[미적분]

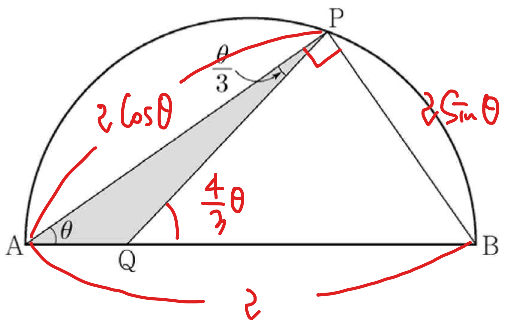
함수의 극한 + 도형
(2020년-2014년)

kamdongmath.tistory.com
#감수학

[미적분_함수의극한+도형(2020년-2014년)]

#1. [2022학년도 대학수학능력시험 예시문항 28번(미적분)]

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 점 P가 있고, 선분 AB 위에 점 Q가 있다. $\angle \mathrm{PAB} = \theta$이고 $\angle \mathrm{APQ} = \frac{\theta}{3}$일 때, 삼각형 PAQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 PB의 길이를 $l(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{l(\theta)}$의 값은? $\left(단,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \right)$ [4점]



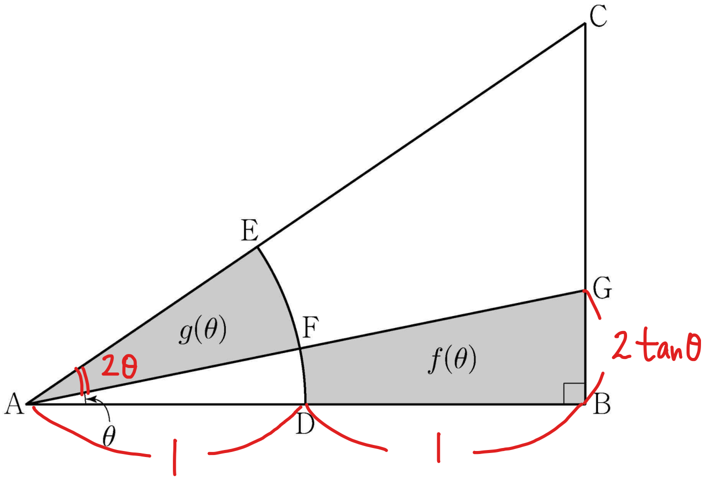
Δ AQP 에서 Sin 법칙에 의해

$$\frac{2\cos\theta}{\sin\left(\pi - \frac{4}{3}\theta\right)} = \frac{\overline{AQ}}{\sin\frac{\theta}{3}} \Rightarrow \overline{AQ} = \frac{2\cos\theta \cdot \sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta}$$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{\cancel{2}} \cdot 2\cos\theta \cdot \frac{\cancel{2}\cos\theta \cdot \sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta} \cdot \sin\theta / \theta}{\cancel{2}\sin\theta / \theta} = \frac{1}{4}$$

#2. [2021학년도(2020년시행) 대학수학능력시험 24번(가형)]

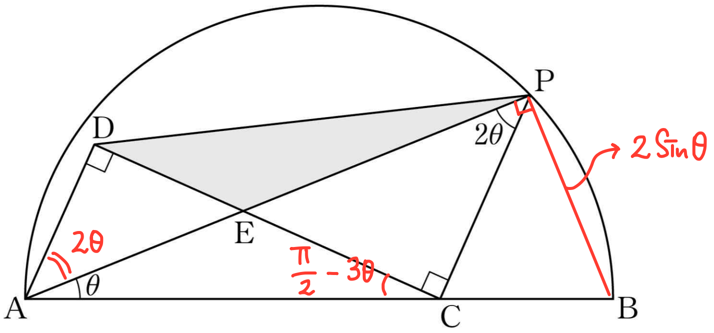
그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\angle \mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC에서 중심이 A, 반지름의 길이가 1인 원이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자.
호 DE의 삼등분점 중 점 D에 가까운 점을 F라 하고, 직선 AF가 선분 BC와 만나는 점을 G라 하자. $\angle \mathrm{BAG}=\theta$라 할 때, 삼각형 ABG의 내부와 부채꼴 ADF의 외부의 공통부분의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 AFE의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $40\times\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$) [3점]



$$\lim_{\theta\to0+}\frac{2\tan\theta/\theta-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\theta/\theta}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot3\theta/\theta}=\frac{3}{2}$$

$\therefore\ 40\times\frac{3}{2}=60$

#3. [2020년 고3 10월 전국연합학력평가 21번(가형)]
그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P와 선분 AB 위의 점 C에 대하여 $\angle PAC = \theta$일 때, $\angle APC = 2\theta$이다. $\angle ADC = \angle PCD = \frac{\pi}{2}$ 인 점 D에 대하여 두 선분 AP와 CD가 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 DEP의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$) [4점]



$\overline{AP} = 2\cos\theta$

$\triangle ACP$ 에서 Sin 법칙에 의해 $\frac{\overline{AC}}{\sin 2\theta} = \frac{2\cos\theta}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{\overline{PC}}{\sin\theta}$

$\overline{AC} = \frac{2\cos\theta \cdot \sin 2\theta}{\sin 3\theta}$, $\overline{PC} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin 3\theta}$

$\overline{DC} = \overline{AC}\sin 3\theta = 2\cos\theta \cdot \sin 2\theta$

$\triangle ADE \backsim \triangle PCE$ $(\sin 2\theta : \sin\theta = 2\cos\theta : 1)$

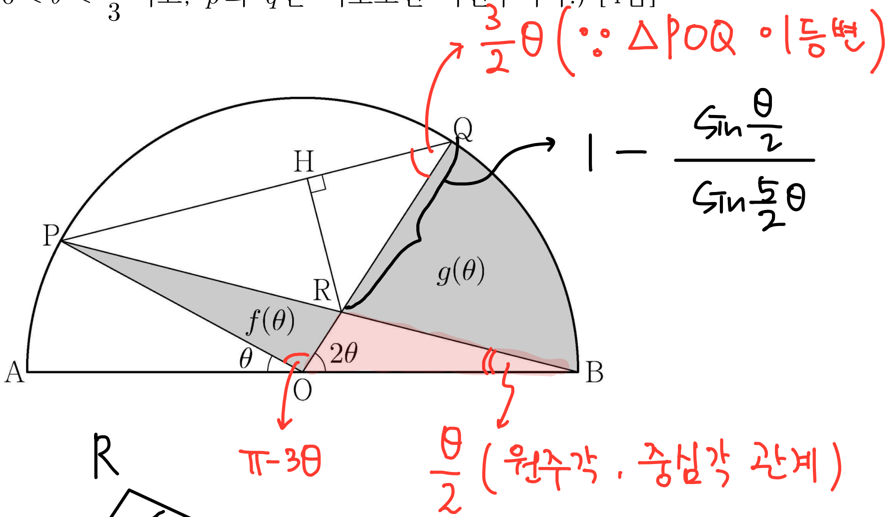
$\therefore \overline{DE} = 2\cos\theta \cdot \sin 2\theta \times \frac{2\cos\theta}{1 + 2\cos\theta}$

$\therefore S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{DE} \times \overline{CP}$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2} \times \left(2\cos\theta \cdot \sin 2\theta \times \frac{2\cos\theta}{1 + 2\cos\theta}\right) \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin 3\theta}}{\theta} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$$

#4. [2020년 고3 9월 평가원모의고사 28번(가형)]

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle POA=\theta$, $\angle QOB=2\theta$가 되도록 잡는다. 두 선분 PB, OQ의 교점을 R라 하고, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 POR의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 RQ, RB와 호 QB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{RH}}=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

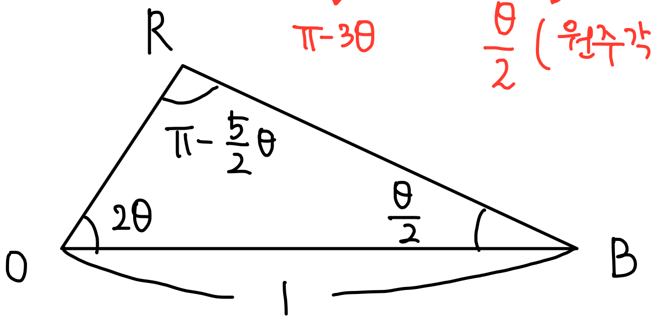


$\frac{3}{2}\theta$ (∵ △POQ 이등변)

$1-\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}$

$\pi-3\theta$

$\frac{\theta}{2}$ (원주각, 중심각 관계)



$$\frac{\overline{OR}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\sin\left(\pi-\frac{5}{2}\theta\right)}\Rightarrow \overline{OR}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta},\quad \overline{RQ}=1-\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}$$

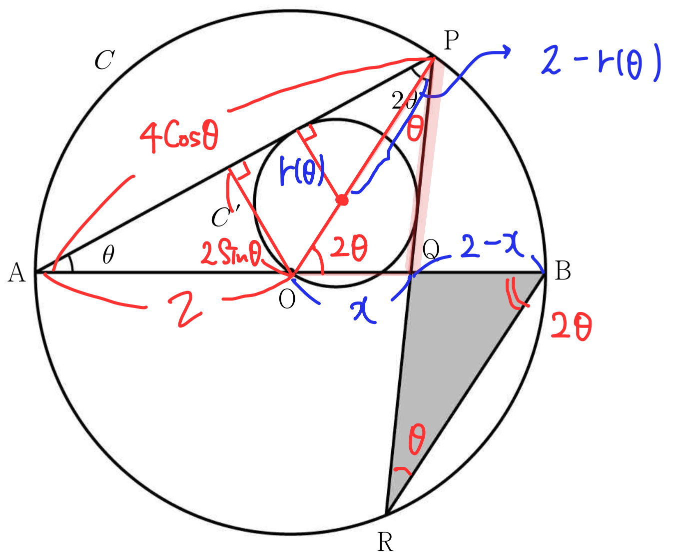
(sin 법칙)

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\overbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}\right)\sin(\pi-3\theta)\,/\theta}^{f(\theta)}+\overbrace{\frac{1}{2}\cdot(2\theta)/\theta-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}\right)\sin2\theta\,/\theta}^{g(\theta)}}{\left(1-\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}\right)\sin\frac{3}{2}\theta\,/\theta}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot3+1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot2}{\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\frac{3}{2}}=\frac{11}{12}$$

#5. [2020년 고3 7월 전국연합학력평가 29번(가형)]

그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 원 C가 있다. 원 C 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PAB} = \theta$라 할 때, 선분 AB 위에 $\angle \mathrm{APQ} = 2\theta$를 만족시키는 점을 Q라 하자. 직선 PQ가 원 C와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R라 할 때, 중심이 삼각형 AQP의 내부에 있고 두 선분 PA, PR에 동시에 접하는 원을 C'이라 하자. 원 C'이 점 O를 지날 때, 원 C'의 반지름의 길이를 $r(\theta)$, 삼각형 BQR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{r(\theta)} = a$일 때, $45a$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



$$\frac{r(\theta)}{2-r(\theta)} = \sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad r(\theta) = \frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

① △POQ 에서 Sin 법칙에 의해

$$\frac{x}{\sin\theta} = \frac{2}{\sin(\pi-3\theta)} \Rightarrow x = \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

② △QBR 에서 Sin 법칙에 의해

$$\frac{2-x}{\sin\theta} = \frac{\overline{QR}}{\sin 2\theta} \Rightarrow \overline{QR} = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}(2-x)$$

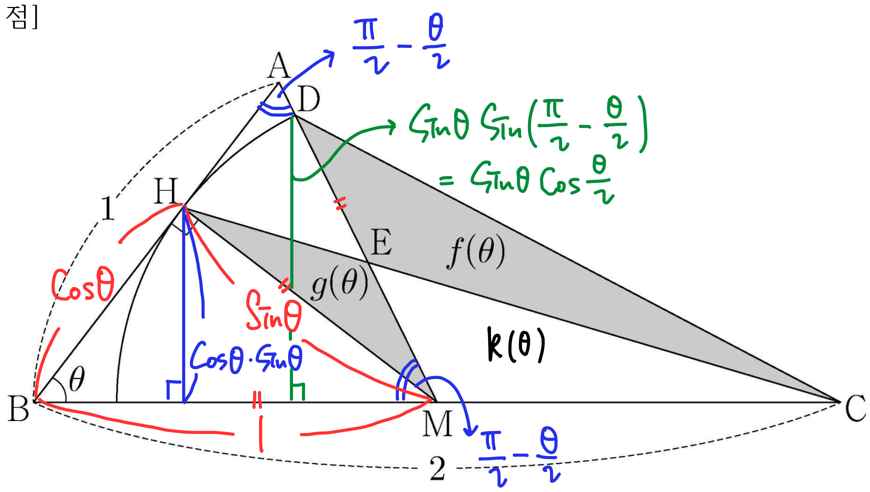
$$\lim_{\theta\to0+} x = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{r(\theta)} = \lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}(2-\boxed{x})^2\cdot\sin(\pi-3\theta)/\theta}{\frac{2\sin\theta/\theta}{1+\sin\theta}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{16}{9}\cdot3}{2} = \frac{8}{3}$$

$\therefore 45a = 120$

#6. [2020년 고3 6월 평가원모의고사 28번(가형)]

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{BC}}=2$인 두 선분 AB, BC에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 점 M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{MH}}$인 원이 선분 AM과 만나는 점을 D, 선분 HC가 선분 DM과 만나는 점을 E라 하자. $\angle \mathrm{ABC}=\theta$라 할 때, 삼각형 CDE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 MEH의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $80a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$) [4점]



$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\{f(\theta)-k(\theta)\}-\{g(\theta)-k(\theta)\}}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta}{\theta^3}$$

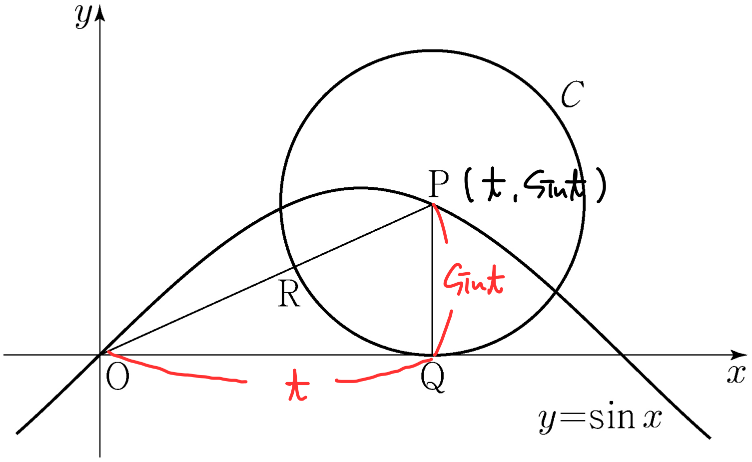
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\boxed{\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta}{\theta^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{16}$$

$$\therefore\ 80a=15_{/\!/}$$

#7. [2019년 2020학년도 대학수학능력시험 24번(가형)]

