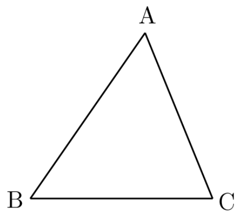
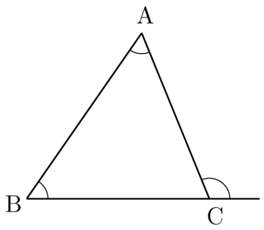
[삼각형20]

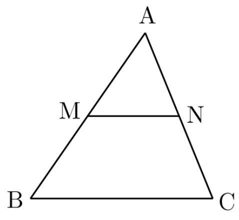
| 한성은 |



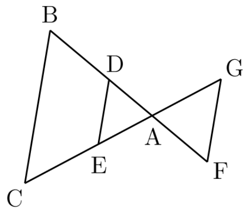
[그림01]



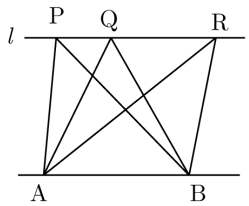
[그림02]



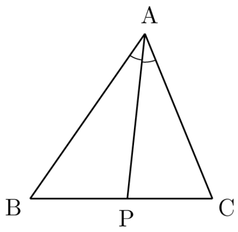
[그림03]



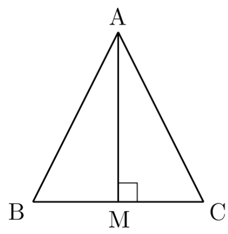
[그림04]



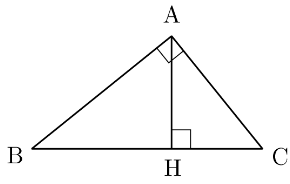
[그림05]



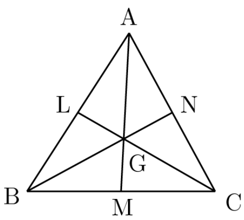
[그림06]



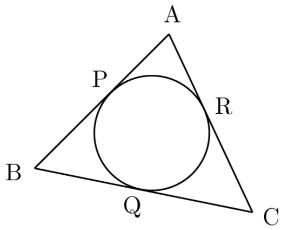
[그림07]



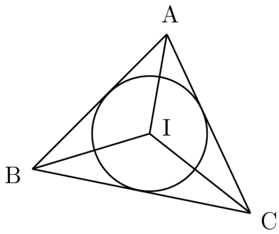
[그림08]



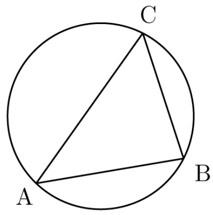
[그림09]



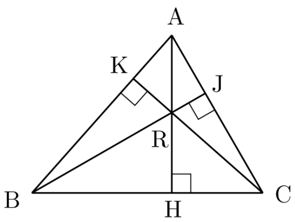
[그림10]



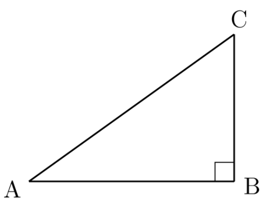
[그림11]



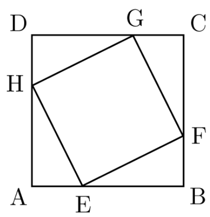
[그림12]



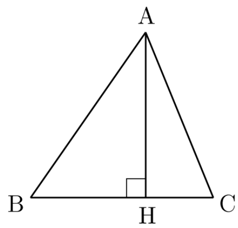
[그림13]



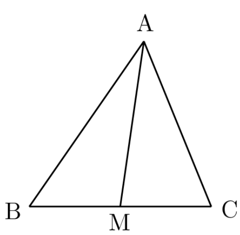
[그림14]



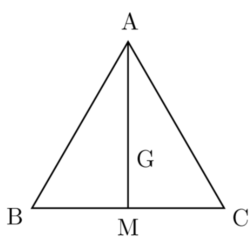
[그림15]



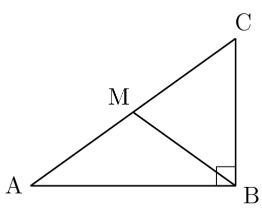
[그림16]



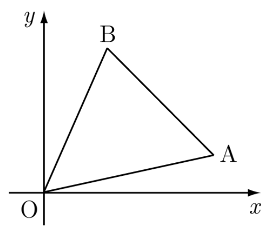
[그림17]



[그림18]



[그림19]



[그림20]

〈해설〉

[그림01] (삼각형의 결정조건) 다음이 주어지면 삼각형은 유일하게 결정된다.
① SSS : 세 변의 길이
② SAS : 두 변의 길이와 이 두 변의 끼인각의 크기
③ ASA : 한 변의 길이와 이 변의 양 끝 각의 크기
※ 삼각형의 결정조건은 두 삼각형의 합동조건과 일치한다.
※ (삼각부등식) ①에서 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 항상 커야 한다.
※ ②에서 주어진 각이 끼인각이 아닌 경우, (말하자면 SSA가 주어진 경우)
나머지 한 변의 길이로 가능한 값은 (대체로) 2개가 나온다. 코사인법칙을 돌려보자.
※ ②에서 두 각의 크기를 받으면 나머지 한 각의 크기도 알 수 있다.

