[미적분]

무한등비급수+도형
(2020년-2015년)

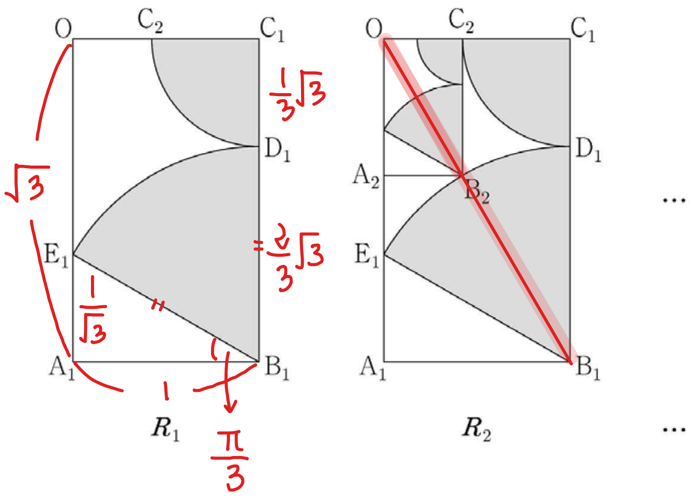
kamdongmath.tistory.com
#감수학

#1. [2022학년도 대학수학능력시험 예시문항 26번(미적분)]

그림과 같이 $\overline{OA_1}=\sqrt{3}$, $\overline{OC_1}=1$인 직사각형 $OA_1B_1C_1$이 있다. 선분 B_1C_1 위의 $\overline{B_1D_1}=2\overline{C_1D_1}$인 점 D_1에 대하여 중심이 B_1이고 반지름의 길가 $\overline{B_1D_1}$인 원과 선분 OA_1의 교점을 E_1, 중심이 C_1이고 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$인 원과 선분 OC_1의 교점을 C_2라 하자. 부채꼴 $B_1D_1E_1$의 내부와 부채꼴 $C_1C_2D_1$의 내부로 이루어진 ◁ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2, 호 D_1E_1 위의 점 B_2와 점 C_2, 점 O를 꼭짓점으로 하는 직사각형 $OA_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $OA_2B_2C_2$에 ◁ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



$$S_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \pi$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{3} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{12}\pi = \frac{11}{36}\pi$$

$$\overline{OB_1} : \overline{OB_2} = 2 : 2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$= 1 : 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\text{길이 비})$$

$\downarrow$ (제곱)

$$1 : \frac{4-2\sqrt{3}}{3} \quad (\text{넓이비})$$

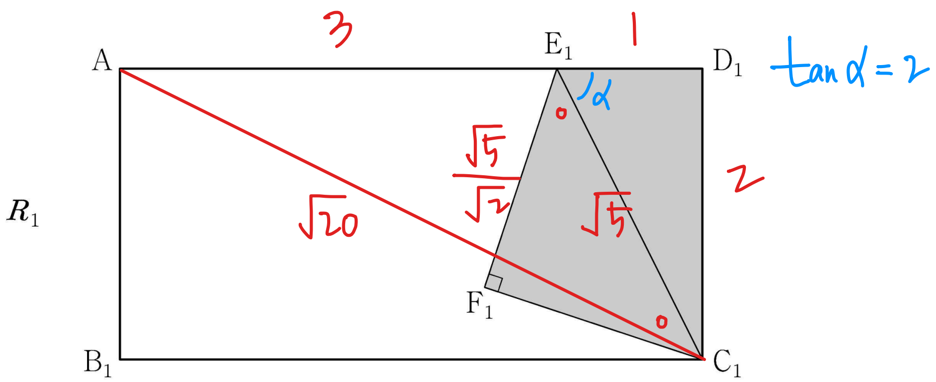
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{11}{36}\pi}{1 - \frac{4-2\sqrt{3}}{3}} = \frac{(2\sqrt{3}+1)\pi}{12}$$

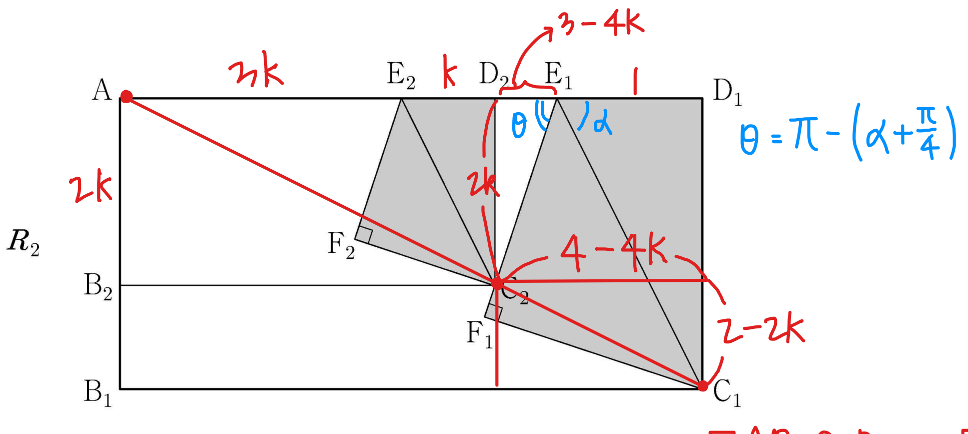
#2. [2021학년도(2020년시행) 대학수학능력시험 14번(가형)]

그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AD_1}=4$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. 선분 AD_1을 $3:1$로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 직사각형 $AB_1C_1D_1$의 내부에 점 F_1을 $\overline{F_1E_1}=\overline{F_1C_1}$, $\angle E_1F_1C_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고 삼각형 $E_1F_1C_1$을 그린다. 사각형 $E_1F_1C_1D_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1F_1 위의 점 C_2, 선분 AE_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{AD_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 삼각형 $E_2F_2C_2$를 그리고 사각형 $E_2F_2C_2D_2$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]





⋮ ⋮

* □$AB_2C_2D_2$ ∽ □$AB_1C_1D_1$ 이므로 점 A, C_2, C_1은 하나의 직선 위에 있다.

$$S_1 = \frac{1}{2}\times 1\times 2 + \frac{1}{2}\times\frac{5}{2} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{2k}{3-4k} = \tan\theta = -\frac{2+1}{1-2\times 1} = 3$$

$\therefore k = \frac{9}{14}$ 길이비 $1:k$ ⇝ 넓이비 $1:\frac{81}{196}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{81}{196}} = \frac{441}{115}$$ //

#3. [2020년 고3 10월 전국연합학력평가 18번(가형)]

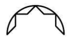
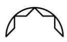
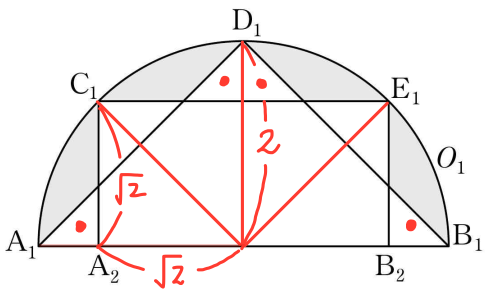
그림과 같이 길이가 4인 선분 $\mathrm{A_1B_1}$을 지름으로 하는 반원 O_1의 호 $\mathrm{A_1B_1}$을 4등분하는 점을 점 $\mathrm{A_1}$에서 가까운 순서대로 각각 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{D_1}$, $\mathrm{E_1}$이라 하고, 두 점 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{E_1}$에서 선분 $\mathrm{A_1B_1}$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$라 하자. 사각형 $\mathrm{C_1A_2B_2E_1}$의 외부와 삼각형 $\mathrm{D_1A_1B_1}$의 외부의 공통부분 중 반원 O_1의 내부에 있는  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

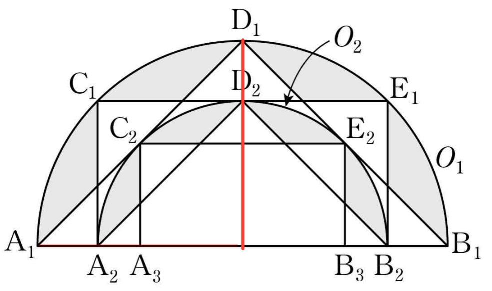
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{A_2B_2}$를 지름으로 하는 반원 O_2를 반원 O_1의 내부에 그리고, 반원 O_2의 호 $\mathrm{A_2B_2}$를 4등분하는 점을

점 $\mathrm{A_2}$에서 가까운 순서대로 각각 $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{D_2}$, $\mathrm{E_2}$라 하고, 두 점 $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{E_2}$에서 선분 $\mathrm{A_2B_2}$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{B_3}$이라 하자. 사각형 $\mathrm{C_2A_3B_3E_2}$의 외부와 삼각형 $\mathrm{D_2A_2B_2}$의 외부의 공통부분 중 반원 O_2의 내부에 있는  모양의 도형에 색칠을 하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2

⋯

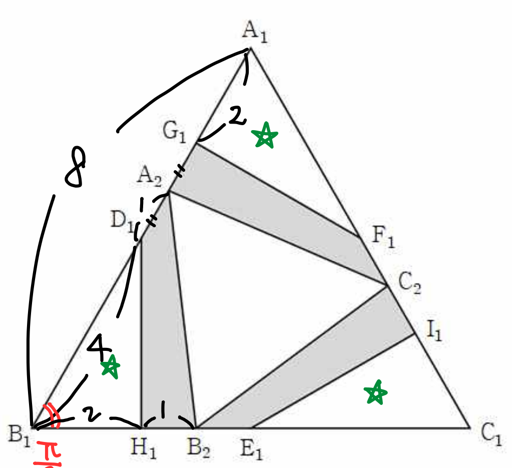
$$S_1 = 2\pi - 4 - \left\{\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})^2\right\} \times 4$$

$$= 2\pi - 16 + 8\sqrt{2}$$

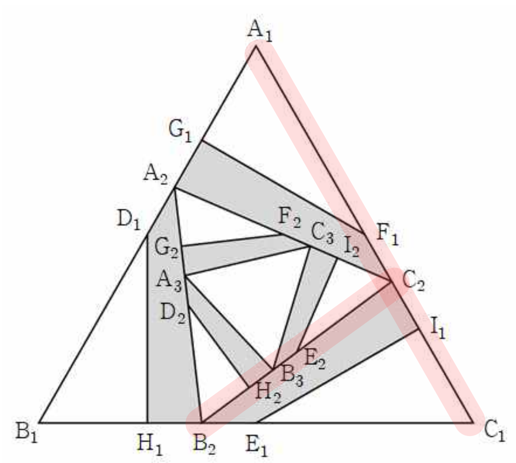
길이비 $2 : \sqrt{2}$, 넓이비 $1 : \frac{1}{2}$ 공비

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\frac{1}{2}} = 4\pi - 32 + 16\sqrt{2}$$

#4. [2020년 고3 7월 전국연합학력평가 18번(가형)]
그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 세 선분 A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1의 중점을 각각 D_1, E_1, F_1이라 하고, 세 선분 A_1D_1, B_1E_1, C_1F_1의 중점을 각각 G_1, H_1, I_1이라 하고, 세 선분 G_1D_1, H_1E_1, I_1F_1의 중점을 각각 A_2, B_2, C_2라 하자. 세 사각형 $A_2C_2F_1G_1$, $B_2A_2D_1H_1$, $C_2B_2E_1I_1$에 모두 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 삼각형 $A_2B_2C_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 사각형 $A_3C_3F_2G_2$, $B_3A_3D_2H_2$, $C_3B_3E_2I_2$에 모두 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2

⋯

$\triangle A_1B_1C_1$의 넓이 : $\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot \sin\frac{\pi}{3} = 16\sqrt{3}$

제 2 Cos 법칙에 의해

$\overline{A_2B_2}^2 = 25+9-30\cos\frac{\pi}{3} = 19 \Rightarrow \overline{A_2B_2} = \sqrt{19}$

$\triangle A_2B_2C_2$의 넓이 $= \frac{1}{2}\times\sqrt{19}\times\sqrt{19}\times\sin\frac{\pi}{3} = \frac{19}{4}\sqrt{3}$

$\triangle A_1G_1F_1 \equiv \triangle D_1B_1H_1 \equiv \triangle E_1I_1C_1 \Rightarrow \frac{1}{2}\times 2\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$\therefore S_1 = 16\sqrt{3} - \frac{19}{4}\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = \frac{21}{4}\sqrt{3}$

길이비 $8 : \sqrt{19}$

넓이비 $1 : \frac{19}{64}$ 공비

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\frac{\cancel{21}^{7}}{\cancel{4}_{1}}\sqrt{3}}{\frac{\cancel{45}^{15}}{\cancel{64}_{16}}}$

$= \frac{112}{15}\sqrt{3}$ //

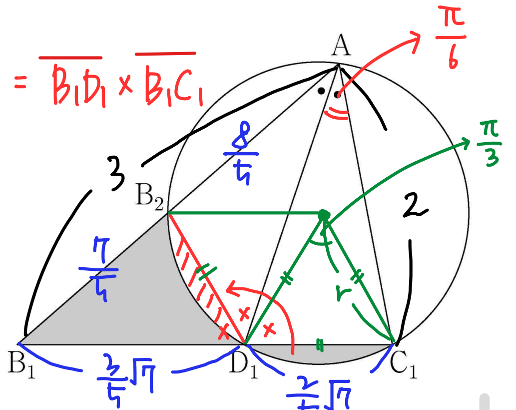
#5. [2020년 고3 6월 평가원모의고사 20번(가형)]

그림과 같이 $\overline{AB_1}=3$, $\overline{AC_1}=2$ 이고 $\angle B_1AC_1 = \frac{\pi}{3}$ 인 삼각형 AB_1C_1 이 있다. $\angle B_1AC_1$ 의 이등분선이 선분 B_1C_1 과 만나는 점을 D_1, 세 점 A, D_1, C_1을 지나는 원이 선분 AB_1 과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_2라 할 때, 두 선분 B_1B_2, B_1D_1 과 호 B_2D_1 로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1 과 호 C_1D_1 로 둘러싸인 부분인 ◿ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

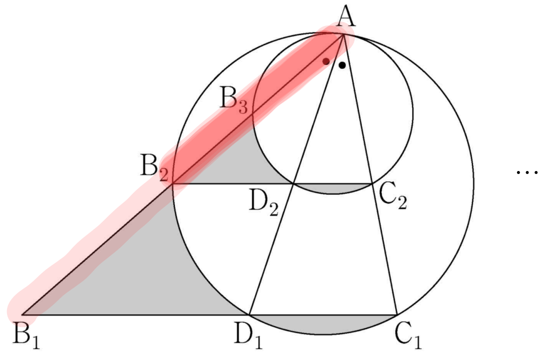
그림 R_1 에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1C_1 에 평행한 직선이 두 선분 AD_1, AC_1 과 만나는 점을 각각 D_2, C_2라 하자. 세 점 A, D_2, C_2를 지나는 원이 선분 AB_2와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_3이라 할 때, 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 B_3D_2 로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2와 호 C_2D_2 로 둘러싸인 부분인 ◿ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은? [4점]

* $\overline{B_1B_2} \times \overline{B_1A} = \overline{B_1D_1} \times \overline{B_1C_1}$



R_1



R_2 ⋯

① Cos 법칙에 의해

$$\overline{B_1C_1}^2 = 9+4-12\cos\frac{\pi}{3} = 7$$

$\therefore \overline{B_1C_1} = \sqrt{7}$

② $\overline{AB_1} : \overline{AC_1} = \overline{B_1D_1} : \overline{D_1C_1}$ 이므로

$\overline{B_1D_1} = \frac{3}{5}\sqrt{7}$, $\overline{D_1C_1} = \frac{2}{5}\sqrt{7}$

③ $S_1 = \triangle B_1B_2D_1 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5}\sqrt{7} \times \frac{2}{5}\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

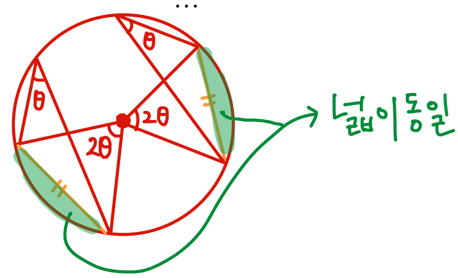
$= \frac{21}{50}\sqrt{3}$

④ 제2 Cos 법칙에 의해

$$\overline{B_1B_2}^2 = \frac{63}{25} + \frac{28}{25} - \frac{12\times7}{25}\cdot\frac{1}{2} = \frac{49}{25}$$

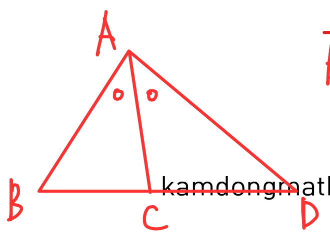
$\therefore$ 길이비 $3 : \frac{8}{5}$, 넓이비 $1 : \frac{64}{225}$ = 공비

