int_{-1}^{1} x h(x)\,dx = \underline{\int_{-1}^{1}\left(x+\frac{1}{4n}\right)h(x)\,dx} - \frac{1}{4n}\int_{-1}^{1} h(x)\,dx$$

$$= 0 - \frac{1}{4n}\cdot 2 = -\frac{1}{2n}$$

$$-\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}$$

$\therefore n=16.$

왜?



이 함수는 y축 선대칭.

$$\int_{-1}^{1} xh(x)\,dx = \int_{-1-\frac{1}{4n}}^{1-\frac{1}{4n}} \left(x+\frac{1}{4n}\right) h\left(x+\frac{1}{4n}\right) dx$$

$$= \int_{-1-\frac{1}{4n}}^{1-\frac{1}{4n}} x\,h\left(x+\frac{1}{4n}\right) dx + \frac{1}{4n} \cdot \int_{-1}^{1} h(x)\,dx$$

$$= \int_{-1-\frac{1}{4n}}^{-1+\frac{1}{4n}} x\,h\left(x+\frac{1}{4n}\right) dx + \boxed{\int_{-1+\frac{1}{4n}}^{1-\frac{1}{4n}} x\,h\left(x+\frac{1}{4n}\right) dx}$$

$$+ \frac{1}{4n} \int_{-1}^{1} h(x)\,dx.$$

어떤 방식으로 대칭을 잡고

풀어도 결국 이 식은 사라지고,

두 개 적분식으로 정리된다.

→ 이런 식으로 대칭 적분을 활용하면

복잡한 식들도 간단하게 정리 가능.

이런 주기 대칭의 일반화를 쓰면

이 문제도 $\boxed{-\frac{1}{4n} \int_{-1}^{1} h(x)\,dx \text{로 정리}}$

20. 실수 $a\,(a>1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x t^2 f(t)\,dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값은? [4점]

① $\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$ ② $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

식계산 $g'(x) = 2x\int_0^x f(t)dt$

$= 2x\int_0^x (t+1)(t-1)(t-a)dt$

$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x (t^3-at^2-t+a)dt$

$= \frac{x^4}{4} - \frac{a}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + ax$

$= \frac{x}{12}(3x^3-4ax^2-6x+12a)$

$a>1$,

let. $h(x) = 3x^3-4ax^2-6x+12a$.

$h(x)$는 중근을 가진다.

$h'(x) = 9x^2-8ax-6$.

$h(x) - h'(x) = 0$을 만족하는 x에 대해서,

a를 x로 나타내면

① $h(x)$의 a.

$4a(x^2-3) = 3x^3-6x$.

$a = \frac{3x(x^2-2)}{4(x^2-3)}$

② $h'(x)$의 a.

$8ax = 9x^2-6$.

$a = \frac{9x^2-6}{8x} = \frac{3(3x^2-2)}{8x}$

$\therefore a = \frac{3x(x^2-2)}{4(x^2-3)} = \frac{3(3x^2-2)}{8x}$

let. $x^2 = k$,

$(k-2) \cdot 24k = 12(3k-2)(k-3)$.

$(k-2) \cdot 2k = (3k-2)(k-3)$.

$2k^2-4k = 3k^2-11k+6$.

$k=1$ or 6. $\rightarrow x=\sqrt{6}$. (오산 없음)

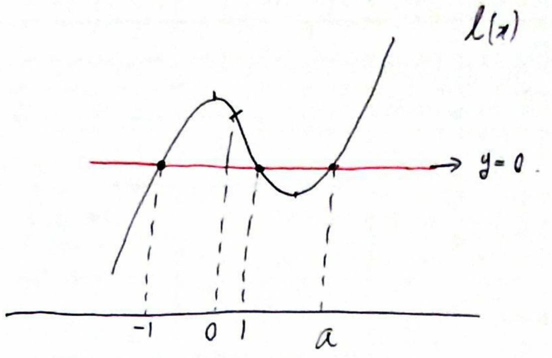
$\therefore$ Sub. $\max(a) = \sqrt{6}$.