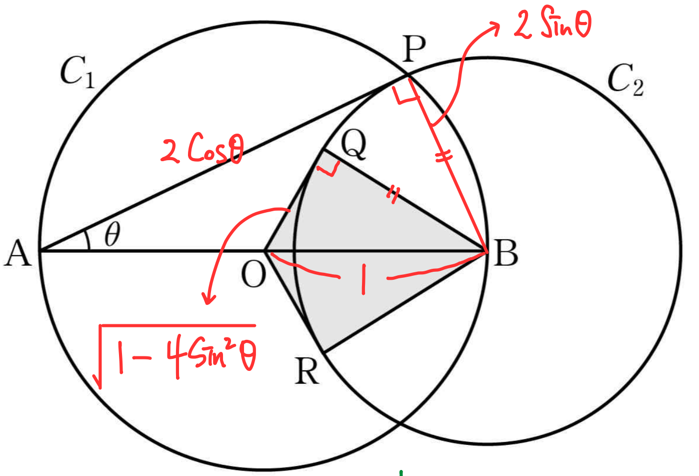
좌표평면에서 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, \sin t)(0<t<\pi)$를 중심으로 하고 x축에 접하는 원을 C라 하자. 원 C가 x축에 접하는 점을 Q, 선분 OP와 만나는 점을 R라 하자. $\displaystyle\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OR}}}=a+b\sqrt{2}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a, b는 정수이다.) [3점]



$$\lim_{t\to0+}\frac{t_{/t}}{\sqrt{\underset{/t^2}{t^2}+\underset{/t^2}{\sin^2 t}}-\sin t_{/t}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

#8. [2019년 10월 전국연합학력평가 16번(가형)]

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 C_1과 점 B를 중심으로 하고 원 C_1 위의 점 P를 지나는 원 C_2가 있다. 원 C_1의 중심 O에서 원 C_2에 그은 두 접선의 접점을 각각 Q, R라 하자. $\angle \mathrm{PAB}=\theta$일 때, 사각형 ORBQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$) [4점]

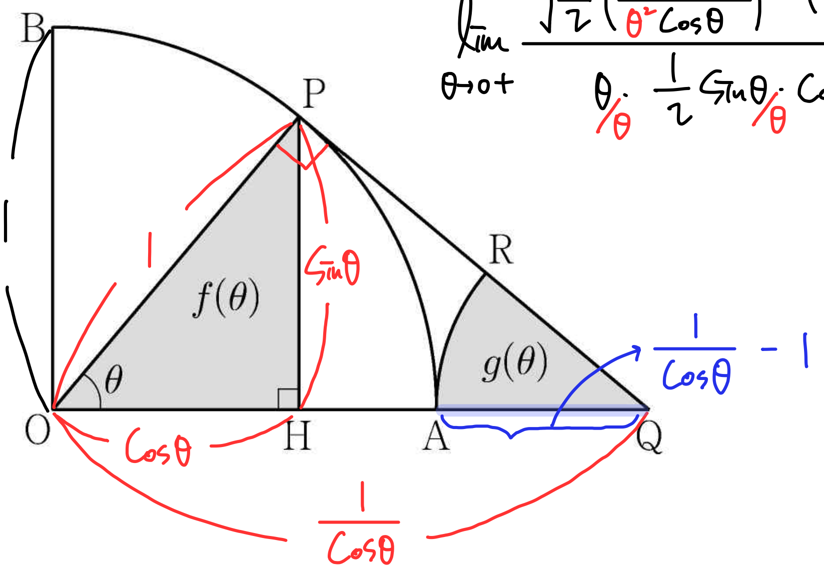


$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\frac{1}{2}\overset{\nearrow 1}{\boxed{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}}\cdot 2\sin\theta\right)\times 2}{\theta}=2$$

#9. [2019년 9월 평가원모의고사 20번(가형)]

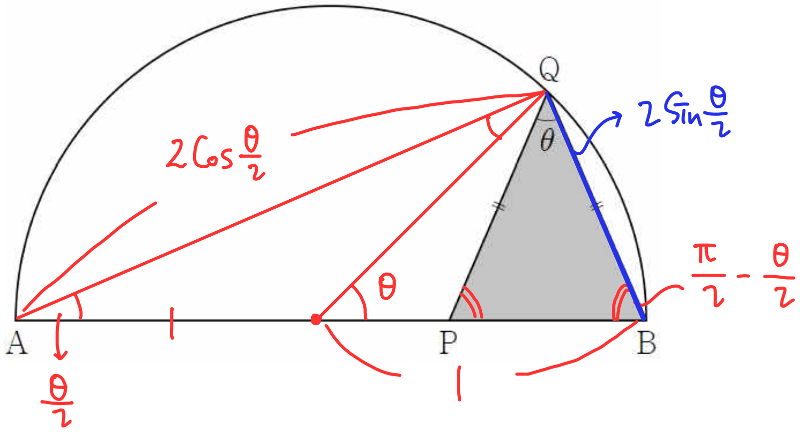
그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서 호 AB에 접하는 직선과 직선 OA의 교점을 Q라 하자. 점 Q를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\text{QA}}$인 원과 선분 PQ의 교점을 R라 하자. $\angle \text{POA} = \theta$일 때, 삼각형 OHP의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 QRA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta \times f(\theta)}$의 값은? $\left(\text{단, } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ [4점]

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2\cos\theta}\right)^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}{\frac{\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\cos\theta}=\frac{\sqrt{\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ /\!/$$



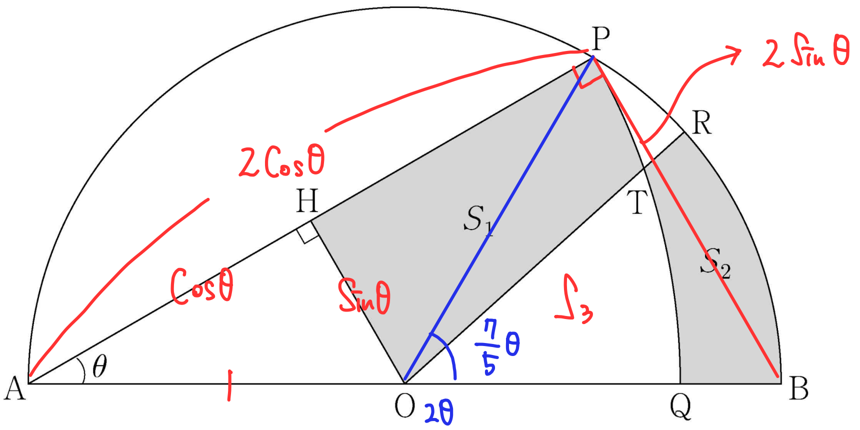
#10. [2019년 7월 전국연합학력평가 17번(가형)]

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 위의 점 P에 대하여 $\overline{QB}=\overline{QP}$를 만족시키는 반원 위의 점을 Q라 할 때, $\angle BQP=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하자. 삼각형 QPB의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은? [4점]



$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\cdot\sin\theta}{\theta^3}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

#11. [2019년 6월 평가원모의고사 28번(가형)]
그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AP}}$인 원과 선분 AB의 교점을 Q라 하자.
호 PB 위에 점 R를 호 PR와 호 RB의 길이의 비가 3:7이 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 선분 OR와 호 PQ의 교점을 T, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하자.
세 선분 PH, HO, OT와 호 TP로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 선분 RT, QB와 두 호 TQ, BR로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{\mathrm{S}_1-\mathrm{S}_2}{\overline{\mathrm{OH}}}=\mathrm{a}$이다. $50a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



$$S_1+S_3=\frac{1}{2}(2\cos\theta)^2\cdot\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

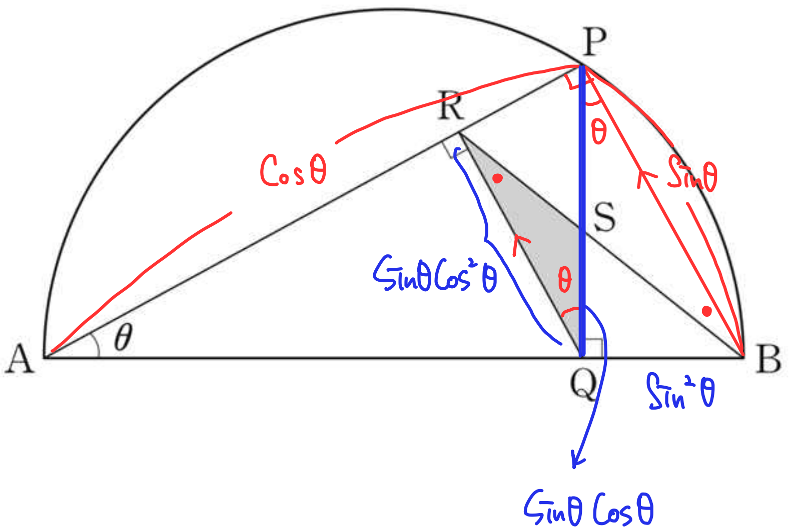
$$S_2+S_3=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{7}{5}\theta$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{2\cos^2\theta\times\theta/\theta-\frac{1}{2}\sin\theta/\theta\cos\theta-\frac{7}{10}\theta/\theta}{\sin\theta/\theta}=2-\frac{1}{2}-\frac{7}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

$\therefore 50a=40$

#12. [2019년 5월 전북교육청 18번(가형)]

그림과 같이 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하고, 지름의 길이가 1인 반원과 호 AB 위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q, 점 Q에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 R, 선분 PQ와 선분 RB의 교점을 S라 하자. $\angle PAB = \theta$라 할 때, 삼각형 QSR의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



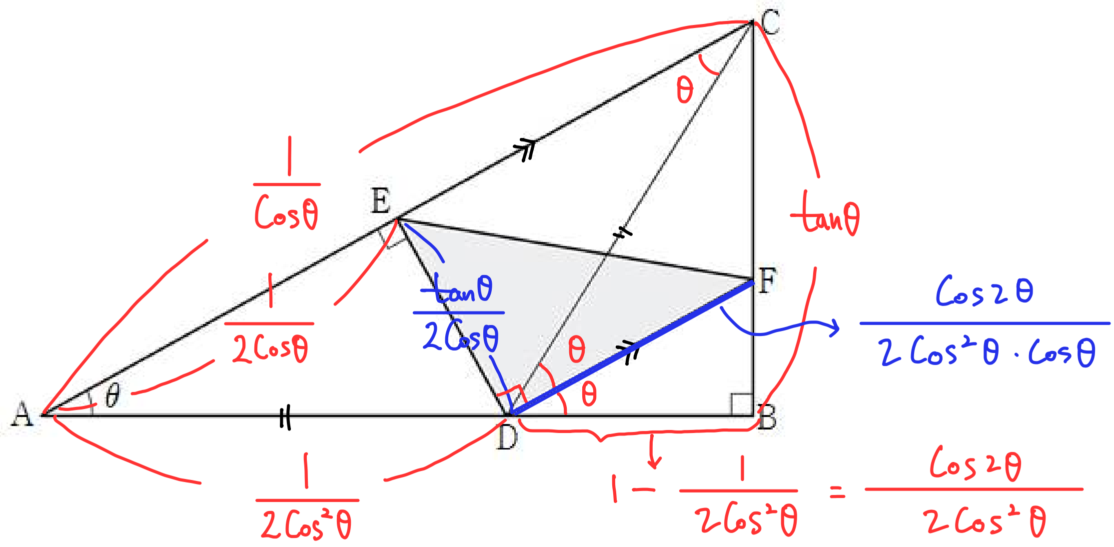
$\triangle RSQ \sim \triangle BSP$ (∵ AA 닮음)

$$\overline{QS} = \cancel{\sin\theta}\cos\theta \times \frac{\sin\theta\cos^2\theta}{\cancel{\sin\theta}\cos^2\theta + \cancel{\sin\theta}} = \frac{\sin\theta \cdot \cos^3\theta}{\cos^2\theta + 1}$$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \cos^2\theta\right)\left(\frac{\frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \cos^3\theta}{\cos^2\theta + 1}\right)\frac{\sin\theta}{\theta}}{\theta^3/\theta^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

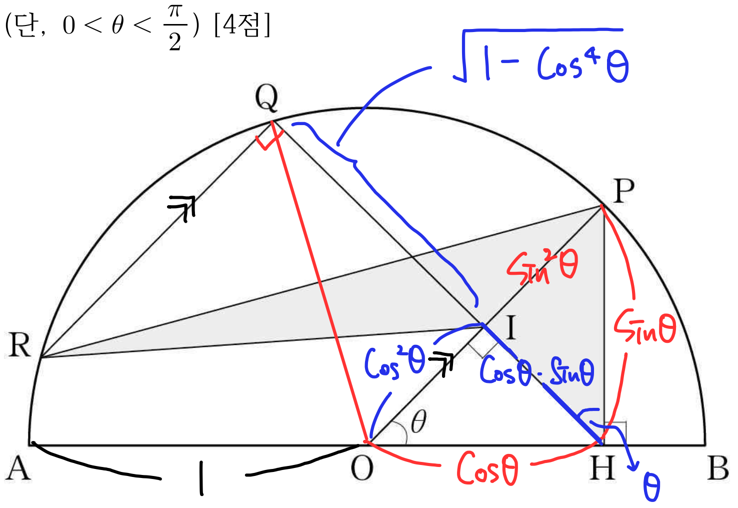
#13. [2019년 4월 전국연합학력평가 19번(가형)]

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\angle\mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CD}}$가 되도록 점 D를 잡는다. 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E, 점 D를 지나고 직선 AC에 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 F라 하자. $\angle\mathrm{BAC}=\theta$일 때, 삼각형 DEF의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\tan\theta}{2\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos2\theta}{2\cos^3\theta}\right)}{\theta}=\frac{1}{8}$$