[그림02] 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이다.
① 점 C를 지나고 직선 AB와 평행한 직선을 긋고 찢어보자.
② 삼각형의 한 외각의 크기는 이웃하지 않은 두 내각의 크기의 합과 같다.
※ 삼각형의 세 각의 크기 중 두 개를 알면 나머지 하나를 알 수 있다.

[그림03] (중점연결정리) 삼각형 ABC에서 두 선분 AB, AC의 중점이 각각 M, N이면,
① 선분 MN와 선분 BC는 평행하다.
② $\overline{\mathrm{MN}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}$이다.
※ 삼각형 AMN과 삼각형 ABC는 닮음비 $1:2$인 닮음이다.
※ AA 닮음 : $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$이면 삼각형 ABC와 삼각형 A'B'C'는 닮음이다.
$\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$이면 $\angle C=\angle C'$이다. 신기하지?

[그림04] 선분 DE와 선분 FG가 모두 선분 BC와 평행할 때,
삼각형 ADE와 삼각형 AFG는 모두 삼각형 ABC와 닮음이다.
※ 중점연결정리의 일반화이다.
※ $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{AC}}$ 뿐 아니라 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{EC}}$인 것도 확인하자.
※ 삼각형 ABC와 삼각형 AFG와 같이 서로 뒤집혀 놓인 모양도 확인.

[그림05] 직선 AB와 직선 l이 평행할 때, 직선 l 위의 세 점 P, Q, R에 대하여
세 삼각형 ABP, ABQ, ABR의 넓이는 모두 서로 같다.
※ 점이 직선 l 위에서 움직여도 (선분 AB를 밑변으로 할 때) 높이가 변하지 않기 때문이다.
※ 격하게 찌그러지더라도 부담스러워 하지 말도록.

[그림06] (각의 이등분선 정리) 삼각형 ABC와 선분 BC 위의 점 P에 대하여
$\angle BAP=\angle CAP$이면 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{CP}}$이다.
※ 일반적으로 삼각형 ABC에 대하여 '점 P의 위치'를 구할 때 쓰기에
'$\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{CP}}$는 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}$와 같다.'가 좋은 서순이라고 생각한다.
※ 증명 : 선분 AP의 연장선과 점 C를 지나고 직선 AB와 평행한 직선의 교점을 Q라 하자.
삼각형 CAQ가 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{CA}}$이고, 삼각형 ABP와 삼각형 QCP는 닮음이므로 어쩌고.
※ [외각의 이등분선 정리]도 있다. 난 안 쓰게 되던데, 궁금하면 찾아봐.

[그림07] $\overline{AB}=\overline{AC}$인 삼각형 ABC와 선분 BC 위의 점 M에 대하여, 세 조건

① $\angle BAM=\angle CAM$

② $AM\perp BC$

③ $\overline{BM}=\overline{CM}$

는 모두 서로 동치이다.

※ 어느 방향의 증명이든 '두 삼각형 ABM과 ACM은 합동이다.'를 이용한다.
직각삼각형의 RHS 합동 조건과 RHA 합동 조건이 쓰이는 것을 확인하자.

※ $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이 보이면 다음 중 하나를 긋고 본다.

① 꼭지각 BAC의 이등분선

② 점 A를 지나고 선분 BC에 수직인 직선

③ 선분 BC의 중점 M에 대하여 선분 AM

[그림08] $\angle BAC=90^\circ$인 삼각형 ABC에 대하여, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때,

① $\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{BC}\times\overline{AH}$이다.

② $\overline{BH}:\overline{AH}=\overline{AH}:\overline{HC}$이다. 혹은 $\overline{AH}^2=\overline{BH}\times\overline{CH}$이다.

③ $\overline{AB}^2=\overline{BH}\times\overline{BC}$이고, $\overline{AC}^2=\overline{CH}\times\overline{CB}$이다.

※ ①은 삼각형의 넓이를 째려보면 알 수 있다. 나름 중요하다.

※ ②와 ③의 증명은 '삼각형 HBA와 삼각형 HAC는 모두 삼각형 ABC와 닮음이다.'에서 온다.
내 경우에 ②는 비례식 버전으로 가끔 쓰고 ③은 거의 안 쓰는 듯.