개형 $g'(x) = 2x\int_0^x f(t)dt$

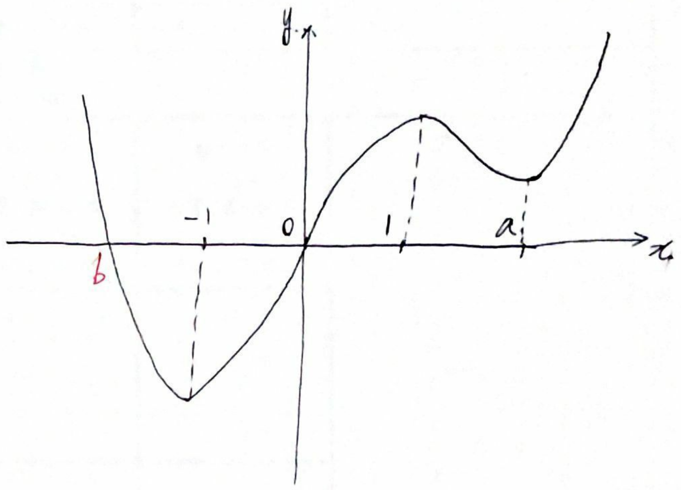
$= 2x\int_0^x (t+1)(t-1)(t-a)dt$

let. $l(x) = (x+1)(x-1)(x-a)$ $(a>1)$.

$l'(0) = -1$. (N.G.D.)



$\int_0^x l(t)dt$의 개형. (단, 미확정.)



x축 확정이 불가한 이유는 a가 지니는 함수값이 예측 불가하므로.

그러나 b가 존재함은 확정 (오직 하나의 극값)

$x=0$에서 근 확정. ($g'(x)$는 $x=0$에서 중근).

$\therefore \int_0^a l(t)dt \geq 0$ (음수의 값일 경우 극값은 여러 개.)

$\int_0^a l(t)dt = \int_0^a (t+1)(t-1)(t-a)dt$

$= \frac{a}{12}(-a^3+6a)$. $= \frac{a^2}{12}(6-a^2) \geq 0$.

$a>1$. $\therefore a^2 = 6$.

$a=\sqrt{6}$. (max Sub).

두 상수 $a, b(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x)=(x-a)(x-b)^2$ 이라 하자. 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $(x-1)\|h(x)\|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $h'(3)=2$

$(a<b)$

$f(x)=(x-a)(x-b)^2$

(20211228 가 평가원)

$g(x)=x^3+x+1.$

$h(x)=f(g^{-1}(x)).$

$\boxed{f(x)=h(g(x))=h(x^3+x+1) \text{ 암시.}}$

$(x-1)|h(x)|$는 미분가능.

$h'(3)=2.$

$f(8)=?$

SOL. $\boxed{\text{구간 치환.}}$

$f(x)=(x-a)(x-b)^2=h(x^3+x+1).$

$g(x)=x^3+x+1$은 $g'(x)>0$이므로

치역이 실수 전체를 포함한다. (치역이 실수 전체 집합)

→ let. $R(x)=(x-1)|h(x)|.$

let. $x=t^3+t+1.$

$R(t^3+t+1)=(t^3+t)|h(t^3+t+1)|$

$=t(t^2+1)\cdot|f(t)|.$

즉 $R(x)=t(t^2+1)\cdot|(t-a)(t-b)^2|$이 미분 가능 함수.

$R(x)=(t^2+1)\cdot(t-b)^2\cdot\{t|t-a|\}.$

$a\neq 0$일 경우 첨점이 생긴다.

$\therefore a=0.$

$f(x)=x(x-b)^2, \quad \underline{0<b}.$

$h'(3)=2$이므로

$f'(x)=(h(x^3+x+1))'=(3x^2+1)\cdot h'(x^3+x+1).$

$x^3+x+1=3$을 만족할 x는

$x=1$ 뿐이다. ($g(x)$는 증가함수이므로)

$f'(1)=4h'(3)=8.$

$f'(x)=(x-b)(3x-b).$

$f'(1)=(1-b)(3-b)$

$=b^2-4b+3=8.$

$b^2-4b-5=0.$

$(b-5)(b+1)=0$

$\underline{b=-1 \text{ OR } 5}.$

$0<b$이므로 $b=5.$

$\therefore f(8)=8\cdot 3^2=72.$

Ans. 72

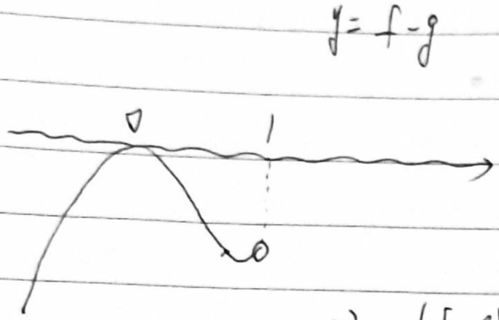
30. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

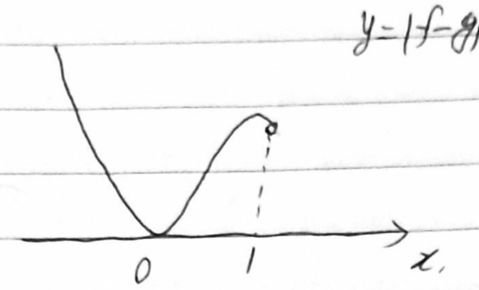
$$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

$h(x) = |f-g|, (x<1)$. $f(0) = g(0) \Rightarrow f'(0) = g'(0)$의 추론.

let. $f-g = x^2(x+a)$ (간단한 인수 정리)





$\Rightarrow (f-g)' = 3x^2+2ax$,

$f'(1) - g'(1) = 2a+3$.