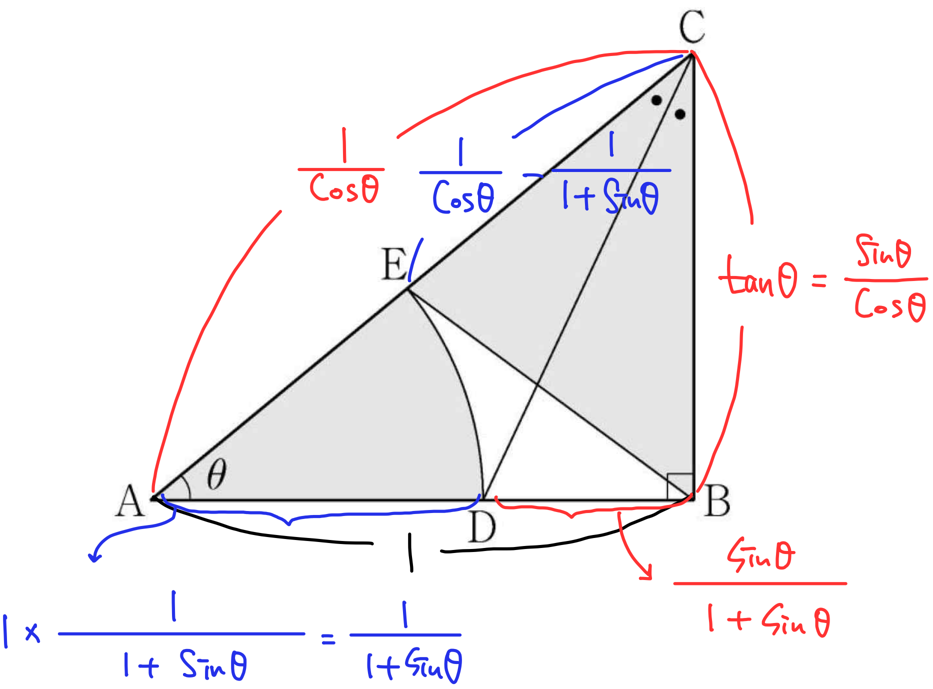
#14. [2019년 3월 전국연합학력평가 19번(가형)]
그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 H를 지나고 선분 OP에 수직인 직선이 선분 OP, 호 AB와 만나는 점을 각각 I, Q라 하자.
점 Q를 지나고 직선 OP에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R라 하자. $\angle POB=\theta$일 때, 두 삼각형 RIP, IHP의 넓이를 각각 $S(\theta)$, $T(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)-T(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\boxed{\frac{\sqrt{1-\cos^4\theta}}{\theta^2}}-\frac{1}{2}\frac{\sin^3\theta\cos\theta}{\theta^3}}{\theta^3/\theta^3}=\frac{1}{2}\boxed{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$$

#15. [2018년 2019학년도 대학수학능력시험 18번(가형)]

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\angle\mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{C}$를 이등분하는 직선과 선분 AB의 교점을 D, 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AD}}$인 원과 선분 AC의 교점을 E라 하자. $\angle\mathrm{A}=\theta$일 때, 부채꼴 ADE의 넓이를 $\mathrm{S}(\theta)$, 삼각형 BCE의 넓이를 $\mathrm{T}(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to0}\frac{\{\mathrm{S}(\theta)\}^2}{\mathrm{T}(\theta)}$의 값은? [4점]

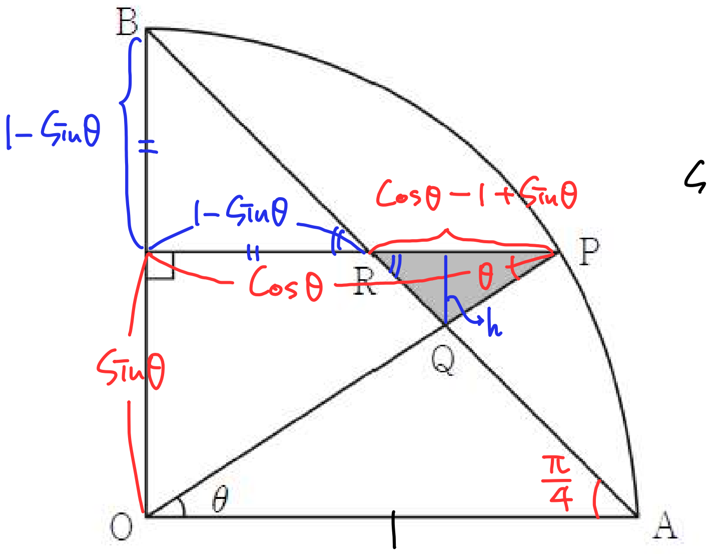


$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\sin\theta}\right)^2\theta\right\}^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)\tan\theta\,\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\sin\theta}\right)^4\cdot\theta^2/\theta^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{\boxed{1-\cos\theta+\sin\theta}}{\cos\theta(1+\sin\theta)\boxed{\theta}}\right)\cdot\tan\theta/\theta\cdot\cos\theta}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}(0+1)}=\frac{1}{2}$$

#16. [2018년 11월 대구교육청 18번(가형)]

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 한 점 P에 대하여 선분 OP와 선분 AB의 교점을 Q, 점 P에서 선분 OB에 내린 수선과 선분 AB의 교점을 R라 하자. $\angle QOA = \theta$라 할 때, 삼각형 QPR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



Sol1) △PQR 에서 Sin 법칙에 의해

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\cos\theta - 1 + \sin\theta}{\sin\left(\pi - \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

$$\Rightarrow \overline{PQ} = \frac{\cos\theta - 1 + \sin\theta}{\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2}\left\{\overset{1}{\boxed{\frac{\cos\theta - 1 + \sin\theta}{\theta \cdot \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}}}\right\}\overset{1}{\boxed{\left(\frac{\cos\theta - 1 + \sin\theta}{\theta}\right)}} \cdot \frac{\sin\theta}{\theta}}{\theta^3 / \theta^3} = \frac{1}{2}$$

Sol2) △RPQ ∽ AOQ (∵ AA 닮음)

$$h = \sin\theta \, \frac{\cos\theta - 1 + \sin\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\theta}{\theta} \overset{1}{\boxed{\frac{(\cos\theta - 1 + \sin\theta)^2}{(\sin\theta + \cos\theta)\,\theta^2}}}}{\theta^3 / \theta^3} = \frac{1}{2}$$

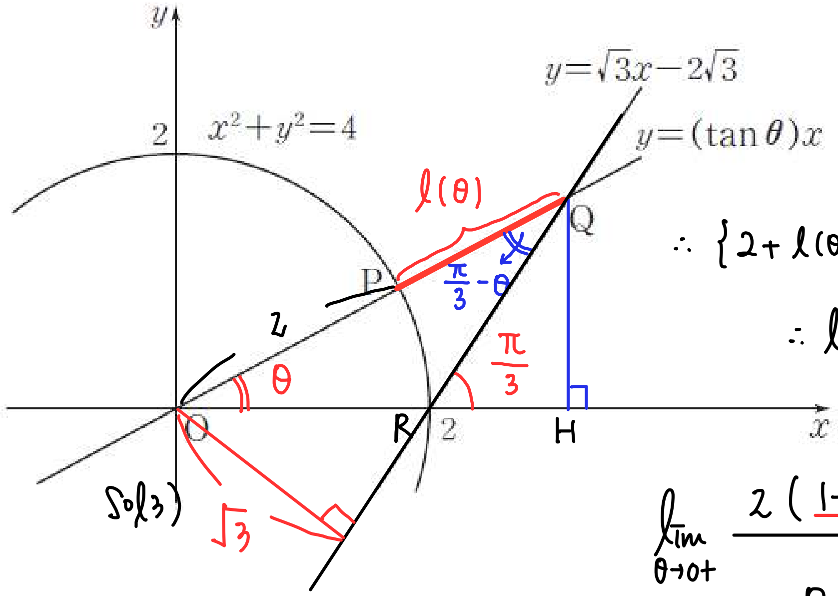
#17. [2018년 10월 전북교육청 28번(가형)]

그림과 같이 좌표평면에서 직선 $y=(\tan\theta)x$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$가 원 $x^2+y^2=4$와 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하고, 직선 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$과 만나는 점을 Q라 하자. 선분 PQ의 길이를 $l(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{l(\theta)}{\theta}$의 값은? [4점]

Sol1) $\overline{OH}=\{2+l(\theta)\}\cos\theta$

$\overline{QH}=\{2+l(\theta)\}\sin\theta$

$\overline{RH}=\overline{QH}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$



$$\therefore\ \{2+l(\theta)\}\cos\theta-\{2+l(\theta)\}\sin\theta\,\frac{\sqrt{3}}{3}=2$$

$$\therefore\ l(\theta)=\frac{2}{\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta}-2$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{2\left(\underset{\theta}{\underline{1-\cos\theta}}+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\cancel{\theta}\right)}{\cancel{\theta}\,\theta\left(\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Sol2) △ORQ 에서 Sin 법칙에 의해

$$\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{\overline{OQ}}{\sin\frac{2}{3}\pi}\Rightarrow\overline{OQ}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}$$

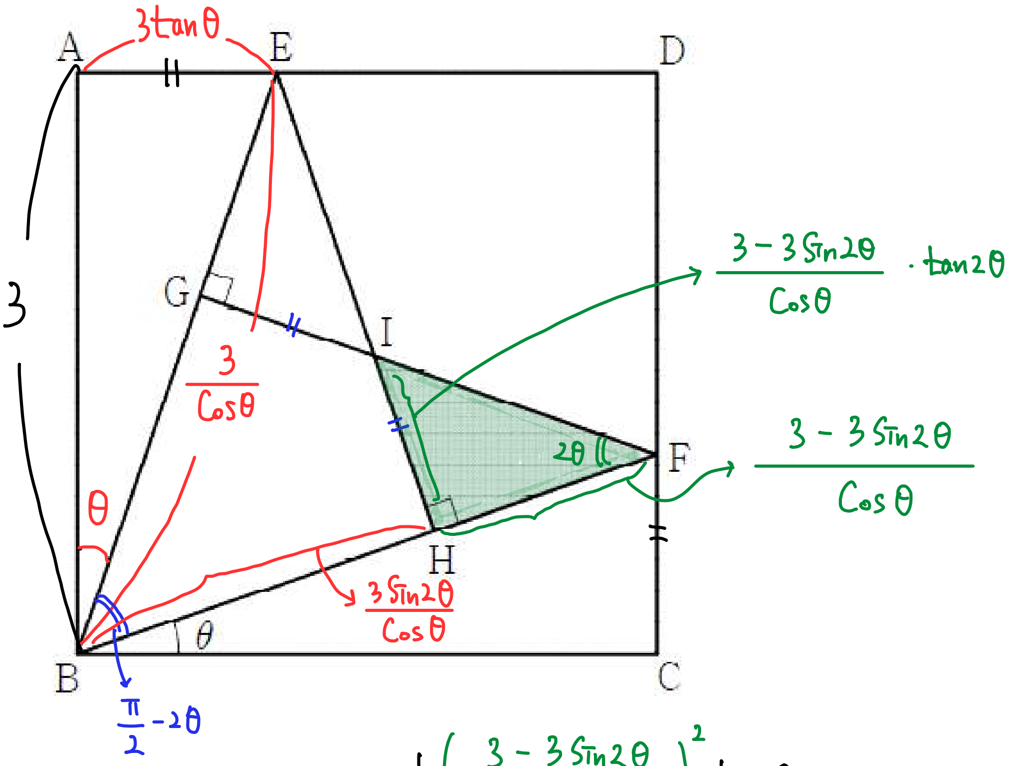
$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\sqrt{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}-2}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\boxed{\underline{\sqrt{3}-2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}}=f(\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\cdot\boxed{\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\boxed{f(\theta)-f(0)}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\boxed{\theta-0}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot f'(0)=\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

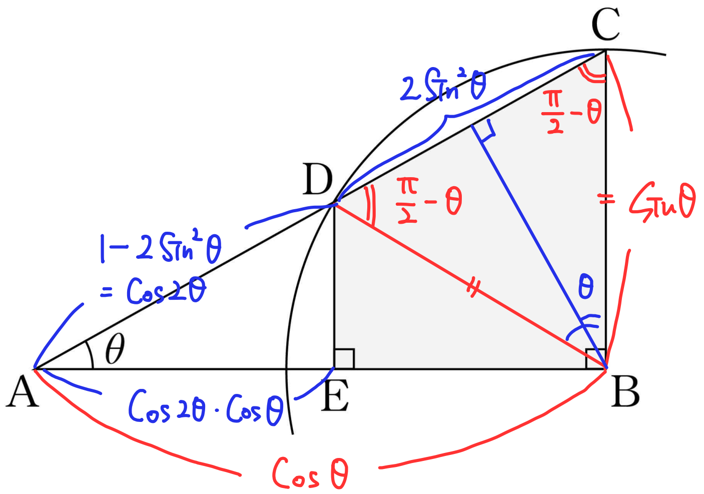
#18. [2018년 10월 경남교육청 17번(가형)]

그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD에 대하여 $\overline{AE}=\overline{CF}$를 만족하는 점 E와 점 F가 각각 선분 AD와 선분 CD 위에 있다. 점 E에서 선분 BF에 내린 수선의 발을 H, 점 F에서 선분 BE에 내린 수선의 발을 G, 선분 EH와 FG의 교점을 I라 하자. $\angle FBC=\theta$일 때, 삼각형 IHF의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3-3\sin2\theta}{\cos\theta}\right)^{2}\tan2\theta\,/\theta}{\theta/\theta}=9$$

#19. [2018년 10월 평가원모의고사 17번(가형)]
그림과 같이 빗변 AC의 길이가 1이고 $\angle BAC = \theta$인 직각삼각형 ABC가 있다. 점 B를 중심으로 하고 점 C를 지나는 원이 선분 AC와 만나는 점 중 점 C가 아닌 점을 D라 하고, 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E라 하자. 사각형 BCDE의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$) [4점]