[그림09] (삼각형의 무게중심) 세 선분 AB, BC, CA의 중점을 각각 L, M, N이라 할 때,
세 선분 AM, BN, CL은 한 점 G에서 만난다. 이때 G를 삼각형 ABC의 무게중심이라 한다.

① 여섯 개의 삼각형 AGL, BGL, BGM, CGM, CGN, AGN의 넓이는 모두 서로 같다.

② 점 G는 세 선분 AM, BN, CL을 모두 2:1로 내분한다.

③ 좌표평면에서 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이면 $G\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다.

※ 삼각형 AGL과 삼각형 BGL의 넓이는 서로 같다. (밑변과 높이가 같다.) 이 값을 S_1이라 하자.
마찬가지로 삼각형 AGN과 삼각형 CGN의 넓이를 S_2, 삼각형 BGM과 삼각형 CGM의 넓이를 S_3라 하자.
삼각형 ABM과 삼각형 ACM의 넓이가 서로 같으므로 $2S_1+S_3=2S_2+S_3$에서 $S_1=S_2$이다. 나머지는 알아서.

※ ①에 의해 ②를 증명할 수 있다. 잘 째려봐.

※ ②에 의해 얻어진다. 내분점 공식 알지?

⇒ 세 점 A, B, C에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

⇒ 세 점 A, B, C에 대하여 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 페르마포인트라 한다.
니네는 알 필요 없다. 내가 아는 이야기라 잘난 척 한 번 해봤다.

[그림10] (삼각형의 내심) 세 선분 AB, BC, CA에 모두 접하는 원을 삼각형 ABC의 내접원,
이 내접원의 중심 I를 삼각형 ABC의 내심이라 한다.

① 내심은 삼각형의 세 내각의 이등분선들의 교점이다.

② 내심에서 삼각형의 세 변에 이르는 거리는 모두 서로 같다.

※ 두 변 AB, AC가 내접원의 접선이므로 각 BAC의 이등분선은 내심 I를 지난다. 유일성 같은 것은 생략!

[그림11] 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r이라 하면 삼각형의 넓이 S는 $S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$이다.

세 삼각형 ABI, BCI, CAI의 넓이가 각각 $\dfrac{1}{2}cr$, $\dfrac{1}{2}ar$, $\dfrac{1}{2}br$이다. 잘 째려볼 것.

※ $S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$는 내접원의 반지름의 길이를 구하는 공식으로 기억하자. 말하자면 $r=\dfrac{2S}{a+b+c}$로.

※ 비슷한 사고. 넓이가 S인 삼각형 ABC의 변 BC 위의 점 M에 대하여,
선분 AB까지의 거리와 선분 AC까지의 거리가 모두 d이면, $S=\dfrac{1}{2}cd+\dfrac{1}{2}bd$이므로 $d=\dfrac{2S}{b+c}$이다.

[그림12] (삼각형의 외심) 세 점 A, B, C를 모두 지나는 원을 삼각형 ABC의 외접원,

이 외접원의 중심 O를 삼각형 ABC의 외심이라 한다.

① 외심은 삼각형의 세 변의 수직이등분선들의 교점이다.

② 외심에서 삼각형의 세 꼭짓점에 이르는 거리는 모두 서로 같다.

※ 선분 AB가 외접원의 현이므로 선분 AB의 수직이등분선은 외심 I를 지난다. 유일성 같은 것은 생략!

※ 삼각형의 내심은 항상 삼각형 안에 존재한다. 신기하지? 반면에, 외심은 밖으로 나갈 수 있다. 언제?

[그림13] (삼각형의 수심) 삼각형 ABC의 세 수선(한 꼭짓점을 지나고 대변과 수직인 직선)은 한 점 R에서 만난다.

이때 R을 삼각형 ABC의 수심이라 한다.

※ 삼각형 ABC의 두 외각의 이등분선이 만나는 점을 방심이라 한다. 한 삼각형의 방심은 3개 존재한다.

무게중심, 내심, 외심, 수심, 방심을 삼각형의 오심이라 한다. 방심이 3개인데 칠심이라 해야 하는 것 아닌가.

※ 뭐 그냥 정리하는 김에 했다. 수심, 방심은 그냥 이런 것이 있다 정도로 봐두면 충분.

[그림14] (피타고라스의 정리) $\angle ABC = 90^\circ$ 인 삼각형 ABC에 대하여 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하면, $b^2=a^2+c^2$이 성립한다.

※ 증명은 다음 그림에서.

※ 역도 성립한다. $b^2=a^2+c^2$이면 $\angle ABC = 90^\circ$ 이다.

※ $b^2<a^2+c^2$이면 $\angle ABC$는 예각, $b^2>a^2+c^2$이면 $\angle ABC$는 둔각이다.

※ 코사인법칙은 피타고라스 정리의 일반화이다.