절댓값 있을 경우 기울기는 $-2a-3$.

$\Rightarrow h'(1) = -2a-3$.

⊕ $h(1) = |f(1)-g(1)| = -a-1$.

⊕ $h(2)=5$.

복잡한 인수 정리 → $h(x) - (tx+r) = (x-1)^2 Q(x)$.

$t+r = -a-1$

$t = -2a-3$.

$\Rightarrow h(x) + ((2a+3)x - a - 2) = (x-1)^2 Q(x) = (x-1)^2(x+3a+7)$

($h(2)=5$ Sub.)

$$\therefore h(x) = \begin{cases} -x^3 - ax^2 = -(f-g) & \cdots ⓐ \\ (x-1)^2(x+3a+7) - ((2a+3)x - a-2) = (f+g). & \cdots ⓑ \end{cases}$$

ⓐ+ⓑ의 값은 이차항 계수가 존재할 수 없다. ($g(x)$= 일차함수)

N.G.D. → $a = -\frac{5}{2}$

$\therefore h(4) = 39$.

29. 함수 $f(x)=e^x+x-1$과 양수 t에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x \{t-f(s)\}\,ds$$

가 $x=\alpha$에서 최댓값을 가질 때, 실수 α의 값을 $g(t)$라 하자.

미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $\int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}\,dt$의 값을

구하시오. [4점]

20. 두 상수 a, b와 함수 $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2+1}$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ f(b-x) & (x \geq a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\displaystyle\int_a^{a-b} g(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{2}\ln 5$　② $\ln 5$　③ $\dfrac{3}{2}\ln 5$　④ $2\ln 5$　⑤ $\dfrac{5}{2}\ln 5$

202020 사관-(가)

상수 a, b. $f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x<a) \\ f(b-x) & (a \le x) \end{cases}$$

$g(x)$는 실수 전체에서 미분가능. $\int_a^{a-b} g(x)dx = ?$

Sol. → a의 부호 파악? ⇒ $f(x)$를 파악.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x^2+1} & (x<0) \\ \frac{x}{x^2+1} & (0 \le x) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} & (x<0) \\ \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} & (0 \le x) \end{cases}$$

$x=0$에서 $f'(x)$는 불연속. 즉, $g(x) = f(x)$ $(x<a)$에서 $a<0$임을 알 수 있다.

$\therefore a<0$.

b의 부호 파악 → $a \le x$에서 0의 위치.

앞에서 보았듯이 $x=0$에서 $f'(x)$는 불연속.

즉, $g(x) = f(b-x)$ $(a \le x)$에서 $b-x=0$의 근이 포함될 수 없다.

$b-a<0$.

→ $b<a<0$

$\therefore b<a<0$

$$\Rightarrow \; g(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{-x}{x^2+1} & (x<a) \\ f(b-x) = \dfrac{x-b}{(b-x)^2+1} & (a \le x) \end{cases}$$

$g(x)$의 $x=a$ 에서의 미분가능성.

– 풀이 ① $\quad f(a) = f(b-a)$, $\quad f'(a) = -f'(b-a)$.

$$\frac{-a}{a^2+1} = \frac{a-b}{(b-a)^2+1}$$

연립

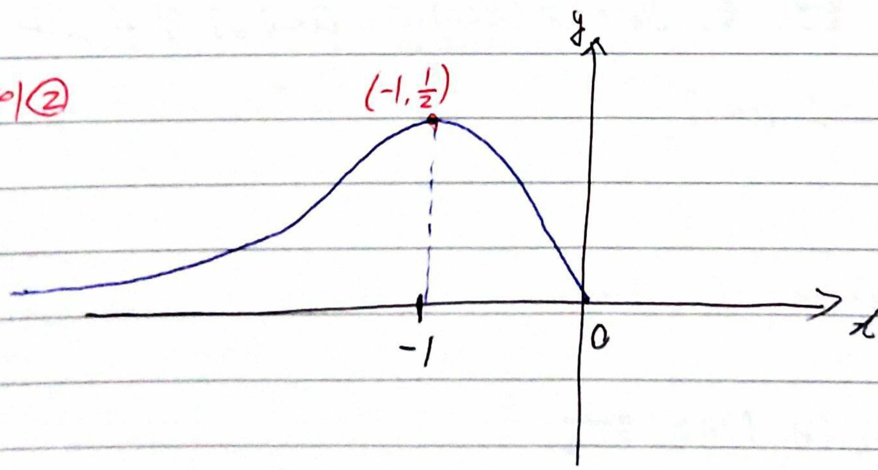
$$\frac{a^2-1}{(a^2+1)^2} = \frac{(a-b)^2-1}{((b-a)^2+1)^2}$$