⊛(中) 원의 성질



- 두 원주각이 동일하면 원주, 현의 길이 동일!
- 원주각 : 중심각 = 1 : 2
- 현의 길이가 동일하면 활꼴넓이 동일

* 각의 이등분선 성질



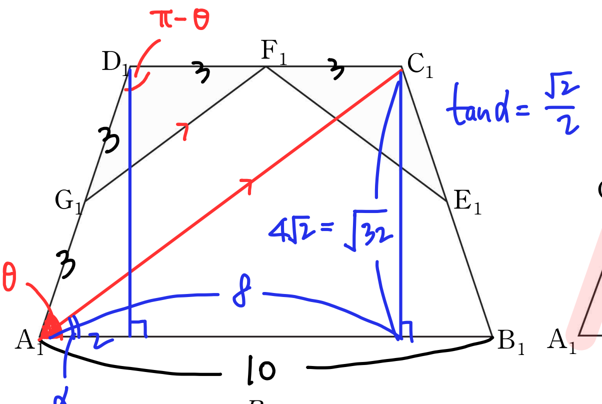
$\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{BC} : \overline{CD}$

#6. [2020년 고3 4월 전국연합학력평가 18번(가형)]
그림과 같이 두 선분 A_1B_1, C_1D_1이 서로 평행하고 $\overline{A_1B_1}=10$, $\overline{B_1C_1}=\overline{C_1D_1}=\overline{D_1A_1}=6$인 사다리꼴 $A_1B_1C_1D_1$이 있다.
세 선분 B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1의 중점을 각각 E_1, F_1, G_1이라 하고 두 개의 삼각형 $C_1F_1E_1$, $D_1G_1F_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 A_1B_1 위의 두 점 A_2, B_2와 선분 E_1F_1 위의 점 C_2, 선분 F_1G_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하고 두 선분 A_2B_2, C_2D_2가 서로 평행하며 $\overline{B_2C_2}=\overline{C_2D_2}=\overline{D_2A_2}$, $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=5:3$인 사다리꼴 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다.
그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 사다리꼴 $A_2B_2C_2D_2$에 두 개의 삼각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

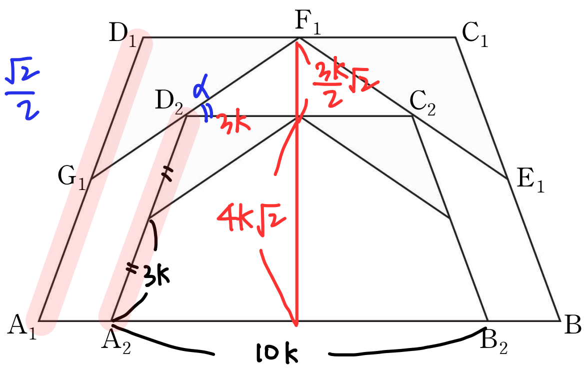
$\cos\theta = \frac{1}{3}$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{8}}{3}$

$\tan\theta = 2\sqrt{2}$



R_1



R_2

$\triangle D_1F_1G_1 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot \sin(\pi-\theta) = 3\sqrt{2}$

$\therefore S_1 = 6\sqrt{2}$

$4k\sqrt{2} + \frac{3k}{2}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

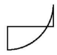
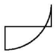
$11k = 8 \quad \therefore k = \frac{8}{11}$

길이비 $6 : 6k = 1 : k$

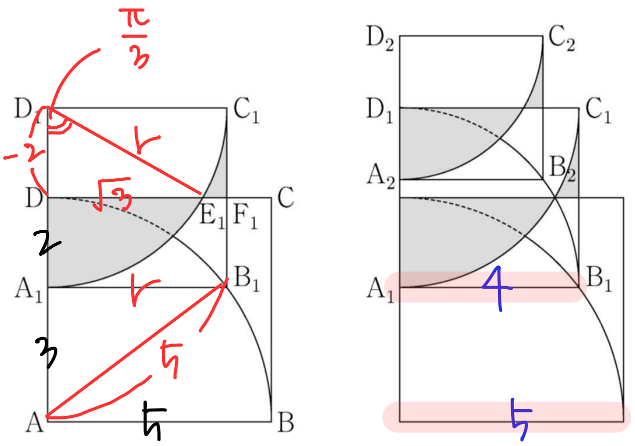
넓이비 $1 : k^2 \quad \therefore$ 공비 $= \frac{64}{121}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\cancel{6}^{\,2}\sqrt{2}}{\frac{\cancel{57}\ 19}{121}} = \frac{242}{19}\sqrt{2}$

#7. [2019년 2020학년도 대학수학능력시험 18번(나형)]

그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD에 중심이 A이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 ABD를 그린다. 선분 AD를 $3:2$로 내분하는 점을 A_1, 점 A_1을 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 BD와 만나는 점을 B_1이라 하자.
선분 A_1B_1을 한 변으로 하고 선분 DC와 만나도록 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$을 그린 후, 중심이 D_1이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 $D_1A_1C_1$을 그린다. 선분 DC가 호 A_1C_1, 선분 B_1C_1과 만나는 점을 각각 E_1, F_1이라 하고, 두 선분 DA_1, DE_1과 호 A_1E_1로 둘러싸인 부분과 두 선분 E_1F_1, F_1C_1과 호 E_1C_1로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에 중심이 A_1이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 $A_1B_1D_1$을 그린다. 선분 A_1D_1을 $3:2$로 내분하는 점을 A_2, 점 A_2를 지나고 선분 A_1B_1에 평행한 직선이 호 B_1과 만나는 점을 B_2라 하자. 선분 A_2B_2를 한 변으로 하고 선분 D_1C_1과 만나도록 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린 후, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

∴ $r=4$



R_1 R_2

$$S_1 = \left(\frac{1}{2}\cdot 16\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}\right) + \left(8 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3} - \frac{1}{2}\cdot 16\cdot\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{8}{3}\pi - \sqrt{3} + 8 - \sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi + 8 - 2\sqrt{3}$$

길이비 $5:4$ ⇝ 넓이비 $1 : \frac{16}{25}$ 공비

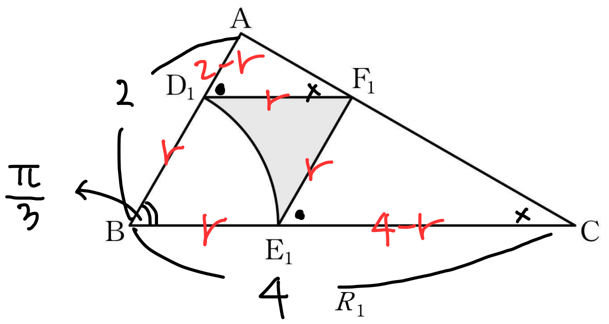
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{50}{9}\left(\frac{2}{3}\pi + 4 - \sqrt{3}\right)$$

#8. [2019년 10월 전국연합학력평가 19번(나형)]

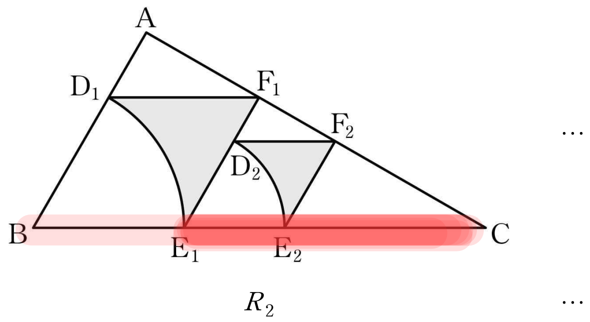
그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=4$이고 $\angle ABC=60°$인 삼각형 ABC가 있다. 사각형 $D_1BE_1F_1$이 마름모가 되도록 세 선분 AB, BC, CA 위에 각각 점 D_1, E_1, F_1을 잡고, 마름모 $D_1BE_1F_1$의 내부와 중심이 B인 부채꼴 BE_1D_1의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 사각형 $D_2E_1E_2F_2$가 마름모가 되도록 세 선분 F_1E_1, E_1C, CF_1 위에 각각 점 D_2, E_2, F_2를 잡고, 마름모 $D_2E_1E_2F_2$의 내부와 중심이 E_1인 부채꼴 $E_1E_2D_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2

$\triangle AD_1F_1 \sim \triangle F_1E_1C$ (∵ AA 닮음)

$2-r : r = r : 4-r \Rightarrow r^2 = r^2 - 6r + 8 \quad \therefore r = \frac{4}{3}$

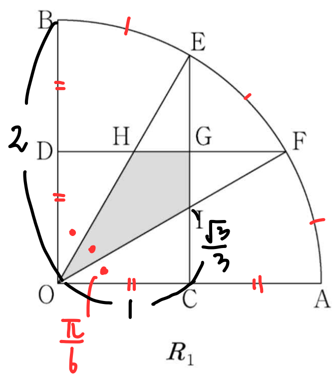
$\therefore S_1 = 2\times\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{8}{9}\sqrt{3} - \frac{8}{27}\pi$

길이비 $4 : \frac{8}{3} = 1 : \frac{2}{3} \Rightarrow$ 넓이비 $1 : \frac{4}{9}$ 공비

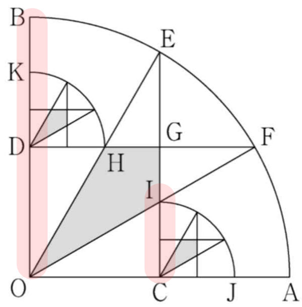
$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{9}{5} S_1 = \frac{8}{5}\sqrt{3} - \frac{8}{15}\pi$ //

#9. [2019년 9월 평가원모의고사 18번(나형)]
그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OA의 중점을 C, 선분 OB의 중점을 D라 하자. 점 C를 지나고 선분 OB와 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점을 E, 점 D를 지나고 선분 OA와 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점을 F라 하자. 선분 CE와 선분 DF가 만나는 점을 G, 선분 OE와 선분 DG가 만나는 점을 H, 선분 OF와 선분 CG가 만나는 점을 I라 하자. 사각형 OIGH를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

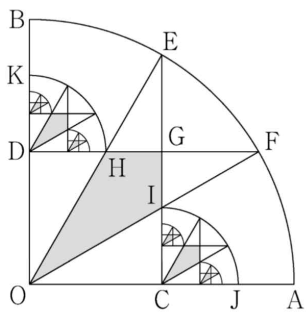
그림 R_1에 중심이 C, 반지름의 길이가 $\overline{CI}$, 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 CJI와 중심이 D, 반지름의 길이가 $\overline{DH}$, 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 DHK를 그린다. 두 부채꼴 CJI, DHK에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 두 개의 사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2



R_3

① $S_1 = 1 - 2\times\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

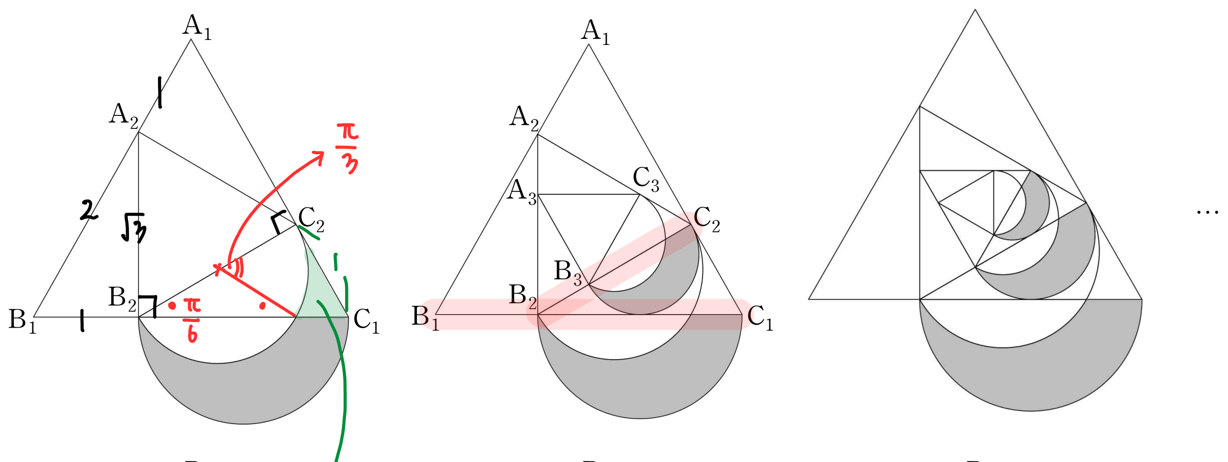
② 길이비 $2 : \frac{\sqrt{3}}{3}$ ⇝ 넓이비 $1 : \frac{1}{12}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = S_1 + 2\left(\frac{1}{12}\right)S_1 + 2^2\left(\frac{1}{12}\right)^2 S_1 + \cdots$

$= S_1 + \left(\frac{1}{6}\right)S_1 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 S_1 + \cdots$ (공비 $\frac{1}{6}$)

$= \frac{6}{5}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{6-2\sqrt{3}}{5}$ //

#10. [2019년 7월 전국연합학력평가 19번(나형)]
그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 세 선분 A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1을 $1:2$로 내분하는 점을 각각 A_2, B_2, C_2라 하자. 선분 B_2C_1을 지름으로 하는 반원의 내부와 선분 B_2C_2를 지름으로 하는 반원의 외부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 세 선분 A_2B_2, B_2C_2, C_2A_2를 $1:2$로 내분하는 점을 각각 A_3, B_3, C_3이라 하자. 선분 B_3C_2를 지름으로 하는 반원의 내부와 선분 B_3C_3을 지름으로 하는 반원의 외부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1 R_2 R_3 …

※참고 $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3} - \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\sin\frac{2}{3}\pi\right\}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{16} = \frac{5}{16}\sqrt{3} - \frac{\pi}{8}$

$S_1 = \frac{\pi}{2} - \left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\sin\frac{2}{3}\pi\right\}$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{3}{8}\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16}$

길이비 $3 : \sqrt{3}$ ⇝ 넓이비 $1 : \frac{1}{3}$ 공비

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\right) = \frac{3\pi}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{32}$

#11. [2019년 6월 평가원모의고사 17번(나형)]

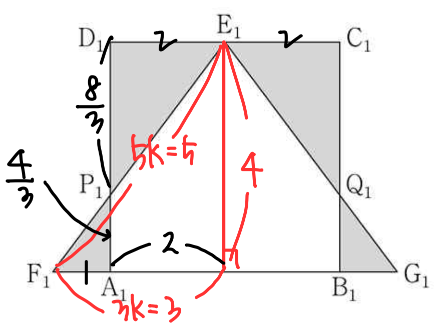
그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 C_1D_1의 중점을 E_1이라 하고, 직선 A_1B_1 위에 두 점 F_1, G_1을 $\overline{E_1F_1}=\overline{E_1G_1}$, $\overline{E_1F_1}:\overline{F_1G_1}=5:6$이 되도록 잡고 이등변삼각형 $E_1F_1G_1$을 그린다.