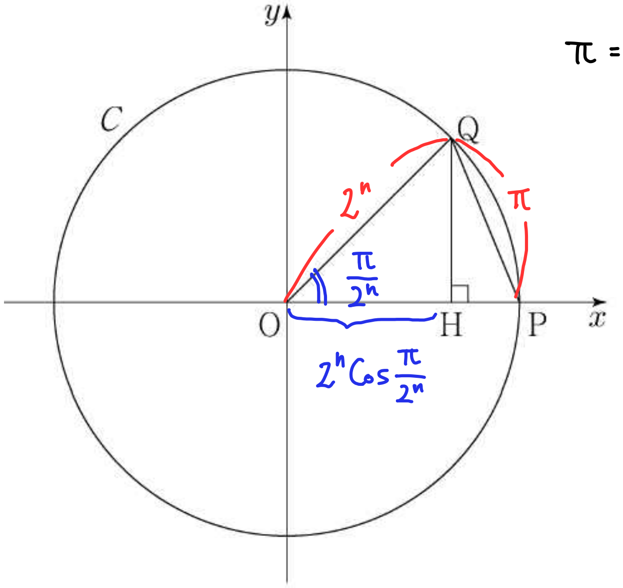


$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos^2 2\theta \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta}{\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\theta}\cos\theta \left(\sin^2 2\theta\right)/\theta^2}{\theta^3/\theta^3} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

#20. [2018년 9월 평가원모의고사 19번(가형)]

자연수 n에 대하여 중심이 원점 O이고 점 $\mathrm{P}(2^n, 0)$을 지나는 원 C가 있다. 원 C 위에 점 Q를 호 PQ의 길이가 π가 되도록 잡는다. 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{HP}})$의 값은? [4점]



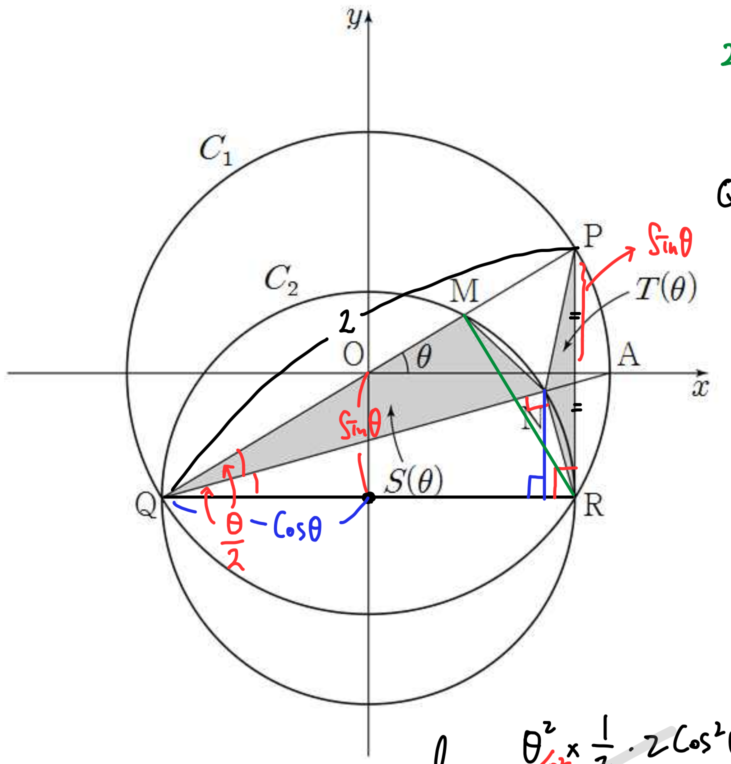
$$\pi = 2^n\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2^n}$$

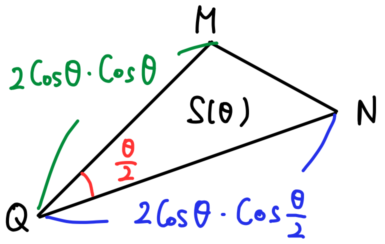
$$\lim_{n\to\infty}\left\{2^n \times \left(2^n - 2^n\cos\frac{\pi}{2^n}\right)\right\}$$

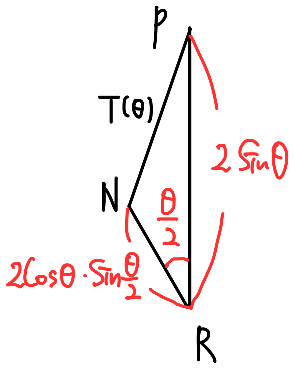
$$= \lim_{n\to\infty} 4^n \cdot \left(1-\cos\frac{\pi}{2^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot \left(2\sin^2\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2}$$

#21. [2018년 7월 전국연합학력평가 21번(가형)]
그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 O(0, 0)이고 점 A(1, 0)을 지나는 원 C_1 위의 제1사분면 위의 점을 P라 하자. 점 P를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q, x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 R라 하자. 선분 QR를 지름으로 하는 원 C_2와 두 선분 PQ, AQ와의 교점을 각각 M, N이라 하자. $\angle\text{POA}=\theta$라 할 때, 두 삼각형 MQN, PNR의 넓이를 각각 $S(\theta)$, $T(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\times S(\theta)}{T(\theta)}$의 값은? [4점]



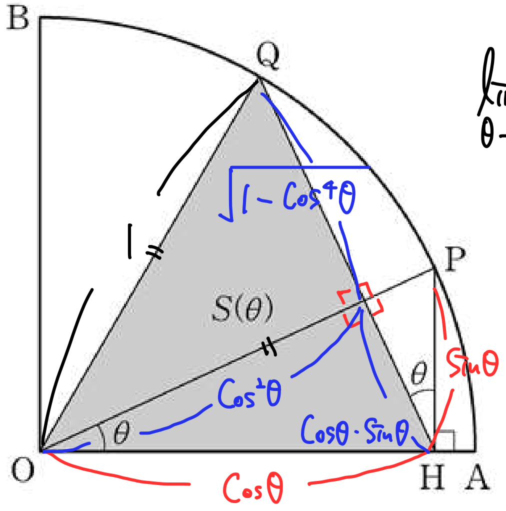




$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\theta^2}{\theta^2}\times\cancel{\frac{1}{2}}\cdot2\cos^2\theta\cdot2\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cancel{\sin\frac{\theta}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot2\cos\theta\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}\cdot\frac{2\sin\theta}{\theta}\cdot\cancel{\sin\frac{\theta}{2}}}=2$$

#22. [2018년 6월 평가원모의고사 16번(가형)]

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, 호 BP 위에 점 Q를 $\angle POH = \angle PHQ$가 되도록 잡는다. $\angle POH = \theta$일 때, 삼각형 OHQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$) [4점]



$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\cos^2\theta\left(\frac{\sqrt{1-\cos^4\theta}}{\theta^2}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{\theta}\right)}{\theta/\theta}$$

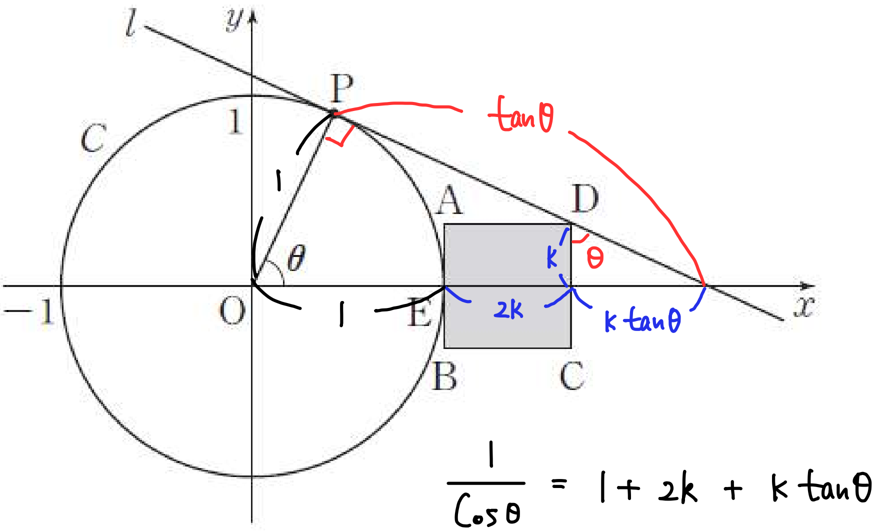
$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

#23. [2018년 5월 전북교육청 17번(가형)]

좌표평면에서 원 $C: x^2+y^2=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하고, 점 P를 지나고 원 C에 접하는 직선을 l이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 정사각형 $ABCD$의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

(가) 선분 AB는 원 C와 점 $E(1, 0)$에서 접하고, $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{BE}}$이다.

(나) 점 D는 제1사분면의 점이고 직선 l 위에 있다.



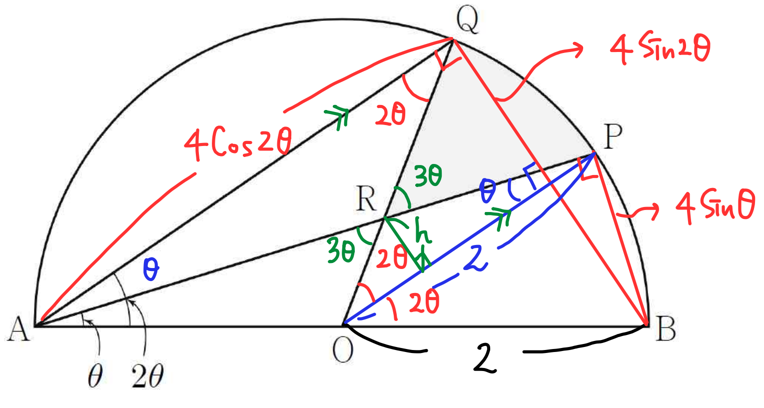
$$\frac{1}{\cos\theta} = 1 + 2k + k\tan\theta$$

$$k = \frac{1-\cos\theta}{(2+\tan\theta)\cdot\cos\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\left\{2\frac{1-\cos\theta}{(2+\tan\theta)\cdot\cos\theta\cdot\theta^2}\right\}^2}{\theta^4/\theta^4} = \left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

#24. [2018년 4월 전국연합학력평가 20번(가형)]

그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 두 점 P, Q를 $\angle PAB = \theta$, $\angle QAB = 2\theta$가 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 선분 OQ와 선분 AP가 만나는 점을 R라 하자. 호 PQ와 두 선분 QR, RP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



Sol1) $\triangle ORP$에서 Sin 법칙

$$\frac{2}{\sin(\pi-3\theta)} = \frac{\overline{RO}}{\sin\theta} \Rightarrow \overline{RO} = \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

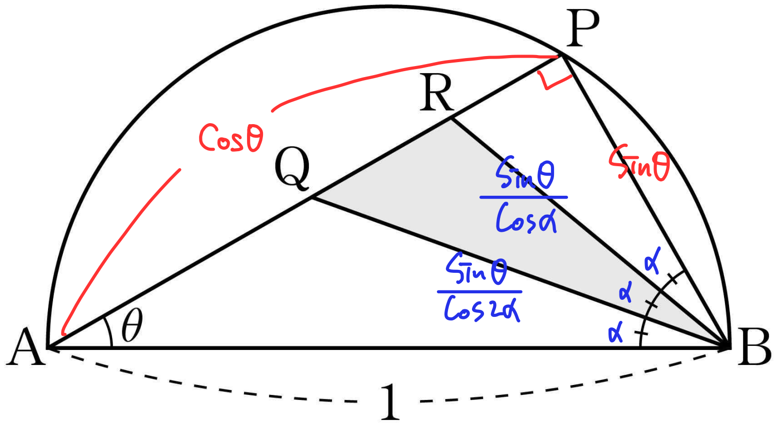
$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\theta/\theta - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}\sin 2\theta/\theta}{\theta/\theta} = 4 - \frac{2}{3}\cdot 2 = \frac{8}{3}$$

Sol2) $\triangle ARQ \backsim \triangle PRO$ ($\because$ AA 닮음)

$$h = 2\sin 2\theta \times \frac{1}{2\cos 2\theta + 1}$$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\theta/\theta - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{2\sin 2\theta/\theta}{2\cos 2\theta + 1}}{\theta/\theta} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

#25. [2018년 3월 전국연합학력평가 19번(가형)]
그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P에 대하여 ∠ABP를 삼등분하는 두 직선이 선분 AP와 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. ∠PAB $=\theta$일 때, 삼각형 BRQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



$\alpha=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

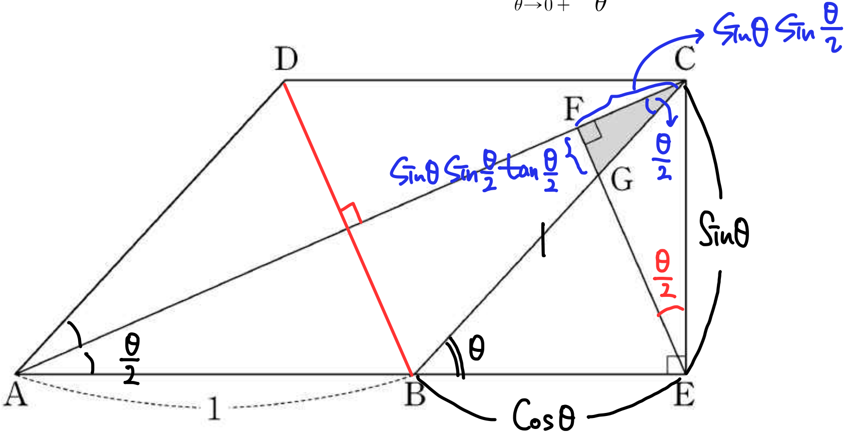
Sol1)

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta/\theta}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\theta/\theta}{\cos2\alpha}\cdot\sin\alpha}{\theta^2/\theta^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Sol2)

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\left(\overline{QP}-\overline{QR}\right)\cdot\sin\theta$$

#26. [2017년 2018학년도 대학수학능력시험 17번(가형)]
그림과 같이 한 변의 길이가 1인 마름모 ABCD 가 있다. 점 C에서 선분 AB의 연장선에 내린 수선의 발을 E, 점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 F, 선분 EF와 선분 BC의 교점을 G라 하자. $\angle DAB=\theta$일 때, 삼각형 CFG의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

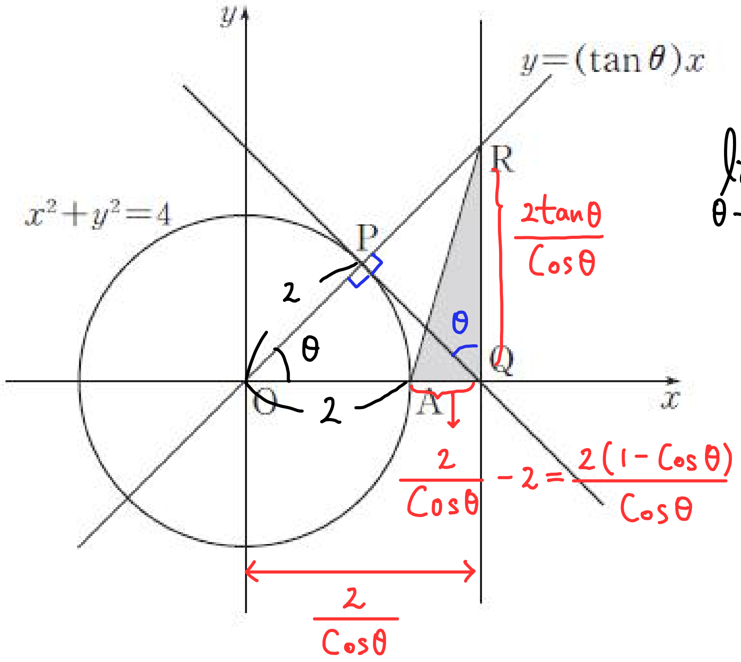


$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\cdot\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\cdot\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}}{\theta^5}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

#27. [2017년 10월 전북교육청 18번(가형)]

그림과 같이 직선 $y=(\tan\theta)x$가 원 $C: x^2+y^2=4$와 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하고, 점 P에서의 원 C의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q를 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 $y=(\tan\theta)x$와 만나는 점을 R라 하고, 점 $A(2,0)$에 대하여 삼각형 AQR의 넓이를 $f(\theta)$라 하자.