$$\rightarrow \; (a^2+1)^2 = ((b-a)^2+1)^2 .$$

$$\rightarrow \; a^2 = (b-a)^2 .$$

$b \neq 0$, $\therefore b = 2a < 0$.

– 풀이②



$f(x) \quad (x \le 0)$

$a<0$, $\quad b-a<0$.

$f(a) = f(b-a)$ 인데 미분계수....

이건 안 되네... 짜리.

그냥 극석에서 풀다 보니...

하여튼 $b = 2a < 0$.

$f'(a) = a$.

$\rightarrow a = -1,\ b = -2$.

$$\int_{a}^{a-b} g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} g(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(-2-x)\,dx$$

$$= \int_{1}^{3} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln 10 - \frac{1}{2}\ln 2 = \boxed{\frac{1}{2}\ln 5}$$

20. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq a) \\ 2a-f(x) & (f(x)< a) \end{cases} \quad (a\text{는 상수})$$

라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=4$에서만 미분가능하지 않다.
>
> (나) 함수 $g(x)-f(x)$는 $x=\dfrac{7}{2}$에서 최댓값 $2a$를 가진다.

$f\left(\dfrac{5}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{5}{4}$ ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{7}{4}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{9}{4}$

(202020-나
사관)

$$g(x) = \begin{cases} 2a - f(x) & (f(x) < a) \\ f(x) & (a \le f(x)) \end{cases}$$

(나) → $g(x) - f(x) = \begin{cases} 2a - 2f(x) & (f(x) < a) \\ 0 & (a \le f(x)). \end{cases}$

$x = \frac{7}{2}$. $f(\frac{7}{2}) < a$.

$f(\frac{7}{2}) = 0$.

$2a$가 최댓값이므로 $f(x) < a$인 $f(x)$의 치역 중

최소가 0이다. 즉,

$$g(x) = \begin{cases} 2a - f(x) & (0 \le f(x) < a) \\ f(x) & (a \le f(x)) \end{cases}$$

$\therefore 0 \le f(x)$.

→ $x = \frac{7}{2}$에서 $f(x) = f(\frac{7}{2}) = 0$.

$0 \le f(x)$이므로 자명하게 $f'(\frac{7}{2}) = 0$.

$g(x)$의 그래프는 $y = a$인 경우 이외에는

미분불가한 점이 생기지 않는다.

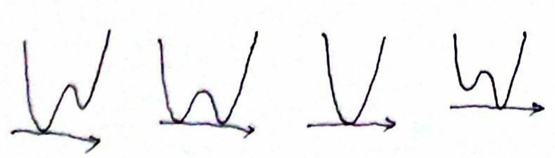
$y = a$

$f'(x) = 0$ ↓ 미·가 O

$f'(x) \ne 0$ ↓ 미·가 X

즉 $f(x)$의 관찰로 $g(x)$의 미분가능성 추론이 가능하다.

$f'(x) = 0$의 근의 개수가 3개거나 1개일 경우



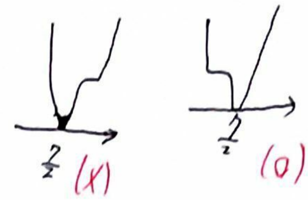
임의의 a의 경우 $y = a$ $(a > 0)$을 그릴 때

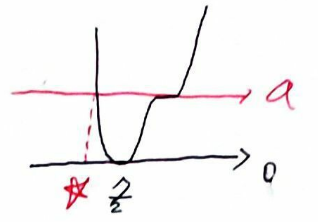
$x = 4$ 이외의 근이 필히 생기므로

(가)에 위배된다.

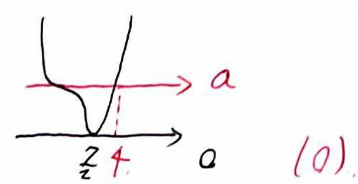
즉 $f'(x) = 0$의 근은 2개다.

ex.