선분 D_1A_1과 선분 E_1F_1의 교점을 P_1, 선분 B_1C_1과 선분 G_1E_1의 교점을 Q_1이라 할 때, 네 삼각형 $E_1D_1P_1$, $P_1F_1A_1$, $Q_1B_1G_1$, $E_1Q_1C_1$로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

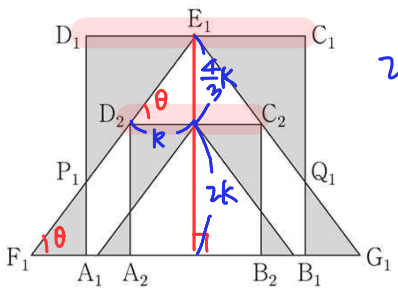
그림 R_1에 선분 F_1G_1 위의 두 점 A_2, B_2와 선분 G_1E_1 위의 점 C_2, 선분 E_1F_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

$\tan\theta = \frac{4}{3}$



R_1



R_2

$2k + \frac{4}{3}k = 4 \Rightarrow k = \frac{6}{5}$

…

…

$S_1 = 2 \times \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{8}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} \right) = \frac{20}{3}$

길이비 $4 : 2k = 2 : k \Rightarrow$ 넓이비 $1 : \frac{k^2}{4} = 1 : \frac{9}{25}$ 공비

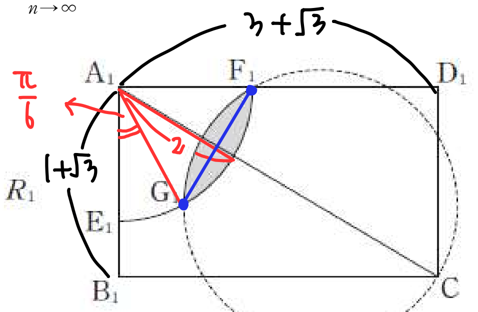
$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{25}{16} \cdot \frac{20}{3} = \frac{125}{12}$

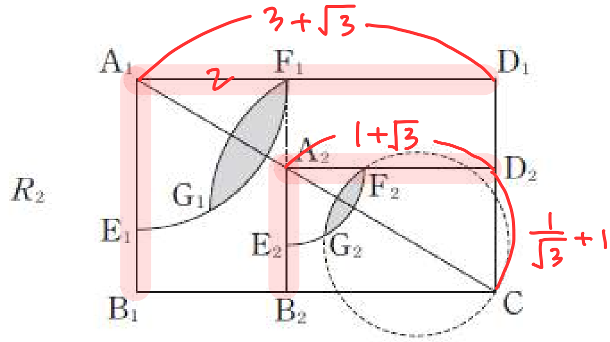
#12. [2019년 5월 **교육청 20번(나형)]

그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1+\sqrt{3}$, $\overline{B_1C}=3+\sqrt{3}$인 직사각형 $A_1B_1CD_1$이 있다. 직사각형 $A_1B_1CD_1$의 내부에 점 A_1을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $(\sqrt{3}-1)\overline{A_1B_1}$인 사분원을 그릴 때, 이 사분원이 두 선분 A_1B_1, A_1D_1과 만나는 점을 각각 E_1, F_1이라 하고, 호 E_1F_1의 길이를 3등분하는 점 중에서 점 E_1에 가까운 점을 G_1이라 하자. 사분원 $A_1E_1F_1$의 내부와 세 점 G_1, C, F_1을 지나는 원의 내부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 F_1을 지나고 선분 A_1D_1에 수직인 직선이 선분 B_1C와 만나는 점을 B_2라 하고, 선분 F_1B_2와 선분 A_1C의 교점을 A_2, 점 A_2에서 선분 D_1C에 내린 수선의 발을 D_2라 하자. 직사각형 $A_2B_2CD_2$의 내부에 점 A_2를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $(\sqrt{3}-1)\overline{A_2B_2}$인 사분원을 그릴 때, 이 사분원이 두 선분 A_2B_2, A_2D_2과 만나는 점을 각각 E_2, F_2라 하고, 호 E_2F_2의 길이를 3등분하는 점 중에서 점 E_2에 가까운 점을 G_2라 하자. 사분원 $A_2E_2F_2$의 내부와 세 점 G_2, C, F_2을 지나는 원의 내부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]





$$S_1 = \cancel{2}\times\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{\cancel{2}}\cdot 2\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}$$

길이비 $1+\sqrt{3} : \frac{1}{\sqrt{3}}(1+\sqrt{3}) = 1 : \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ 넓이비 $1 : \frac{1}{3}$ 공비

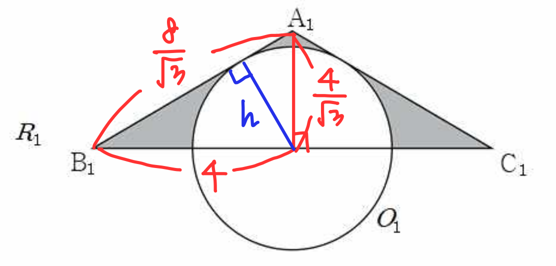
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}\right) = 2\pi - 3\sqrt{3}$$

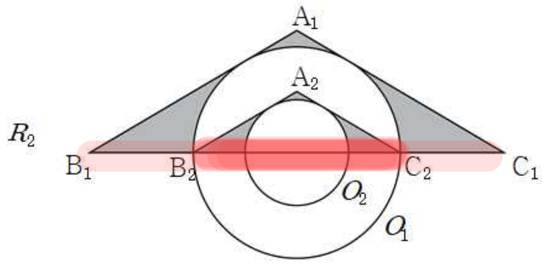
#13. [2019년 4월 전국연합학력평가 18번(나형)]

$\overline{B_1C_1}=8$이고 $\angle B_1A_1C_1=120^\circ$인 이등변삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 그림과 같이 중심이 선분 B_1C_1 위에 있고 직선 A_1B_1과 직선 A_1C_1에 동시에 접하는 원 O_1을 그리고 이등변삼각형 $A_1B_1C_1$의 내부와 원 O_1의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 원 O_1과 선분 B_1C_1이 만나는 점을 각각 B_2, C_2라 할 때, 삼각형 $A_1B_1C_1$ 내부의 점 A_2를 삼각형 $A_2B_2C_2$가 $\angle B_2A_2C_2=120^\circ$인 이등변삼각형이 되도록 잡는다. 중심이 선분 B_2C_2 위에 있고 직선 A_2B_2와 직선 A_2C_2에 동시에 접하는 원 O_2를 그리고 이등변삼각형 $A_2B_2C_2$의 내부와 원 O_2의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]





① $\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot h = 4\cdot\frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow h=2$

$\therefore S_1 = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\cdot 4\pi = \frac{16}{\sqrt{3}} - 2\pi = \frac{16\sqrt{3}}{3} - 2\pi$

② 길이비 $8:4 = 1:\frac{1}{2}$ $\rightsquigarrow$ 넓이비 $1:\frac{1}{4}$ 공비

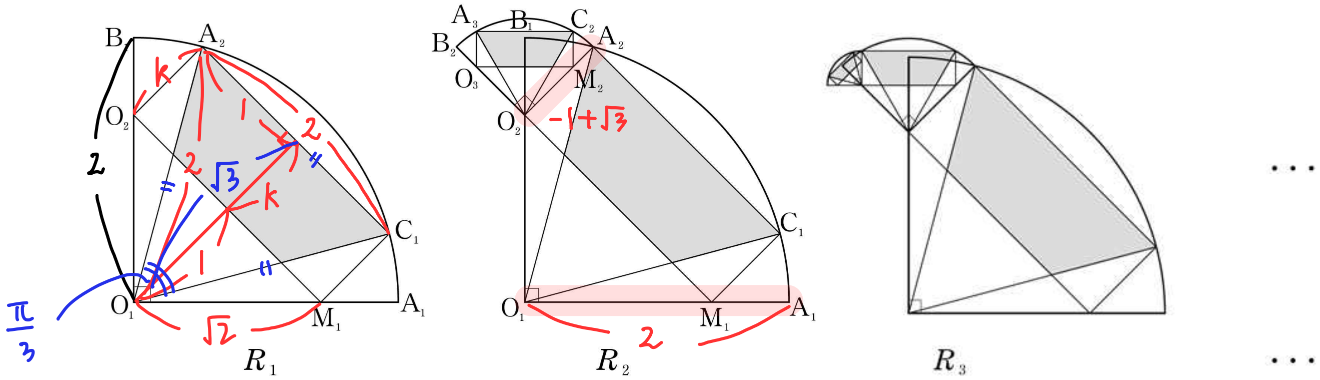
$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{4}{3}\left(\frac{16\sqrt{3}}{3} - 2\pi\right)$ //

#14. [2019년 3월 전국연합학력평가 19번(나형)]

그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 $O_1A_1B_1$에서 두 선분 O_1A_1, O_1B_1 위에 두 점 M_1, O_2를 각각 $\overline{O_1M_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{O_1A_1}$, $\overline{O_1O_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{O_1B_1}$이 되도록 정하자. 두 점 M_1, O_2와 호 A_1B_1 위의 두 점 C_1, A_2를 꼭짓점으로 하는 직사각형 $O_2M_1C_1A_2$를 그리고, 직사각형 $O_2M_1C_1A_2$와 삼각형 $O_1C_1A_2$의 내부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 중심이 O_2, 반지름의 길이가 $\overline{O_2A_2}$이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 $O_2A_2B_2$를 점 B_2가 부채꼴 $O_1A_1B_1$의 외부에 있도록 그리고, 두 선분 O_2A_2, O_2B_2 위에 두 점 M_2, O_3을 각각 $\overline{O_2M_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{O_2A_2}$, $\overline{O_2O_3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{O_2B_2}$가 되도록 정하자. 두 점 M_2, O_3과 호 A_2B_2 위의 두 점 C_2, A_3을 꼭짓점으로 하는 직사각형 $O_3M_2C_2A_3$을 그리고, 직사각형 $O_3M_2C_2A_3$과 삼각형 $O_2C_2A_3$의 내부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



Sol) $1 : 2 : \sqrt{3}$ 이므로 $k = -1+\sqrt{3}$ $(k>0)$

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

길이비 $2 : k$ ⇝ 넓이비 $1 : \frac{k^2}{4}$ 공비 $= 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

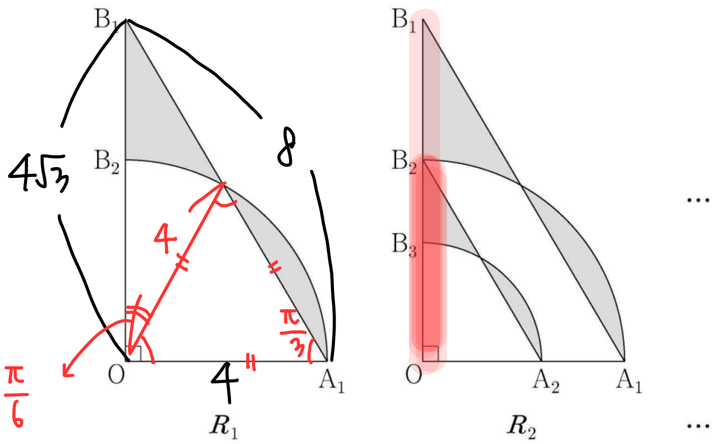
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{3}$$

#15. [2018년 2019학년도 대학수학능력시험 16번(나형)]

그림과 같이 $\overline{OA_1}=4$, $\overline{OB_1}=4\sqrt{3}$ 인 직각삼각형 OA_1B_1이 있다. 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OA_1}$인 원이 선분 OB_1과 만나는 점을 B_2라 하자. 삼각형 OA_1B_1 의 내부와 부채꼴 OA_1B_2의 내부에서 공통된 부분을 제외한 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 B를 지나고 선분 A_1B_1에 평행한 직선이 선분 OA_1과 만나는 점을 A_2, 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OA_2}$인 원이 선분 OB_2와 만나는 점을 B_3이라 하자. 삼각형 OA_2B_2의 내부와 부채꼴 OA_2B_3의 내부에서 공통된 부분을 제외한 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



$$S_1=\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sqrt{3}+4\pi\right)-2\left(\frac{1}{2}\cdot 16\cdot \frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 16\right)$$

$$=8\sqrt{3}+4\pi-\frac{8}{3}\pi-8\sqrt{3}=\frac{4}{3}\pi$$

길이비 $4\sqrt{3}:4=1:\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⇝ 넓이비 $1:\frac{1}{3}$ 공비

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi=2\pi$$

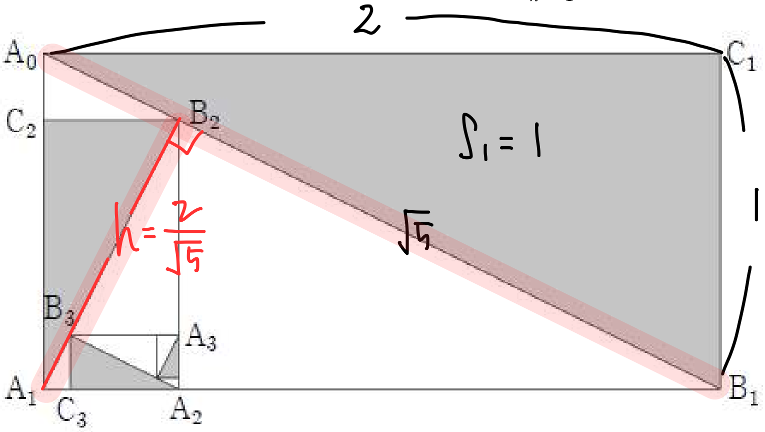
#16. [2018년 11월 대구교육청 19번(나형)]

그림과 같이 $\overline{A_0A_1}=1$, $\overline{A_1B_1}=2$인 직사각형 $A_0A_1B_1C_1$의 꼭짓점 A_1에서 대각선 A_0B_1에 내린 수선의 발을 B_2라 하고, 점 B_2에서 두 선분 A_0A_1과 A_1B_1에 내린 수선의 발을 각각 C_2, A_2라 하자.

직사각형 $A_1A_2B_2C_2$의 꼭짓점 A_2에서 대각선 A_1B_2에 내린 수선의 발을 B_3이라 하고, 점 B_3에서 두 선분 A_1A_2와 A_2B_2에 내린 수선의 발을 각각 C_3, A_3이라 하자.

이와 같이 자연수 n에 대하여 직사각형 $A_{n-1}A_nB_nC_n$의 꼭짓점 A_n에서 대각선 $A_{n-1}B_n$에 내린 수선의 발을 B_{n+1}이라 하고, 점 B_{n+1}에서 두 선분 $A_{n-1}A_n$과 A_nB_n에 내린 수선의 발을 각각 C_{n+1}, A_{n+1}이라 하자.

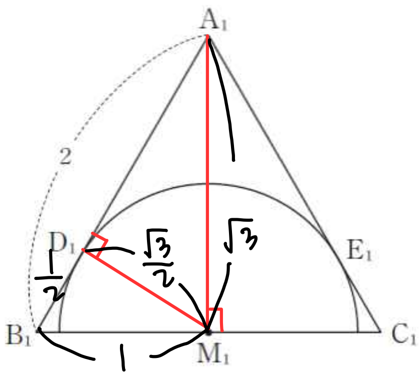
삼각형 $A_{n-1}B_nC_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



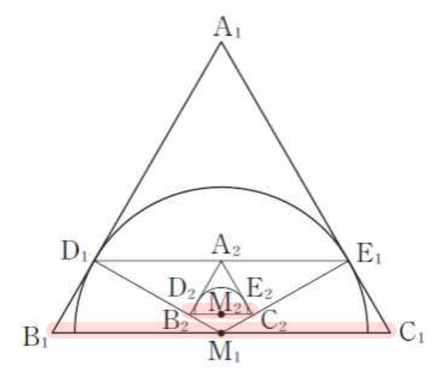
길이비 $\sqrt{5} : \frac{2}{\sqrt{5}} = 1 : \frac{2}{5}$ ⇝ 넓이비 $1 : \frac{4}{25}$ 공비

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{25}{21} \cdot 1 = \frac{25}{21}$

#17. [2018년 10월 전북교육청 17번(나형)]
그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 선분 B_1C_1의 중점을 M_1이라 할 때, 점 M_1을 중심으로 하고 두 선분 A_1B_1, A_1C_1과 각각 점 D_1과 점 E_1에서 접하는 반원을 그린 그림을 R_1이라 하자. 선분 D_1E_1의 중점을 A_2라 하고, 두 점 B_2, C_2를 각각 두 선분 D_1M_1, E_1M_1 위에 삼각형 $A_2B_2C_2$가 정삼각형이 되도록 잡는다. 선분 B_2C_2의 중점을 M_2라 할 때, 점 M_2를 중심으로 하고 두 선분 A_2B_2, A_2C_2와 각각 점 D_2와 점 E_2에서 접하는 반원을 그린 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 있는 모든 반원의 호의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} l_n$의 값은? (단, 모든 자연수 n에 대하여 두 선분 B_nC_n, $B_{n+1}C_{n+1}$은 평행하다.) [4점]

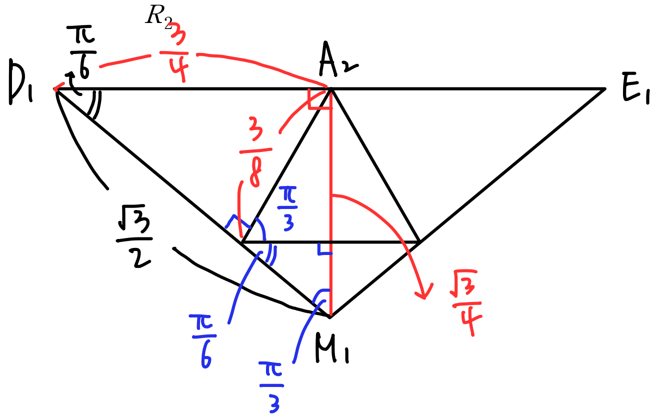


R_1



R_2

$l_1 = \sqrt{3}\pi \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$



길이비 $2 : \frac{3}{8} = 1 : \frac{3}{16}$

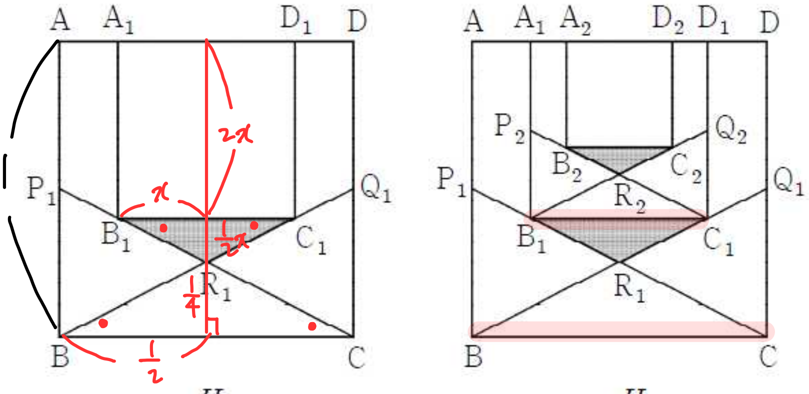
$\therefore \lim_{n\to\infty} l_n = \frac{16}{13} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\pi = \frac{8}{13}\sqrt{3}\pi$

#18. [2018년 10월 경남교육청 19번(나형)]

한 변의 길이가 1인 정사각형 $ABCD$가 있다. 그림과 같이 두 선분 AB, CD의 중점을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 두 선분 BQ_1, CP_1의 교점을 R_1이라 하자. 선분 R_1P_1 위의 한점 B_1, 선분 R_1Q_1 위의 한점 C_1과 선분 AD 위의 두 점 A_1, D_1을 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$을 그리고, 삼각형 $B_1R_1C_1$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 H_1이라 하자.