[그림15] 정사각형 ABCD에 내접하는 정사각형 EFGH에 대하여 $\overline{AH}=a$, $\overline{AE}=b$, $\overline{EH}=c$라 할 때, 사각형 ABCD의 넓이는 $(a+b)^2$,

사각형 EFGH의 넓이는 c^2이고, 네 삼각형 AEH, BFE, CGF, DHG의 넓이는 모두 $\frac{1}{2}ab$이므로 $a^2+b^2=c^2$이 성립한다.

※ 이 그림은 째려보면 '좌표평면 상의 한 점을 90° 회전시킨 점'을 알 수 있다. 점 E$(0, 0)$, 점 F(a, b)라 할 때, 점 H$(-b, a)$이다.

※ 안쪽을 잘라놓은 그림을 봐도 좋다. 정사각형 EFGH의 안쪽으로 직각삼각형 AEH와 합동인 삼각형 4개를 그려보자.

※ 피타고라스 정리의 증명은 직각인 꼭짓점에서 대변에 수선 내리는 것이 더 유명하다. 찾아볼 것 까지는 없지만.

[그림16] 수선은 적당한 것을 내려야 행복하다.

※ 삼각형의 수선은 세 종류가 존재한다. 어느 것을 내리면 어느 각이 날아가는지 살펴보자.

예를 들어 점 A에서 변 BC에 수선의 발을 내리면 $\angle ABH$와 $\angle ACH$가 살아남는다.

※ $\overline{BH}=x$, $\overline{AH}=y$라 하면, $\overline{CH}=a-x$이다. 두 삼각형 ABH, ACH에서 각각 피타고라스를 돌려보자.

이는 코사인법칙을 대체할 수 있는 방법이다. 코사인법칙 증명할 때 이런 식이지.

[그림17] (파푸스의 중선정리) 선분 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이 성립한다.

※ 점 A에서 선분 BC에 수선의 발을 내리고, 보이는 직각삼각형마다 피타고라스를 돌리면 증명된다.

※ 두 점 B, C가 고정된 점이고, 점 A가 움직인다고 하자. $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$은 빡치지만 $2(\overline{AM^2}+\overline{BM^2})$는 편안하다.

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$의 최댓값과 최솟값은 각각 $\overline{AM}$이 최대일 때와 최소일 때 얻어진다.

※ 점 M이 선분 BC의 [중점]이다를 [$m:n$ 내분점]이다로 일반화시킨 스튜어트 정리가 있다. 나는 안 써.

[그림18] (정삼각형) 한 변의 길이가 a인 정삼각형의

① 높이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$이다.

② 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$이다.

③ 무게중심, 내심, 외심, 수심이 모두 일치한다.

※ 점 A에서 변 BC에 수선의 발 M을 내리면, $\overline{\mathrm{BM}}=\overline{\mathrm{CM}}$이다. 이등변삼각형 그림 참고.

$\overline{\mathrm{BM}}=\dfrac{1}{2}a$이고, 직각삼각형 AMB에서 피타고라스 돌리면 $\overline{\mathrm{AM}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$이다. 귀찮아.

※ (특수각 직각삼각형) 아래의 두 삼각형은 매우 익숙하셔라. 증명도 해봐.

① 세 각의 크기가 30°, 60°, 90°인 삼각형의 세 변의 길이의 비는 $1:\sqrt{3}:2$이다.

② 세 각의 크기가 45°, 45°, 90°인 삼각형의 세 변의 길이의 비는 $1:1:\sqrt{2}$이다.

[그림19] 직각삼각형 ABC의 외심은 빗변 AC의 중점이다.

인 아더 워드즈, AC의 중점 M에 대하여 $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{BM}}$이다.

※ 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 포함하는 직사각형 ABCD를 생각하면 그냥 각이다.

※ $\overline{\mathrm{BM}}=x$라 두고 파푸스를 돌리면 $a^2+c^2=2\left\{x^2+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2\right\}$이다. $a^2+c^2=b^2$와 연립하면 $x=\dfrac{b}{2}$이다. 졸잼.

[그림20] (신발끈 정리) 외울까 말까 고민하는 시간에 외워라.

① 좌표평면의 세 점 O(0, 0), A(a, b), B(c, d)을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}|ad-bc|$이다.

② 좌표평면의 세 점 (a, b), (c, d), (e, f)를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a & c & e & a \\ b & d & f & b \end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}|ad+cf+eb-bc-de-fa|$이다.

※ $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{a^2+b^2}$이고, 점 B에서 직선 OA 사이의 거리는 $\dfrac{1}{2}\dfrac{|ad-bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}$이다.

대칭 삘받아서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$으로 가면 고생이더라구. 되기야 되겠지만.

※ ②는 세 점을 각각 (0, 0), ($c-a$, $d-b$), ($e-a$, $f-b$)으로 평행이동 시켜놓고 ① 때리면 되겠지. 해보지는 않았다.