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{f(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이다.) [4점]

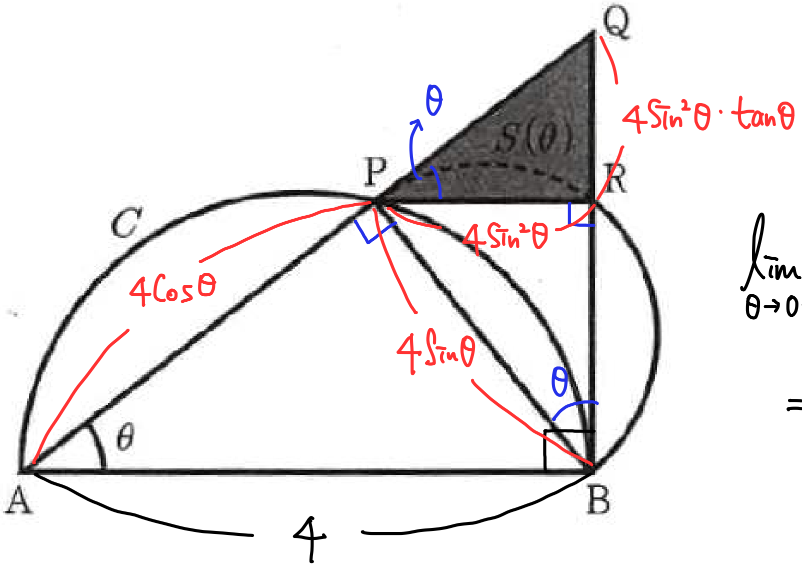


$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{2(1-\cos\theta)}{\cos\theta\cdot\theta^2}\right\}\left(\frac{2\tan\theta}{\cos\theta\cdot\theta}\right)}{\theta^3/\theta^3}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{1}{2}\cdot2=1$$

#28. [2017년 10월 경남교육청 15번(가형)]

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$를 지름으로 하는 반원 C가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 직선 AP와 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 만나는 점을 Q라 하자. 선분 BP를 지름으로 하고 삼각형 ABP의 외부에 그린 반원이 선분 BQ와 만나는 점 B가 아닌 점을 R라 하자. $\angle PAB=\theta$일 때, 삼각형 PRQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ [4점]

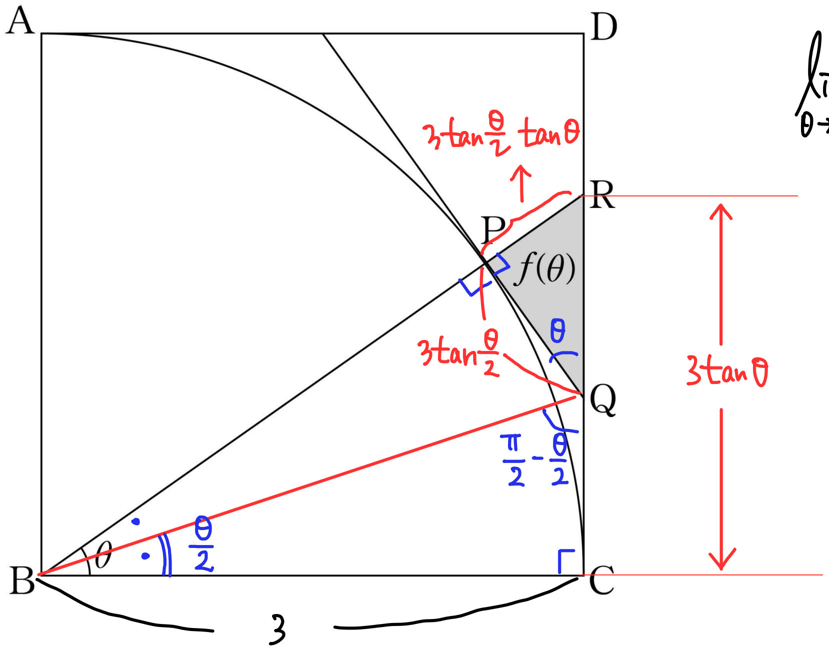


$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{1}{2}\left(4\sin^2\theta\,/\cancel{\theta^2}\right)\left(4\sin^2\theta\,/\cancel{\theta^2}\;\tan\theta\,/\cancel{\theta}\right)}{\theta^5/\cancel{\theta^5}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot 1=8$$

#29. [2017년 10월 전국연합학력평가 27번(가형)]

그림과 같이 한 변의 길이가 3 인 정사각형 ABCD 안에 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 반지름의 길이가 3 인 부채꼴 BCA 가 있다. 호 AC 위의 점 P 에서의 접선이 선분 CD 와 만나는 점을 Q, 선분 BP 의 연장선이 선분 CD 와 만나는 점을 R 라 하자. $\angle PBC = \theta$ 일 때, 삼각형 PQR 의 넓이를 $f(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{8f(\theta)}{\theta^3}$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]

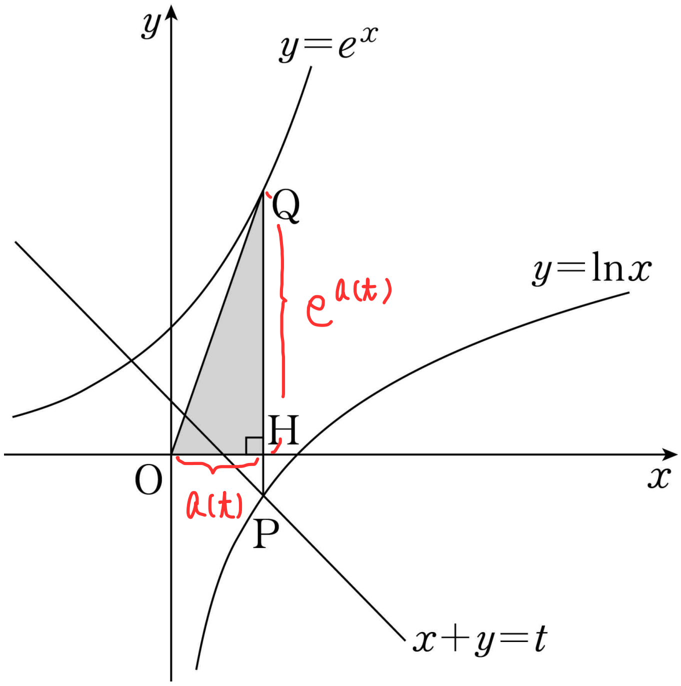


$$\lim_{\theta\to0+}\frac{8\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\tan\frac{\theta}{2}/\theta\cdot 3\tan\frac{\theta}{2}/\theta\cdot\tan\theta/\theta}{\theta^3/\theta^3}$$

$$=8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=9$$

#30. [2017년 10월 전국연합학력평가 17번(가형)]

$t<1$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln x$와 직선 $x+y=t$가 만나는 점을 P라 하자. 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 직선 PH와 곡선 $y=e^x$이 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OHQ의 넓이를 $S(t)$라 하자. $\lim_{t \to 0+} \frac{2S(t)-1}{t}$의 값은? [4점]



$P(\boxed{a(t)},\ t-a(t))$

교점 P의 좌표는 t에 의해 결정되므로 t에 대한 함수이다.

$H(a(t),\ 0)$, $Q(a(t),\ e^{a(t)})$

$S(t)=\frac{1}{2}a(t)\cdot e^{a(t)}$

점 P는 $y=\ln x$ 위의 점이므로 $t-a(t)=\ln a(t)$

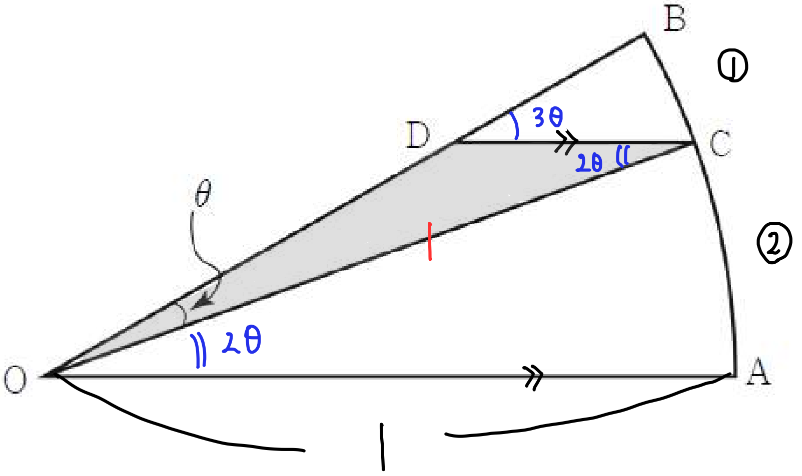
$\Rightarrow e^{t-a(t)}=a(t)$

$\Rightarrow e^{t}=a(t)\cdot e^{a(t)}$

$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{2S(t)-1}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{e^{t}-1}{t}=1$ //

#31. [2017년 8월 대구교육청 16번(가형)]]

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 삼등분점 중 B에 가까운 점을 C라 하고, 점 C를 지나고 선분 OA에 평행한 직선이 선분 OB와 만나는 점을 D라 하자. $\angle COD = \theta$일 때, 삼각형 OCD의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta}{f(\theta)}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$이다.) [4점]

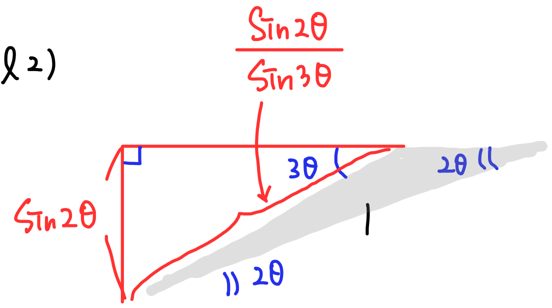


Sol1) △ODC 에서 Sin법칙에 의해

$$\frac{1}{\sin(\pi-3\theta)} = \frac{\overline{CD}}{\sin\theta} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

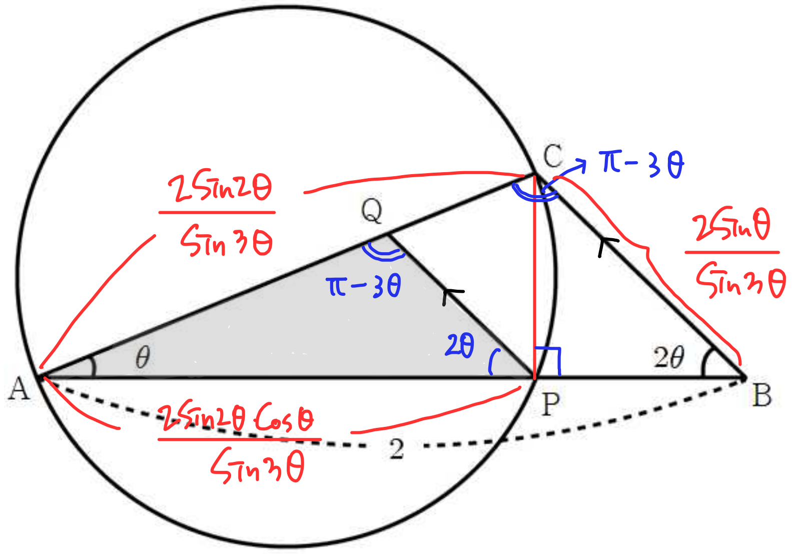
$$\therefore \lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta/\theta}{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\cdot \sin 2\theta/\theta} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{1}{3}\cdot 2} = 3$$

Sol2)



#32. [2017년 7월 전국연합학력평가 21번(가형)]

그림과 같이 $\overline{AB}=2$이고 $\angle ABC = 2\angle BAC$를 만족하는 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC를 지름으로 하는 원과 직선 AB가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P, 점 P를 지나고 선분 BC에 평행한 직선이 선분 AC와 만나는 점을 Q라 하자. $\angle BAC=\theta$라 할 때, 삼각형 APQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



△ABC 에서 Sin 법칙에 의해

$$\frac{2}{\sin(\pi-3\theta)} = \frac{\overline{AC}}{\sin2\theta} = \frac{\overline{BC}}{\sin\theta}$$

$$\overline{AC} = \frac{2\sin2\theta}{\sin3\theta}, \quad \overline{BC} = \frac{2\sin\theta}{\sin3\theta}$$

△APQ 에서 Sin 법칙에 의해

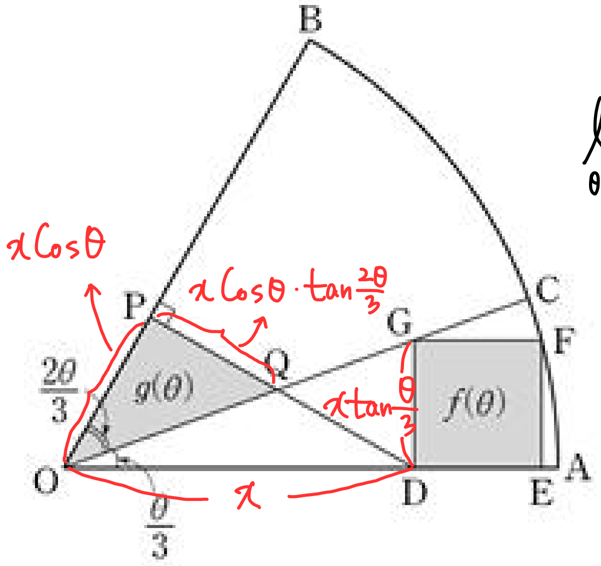
$$\frac{\frac{2\sin2\theta\cdot\cos\theta}{\sin3\theta}}{\sin(\pi-3\theta)} = \frac{\overline{QP}}{\sin\theta}$$

$$\overline{QP} = \frac{2\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\sin2\theta}{\sin^2 3\theta} = \frac{\sin^2 2\theta}{\sin^2 3\theta}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2\sin2\theta\cos\theta}{\sin3\theta}\right)\left(\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}\right)^2\cdot\sin2\theta/\theta}{\theta/\theta} = \frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot2 = \frac{16}{27}$$