그림 H_1에서 그려진 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 두 선분 A_1B_1, C_1D_1의 중점을 각각 P_2, Q_2라 하고, 두 선분 B_1Q_2, C_1P_2 의 교점을 R_2라 하자. 선분 R_2P_2 위의 한 점 B_2, 선분 R_2Q_2 위의 한 점 C_2와 선분 A_1D_1 위의 두 점 A_2, D_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 삼각형 $B_2R_2C_2$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 H_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 H_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



H_1 H_2

$$2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=1$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}x=\frac{3}{4}$$

$$\therefore x=\frac{3}{10}$$

$$S_1=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{20}=\frac{9}{200}$$

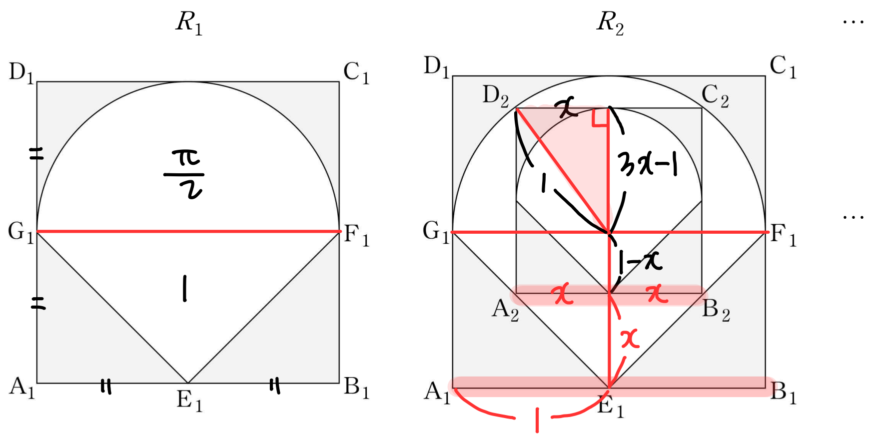
길이비 $1 : \frac{3}{5}$ ⇒ 넓이비 $1 : \frac{9}{25}$ 공비

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{25}{16}\cdot\frac{9}{200}=\frac{9}{128}$$

#19. [2018년 10월 평가원모의고사 19번(나형)]
그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 세 변 A_1B_1, B_1C_1, D_1A_1의 중점을 각각 E_1, F_1, G_1이라 하자. 선분 G_1F_1을 지름으로 하고 선분 D_1C_1에 접하는 반원의 호 G_1F_1과 두 선분 G_1E_1, E_1F_1로 둘러싸인 모양의 도형의 외부와 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부의 공통부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 G_1E_1 위의 점 A_2, 선분 E_1F_1 위의 점 B_2와 호 G_1F_1 위의 두 점 C_2, D_2를 꼭짓점으로 하고 선분 A_2B_2가 선분 A_1B_1과 평행한 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 그린 모양의 도형의 외부와 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부의 공통부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



$$S_1 = 4 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 3 - \frac{\pi}{2}$$

$$1 = (3x-1)^2 + x^2$$
$$10x^2 - 6x = 0 \quad \therefore x = \frac{3}{5}$$

길이비 $2 : \frac{6}{5} = 1 : \frac{3}{5}$

넓이비 $1 : \frac{9}{25}$ 공비

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{25}{16}\left(3 - \frac{\pi}{2}\right)$$

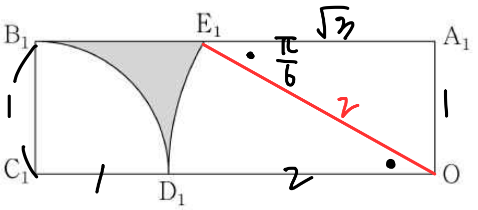
#20. [2018년 9월 평가원모의고사 19번(나형)]

그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=3$, $\overline{B_1C_1}=1$인 직사각형 $OA_1B_1C_1$이 있다. 중심이 C_1이고 반지름의 길이가 $\overline{B_1C_1}$인 원과 선분 OC_1의 교점을 D_1, 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OD_1}$인 원과 선분 A_1B_1의 교점을 E_1이라 하자. 직사각형 $OA_1B_1C_1$에 호 B_1D_1, 호 D_1E_1선분 B_1E_1로 둘러싸인 ◸ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 OA_1 위의 점 A_2와 호 D_1E_1위의 점 B_2, 선분 OD_1위의 점 C_2와 점 O를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=3:1$인 직사각형 $OA_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $OA_2B_2C_2$에 ◸ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

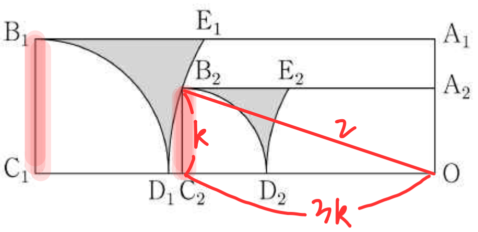
R_1



$S_1 = 3 - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{12}\pi$

R_2



$k^2 + 10k^2 = 4 \Rightarrow k^2 = \frac{2}{5}$

길이비 $1 : k \Rightarrow$ 넓이비 $1 : k^2 = 1 : \frac{2}{5}$

공비

⋮ ⋮

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{5}{3}\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{12}\pi\right)$

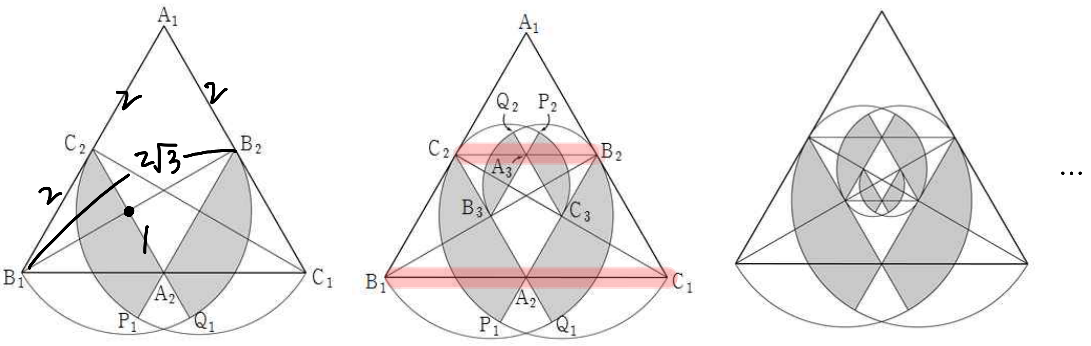
#21. [2018년 7월 전국연합학력평가 19번(나형)]

그림과 같이 한 변의 길이가 4 인 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 이 있다. 세 선분 B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 의 중점을 각각 A_2, B_2, C_2 라 하자. 선분 C_1C_2 를 지름으로 하는 반원의 호와 선분 B_2A_2 의 연장선이 만나는 점을 P_1, 선분 B_1B_2 를 지름으로 하는 반원의 호와 선분 C_2A_2 의 연장선이 만나는 점을 Q_1 이라 하자. 두 선분 C_2A_2, A_2P_1 과 호 P_1C_2 로 둘러싸인 영역과 두 선분 B_2A_2, A_2Q_1 과 호 Q_1B_2 로 둘러싸인 영역에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 정삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 세 변 B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 의 중점을 각각 A_3, B_3, C_3 이라 하자. 선분 C_2C_3 을 지름으로 하는 반원의 호와 선분 B_3A_3 의 연장선이 만나는 점을 P_2, 선분 B_2B_3 을 지름으로 하는 반원의 호와 선분 C_3A_3 의 연장선이 만나는 점을 Q_2 라 하자. 두 선분 C_3A_3, A_3P_2 와 호 P_2C_3 으로

둘러싸인 영역과 두 선분 B_3A_3, A_3Q_2 와 호 Q_2B_3 으로 둘러싸인 영역에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



R_1 R_2 R_3 …

$S_1 = 2 \times \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2}\pi - \sqrt{3}$

길이비 $4 : 2 = 1 : \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ 넓이비 $1 : \frac{1}{4}$ 공비

$\therefore \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\pi - \sqrt{3}\right) = 2\pi - \frac{4}{3}\sqrt{3}$

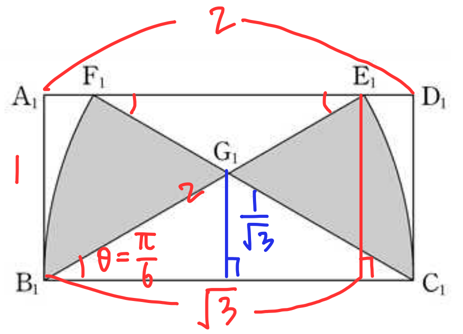
#22. [2018년 6월 평가원모의고사 18번(나형)]

그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$ 인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1 위의 $\overline{B_1C_1}=\overline{B_1E_1}$, $\overline{C_1B_1}=\overline{C_1F_1}$ 인 두 점 E_1, F_1에 대하여 중심이 B_1인 부채꼴 $B_1E_1C_1$과 중심이 C_1인 부채꼴 $C_1F_1B_1$을 각각 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 내부에 그리고, 선분 B_1E_1과 선분 C_1F_1의 교점을 G_1이라 하자. 두 선분 G_1F_1, G_1B_1과 호 F_1B_1로 둘러싸인 부분과 두 선분 G_1E_1, G_1C_1과 호 E_1C_1로 둘러싸인 부분인 ⋈ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

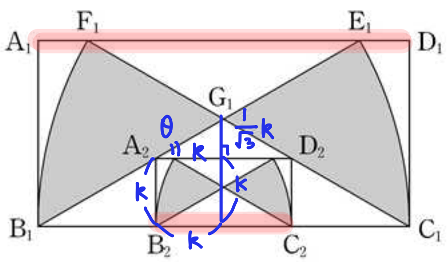
그림 R_1에서 선분 B_1G_1 위의 점 A_2, 선분 C_1G_1 위의 점 D_2와 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 내부에 ⋈ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



⋯

$$S_1 = 2\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$k + \frac{1}{\sqrt{3}}k = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore k = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$$

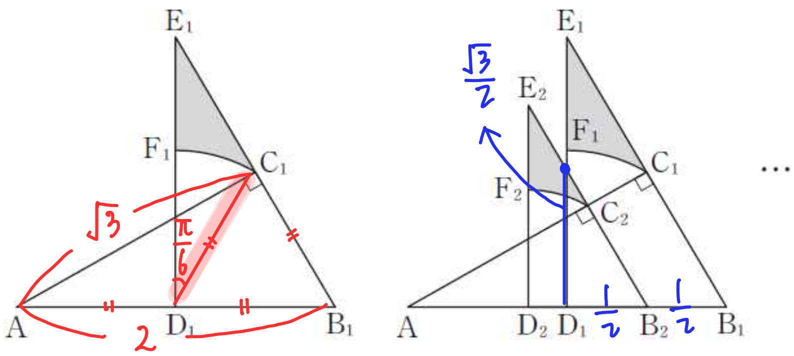
$$\Rightarrow 2k = \sqrt{3}-1$$

길이비 $2 : \sqrt{3}-1$

넓이비 $4 : 4-2\sqrt{3} = 1 : 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

#23. [2018년 5월 전북교육청 18번(나형)]
그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$ 이고 $\angle A=30°$, $\angle B_1=60°$ 인 직각삼각형 C_1AB_1 이 있다. 선분 AB_1 의 중점을 D_1 이라 하고, 점 D_1 을 지나고 선분 AB_1 에 수직인 직선과 직선 C_1B_1 의 교점을 E_1 이라 하자. 점 D_1 을 중심으로 하고 점 C_1 을 지나는 원이 선분 E_1D_1 과 만나는 점을 F_1 이라 할 때, 두 선분 E_1F_1, E_1C_1 과 부채꼴
$D_1C_1F_1$ 의 호 F_1C_1 으로 둘러싸인 영역에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.
그림 R_1 에서 선분 E_1D_1 의 중점을 지나고 직선 C_1B_1 과 평행한 직선이 두 선분 AB_1, AC_1 과 만나는 점을 각각 B_2, C_2 라 하자. 선분 AB_2 의 중점을 D_2 라 하고, 점 D_2 를 지나고 선분 AB_2 에 수직인 직선과 직선 C_2B_2 의 교점을 E_2 라 하자. 점 D_2 를 중심으로 하고 점 C_2 를 지나는 원이 선분 E_2D_2 와 만나는 점을 F_2 라 할 때, 두 선분 E_2F_2, E_2C_2 와 부채꼴 $D_2C_2F_2$ 의 호 F_2C_2 로 둘러싸인 영역에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



R_1 R_2 …

$$S_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}$$

길이비 $\overline{AB_1} : \overline{AB_2} = 2 : \frac{3}{2}$

넓이비 $1 : \frac{9}{16}$ 공비

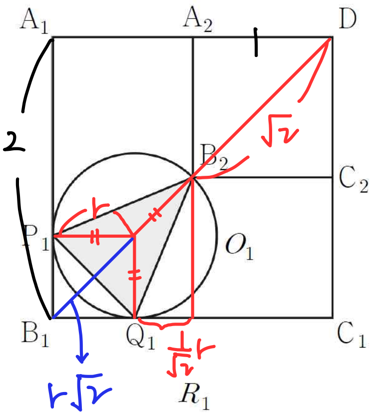
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{16}{7}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{7}-\frac{4\pi}{21}$$

#24. [2018년 4월 전국연합학력평가 18번(나형)]

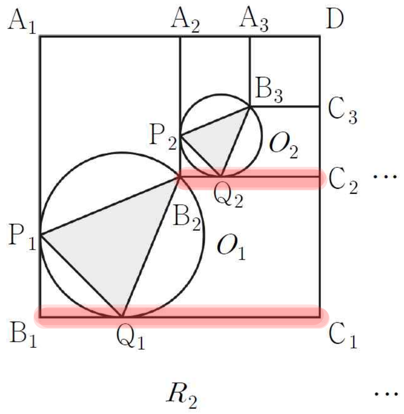
그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D$가 있다. 정사각형 $A_1B_1C_1D$의 두 대각선의 교점을 B_2라 하고, 점 B_2에서 두 변 A_1D, C_1D에 내린 수선의 발을 각각 A_2, C_2라 하자. 점 B_2를 지나고 두 변 A_1B_1, B_1C_1에 동시에 접하는 원을 O_1이라 하고, 원 O_1이 두 변 A_1B_1, B_1C_1에 접하는 점을 각각 P_1, Q_1이라 할 때, 삼각형 $B_2P_1Q_1$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 정사각형 $A_2B_2C_2D$의 두 대각선의 교점을 B_3이라 하고, 점 B_3에서 두 변 A_2D, C_2D에 내린 수선의 발을 각각 A_3, C_3이라 하자. 점 B_3을 지나고 두 변 A_2B_2, B_2C_2에 동시에 접하는 원을 O_2라 하고, 원 O_2가 두 변 A_2B_2, B_2C_2에 접하는 점을 각각 P_2, Q_2라 할 때, 삼각형 $B_3P_2Q_2$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2

⋯

$r(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ r=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=2-\sqrt{2}$

$r^2=6-4\sqrt{2}$

$S_1=\frac{1}{2}r^2+2\times\left(\frac{1}{2}\cdot r\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}r\right)$

$=\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{\sqrt{2}}r^2$

$=3-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4$

$=\sqrt{2}-1$

길이비 $2:1=1:\frac{1}{2}$

넓이비 $1:\frac{1}{4}$ 공비

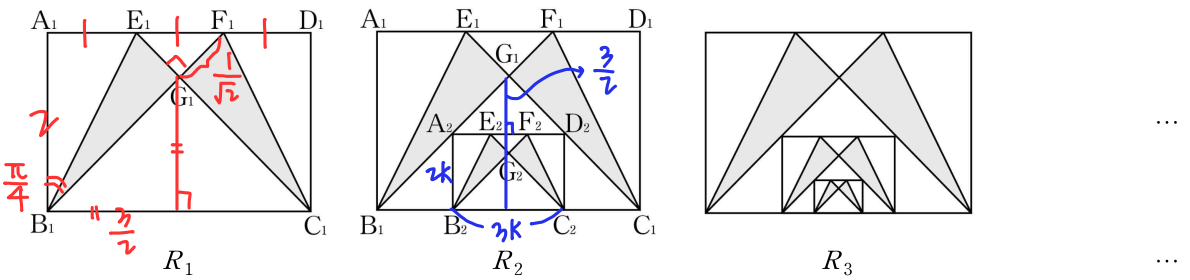
$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$