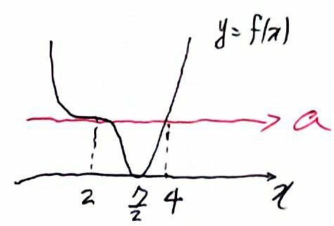




$4 < \frac{7}{2}$ (오순) → (X)



사차함수 비율관계 사용 →



$f(x) = (x-2)^3(x-4) + \frac{27}{16}$.

$\therefore f(\frac{5}{2}) = \frac{1}{8} \cdot (-\frac{3}{2}) + \frac{27}{16}$

$= \frac{3}{2}$

$\boxed{\frac{3}{2}}$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{|t|+1}\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(2) = 0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq 0$이다.

$g'(-1)$의 값이 최대가 되도록 하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f(-1) = \dfrac{n}{m - 3\ln 3}$ 일 때, $|m \times n|$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이고, $\ln 3$은 $1 < \ln 3 < 1.1$인 무리수이다.) [4점]

사관 202030, 최고차 1인 삼차함수 $f(x)$.

(가)

$$g(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1+|t|}\,dt.$$

$g'(2)=0$. 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq 0$.

$g'(-1)$의 값이 최대인 $f(x)$에서 $f(-1)$을 구하라.

$(1 < \ln 3 < 1.1)$

sol.

$$g(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\,dt & (x \leq 0) \\ \int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\,dt & (0 < x) \end{cases}$$

$x=2$ 관찰 $\Rightarrow g'(2)=0$. $g'(2) = \frac{f(2)}{3} = 0 \rightarrow \boxed{f(2)=0}$

$x=0$ 관찰 $\Rightarrow$ $g(0)=0$ (좌우극한 모두).

$g'(0)=f(0)$ (좌우극한 모두).

$g(x) \geq 0$이므로 $f(0) \neq 0$일 경우 모순.

$$\boxed{f(0)=0}$$

$\therefore$ let. $f(t) = t(t-2)(t-a)$.

$$\hookrightarrow g(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{t(t-2)(t-a)}{1-t}\,dt & (x \leq 0) \\ \int_0^x \frac{t(t-2)(t-a)}{1+t}\,dt. & (0 < x) \end{cases}$$

$\boxed{0<x\text{의 범위를 우선 살피자.}}$

$g(x) \geq 0$ 사용을 위해 a의 범위를 나눠보면

$$\begin{cases} a<0 & — ① \\ a=0 & — ② \\ 0<a<2 & — ③ \\ a=2 & — ④ \\ 2<a. & — ⑤ \end{cases}$$

포함.

(②+①) $a \le 0$

$g(x) = \int_0^x \frac{t(t-2)(t-a)}{t+1} dt$ 는 $0 < x < 2$ 구간 음수. 불가.

(④) $a = 2$.

$g(x) = \int_0^x \frac{t(t-2)^2}{t+1} dt$ → 가능. → ⑤와 함께 다루자.

(③) $0 < a < 2$.

$g(x) = \int_0^x \frac{t(t-2)(t-a)}{t+1} dt \ge 0$ 일 경우. N.G.D,

$$\int_0^x \frac{t^2(t-2)}{t+1} dt \ge a \cdot \int_0^x \frac{t(t-2)}{t+1} dt.$$

$$\int_0^x \left(t^2 - 3t + 3 + \frac{-3}{t+1}\right) dt \ge a \cdot \int_0^x \left(t - 3 + \frac{3}{t+1}\right) dt.$$

(g의 극값 중 극소는 $t=2$에서 나온다. $x=2$ 대입 시 만족해야 한다.)

$$\int_0^2 (\;''\;) dt \ge a \cdot \int_0^2 (\;''\;) dt.$$

$$\left[\frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2 + 3t - 3\ln(t+1) \Big|_0^2\right] \ge a \cdot \left[\frac{t^2}{2} - 3t + 3\ln(t+1) \Big|_0^2\right]$$

$$\frac{8}{3} - 3\ln 3 \ge a \cdot (-4 + 3\ln 3),$$

$$(4 - 3\ln 3) a \ge 3\ln 3 - \frac{8}{3}.$$

$$\frac{3\ln 3 - \frac{8}{3}}{4 - 3\ln 3} \le a,$$

이때 $g'(-1) = \frac{f(-1)}{2} = \frac{-3(a+1)}{2} \le \frac{-2}{4-3\ln 3}$.

이때 $f(-1) \le \frac{-4}{4-3\ln 3}$.

(일단 keep.)

