30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_{0}^{x}\frac{f(t)}{|t|+1}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(2)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq 0$이다.

$g'(-1)$의 값이 최대가 되도록 하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f(-1)=\dfrac{n}{m-3\ln 3}$ 일 때, $|m\times n|$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이고, $\ln 3$은 $1<\ln 3<1.1$인 무리수이다.) [4점]

사관 202030, 최고차 1인 삼차함수 $f(x)$.

(가)

$$g(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1+|t|}\,dt.$$

$g'(2)=0$. 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \ge 0$.

$g'(-1)$의 값이 최대인 $f(x)$에서 $f(-1)$을 구하라.

$(1 < \ln 3 < 1.1)$

Sol.

$$g(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\,dt & (x \le 0) \\ \int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\,dt & (0 < x) \end{cases}$$

$x=2$ 관찰 ⇒ $g'(2)=0$. $g'(2) = \frac{f(2)}{3} = 0 \rightarrow \boxed{f(2)=0}$

$x=0$ 관찰 ⇒ $g(0)=0$ (좌우극한 모두).

$g'(0)=f(0)$ (좌우극한 모두).

$g(x) \ge 0$이므로 $f(0) \ne 0$일 경우 모순.

$$\boxed{f(0)=0}$$

$\therefore$ let. $f(t) = t(t-2)(t-a)$.

$$\hookrightarrow g(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{t(t-2)(t-a)}{1-t}\,dt & (x \le 0) \\ \int_0^x \frac{t(t-2)(t-a)}{1+t}\,dt. & (0 < x) \end{cases}$$

$\boxed{0<x\text{의 범위를 우선 살피자.}}$

$g(x) \ge 0$ 사용을 위해

a의 범위를 나눠보면

- $a<0$ — ①
- $a=0$ — ②
- $0<a<2$ — ③
- $a=2$ — ④
- $2<a$. — ⑤

포함.

(②+①) $a \le 0$

$g(x) = \int_0^x \frac{t(t-2)(t-a)}{t+1}\,dt$ 는 $0<x<2$ 구간 음수. 불가.

(④) $a=2$.

$g(x) = \int_0^x \frac{t(t-2)^2}{t+1}\,dt$ → 가능. → ⑤와 함께 다루자.

(③) $0<a<2$.

$g(x) = \int_0^x \frac{t(t-2)(t-a)}{t+1}\,dt \ge 0$ 일 경우. N.G.D,

$$\int_0^x \frac{t^2(t-2)}{t+1}\,dt \ge a \cdot \int_0^x \frac{t(t-2)}{t+1}\,dt.$$

$$\int_0^x \left(t^2-3t+3+\frac{-3}{t+1}\right)dt \ge a \cdot \int_0^x \left(t-3+\frac{3}{t+1}\right)dt.$$

(g의 극값 중 극소는 $t=2$에서 나온다. $x=2$ 대입 시 만족해야 한다.)

$$\int_0^2 (\;''\;)\,dt \ge a \cdot \int_0^2 (\;''\;)\,dt.$$

$$\left[\frac{t^3}{3}-\frac{3}{2}t^2+3t-3\ln(t+1)\Big|_0^2\right] \ge a \cdot \left[\frac{t^2}{2}-3t+3\ln(t+1)\Big|_0^2\right]$$

$$\frac{8}{3}-3\ln 3 \ge a \cdot (-4+3\ln 3).$$

$$(4-3\ln 3)a \ge 3\ln 3-\frac{8}{3}.$$

$$\frac{3\ln 3-\frac{8}{3}}{4-3\ln 3} \le a,$$

이때 $g'(-1) = \frac{f(-1)}{2} = \frac{-3(a+1)}{2} \le \frac{-2}{4-3\ln 3}.$

이때 $f(-1) \le \frac{-4}{4-3\ln 3}$ //

(일단 keep.)

여기서 끝. 하지만
이게 최선이었다. 훗.. 나란 녀석

(④+⑤) $2 \le a$

좀 더 엄밀하게 ○○

$$g(x) = \int_0^x \frac{t(t-2)(t-a)}{1+t}\,dt.$$

$0<x$ 에서 $g(x)$의 극소는 $x=a$에서 나온다.

즉, $g(a) \ge 0$ 임을 보임으로 충분할 듯.

$$\rightarrow \int_0^a \frac{t(t-2)(t-a)}{1+t}\,dt \ge 0. \quad (a \ge 2 \text{ 잊지 말자.})$$

이항하면 $$\int_0^a \frac{t^2(t-2)}{1+t}\,dt \ge a \cdot \int_0^a \frac{t(t-2)}{1+t}\,dt.$$

NGD 식을 ③에서 풀어오면,

$$\frac{a^3}{3} - \frac{3}{2}a^2 + 3a - 3\ln(a+1) \ge a \cdot \left(\frac{a^2}{2} - 3a + 3\ln(a+1)\right).$$

정리하면

$$\frac{a^3}{6} + \frac{3}{2}a^2 + 3a - (3a+3)\ln(a+1) \ge 0, \text{ ---(A)}$$

~~$a \ge 2$ 에서 이 식을 만족할까? 파악이 어렵다면 조건을 먼저 써보자.~~

$g'(-1)$이 최대일 경우를 먼저 따져보자는 것.

$$g'(-1) = \frac{f(-1)}{2} = -\frac{3}{2}(a+1).$$

a가 최소인 경우는 $a=2$일 때.

☆ (A)에 $a=2$ 대입 시 성립.

(A)의 성립을 먼저 잡아 푸는 것은 이 문제 풀이에

~~그닥 도움이 되지 않는다.~~ 조건을 유리하게 사용하자.

자, 그렇다면
$$\begin{cases} g'(-1) = \dfrac{-2}{4-3\ln 3} & ③ \\ g'(-1) = -\dfrac{9}{2} & ④ \end{cases}$$
이 둘 중 무엇이 더 큰가?

$$\frac{-2}{4-3\ln 3} \text{ vs } -\frac{9}{2}.\ (?)$$

→ $1<\ln 3<1.1$ 조건을 사용하면

$\frac{-2}{4-3\ln 3}$가 더 크다. (N.G.D.)

따라서 이때 $f(x)$에 대해

$$\boxed{\therefore f(-1)=\frac{-4}{4-3\ln 3}}$$

↳ $x\le 0$ 에서의 $g(x)\ge 0$ 판단은

스스로 해 보시길 바람. 매우 좋은 문제.

→ 물론 ①②③④⑤ 어느 쪽이든

$g'(-1)=\frac{f(-1)}{2}=-\frac{3}{2}(a+1)$ 이므로

a의 가능한 가장 작은 값이 되어야 함이

보이긴 한다. 엄밀하게 풀어보았을 뿐. (실전에서는 ③,④,⑤ 였은 뒤 ③만 풀었어야 함.)

두 페이지로 끝내도 될 풀이다.