#25. [2018년 3월 전국연합학력평가 19번(나형)]

그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1C_1}=3$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1을 삼등분하는 점 중에서 A_1에 가까운 점부터 차례대로 E_1, F_1이라 하고, 선분 B_1F_1과 선분 C_1E_1의 교점을 G_1이라 하자. 삼각형 $B_1G_1E_1$과 삼각형 $C_1F_1G_1$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 B_1C_1 위에 두 꼭짓점 B_2, C_2가 있고, 선분 B_1G_1 위에 꼭짓점 A_2, 선분 C_1G_1 위에 꼭짓점 D_2가 있으며 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=2:3$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 선분 A_2D_2를 삼등분하는 점 중에서 A_2에 가까운 점부터 차례대로 E_2, F_2라 하고, 선분 B_2F_2와 선분 C_2E_2의 교점을 G_2라 하자. 삼각형 $B_2G_2E_2$와 삼각형 $C_2F_2G_2$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



$S_1=\frac{1}{2}(3+1)\times2-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}\right)$

$=4-\frac{5}{2}$

$=\frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}=\frac{3}{2}k+2k$

$k=\frac{3}{7}$

길이비 $2:2k=1:k$

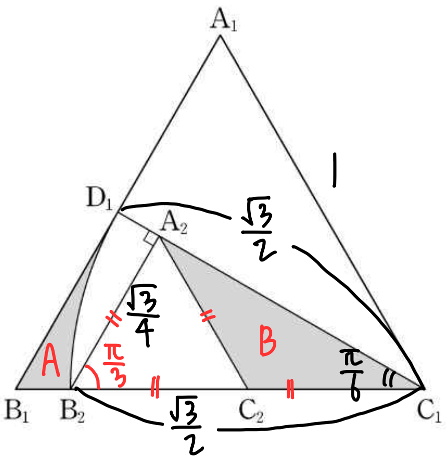
넓이비 $1:k^2=1:\frac{9}{49}$ 공비

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{49}{40}\cdot\frac{3}{2}=\frac{147}{80}$

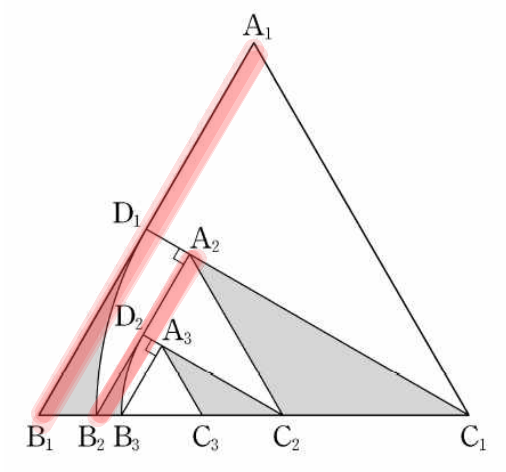
#26. [2017년 2018학년도 대학수학능력시험 19번(나형)]

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 이 있다. 선분 A_1B_1의 중점을 D_1이라 하고, 선분 B_1C_1위의 $\overline{C_1D_1}=\overline{C_1B_2}$인 점 B_2에 대하여 중심이 C_1인 부채꼴 $C_1D_1B_2$를 그린다. 점 B_2에서 선분 C_1D_1에 내린 수선의 발을 A_2, 선분 C_1B_2의 중점을 C_2라 하자. 두 선분 B_1B_2, B_1D_1 과 호 D_1B_2로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_1A_2C_2$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 A_2B_2의 중점을 D_2라 하고, 선분 B_2C_2 위의 $\overline{C_2D_2}=\overline{C_2B_3}$인 점 B_3에 대하여 중심이 C_2인 부채꼴 $C_2D_2B_3$을 그린다. 점 B_3에서 선분 C_2D_2에 내린 수선의 발을 A_3, 선분 C_2B_3의 중점을 C_3이라 하자. 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 D_2B_3으로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_2A_3C_3$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2

$S_1 = A + B$

$= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3}{16}\right)$

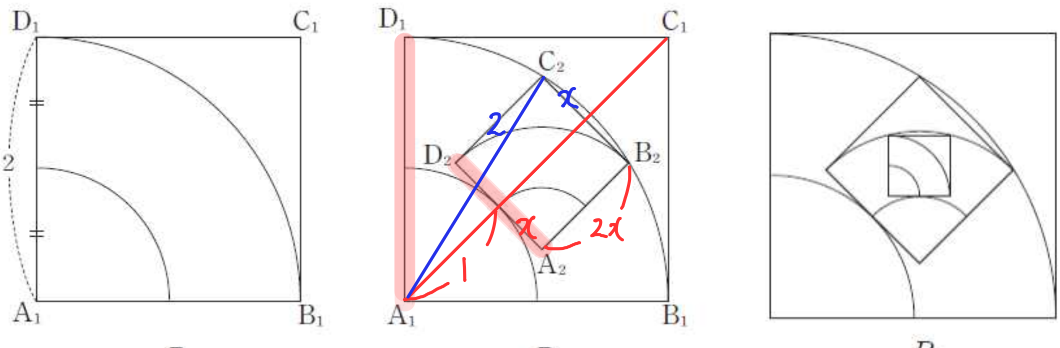
$= \frac{11}{64}\sqrt{3} - \frac{1}{16}\pi$

길이비 $1 : \frac{\sqrt{3}}{4}$

넓이비 $1 : \frac{3}{16}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{16}{13}\cdot S_1 = \frac{11}{52}\sqrt{3} - \frac{\pi}{13}$

#27. [2017년 10월 전북교육청 18번(나형)]
그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에 중심이 점 A_1이고 반지름의 길이가 각각 $\overline{A_1B_1}$, $\frac{1}{2}\overline{A_1B_1}$인 두 개의 사분원의 호를 그려 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에 있는 두 사분원의 호에 대하여 작은 호에 접하고 두 꼭짓점이 큰 호 위에 있는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 그 내부에 중심이 점 A_2이고 반지름의 길이가 각각 $\overline{A_2B_2}$, $\frac{1}{2}\overline{A_2B_2}$인 두 개의 사분원의 호를 그려 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 있는 모든 정사각형의 둘레의 길이의 합을 L_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} L_n$의 값은? [4점]



R_1　　　　R_2　　　　R_3

$l_1 = 8$

$4 = x^2 + (1+2x)^2$

$5x^2 + 4x - 3 = 0$

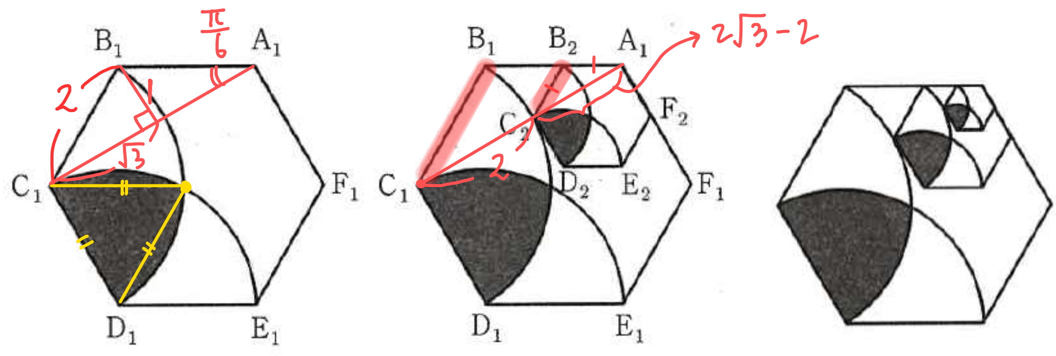
$\therefore x = \dfrac{-2+\sqrt{19}}{5}$

길이비 $2 : 2x = 1 : x$ 공비

$\therefore \lim_{n\to\infty} L_n = \dfrac{5}{7-\sqrt{19}} \cdot 8$

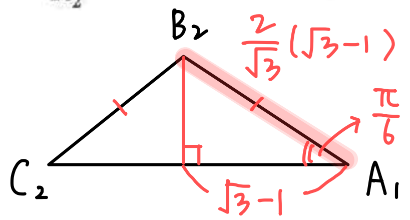
$= \dfrac{4}{3}(7+\sqrt{19})$

#28. [2017년 10월 경남교육청 20번(나형)]
한 변의 길이가 2인 정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$이 있다.
그림과 같이 중심이 C_1, 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$이고 중심각의 크기가 120°인 부채꼴 $C_1D_1B_1$을 그리고 중심이 D_1, 반지름의 길이가 $\overline{D_1E_1}$이고 중심각의 크기가 120°인 부채꼴 $D_1E_1C_1$을 그린 후 두 부채꼴 $C_1D_1B_1$과 $D_1E_1C_1$의 내부의 공통부분인 ▽ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 $\overline{A_1B_2} = \overline{B_2C_2}$이고 $\angle A_1B_2C_2 = 120^\circ$가 되도록 선분 A_1B_1 위에 점 B_2, 호 B_1D_1 위에 점 C_2를 각각 잡고, 두 선분 A_1B_1, B_2C_2를 이웃하는 두 변으로 하는 정육각형 $A_1B_2C_2D_2E_2F_2$를 그린 후 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 부채꼴을 그려 두 부채꼴의 내부의 공통부분인 ▽모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1 R_2 R_3

$$S_1 = 2\times\left(\frac{1}{2}\times 4\cdot\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\times 4$$
$$= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$$



길이비 $2 : \frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1) = 1 : 1-\frac{1}{\sqrt{3}}$

넓이비 $1 : \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3}$

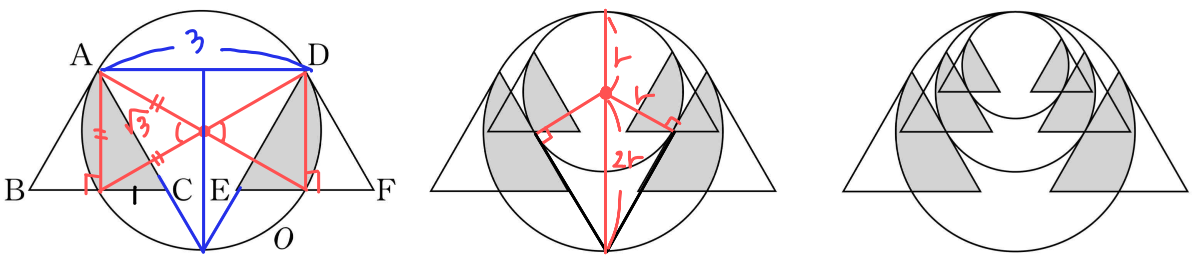
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{2\sqrt{3}-1}\cdot\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$$
$$= \frac{3(2\sqrt{3}+1)}{11}\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$$

#29. [2017년 10월 전국연합학력평가 18번(나형)]

반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 원 O가 있다. 그림과 같이 원 O 위의 한 점 A에 대하여 정삼각형 ABC를 높이가 원 O의 반지름의 길이와 같고 선분 BC의 중점이 원 O 위의 점이 되도록 그린다. 그리고 정삼각형 ABC와 합동인 정삼각형 DEF를 점 D가 원 O 위에 있고 네 점 B, C, E, F가 한 직선 위에 있도록 그린다. 원 O의 내부와 정삼각형 ABC의 내부의 공통부분인 모양의 도형과 원 O의 내부와 정삼각형 DEF의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 두 선분 AC, DE에 동시에 접하고 원 O에 내접하는 원을 그린 후, 새로 그려진 원에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 도형과 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1 R_2 R_3

$$S_1 = 2 \times \left\{ \left(\frac{1}{2} \cdot \cancel{3} \cdot \frac{\pi}{\cancel{3}} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3 \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$= \pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$3r = 2\sqrt{3}$

$r = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

길이비 $\sqrt{3} : r = \cancel{\sqrt{3}} : \frac{2}{3}\cancel{\sqrt{3}}$

넓이비 $1 : \frac{4}{9}$ 공비

$$\therefore \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{9}{5}\left(\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

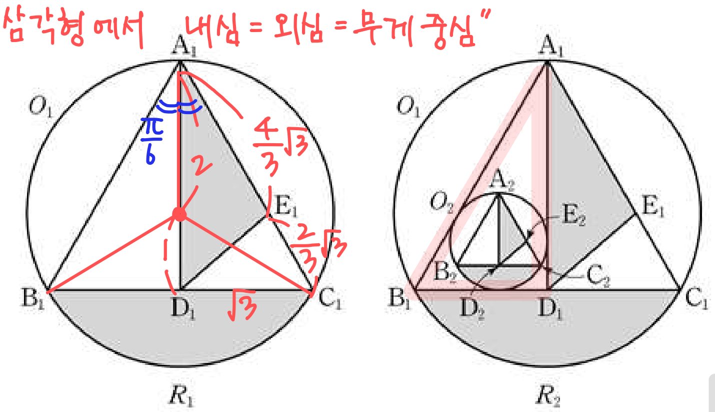
#30. [2017년 9월 평가원모의고사 18번(나형)]

그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원 O_1에 내접하는 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 점 A_1에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 D_1이라 하고, 선분 A_1C_1을 $2:1$로 내분하는 점을 E_1이라 하자. 점 A_1을 포함하지 않는 호 B_1C_1과 선분 B_1C_1로 둘러싸인 도형의 내부와 삼각형 $A_1D_1E_1$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

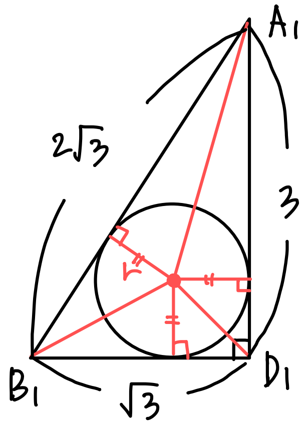
그림 R_1에 삼각형 $A_1B_1D_1$에 내접하는 원 O_2와 원 O_2에 내접하는 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그리고, 점 A_2에서 선분 B_2C_2에 내린 수선의 발을 D_2, 선분 A_2C_2를 $2:1$로 내분하는 점을 E_2라 하자. 점 A_2를 포함하지 않는 호 B_2C_2와 선분 B_2C_2로 둘러싸인 도형의 내부와 삼각형 $A_2D_2E_2$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

" 정삼각형에서 내심 = 외심 = 무게중심"



…



$$S_1 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot 3\cdot \tfrac{4}{\cancel{3}}\sqrt{3}\cdot \cancel{\sin\tfrac{\pi}{6}} + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot 4\cdot \tfrac{2}{3}\pi - \cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 1\right)$$

$$= \sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$$

$$= \frac{4}{3}\pi$$

…

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot \sqrt{3}\cdot 3 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot r\cdot(3+\sqrt{3}+2\sqrt{3})$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

길이비 $2 : \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

공비

넓이비 $4 : \frac{12-6\sqrt{3}}{4} = 1 : \frac{6-3\sqrt{3}}{8}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{8}{3\sqrt{3}+2}\cdot\frac{4}{3}\pi$$

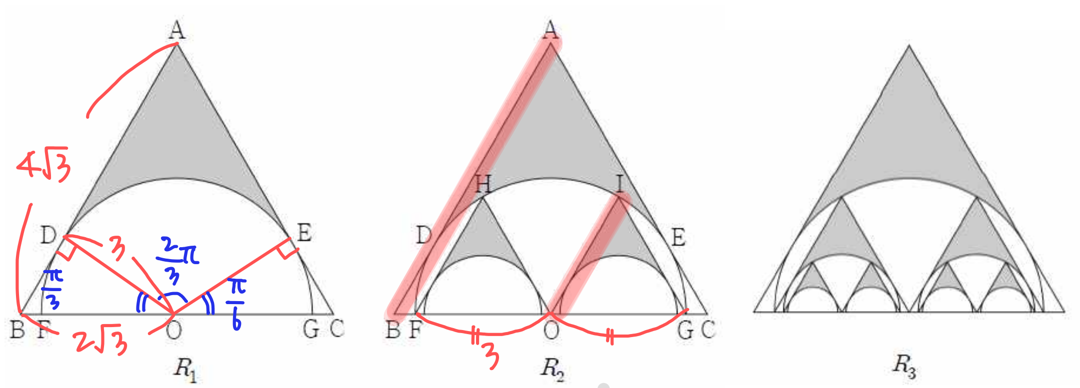
#31. [2017년 7월 대구교육청 17번(나형)]

그림과 같이 한 변의 길이가 $4\sqrt{3}$인 정삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 O라 하자. 중심이 O이고 두 변 AB, AC에 동시에 접하는 원을 그릴 때, 이 원이 두 변 AB, AC에 접하는 점을 각각 D, E라 하고, 변 BC와 만나는 점을 각각 F, G라 하자.