여기서 끝. 하지만
이게 최선이었다. 후.. 나란 녀석

(④+⑤) $2 \le a$

좀 더 엄밀하게 ○○

$$g(x) = \int_0^x \frac{t(t-2)(t-a)}{1+t}\,dt.$$

$0<x$ 에서 $g(x)$의 극소는 $x=a$에서 나온다.

즉, $g(a) \ge 0$ 임을 보임으로 충분할 듯.

$\rightarrow \int_0^a \frac{t(t-2)(t-a)}{1+t}\,dt \ge 0.$ ($a\ge2$ 잊지 말자.)

이항하면 $\int_0^a \frac{t^2(t-2)}{1+t}\,dt \ge a\cdot\int_0^a \frac{t(t-2)}{1+t}\,dt.$

NGD 식을 ③에서 풀어오면,

$$\frac{a^3}{3} - \frac{3}{2}a^2 + 3a - 3\ln(a+1) \ge a\cdot\left(\frac{a^2}{2} - 3a + 3\ln(a+1)\right).$$

정리하면

$$\frac{a^3}{6} + \frac{3}{2}a^2 + 3a - (3a+3)\ln(a+1) \ge 0, \quad \text{---}(A)$$

~~$a\ge2$ 에서 이 식을 만족할까? 파악이 어렵다면 조건을 먼저 써보자.~~

$g'(-1)$이 최대일 경우를 먼저 따져보자는 것.

$$g'(-1) = \frac{f(-1)}{2} = -\frac{3}{2}(a+1).$$

a가 최소인 경우는 $a=2$일 때.

☆ (A)에 $a=2$ 대입 시 성립.

(A)의 성립을 먼저 잡아 푸는 것은 이 문제 풀이에
그닥 도움이 되지 않는다. 조건을 유리하게 사용하자.

자, 그렇다면 $g'(-1) = \frac{-2}{4-3\ln3}$ (③)

$g'(-1) = -\frac{9}{2}$ (④)

이 둘 중 무엇이 더 큰가?

$\frac{-2}{4-3\ln 3}$ vs $-\frac{9}{2}$. (?)

→ $1<\ln 3<1.1$ 조건을 사용하면

$\frac{-2}{4-3\ln 3}$ 가 더 크다. (N.G.D.)

따라서 이때 $f(x)$에 대해

$\boxed{\therefore f(-1)=\frac{-4}{4-3\ln 3}}$

↳ $x\le 0$ 에서의 $g(x)\ge 0$ 판단은

스스로 해 보시길 바람. 매우 좋은 문제.

→ 물론 ①②③④⑤ 어느 쪽이든

$g'(-1)=\frac{f(-1)}{2}=-\frac{3}{2}(a+1)$ 이므로

a의 가능한 가장 작은 값이 되어야 함이

보이긴 한다. 엄밀하게 풀어보았을 뿐. (실전에서는 ③,④,⑤ 찍은 뒤 ③만 풀었어야 함.)

두 페이지로 끝내도 될 풀이다.

21. 함수 $f(x)=-\dfrac{kx^3}{x^2+1}\ (k>1)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=f^{-1}(x)$가 만나는 점의 x좌표 중 가장 작은 값을 α, 가장 큰 값을 β라 하자. 함수 $y=f(x-2\beta)+2\alpha$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $f'(\beta)=2g'(\alpha)$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\dfrac{5+2\sqrt{2}}{7}$ ② $\dfrac{6+2\sqrt{2}}{7}$ ③ $\dfrac{4+2\sqrt{2}}{5}$

④ $\dfrac{5+2\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\dfrac{6+2\sqrt{2}}{5}$

29. 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\dfrac{5}{2}x & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 갖는다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수가 3이고, 그 교점의 x좌표가 각각 -1, 1, 2일 때, $2a+4b-10c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$(f \circ f)(x) = x$$

의 모든 실근이 0, 1, a, 2, b이다.

$$f'(1) < 0,\ f'(2) < 0,\ f'(0) - f'(1) = 6$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. (단, $1 < a < 2 < b$) [4점]

$f(x) = -\frac{kx^3}{x^2+1}$ $(k>1)$

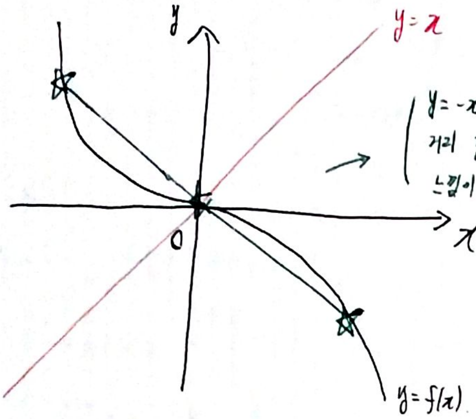
(2018 1021-가 교육청)

$f(x) = f^{-1}(x) \to x = \alpha \sim \beta$.