#33. [2017년 6월 평가원모의고사 28번(가형)]

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점을 C라 하자. 변 DE가 선분 OA 위에 있고, 꼭짓점 G, F가 각각 선분 OC, 호 AC 위에 있는 정사각형 DEFG의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. 점 D에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 P, 선분 DP와 선분 OC가 만나는 점을 Q라 할 때,삼각형 OQP의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta \times g(\theta)} = k$일 때, $60k$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이고, $\overline{\mathrm{OD}} < \overline{\mathrm{OE}}$이다.) [4점]



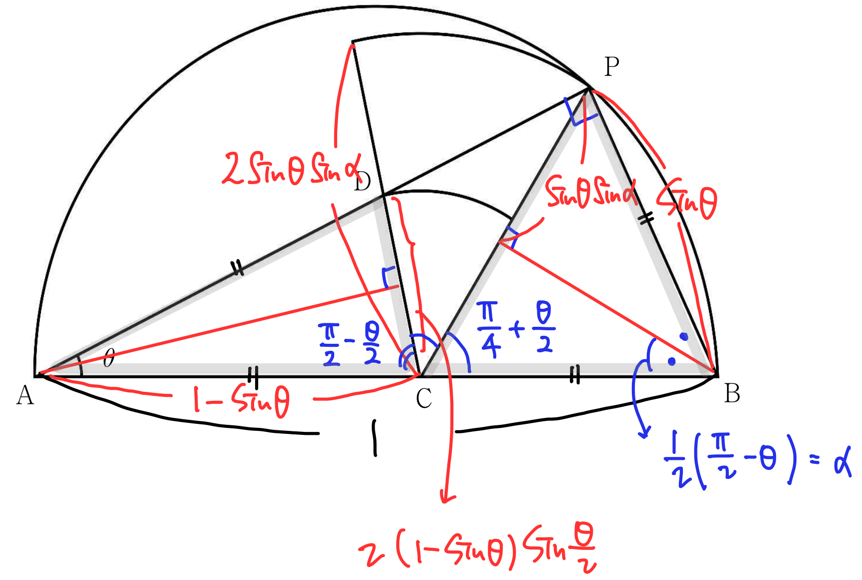
$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\cancel{x^2} \tan^2\frac{\theta}{3} / \theta^2}{\frac{\theta}{\theta} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cancel{x}\cos\theta \cdot \cancel{x}\cos\theta \tan\frac{2}{3}\theta / \theta}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{1}{3} = k$$

$$\therefore 60k = 20$$

#34. [2017년 4월 전국연합학력평가 21번(가형)]

그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{BP}=\overline{BC}$가 되도록 선분 AB 위의 점 C를 잡고, $\overline{AC}=\overline{AD}$가 되도록 선분 AP 위의 점 D를 잡는다.
$\angle PAB=\theta$에 대하여 선분 CD를 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\angle PCD$인 부채꼴의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 CP를 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\angle PCD$인 부채꼴의 넓이를 $T(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{T(\theta)-S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이고 $\angle PCD$는 예각이다.) [4점]

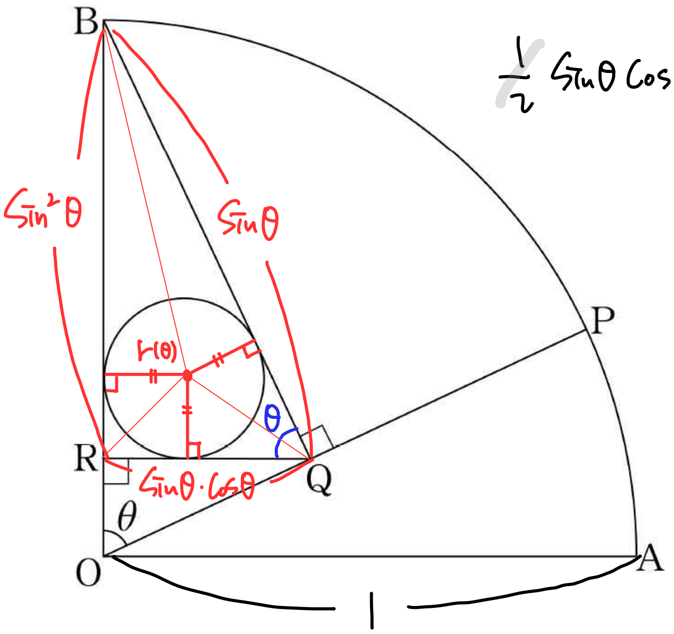


$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{1}{2}\cdot 4\sin^2\theta/_{\theta^2}\,\sin^2\alpha\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot 4(1-\sin\theta)^2\sin^2\frac{\theta}{2}/_{\theta^2}\cdot\frac{\pi}{4}}{\theta^2/_{\theta^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{8}$$

#35. [2017년 3월 전국연합학력평가 17번(가형)]

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 점 B에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 Q, 점 Q에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 R이라 하자. $\angle\mathrm{BOP}=\theta$일 때, 삼각형 RQB에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



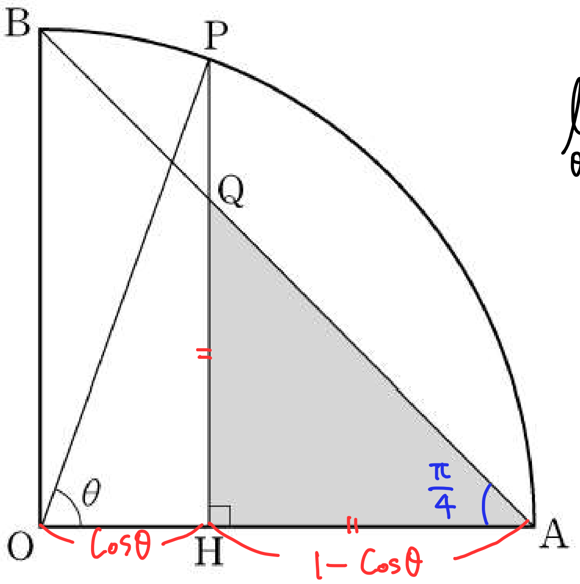
$$\cancel{\frac{1}{2}}\sin\theta\cos\theta\cdot\sin^2\theta=\cancel{\frac{1}{2}}r(\theta)\left(\sin^2\theta+\sin\theta+\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$r(\theta)=\frac{\cos\theta\cdot\sin^2\theta}{\sin\theta+1+\cos\theta}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\dfrac{\cos\theta\cdot\sin^2\theta/\theta^2}{\sin\theta+1+\cos\theta}}{\theta^2/\theta^2}=\frac{1}{2}$$

#36. [2016년 2017학년도 대학수학능력시험 14번(가형)]

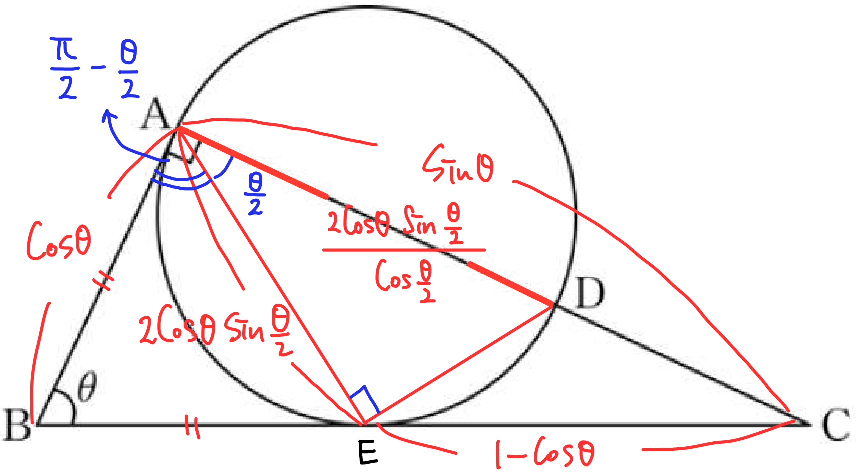
그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 선분 AB의 교점을 Q라 하자. $\angle \mathrm{POH} = \theta$ 일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^4}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2}\left(\underset{\theta^2}{\underline{1-\cos\theta}}\right)^2}{\theta^4 / \theta^4} = \frac{1}{8}$$

#37. [2016년 10월 전국연합학력평가 28번(가형)]

그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}=1$, $\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{B}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여 선분 AD를 지름으로 하는 원이 선분 BC와 접할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta^3}=k$라 하자. $100k$의 값을 구하시오. [4점]



Sol1)

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta-\frac{2\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)}{\theta^3\cdot\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-1+1-\cos\theta\right)}{\theta^3\cos\frac{\theta}{2}}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}\left(-\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}+\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)}{\frac{\theta^3}{\theta^3}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}=k$$

$\therefore 100k=25$

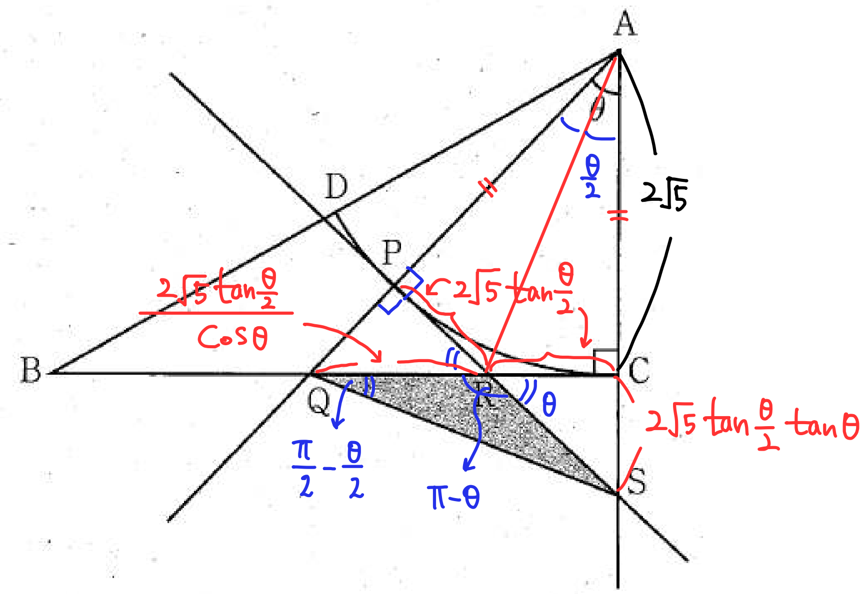
Sol2) $(1-\cos\theta)^2=\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\theta$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{(1-\cos\theta)^2/\theta^2}{\sin\theta/\theta}}{\theta^3/\theta^3}=\frac{1}{4}=k$$

$\therefore 100k=25$

#38. [2016년 10월 경남교육청 20번(가형)]

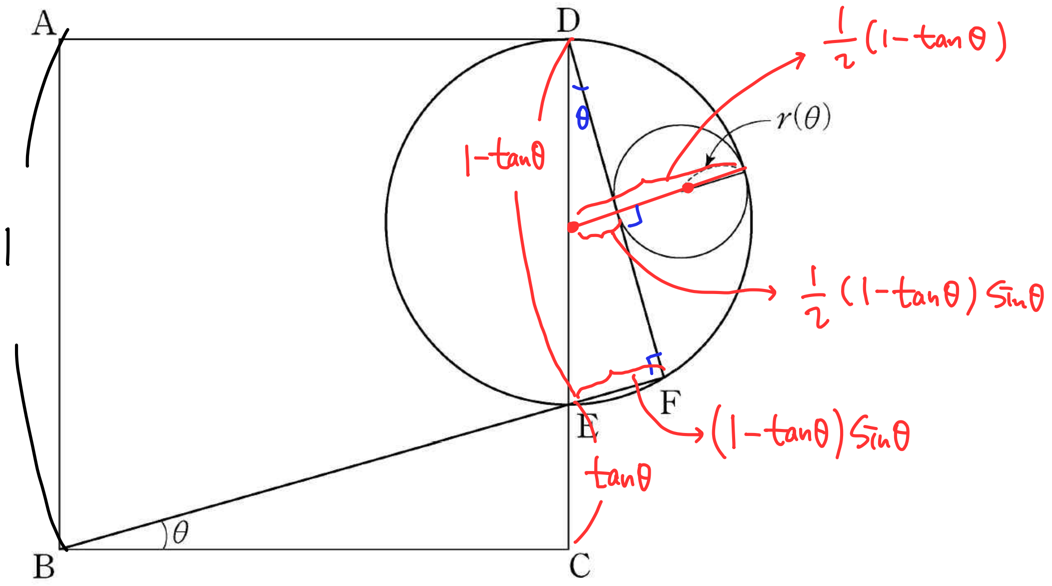
그림과 같이 $\angle A=\frac{\pi}{3}$, $\angle C=\frac{\pi}{2}$이고, 변 AC의 길이가 $2\sqrt{5}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 중심이 A이고 변 AC를 반지름으로 하는 원과 변 AB가 만나는 점을 D라 하자. 호 CD 위의 점 P에 대하여 직선 AP와 변 BC가 만나는 점을 Q, 점 P에서의 접선과 변 BC가 만나는 점을 R, 점 P에서의 접선과 직선 AC가 만나는 점을 S라 하자. $\angle PAC=\theta$ $(0<\theta<\frac{\pi}{3})$라 하고, 삼각형 QSR의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은? [4점]



$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt5\tan\frac{\theta}{2}/\theta}{\cos\theta}\right)\left(2\sqrt5\tan\frac{\theta}{2}/\theta\,\tan\theta/\theta\right)}{\theta^3/\theta^3}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt5\cdot\frac{1}{2}\cdot2\sqrt5\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

#39. [2016년 9월 평가원모의고사 20번(가형)]