두 선분 AD, AE와 선분 FG를 지름으로 하는 위쪽 반원의 호 DE로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 FG를 지름으로 하는 위쪽 반원의 호 FG의 3등분점 중 점 F에 가까운 점을 H, 점 G에 가까운 점을 I라 하자. 두 정삼각형 HFO, IOG에서 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 16\cdot 3 - \left(3\sqrt{3} + \cancel{\frac{1}{2}}\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\cdot \cancel{\frac{2}{3}}\pi\right)$$

$$= 9\sqrt{3} - 3\pi$$

길이비 $4\sqrt{3} : 3$

넓이비 $1 : \frac{3}{16}$

$\therefore$ 공비 $\frac{3}{8}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{8}{5}\left(9\sqrt{3} - 3\pi\right)$$

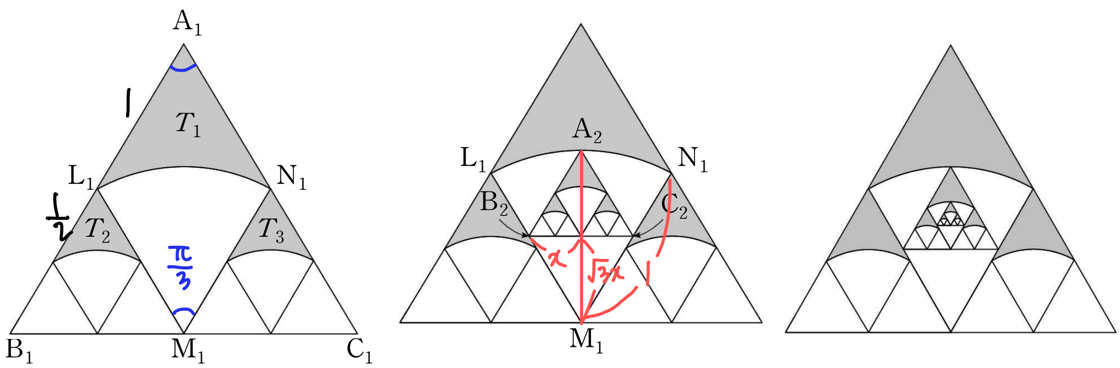
#32. [2017년 7월 전국연합학력평가 18번(나형)]

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 세 선분 A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1의 중점을 각각 L_1, M_1, N_1이라 하고, 중심이 M_1, 반지름의 길이가 $\overline{M_1N_1}$이고 중심각의 크기가 60°인 부채꼴 $M_1N_1L_1$을 그린 후 부채꼴 $M_1N_1L_1$의 호 N_1L_1과 두 선분 A_1L_1, A_1N_1로 둘러싸인 부분인 △ 모양의 도형을 T_1이라 하자.

두 정삼각형 $L_1B_1M_1$과 $N_1M_1C_1$에 도형 T_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 각각의 부채꼴의 호와 두 선분으로 둘러싸인 부분인 △ 모양의 도형을 각각 T_2, T_3이라 하자. 정삼각형 $A_1B_1C_1$에서 세 도형 T_1, T_2, T_3으로 이루어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 부채꼴 $M_1N_1L_1$의 호 N_1L_1을 이등분하는 점을 A_2라 할 때, 부채꼴 $M_1N_1L_1$에 내접하는 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그리고 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1 R_2 R_3

$$S_1 = T_1 + T_2 + T_3$$
$$= T_1 + \frac{1}{4}T_1 + \frac{1}{4}T_1$$
$$= \frac{3}{2}T_1$$
$$= \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{4}$$

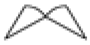
$$2\sqrt{3}x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

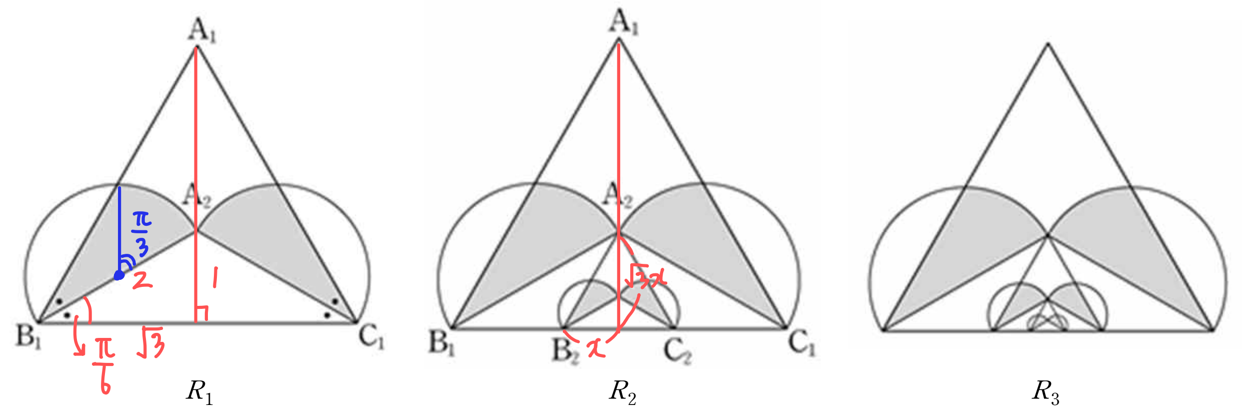
길이비 $2 : 2x = 1 : x$

넓이비 $1 : \frac{1}{12}$ 공비

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{12}{11}\cdot\frac{1}{4}(3\sqrt{3}-\pi)$$
$$= \frac{3}{11}(3\sqrt{3}-\pi)$$

#33. [2017년 6월 평가원모의고사 18번(나형)]

한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 이 있다. 그림과 같이 $\angle A_1B_1C_1$ 의 이등분선과 $\angle A_1C_1B_1$ 의 이등분선이 만나는 점을 A_2 라 하자. 두 선분 B_1A_2, C_1A_2 를 각각 지름으로 하는 반원의 내부와 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 내부의 공통부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.그림 R_1 에서 점 A_2 를 지나고 선분 A_1B_1 에 평행한 직선이 선분 B_1C_1 과 만나는 점을 B_2, 점 A_2 를 지나고 선분 A_1C_1 에 평행한 직선이 선분 B_1C_1 과 만나는 점을 C_2 라 하자. 그림 R_1 에 정삼각형 $A_2B_2C_2$ 를 그리고, 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 정삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 내부에  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?



R_1 R_2 R_3

$$S_1 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$$

$\sqrt{3}x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

길이비 $2\sqrt{3} : 2x = 1 : \frac{1}{3}$

넓이비 $1 : \frac{1}{9}$

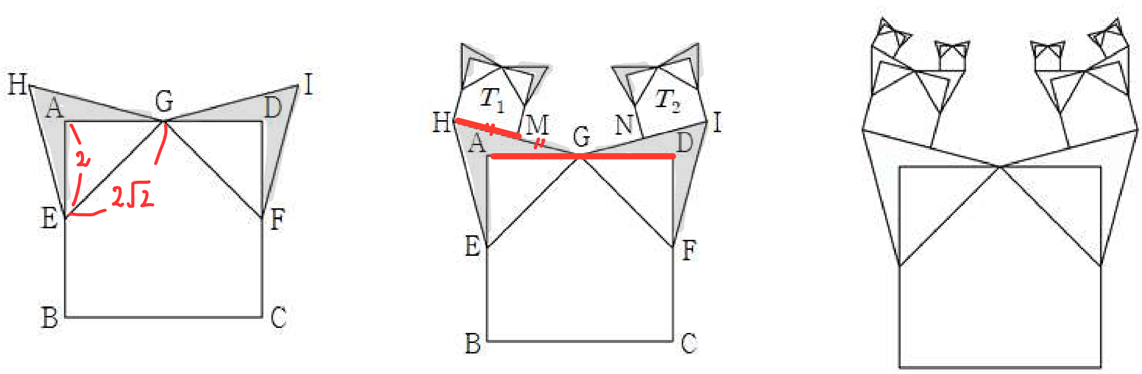
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{9}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

#34. [2017년 4월 전국연합학력평가 18번(나형)]

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에서 선분 AB, 선분 CD, 선분 DA의 중점을 각각 E, F, G라 하자. 선분 EG를 한 변으로 하고 점 A가 내부에 있도록 정삼각형 EGH를 그리고, 선분 GF를 한 변으로 하고 점 D가 내부에 있도록 정삼각형 GFI를 그린다. 두 정삼각형 EGH, GFI의 내부와 정사각형 ABCD의 외부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 HG의 중점을 M, 선분 IG의 중점을 N이라 하고, 선분 HM을 한 변으로 하는 정사각형 T_1과 선분 IN을 한 변으로 하는 정사각형 T_2를 각각 정사각형 ABCD와 만나지 않게 그린다. 정사각형 T_1, T_2에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1　　R_2　　R_3

$$S_1 = 2\times\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{2})^2 - 2\right\} = 4\sqrt{3} - 4$$

길이비　$4 : \sqrt{2}$

넓이비　$1 : \frac{1}{8}$

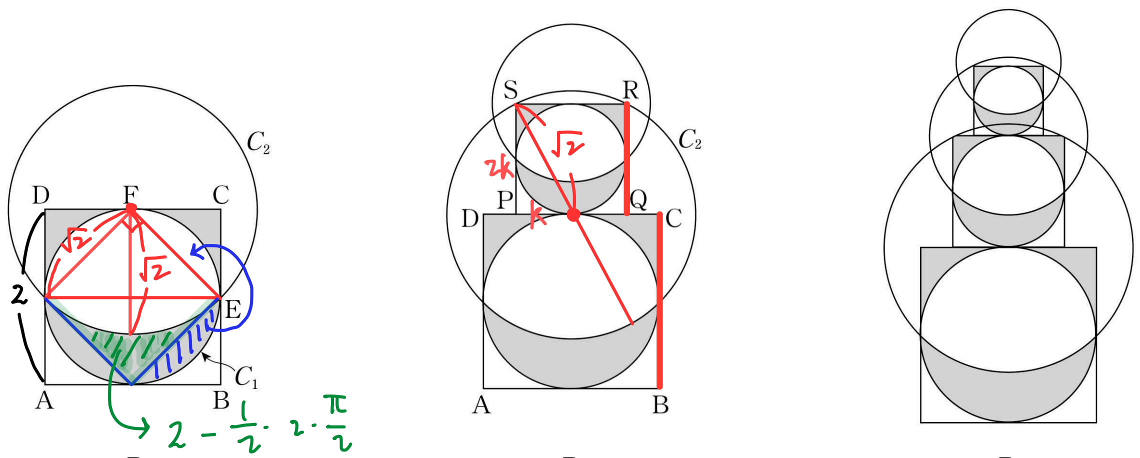
공비　$\frac{1}{4}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{4}{3}\cdot 4(\sqrt{3}-1) = \frac{16}{3}(\sqrt{3}-1)$$

#35. [2017년 3월 전국연합학력평가 19번(나형)]
그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD가 있다. 이 정사각형에 내접하는 원을 C_1이라 하자. 원 C_1이 변 BC, CD와 접하는 점을 각각 E, F라 하고, 점 F를 중심으로 하고 점 E를 지나는 원을 C_2라 하자. 원 C_1의 내부와 원 C_2의 외부의 공통부분인 ◡ 모양의 도형과, 원 C_1의 외부와 원 C_2의 내부 및 정사각형 ABCD의 내부의 공통부분인 ◠ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 두 꼭짓점이 변 CD 위에 있고 나머지 두 꼭짓점이 정사각형 ABCD의 외부에 있으면서 원 C_2 위에 있는 정사각형 PQRS를 그리고, 이 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ◡ 모양과 ◠ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1 R_2 R_3

$S_1 = 1 + \left(2 - \frac{1}{2}\pi\right)$

$= 3 - \frac{1}{2}\pi$

$5k^2 = 2 \quad \therefore k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

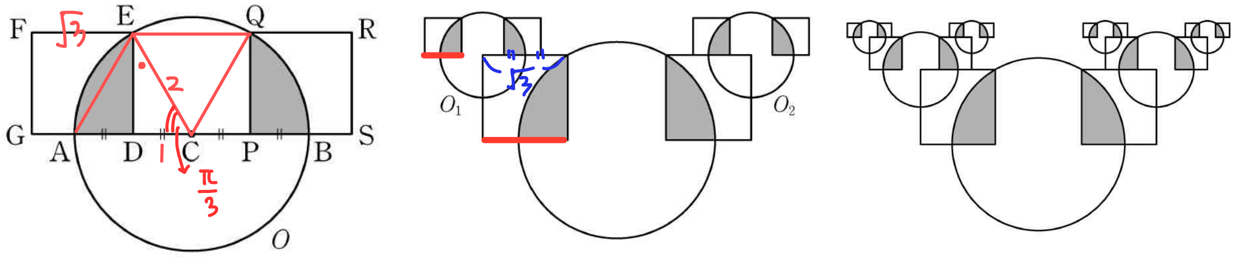
길이비 $1 : k$

넓이비 $1 : \frac{2}{5}$ 공비

$\therefore \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{5}{3}\left(3 - \frac{1}{2}\pi\right)$

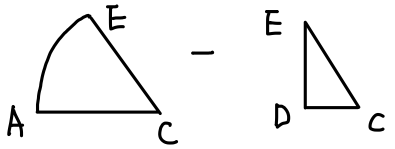
$= 5 - \frac{5}{6}\pi$

#36. [2016년 2017학년도 대학수학능력시험 17번(나형)]
그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원의 중심을 C라 하고, 선분 AC의 중점과 선분 BC의 중점을 각각 D, P라 하자. 선분 AC의 수직이등분선과 선분 BC의 수직이등분선이 원 O의 위쪽 반원과 만나는 점을 각각 E, Q라 하자. 선분 DE를 한 변으로 하고 원 O와 점 A에서 만나며 선분 DF가 대각선인 정사각형 DEFG를 그리고, 선분 PQ를 한 변으로 하고 원 O와 점 B에서 만나며 선분 PR가 대각선인 정사각형 PQRS를 그린다. 원 O의 내부와 정사각형 DEFG의 내부의 공통부분인 모양의 도형과 원 O의 내부와 정사각형 PQRS의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{DE}$인 원 O_1, 점 R를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{PQ}$인 원 O_2를 그린다. 두 원 O_1, O_2에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 2개의 도형과 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1 R_2 R_3

$$S_1 = 2 \times \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \right) = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$$

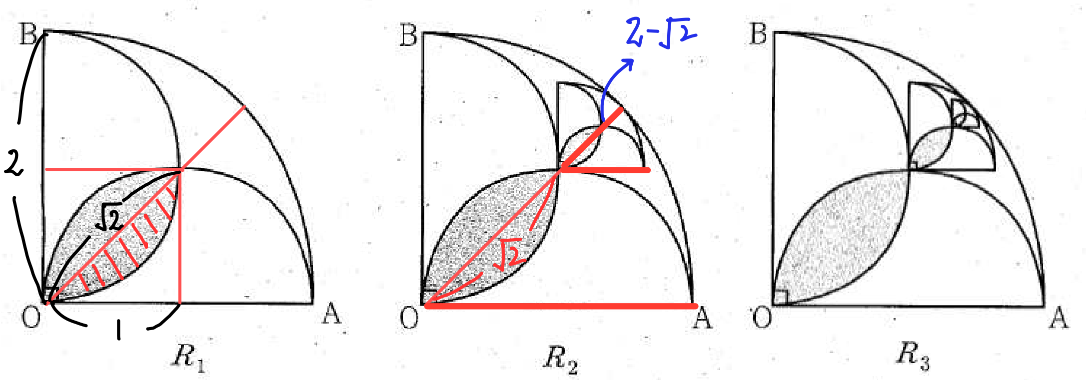


길이비 $2 : \frac{\sqrt{3}}{2}$

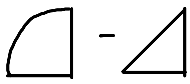
넓이비 $1 : \frac{3}{16}$ 공비 : $\frac{3}{16} \times 2 = \frac{3}{8}$ 공비

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{8}{5}\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right) = \frac{32}{15}\pi - \frac{8}{5}\sqrt{3}$$ //

#37. [2016년 10월 경남교육청 19번(나형)]
중심이 O, 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 OAB가 있다. 그림과 같이 부채꼴 OAB의 내부에 선분 OA를 지름으로 하는 반원과 선분 OB를 지름으로 하는 반원을 그린 후 두 반원의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 그려진 두 반원이 만나는 점 중에서 점 O가 아닌 점을 중심으로 하고 반지름이 선분 OA, 선분 OB와 각각 평행하면서 호 AB와 한 점에서 만나는 부채꼴을 두 반원의 외부에 그리고 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 반원을 그린 후 새로 그려진 두 반원의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



$S_1 = 2 \times \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$



길이비 $2 : 2-\sqrt{2}$

넓이비 $4 : 6-4\sqrt{2} = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\sqrt{2} - \frac{1}{2}} \times \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2}-1}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}+1}{7}(\pi - 2)$$