$g\left(f(x-2\beta)+2\alpha\right) = x$.

Sol. $k>1$ 이므로 $f(x)$를 그려보면 대략

$$f'(x) = -k \cdot \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} \le 0$$



(y=-x+C 의 직선을 그려 거리 같은 두 점 찾는 느낌이 감소함수의 역함수)

(+) ($f(x)+f(-x)=0$, $x=0$ 중심 원점 대칭)

→ $f(x)$가 감소함수이므로 $f(x)=x$ ($f(x)$가 증가함수일 때 원함수와 역함수의 교점 찾는 방식) 뿐만 아니라

$f(a)=b$, $f(b)=a$ 꼴, 즉 $f(x)=-x+C$ 꼴도 추론해야 한다.

($f(x)$가 감소함수일 때 $f(x)=f^{-1}(x)$의 교점을 표현하는 방식)

정리하면	
$f'(x)\ge 0$일 경우 교점	$f'(x)\le 0$일 경우 교점
($f(x)=x$의 근)	($f(x)=x$의 근) or ($f(x)=-x+C$의 두 점 교차)

이 문제의 경우 특수하게도

원점 대칭 감소함수이므로

$f(x)=\pm x$ 에서만 교점이 나온다.

$f(x)=\pm x$.

$$-\frac{kx^3}{x^2+1} = +x \longleftrightarrow -\frac{kx^3}{x^2+1} = -x$$

$$x\left(1+\frac{kx^2}{x^2+1}\right)=0 \qquad x\left(\frac{kx^2}{x^2+1}-1\right)=0$$

$$x\left((k+1)x^2+1\right)=0 \qquad x\left((k-1)x^2-1\right)=0$$

$\therefore x=0$ $\qquad$ $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{\frac{1}{k-1}}$ $(k>1)$

$\alpha = -\sqrt{\frac{1}{k-1}}$

$\beta = \sqrt{\frac{1}{k-1}}$ $\quad (-\alpha=\beta)$

$f(-\beta)=\beta$, $f(\beta)=-\beta$.

$\left(g\left(f(x-2\beta)+2\alpha\right) = g\left(f(x-2\beta)-2\beta\right) = x\right)$.

$$f'(x-2\beta)\cdot g'\left(f(x-2\beta)+2\alpha\right) = 1.$$

$$g'\left(f(x-2\beta)-2\beta\right) = \frac{1}{f'(x-2\beta)} \quad \cdots Ⓐ$$

$f'(\beta) = 2g'(\alpha) = 2g'(-\beta)$ 이므로

Ⓐ에 $x=\beta$ 대입 시

$$g'(-\beta) = \frac{1}{f'(-\beta)} = g'(\alpha).$$

$\boxed{f(x)\text{는 원점대칭이므로 } f'(\beta)=f'(-\beta)}$

$$g'(\alpha) = \frac{1}{f'(-\beta)} = \frac{1}{f'(\beta)} = \frac{f'(\beta)}{2}.$$

$f'(\beta) = -\sqrt{2} = f'\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}\right)$ --- ($f(x)$는 감소함수)

$f'(x)$에 $x=\frac{1}{\sqrt{k-1}}$ 대입. $f'\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}\right) = \frac{2-3k}{k} = -\sqrt{2}$.

$(3-\sqrt{2})k = 2$, $k = \frac{6+2\sqrt{2}}{7}$.

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\frac{5}{2}x & (1 \le x) \end{cases}$$

(20190629-4 평가원)

$f(x)=f^{-1}(x)$의 근 3개. $(-1, 1, 2)$. $2a+4b-10c=?$

sol. ☆ (f = 증가 ↓ $f(x)=x$) ⟷ (f = 감소 ↓ $f(x)=x$ OR $f(x)=-x+C$)

if. f=증가.

$f(-1)=-1$, $f(1)=1$, $f(2)=2$.

$-a+b=-1$

$a+b=c+\frac{5}{2}=1$.

$a=1$, $b=0$, $c=-\frac{3}{2}$.

$4c+5=-1\neq 2$. (모순)

↓

$\therefore f$=감소.

→ 역함수의 정의에 의해, $f(x)=-x+C$의 두 근을 d와 e라고 하면

$f(x)=x$의 근 중 적어도 하나는 구간 (d, e)에 존재.

(부가) if $f(x)=x$의 근이 (d,e)에 없다면 d와 e는 $y=x$를 기준으로 한 쪽면에 존재하는 것이므로 모순이다.)