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 변 CD 위의 점 E에 대하여 선분 DE를 지름으로 하는 원과 직선 BE가 만나는 점 중 E가 아닌 점을 F라 하자. $\angle EBC = \theta$라 할 때, 점 E를 포함하지 않는 호 DF를 이등분하는 점과 선분 DF의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \dfrac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



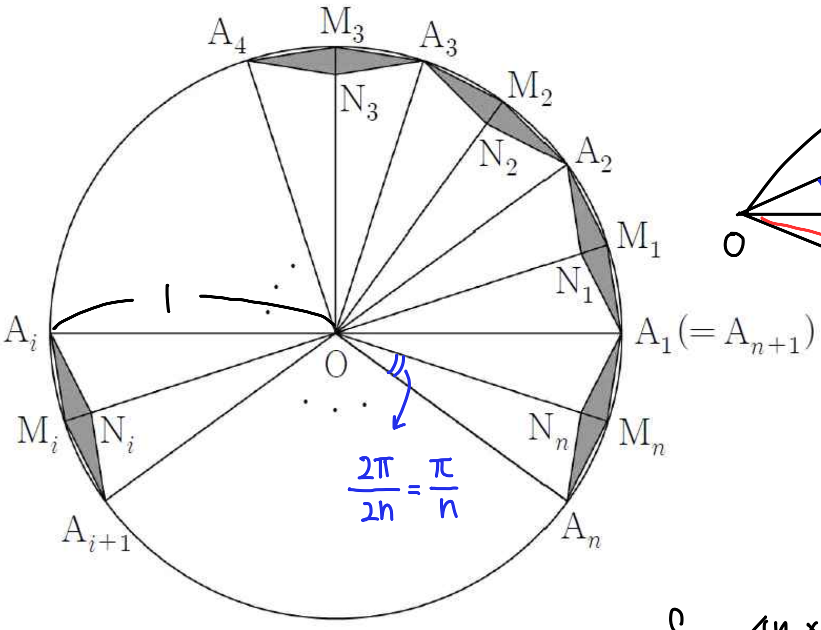
$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\frac{1}{4}(1-\overset{f(\theta)}{\boxed{\tan\theta}})(1-\sin\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1}{4}(1-\sin\theta)\boxed{\frac{\{f(\theta)-f(\frac{\pi}{4})\}}{\theta-\frac{\pi}{4}}}$$

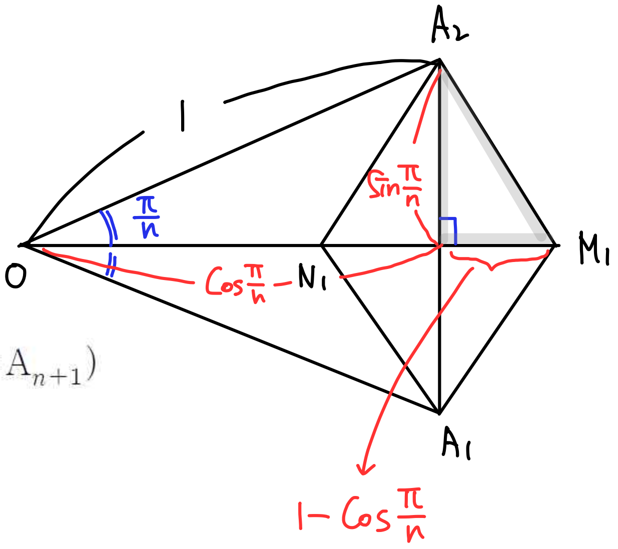
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot\boxed{f'(\tfrac{\pi}{4})}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

#40. [2016년 7월 전국연합학력평가 21번(가형)]

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원의 둘레를 $n(n \geq 4)$ 등분한 점을 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$이라 하자. 호 $A_iA_{i+1}(i=1,2,\cdots,n)$을 이등분한 점을 M_i라 하고 사각형 $\mathrm{A}_i\mathrm{M}_i\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{N}_i$가 마름모가 되도록 하는 선분 OM_i 위의 점을 N_i라 하자. n개의 사각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{M}_1\mathrm{A}_2\mathrm{N}_1$, $\mathrm{A}_2\mathrm{M}_2\mathrm{A}_3\mathrm{N}_2$, $\mathrm{A}_3\mathrm{M}_3\mathrm{A}_4\mathrm{N}_3$, $\cdots$, $\mathrm{A}_n\mathrm{M}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{N}_n$의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(n^2 \times S_n)$의 값은? (단, $\mathrm{A}_{n+1}=\mathrm{A}_1$) [4점]



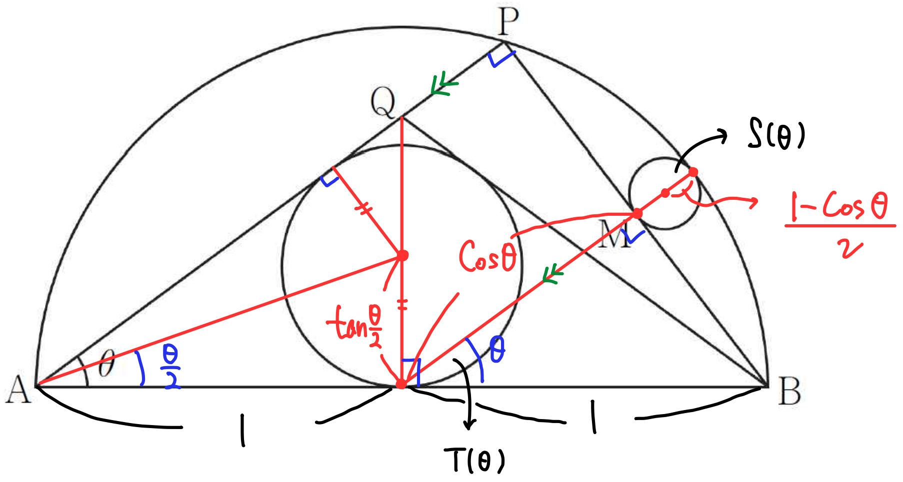


$$S_n = 4n \times \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{4n}{n}\times\frac{1}{2}\underbrace{\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}_{\frac{1}{n^2}}\underbrace{\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)}_{\frac{1}{n}}\right\} = 2\cdot\frac{\pi^2}{2}\cdot\pi = \pi^3$$

#41. [2016년 4월 전국연합학력평가 29번(가형)]

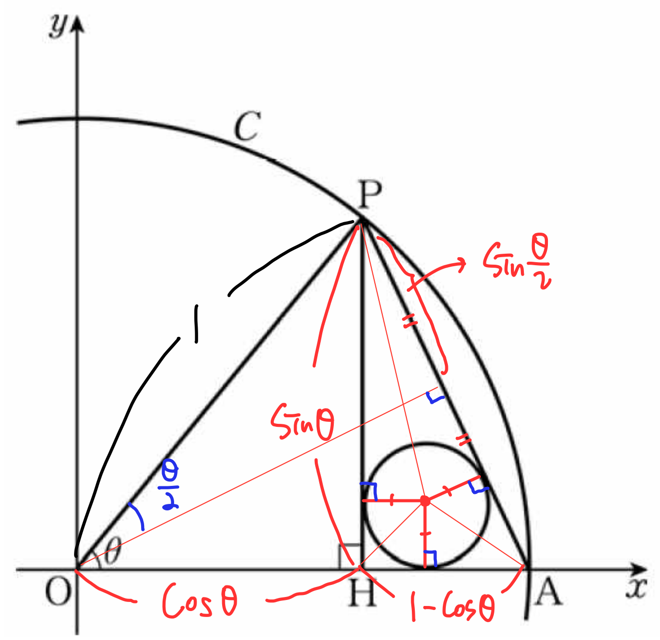
그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 한 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$라 하자. 선분 PB의 중점 M에서 선분 PB에 접하고 호 PB에 접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 AP 위에 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}$가 되도록 점 Q를 잡고 삼각형 ABQ에 내접하는 원의 넓이를 $T(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\theta^2\times T(\theta)}{S(\theta)}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\cdot\frac{1}{\theta^2}\cdot\tan^2\frac{\theta}{2}\cancel{\pi}\frac{1}{\theta^2}}{\left(\frac{1-\cos\theta}{2\theta^2}\right)^2\cancel{\pi}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}=4$$

#42. [2016년 3월 전국연합학력평가 21번(가형)]

그림과 같이 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원 C가 x축의 양의 방향과 만나는 점을 A, 원 C위에 있고 제 1사분면에 있는 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, $\angle POA=\theta$라 하자. 삼각형 APH에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}$의 값은? [4점]

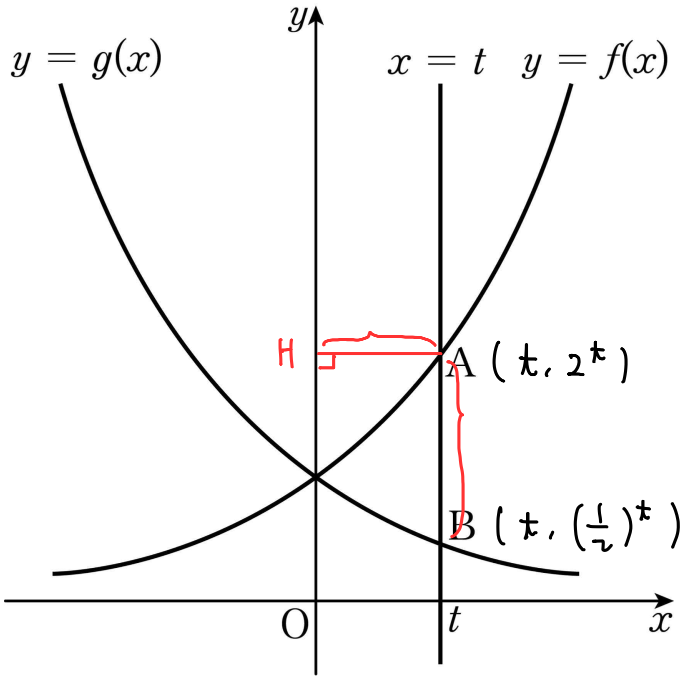


$$\cancel{\frac{1}{2}}(1-\cos\theta)\sin\theta=\cancel{\frac{1}{2}}r(\theta)\left\{\sin\theta+(1-\cos\theta)+2\sin\frac{\theta}{2}\right\}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{(1-\cos\theta)}{\theta^2}\,\frac{\sin\theta}{\theta}}{\frac{\theta^2}{\theta^2}\cdot\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}+\frac{(1-\cos\theta)}{\theta}+\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}\right\}}=\frac{\frac{1}{2}}{1+0+2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

#43. [2016년 3월 전국연합학력평가 14번(가형)]

좌표평면에 두 함수 $f(x)=2^x$의 그래프와 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프가 있다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 직선 $x=t\,(t>0)$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\lim\limits_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AH}}}$의 값은? [4점]



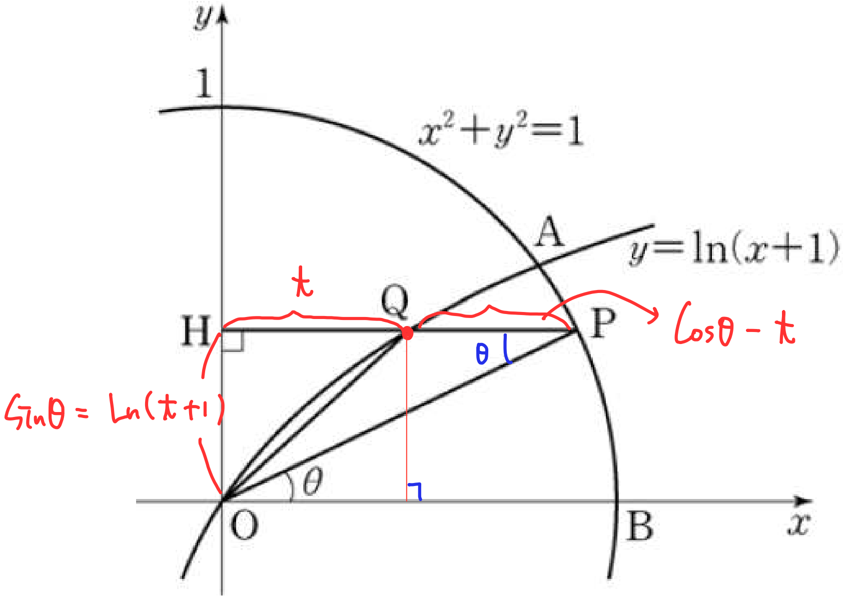
$$\lim_{t\to0+}\frac{2^t-\left(\frac{1}{2}\right)^t}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{2^t-1-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^t-1\right\}}{t}$$

$$=\ln 2-\ln\frac{1}{2}=2\ln 2$$

#44. [2015년 2016학년도 대학수학능력시험 28번(B형)]

그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$과 곡선 $y=\ln(x+1)$이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 점 B(1,0)P 대하여 호 AB 위의 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 곡선 $y=\ln(x+1)$이 만나는 점을 Q라 하자. $\angle POB=\theta$라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 HQ의 길이를 $L(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{S(\theta)}{L(\theta)}=k$일 때, $60k$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$이고, O는 원점이다.) [4점]



$$Q(t,\ \ln(t+1))$$

$$\sin\theta = \ln(t+1)$$

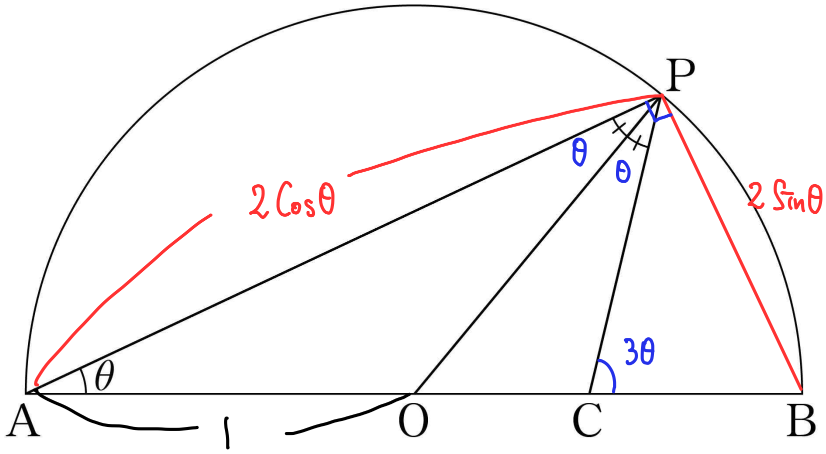
$$t = e^{\sin\theta}-1$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}(\cos\theta - e^{\sin\theta}+1)\sin\theta/\sin\theta}{(e^{\sin\theta}-1)/\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{2}=k$$

$$\therefore 60k = 30$$

#45. [2015년 10월 전국연합학력평가 12번(B형)]
그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P에 대하여 $\angle PAB = \theta$라 하자. 선분 OB 위의 점 C가 $\angle APO = \angle OPC$를 만족시킬 때, $\lim_{\theta \to 0+} \overline{OC}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$이고, 점 O는 선분 AB의 중점이다.) [3점]