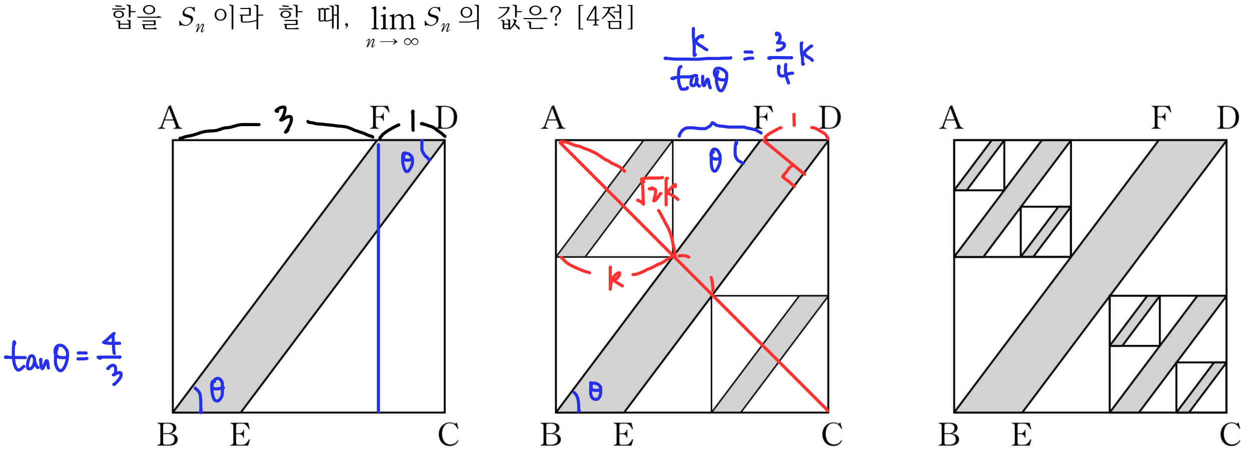
#38. [2016년 10월 전국연합학력평가 19번(나형)]

한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 선분 BC를 1 : 3으로 내분하는 점을 E, 선분 DA를 1 : 3으로 내분하는 점을 F라 하고 평행사변형 BEDF를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 정사각형 안에 있는 각 직각삼각형에 내접하는 가장 큰 정사각형을 각각 그리자. 새로 그려진 각 정사각형에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 평행사변형을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 새로 그려진 정사각형 안에 있는 각 직각삼각형에 내접하는 가장 큰 정사각형을 각각 그리자. 새로 그려진 각 정사각형에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 평행사변형을 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 평행사변형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1 R_2 R_3

$S_1 = 4$

$k + \frac{3}{4}k + 1 = 4$

$\frac{7}{4}k = 3 \Rightarrow k = \frac{12}{7}$

길이비 $4 : \frac{12}{7} = 1 : \frac{3}{7}$

넓이비 $1 : \frac{9}{49}$

공비 $2 \times \frac{9}{49} = \frac{18}{49}$

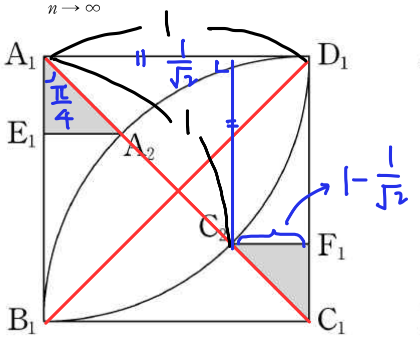
$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{49}{31} \times 4 = \frac{196}{31}$

#39. [2016년 9월 평가원모의고사 16번(나형)]

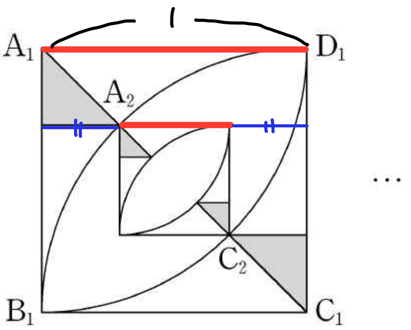
그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 안에 꼭짓점 A_1, C_1을 중심으로 하고 선분 A_1B_1, C_1D_1을 반지름으로 하는 사분원을 각각 그린다. 선분 A_1C_1이 두 사분원과 만나는 점 중 점 A_1과 가까운 점을 A_2, 점 C_1과 가까운 점을 C_2라 하자. 선분 A_1D_1에 평행하고 점 A_2를 지나는 직선이 선분 A_1B_1과 만나는 점을 E_1, 선분 B_1C_1에 평행하고 점 C_2를 지나는 직선이 선분 C_1D_1과 만나는 점을 F_1이라 하자. 삼각형 $A_1E_1A_2$와 삼각형 $C_1F_1C_2$를 그린 후 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 A_2C_2를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 두 개의 사분원과 두 개의 삼각형을 그리고 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2 ⋯

$S_1 = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{2}-\sqrt{2}$

길이비 $1 : \sqrt{2}-1$

넓이비 $1 : 3-2\sqrt{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2\sqrt{2}-2}\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(2\sqrt{2}+2)\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$$

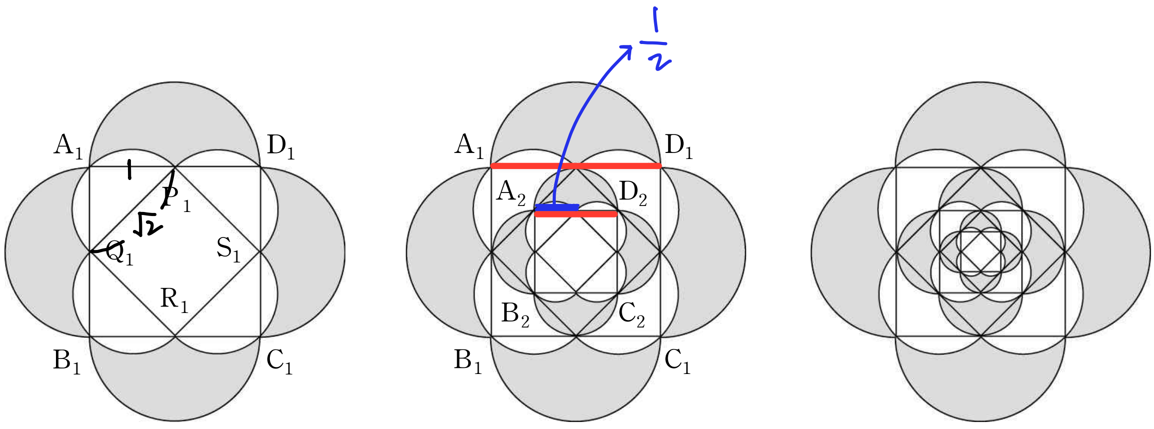
$$= \frac{(\sqrt{2}+1)(3-2\sqrt{2})}{4} = \frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$$

#40. [2016년 7월 전국연합학력평가 15번(나형)]

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 네 변 A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1을 각각 지름으로 하는 반원을 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 외부에 그려 만들어진 4개의 호로 둘러싸인 모양의 도형을 E_1이라 하자. 네 변 D_1A_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1의 중점 P_1, Q_1, R_1, S_1을 꼭짓점으로 하는 정사각형에 도형 E_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 도형을 F_1이라 하자.

도형 E_1의 내부와 도형 F_1의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 G_1이라 하자. 그림 G_1에 네 변 P_1Q_1, Q_1R_1, R_1S_1, S_1P_1의 중점 A_2, B_2, C_2, D_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형을 그리고 도형 E_1을 얻는 것과 같은 방법으로 새로 만들어지는 모양의 도형을 E_2라 하자. 네 변 D_2A_2, A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2의 중점 P_2, Q_2, R_2, S_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형을 그리고 도형 E_1을 얻는 것과 같은 방법으로 새로 만들어지는 모양의 도형을 F_2라 하자. 그림 G_1에 도형 E_2의 내부와 도형 F_2의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 G_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 G_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} T_n$의 값은? [4점]



G_1 G_2 G_3

$S_1 = 2\pi - \left(\frac{\pi}{4} \times 4 - 2\right)$

$= \pi + 2$

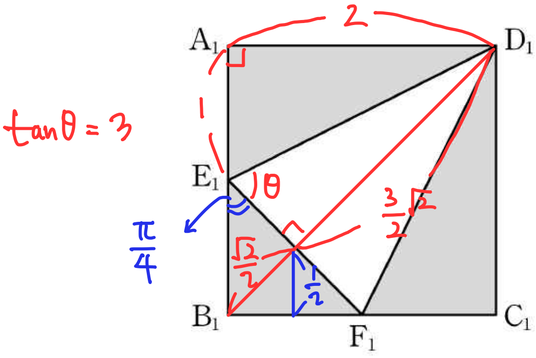
길이비 $1 : \frac{1}{2}$

넓이비 $1 : \frac{1}{4}$ 공비

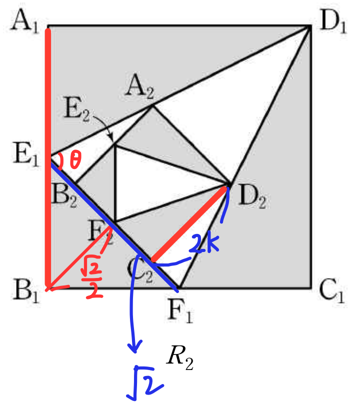
$\therefore \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{4}{3}(\pi + 2)$

#41. [2016년 6월 평가원모의고사 17번(나형)]

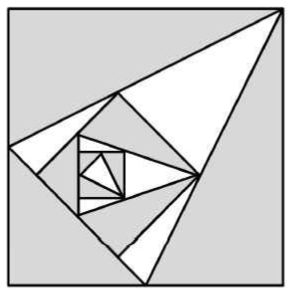
그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1B_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 E_1, F_1이라 하자. 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부와 삼각형 $E_1F_1D_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 D_1E_1 위의 점 A_2, 선분 D_1F_1 위의 점 D_2와 선분 E_1F_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 삼각형 $E_2F_2D_2$를 그리고 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부와 삼각형 $E_2F_2D_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2


R_3

$S_1 = 1 \times 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$\overline{E_1B_2} = \frac{2k}{\tan\theta} = \frac{2}{3}k$

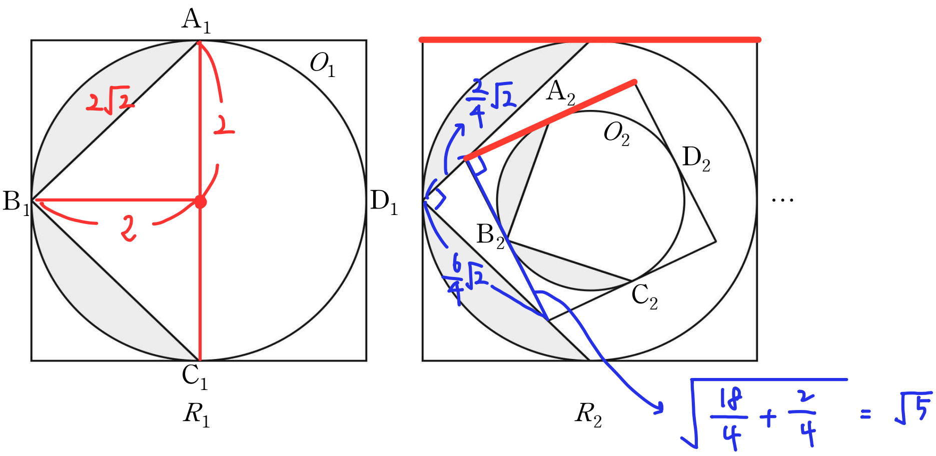
$\therefore \frac{4}{3}k + 2k = \sqrt{2} \Rightarrow k = \frac{3}{10}\sqrt{2}$

길이비 $2 : 2k = 1 : k$

넓이비 $1 : \frac{9}{50}$ 공비

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{50}{41} \cdot \frac{5}{2} = \frac{125}{41}$

#42. [2016년 4월 전국연합학력평가 20번(나형)]
그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형에 내접하는 원 O_1이 있다. 정사각형과 원 O_1의 접점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1이라 할 때, 원 O_1과 두 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$, $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$로 둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 두 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$, $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$을 각각 $3:1$로 내분하는 두 점을 이은 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 원 O_1의 내부에 그린다. 이 정사각형에 내접하는 원을 O_2라 하고 그 접점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2라 할 때, 원 O_2와 두 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$, $\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$로 둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 두 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$, $\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$를 각각 $3:1$로 내분하는 두 점을 이은 선분을 한 변으로 하는 정사각형에 그림 R_1에서 그림 R_2를 얻는 것과 같은 방법으로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



$S_1 = 2\pi - 2$

길이비 $4 : \sqrt{5}$

넓이비 $16 : 5 = 1 : \frac{5}{16}$ 공비

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{16}{11} \cdot (2\pi - 2) = \frac{32}{11}(\pi - 1)$$

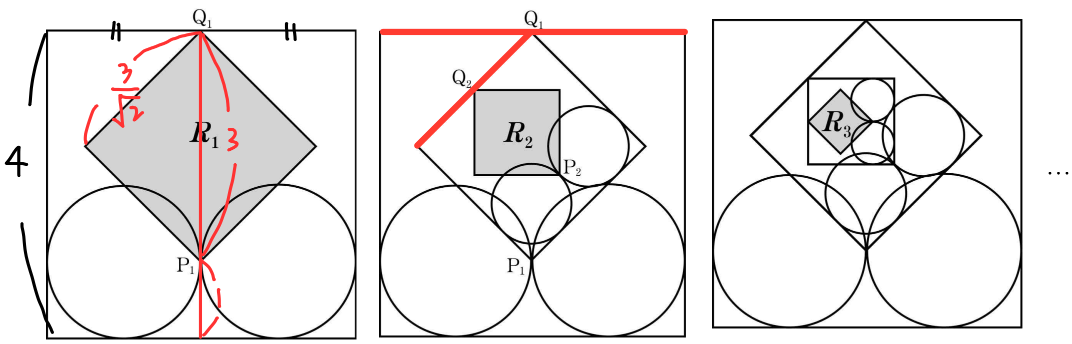
#43. [2016년 3월 전국연합학력평가 18번(나형)]

한 변의 길이가 4인 정사각형이 있다. 그림과 같이 지름이 2인 두 원이 서로 한 점 P_1에서 만나고 정사각형의 두 변에 각각 접하도록 그린다. 정사각형의 네 변 중 원과 접하지 않는 변의 중점을 Q_1이라 하고, 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$을 대각선으로 하는 정사각형 R_1을 그린다. 이때, R_1의 한 변의 길이를 l_1이라 하자.

지름이 $\frac{l_1}{2}$인 두 원이 서로 한 점 P_2에서 만나고 정사각형 R_1의 두 변에 각각 접하도록 그린다. 정사각형 R_1의 네 변 중 원과 접하지 않는 변의 중점을 Q_2라 하고, 선분 $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$를 대각선으로 하는 정사각형 R_2를 그린다. 이때, R_2의 한 변의 길이를 l_2라 하자.

지름이 $\frac{l_2}{2}$인 두 원이 서로 한 점 P_3에서 만나고 정사각형 R_2의 두 변에 각각 접하도록 그린다. 정사각형 R_2의 네 변 중 원과 접하지 않는 변의 중점을 Q_3이라 하고, 선분 $\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3$을 대각선으로 하는 정사각형 R_3을 그린다. 이때, R_3의 한 변의 길이를 l_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 그린 정사각형 R_n의 한 변의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [4점]



$l_1 = 6\sqrt{2}$

길이비 $4 : \frac{3}{\sqrt{2}} = 1 : \frac{3\sqrt{2}}{8}$ 공비

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \frac{1}{1-\frac{3\sqrt{2}}{8}} \cdot 6\sqrt{2} = \frac{12(3+4\sqrt{2})}{23}$$

#44. [2015년 2016학년도 대학수학능력시험 15번(A형)/13번(B형)]

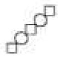
그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD의 대각선 BD의 5등분점을 점 B에서 가까운 순서대로 각각 $\mathrm{P_1, P_2, P_3, P_4}$라 하고, 선분 $\mathrm{BP_1, P_2P_3, P_4D}$를 각각 대각선으로 하는 정사각형과 선분 $\mathrm{P_1P_2, P_3P_4}$를 각각 지름으로 하는 원을 그린 후,  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

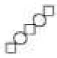
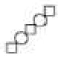
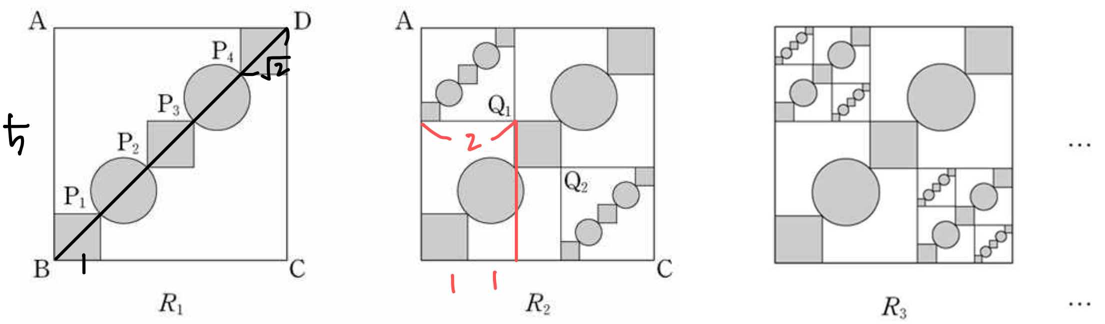
그림 R_1 에서 선분 $\mathrm{P_2P_3}$을 대각선으로 하는 정사각형의 꼭짓점 중 점 A와 가장 가까운 점을 $\mathrm{Q_1}$, 점 C와 가장 가까운 점을 $\mathrm{Q_2}$ 라 하자. 선분 $\mathrm{AQ_1}$ 을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 $\mathrm{CQ_2}$ 를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 2개의 정사각형 안에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로  모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

그림 R_2 에서 선분 $\mathrm{AQ_1}$ 을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 $\mathrm{CQ_2}$ 를 대각선으로 하는 정사각형에 그림 R_1 에서 그림 R_2 를 얻는 것과 같은 방법으로  모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3 이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?