즉 $f(x)=-x+C$의 두 근(최소 두 근)이 존재한다면

그 두 근 사이 구간에 하나의 근은 spare로 남기자.

이 문제에선 $f(-1)=2$ ⟷ $f(2)=-1$ 인 두 근

사이, 즉 $(-1,2)$ 구간 사이의 $x=1$에서

$f(x)=x$의 근이 나옴이 추론 가능하다.

이후는 N.G.D.

$f(-1)=2$ $f(2)=-1$ $f(1)=1$

$-a+b=2$

$4c+5=-1$

$a+b=c+\frac{5}{2}=1$.

$c=-\frac{3}{2}$

$b=\frac{3}{2}$

$a=-\frac{1}{2}$

$\therefore 2a+4b-10c=20$

Ans. 20.

$f(x)$: 최고차 양수의 삼차함수.

$(f \circ f)(x) = x$.

(2019 0930 - 나 평가원)

모든 실근은 $0, 1, a, 2, b$.

(?) $\boxed{f'(1)<0,\ f'(2)<0}$, $f'(0) - f'(1) = 6$.

$f(5) = ?$ $(1<a<2<b)$

Sol. $(f \circ f)(x) = x$.

↓

let. $f(x) = g(x)$ 의 방정식. (다만 올바른 역함수로 정의 불가.)

$f(g(x)) = x$ 인 $g(x)$의 설정.

다만 $f(x)$의 기울기의 부호가 아직 미정이므로

$f'(x)$의 기울기 변화가 부호 변화로 이어질 경우

$f'(x) \geq 0 \rightarrow f(x) = x$ 탐색.

$f'(x) \leq 0$ → $f(x) = x$ 또는 $f(x) = -x+C$ 탐색.

위와 같은 경우로 나누어 풀 수 있다.

Case 1. $f(x)$는 증가함수.

$f(x) = g(x)$. ($g(x)$는 온전한 $f(x)$의 역함수).

→ $f(x) = x$ 근 탐색 시 5개가 나올 수 없다.

⇓

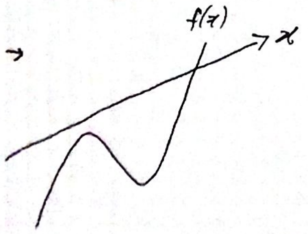
Case 2. $f(x)$는 극값을 가지는 함수.

Case 1이 불가하므로 $f'(x)$의 부호 변화도 불가피하다.

위의 서술대로 나눠 푸는 것이 옳다.

이때 $f(x) = x$의 근의 개수가 1~3개 중 어느 것인지를 먼저 보면

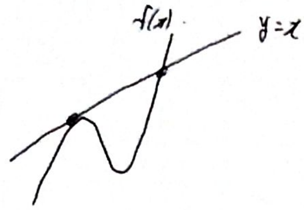
1개 →



불가.

(앞 페이지의 논리 근거)

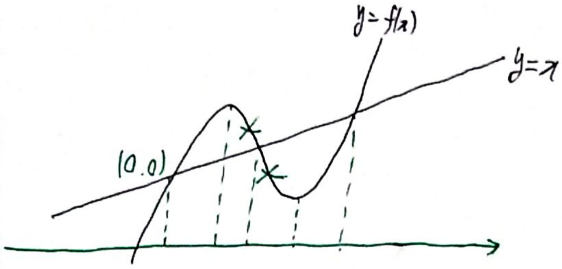
2개 →



(마찬가지.)

→ $f(x) = x$의 근은 3개다.

간단히 그려보면



앞 문단에서 서술한 근거를 토대로

$f(x) = -x + C$ 의 두 근은

$f'(x) \leq 0$ 구간에 존재.

$(f \circ f)(x) = x$의 근은 $0<1<a<2<b$ 순이므로

① $f(x) = x$ 의 근은, $0, a, b$.

② $f(x) = -x+C$의 근은, $1, 2$.

($f(1) = 2$, $f(2) = 1$ 이라는 표현)

$f(x)$의 식을 구하기 위해 (변수 4개)

식 4개가 필요한데

$f(0) = 0$

$f(1) = 2$

$f(2) = 1$

$f'(0) - f'(1) = 6$.

→ $f(x)$를 구할 수 있다!!

N.G.D → $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{11}{2}x$.

⊕ 추가 설명.(?)

Q. $f'(1)<0$, $f'(2)<0$ 이 두 조건 사용은?

A. 과조건이나 마찬가지라 굳이 Case 1으로만 오고 사용은 하지 않았다. 실전에서는 눈치만 잘하면 Case 1 분류가 필요 없었을 것이나, 없어도 푸는 데 지장이 없다.