$S_1 = 1 \times 3 + \frac{1}{2}\pi \times 2$

$= 3 + \pi$

길이비 5 : 2

넓이비 $1 : \frac{4}{25}$

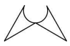
$\therefore$ 공비 $\frac{8}{25}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{25}{17}(3+\pi)$

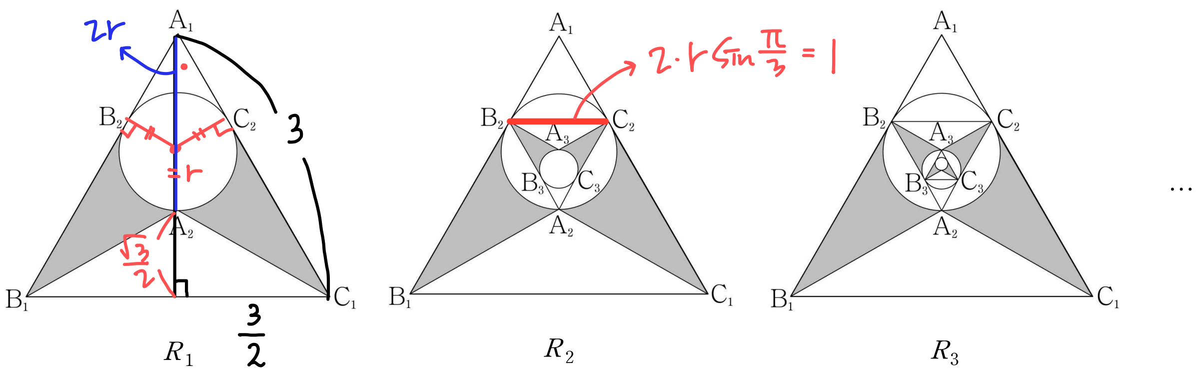
#45. [2015년 10월 전국연합학력평가 20번(A형)/17번(B형)]

그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 무게중심을 A_2, 점 A_2를 지나는 원과 두 변 A_1B_1, A_1C_1의 접점을 각각 B_2, C_2라 하자. 호 A_2B_2, 선분 B_2B_1, 선분 B_1A_2와 호 A_2C_2, 선분 C_2C_1, 선분 C_1A_2로 둘러싸인 부분인  모양의 도형을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 삼각형 $A_2B_2C_2$의 무게중심을 A_3, 점 A_3을 지나는 원과 두 변 A_2B_2, A_2C_2의 접점을 각각 B_3, C_3이라 하자. 그림 R_1에 호 A_3B_3, 선분 B_3B_2, 선분 B_2A_3과 호 A_3C_3, 선분 C_3C_2, 선분 C_2A_3으로 둘러싸인 부분인  모양의 도형을 색칠하고 추가하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 삼각형 $A_3B_3C_3$의 무게중심을 A_4, 점 A_4를 지나는 원과 두 변 A_3B_3, A_3C_3의 접점을 각각 B_4, C_4라 하자. 그림 R_2에 호 A_4B_4, 선분 B_4B_3, 선분 B_3A_4와 호 A_4C_4, 선분 C_4C_3, 선분 C_3A_4로 둘러싸인 부분인  모양의 도형을 색칠하고 추가하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림을 R_n, 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



$$3r=\sqrt{3} \Rightarrow r=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 9-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{2}{9}\pi$$

$$=\frac{7}{6}\sqrt{3}-\frac{2}{9}\pi$$

길이비 $3:1$

넓이비 $1:\frac{1}{9}$ 공비

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{9}{8}\left(\frac{7}{6}\sqrt{3}-\frac{2}{9}\pi\right)$$

$$=\frac{21}{16}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\pi$$

#46. [2015년 9월 평가원모의고사 20번(B형)]

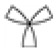
그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC가 있다. 정삼각형 ABC의 외심을 O라 할 때, 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AO}}$인 원을 $\mathrm{O_A}$, 중심이 B이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{BO}}$인 원을 $\mathrm{O_B}$, 중심이 C이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{CO}}$인 원을 $\mathrm{O_C}$라 하자. 원 $\mathrm{O_A}$와 원 $\mathrm{O_B}$의 내부의 공통부분, 원 $\mathrm{O_A}$와 원 $\mathrm{O_C}$의 내부의 공통부분, 원 $\mathrm{O_B}$와 원 $\mathrm{O_C}$의 내부의 공통부분 중 삼각형 ABC 내부에 있는  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

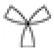
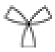
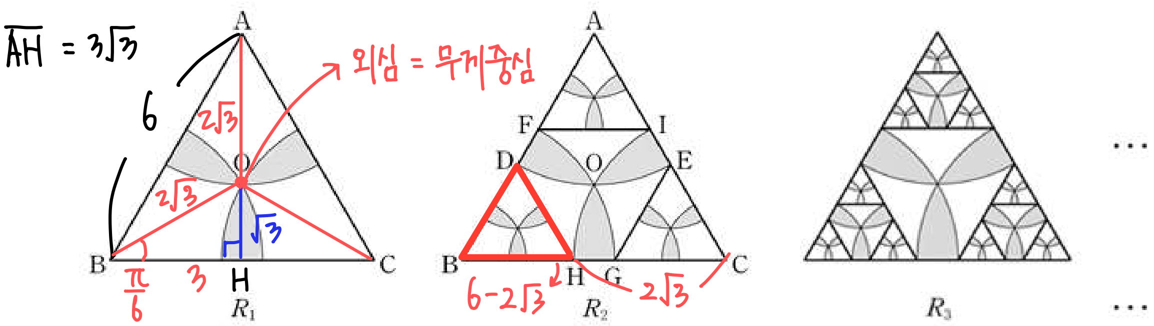
그림 R_1에 원 $\mathrm{O_A}$가 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E, 원 $\mathrm{O_B}$가 두 선분 AB, BC와 만나는 점을 각각 F, G, 원 $\mathrm{O_C}$가 두 선분 BC, AC와 만나는 점을 각각 H, I라 하고, 세 정삼각형 AFI, BHD, CEG에서 R_1을 얻는 과정과 같은 방법으로 각각 만들어지는  모양의 도형 3개에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에 새로 만들어진 세 개의 정삼각형에 각각 R_1에서 R_2를 얻는 과정과 같은 방법으로 만들어지는  모양의 도형 9개에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



$$S_1 = \left(\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{3}\right)\times 6$$
$$= 6\pi - 9\sqrt{3}$$

길이비 $6 : 6-2\sqrt{3} = 1 : 1-\frac{\sqrt{3}}{3}$

넓이비 $1 : \frac{4}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$

공비 $3\times\left(\frac{4}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = 4 - 2\sqrt{3}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2\sqrt{3}-3}(6\pi - 9\sqrt{3})$$
$$= \frac{2\sqrt{3}+3}{3}(6\pi - 9\sqrt{3})$$
$$= (2\sqrt{3}+3)(2\pi - 3\sqrt{3})$$

#47. [2015년 7월 전국연합학력평가 20번(A형)]

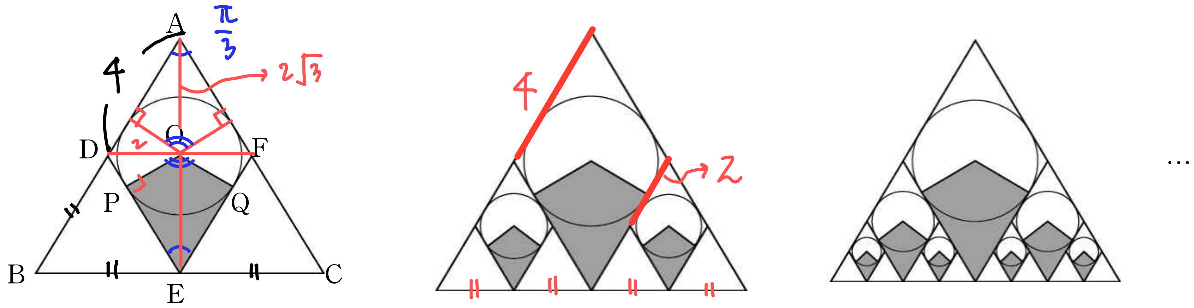
그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정삼각형 ABC가 있다.

세 선분 AB, BC, CA의 중점을 각각 D, E, F라 하고 두 정삼각형 BED, ECF를 그린 후 마름모 ADEF에 중심이 O인 원을 내접하도록 그린다. 원과 두 선분 DE, EF의 접점을 각각 P, Q라 할 때, 사각형 OPEQ를 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 새로 그려진 두 개의 정삼각형의 내부에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 개의 사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 새로 그려진 네 개의 정삼각형의 내부에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 개의 사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1 R_2 R_3 …

$r = \sqrt{3}$

$S_1 = 2 \times \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 3\right) = 3\sqrt{3}$

길이비 $4 : 2 = 1 : \frac{1}{2}$

넓이비 $1 : \frac{1}{4}$

공비 $2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

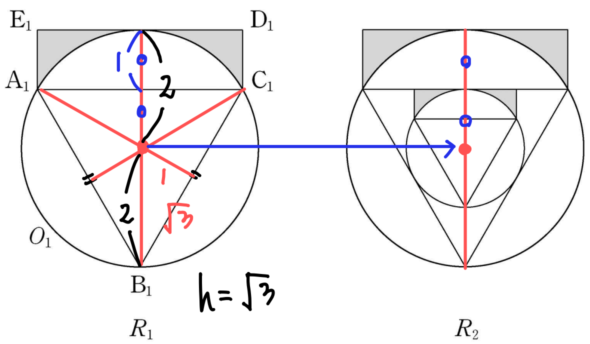
$\therefore \lim_{n \to \infty} S_n = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

#48. [2015년 6월 평가원모의고사 18번(A형)/15번(B형)]

반지름의 길이가 2인 원 O_1에 내접하는 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 그림과 같이 직선 A_1C_1과 평행하고 점 B_1을 지나지 않는 원 O_1의 접선 위에 두 점 D_1, E_1을 사각형 $A_1C_1D_1E_1$이 직사각형이 되도록 잡고, 직사각형 $A_1C_1D_1E_1$의 내부와 원 O_1의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 정삼각형 $A_1B_1C_1$에 내접하는 원 O_2와 원 O_2에 내접하는 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2C_2D_2E_2$를 그리고 직사각형 $A_2C_2D_2E_2$의 내부와 원 O_2의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



"모든 원의 중심이 동일하다"

$S_1 = 1\cdot 2\sqrt{3} - \left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$

$= 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$

길이비 2 : 1

넓이비 1 : $\frac{1}{4}$ 공비

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{4}{3}\left(3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right)$

$= 4\sqrt{3} - \frac{16}{9}\pi$

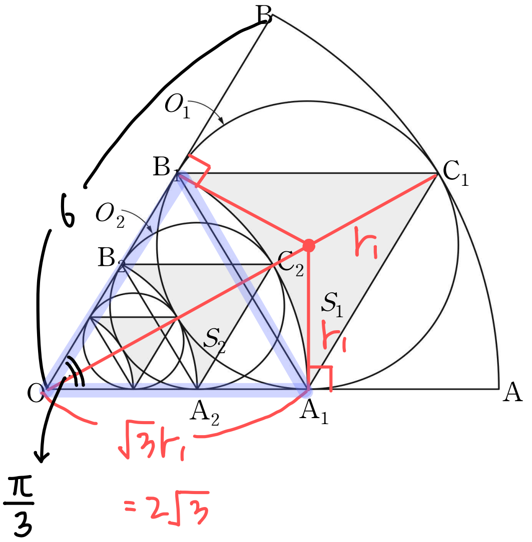
#49. [2015년 4월 전국연합학력평가 18번(B형)]

그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이고 반지름의 길이가 6인 부채꼴 OAB가 있다.

부채꼴 OAB에 내접하는 원 O_1이 두 선분 OA, OB, 호 AB와 만나는 점을 각각 A_1, B_1, C_1이라 하고, 부채꼴 OA_1B_1의 외부와 삼각형 $A_1C_1B_1$의 내부의 공통부분의 넓이를 S_1이라 하자.

부채꼴 OA_1B_1에 내접하는 원 O_2가 두 선분 OA_1, OB_1, 호 A_1B_1과 만나는 점을 각각 A_2, B_2, C_2라 하고, 부채꼴 OA_2B_2의 외부와 삼각형 $A_2C_2B_2$의 내부의 공통부분의 넓이를 S_2라 하자.

위와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부채꼴 OA_nB_n의 외부와 삼각형 $A_nC_nB_n$의 내부의 공통부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



$3r_1 = 6 \Rightarrow r_1 = 2$

$\therefore S_1 = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 12 - \left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{\pi}{3}\right)$

$= 6\sqrt{3} - 2\pi$

길이비 $6 : 2\sqrt{3} = 1 : \frac{\sqrt{3}}{3}$

넓이비 $1 : \frac{1}{3}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{2}\left(6\sqrt{3} - 2\pi\right)$

$= 9\sqrt{3} - 3\pi$

정답

#1. $\dfrac{1+2\sqrt{3}}{12}\pi$

#2. $\dfrac{441}{115}$

#3. $4\pi-32+16\sqrt{2}$

#4. $\dfrac{112\sqrt{3}}{15}$

#5. $\dfrac{27\sqrt{3}}{46}$

#6. $\dfrac{242}{19}\sqrt{2}$

#7. $\dfrac{100}{9}(2-\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{3})$

#8. $\dfrac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{15}$

#9. $\dfrac{2(3-\sqrt{3})}{5}$

#10. $\dfrac{12\pi+9\sqrt{3}}{32}$

#11. $\dfrac{125}{12}$

#12. $2\pi-3\sqrt{3}$

#13. $\dfrac{64}{9}\sqrt{3}-\dfrac{8}{3}\pi$

#14. $\dfrac{4}{3}$

#15. 2π

#16. $\dfrac{25}{21}$

#17. $\dfrac{8\sqrt{3}}{13}\pi$

#18. $\dfrac{9}{128}$

#19. $\dfrac{25(6-\pi)}{32}$

#20. $5-\dfrac{5\sqrt{3}}{6}-\dfrac{35}{36}\pi$

#21. $\dfrac{6\pi-4\sqrt{3}}{3}$

#22. $\dfrac{4\sqrt{3}\pi-12}{9}$

#23. $\dfrac{4(3\sqrt{3}-\pi)}{21}$

#24. $\dfrac{4\sqrt{2}-4}{3}$

#25. $\dfrac{147}{80}$

#26. $\dfrac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$

#27. $\dfrac{4(7+\sqrt{19})}{3}$

#28. $\dfrac{(4\pi-3\sqrt{3})(2\sqrt{3}+1)}{11}$

#29. $\dfrac{18\pi-9\sqrt{3}}{10}$

#30. $\dfrac{32(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$

#31. $\dfrac{24(3\sqrt{3}-\pi)}{5}$

#32. $\dfrac{3(3\sqrt{3}-\pi)}{11}$

#33. $\dfrac{9\sqrt{3}+6\pi}{16}$

#34. $\dfrac{16}{3}(\sqrt{3}-1)$

#35. $\dfrac{30-5\pi}{6}$

#36. $\dfrac{32\pi-24\sqrt{3}}{15}$

#37. $\dfrac{(2\sqrt{2}+1)(\pi-2)}{7}$

#38. $\dfrac{196}{31}$

#39. $\dfrac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$

#40. $\dfrac{4}{3}(\pi+2)$

#41. $\dfrac{125}{41}$

#42. $\dfrac{32}{11}(\pi-2)$

#43. $\dfrac{12(3+4\sqrt{2})}{23}$

#44. $\dfrac{25}{17}(\pi+3)$

#45. $\dfrac{1}{16}(21\sqrt{3}-4\pi)$

#46. $(2\pi-3\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)$

#47. $6\sqrt{3}$

#48. $4\sqrt{3}-\dfrac{16}{9}\pi$

#49. $9\sqrt{3}-3\pi$