△ ACP 에서 Sin 법칙에 의해

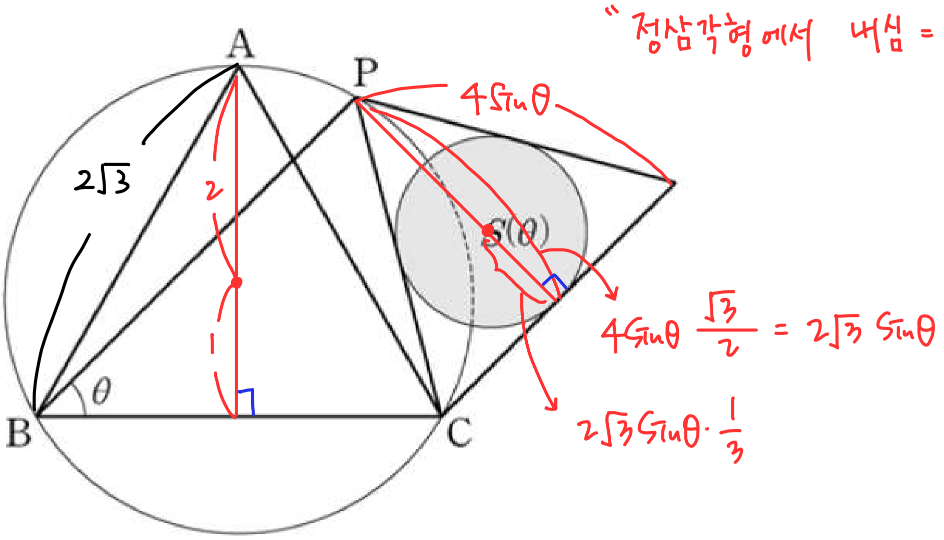
$$\frac{2\cos\theta}{\sin(\pi-3\theta)} = \frac{\overline{AC}}{\sin 2\theta} \qquad \therefore \overline{AC} = \frac{2\cos\theta\cdot\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{2\cos\theta\cdot\sin 2\theta}{\sin 3\theta} - 1\right) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

#46. [2015년 9월 평가원모의고사 28번(B형)]

그림과 같이 원에 내접하고 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 ABC가 있다. 점 B를 포함하지 않는 호 AC 위의 점 P에 대하여 $\angle PBC = \theta$라 하고, 선분 PC를 한 변으로 하는 정삼각형에 내접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = a\pi$ 일 때, $60a$의 값을 구하시오. [4점]

" 정삼각형에서 내심 = 외심 = 무게중심 "



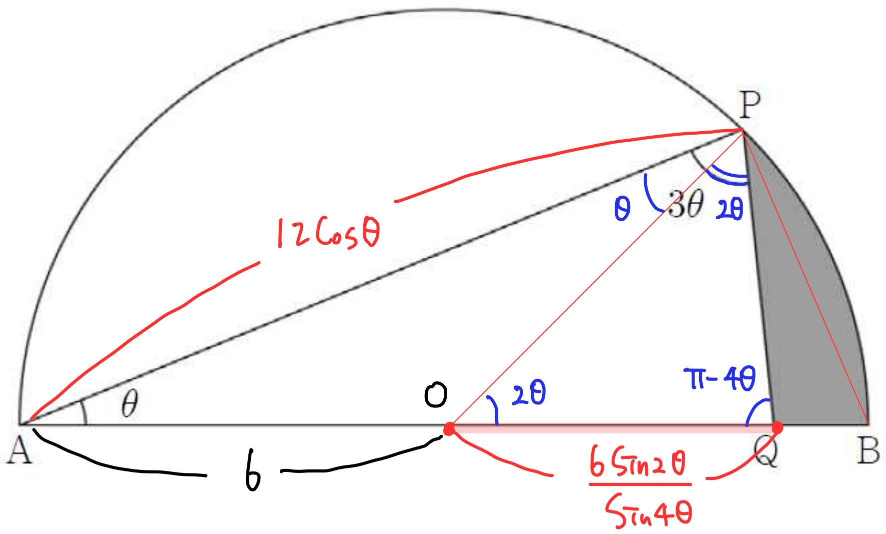
△PBC에서 sin 법칙에 의해

$$\frac{\overline{PC}}{\sin\theta} = 2R = 4 \to \overline{PC} = 4\sin\theta$$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{4}{3}\sin^2\theta \cdot \pi}{\theta^2} = \frac{4}{3}\pi \qquad \therefore 60a = 80$$

#47. [2015년 7월 전국연합학력평가 29번(B형)]

그림과 같이 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의호 AB 위에 $\angle \mathrm{PAB}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$인 점 P가 있다. $\angle \mathrm{APQ}=3\theta$가 되도록 선분 AB 위의 점 Q를 잡을 때, 두 선분 PQ, QB와 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오. [4점]

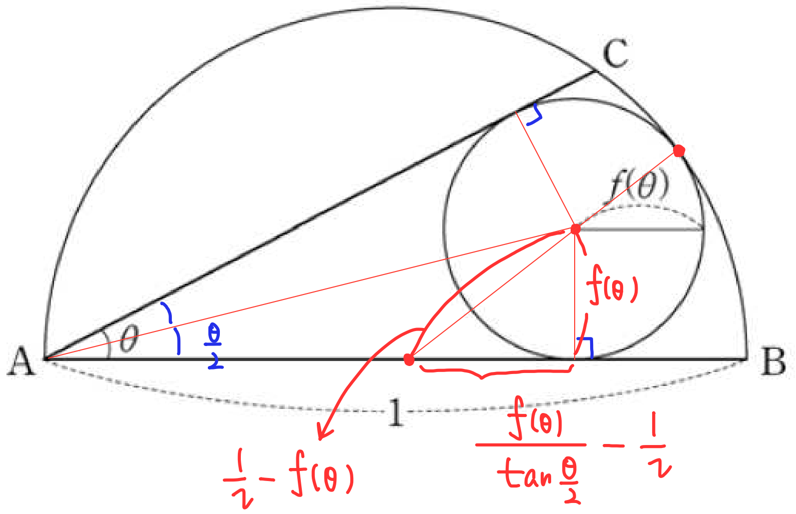


ΔPOQ 에서 Sin 법칙에 의해

$$\frac{6}{\sin(\pi-4\theta)} = \frac{\overline{OQ}}{\sin 2\theta} \Rightarrow \overline{OQ} = \frac{6\sin 2\theta}{\sin 4\theta}$$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2}\cdot 36\cdot 2\theta/\theta - \frac{1}{2}\frac{6\sin 2\theta}{\sin 4\theta}\cdot 6\cdot \sin 2\theta/\theta}{\theta/\theta} = 36 - 18 = 18$$

#48. [2015년 6월 평가원모의고사 29번(B형)]
그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 C를 잡고 $\angle \mathrm{BAC}=\theta$라 하자. 호 BC와 두 선분 AB, AC에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $f(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\tan\frac{\theta}{2} - f(\theta)}{\theta^2} = \alpha$이다. 100α의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



$$\{f(\theta)\}^2 + \left\{\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2}\right\}^2 = \left\{\frac{1}{2} - f(\theta)\right\}^2$$

$$\frac{\{f(\theta)\}^{\cancel{2}}}{\tan^2\frac{\theta}{2}} - \frac{\cancel{f(\theta)}}{\tan\frac{\theta}{2}} = -\cancel{f(\theta)}$$

$\times \tan^2\frac{\theta}{2}$

$$f(\theta) - \tan\frac{\theta}{2} = -\tan^2\frac{\theta}{2}$$

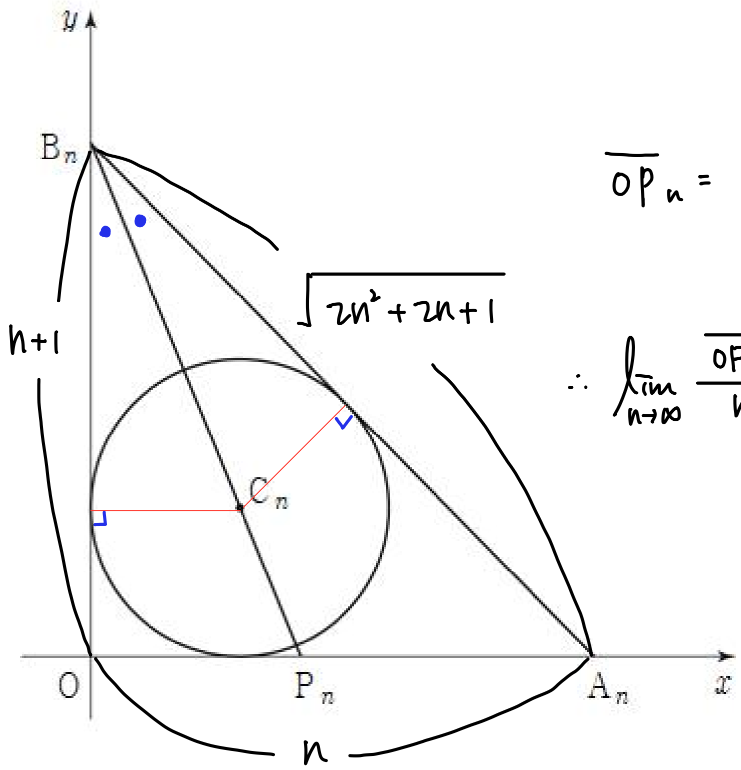
$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2} = \frac{1}{4} = \alpha$$

$$\therefore 100\alpha = 25$$

#49. [2015년 4월 전국연합학력평가 20번(A형)]

자연수 n에 대하여 그림과 같이 두 점 $\mathrm{A}_n(n, 0)$, $\mathrm{B}_n(0, n+1)$이 있다. 삼각형 OA_nB_n에 내접하는 원의 중심을 C_n이라 하고, 두 점 B_n과 C_n을 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 P_n이라 하자.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{OP}_n}}{n}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



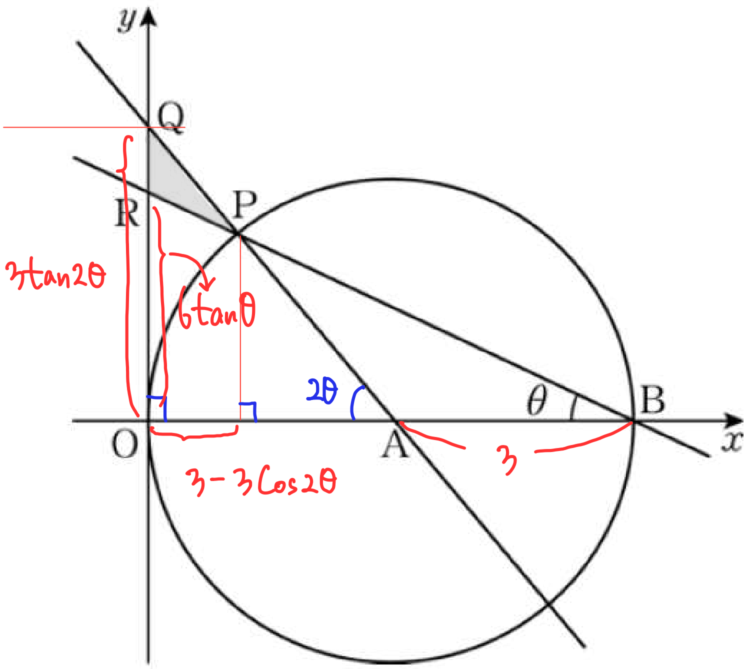
$$\overline{OP}_n = n \times \frac{n+1}{(n+1)+\sqrt{2n^2+2n+1}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{OP_n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+1)+\sqrt{2n^2+2n+1}}$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$

#50. [2015년 3월 전국연합학력평가 29번(B형)]

그림과 같이 중심이 $\mathrm{A}(3,0)$이고 점 $\mathrm{B}(6,0)$을 지나는 원이 있다. 이 원 위의 점 P를 지나는 두 직선 AP, BP가 y축과 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. $\angle \mathrm{PBA}=\theta$라 하고, 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$) [4점]



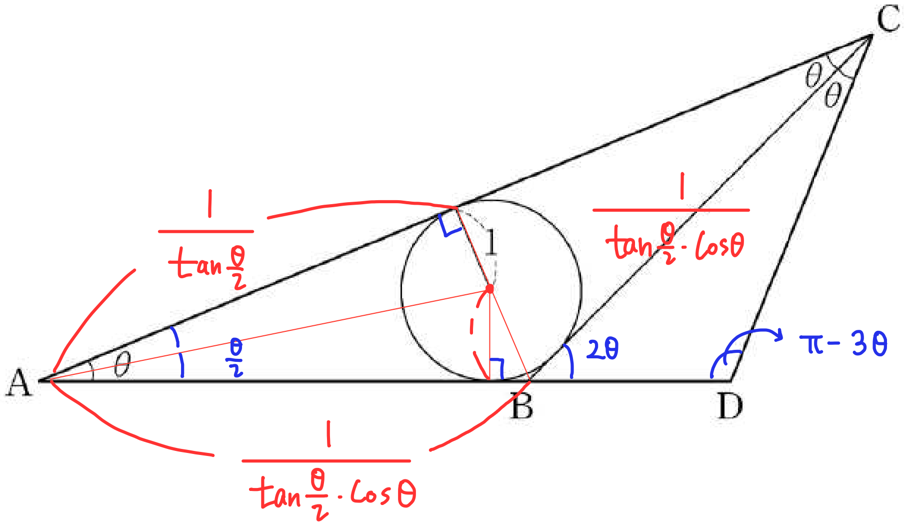
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\boxed{\left(\frac{3\tan2\theta-6\tan\theta}{\theta^3}\right)}\cdot3\left(\frac{1-\cos2\theta}{\theta^2}\right)}{\theta^5/\theta^5}=\frac{1}{2}\cdot6\cdot3\cdot2=18$$

$$\left(\frac{6\tan\theta}{1-\tan^2\theta}-6\tan\theta\right)\cdot\frac{1}{\theta^3}$$

$$=\frac{6\tan\theta}{\theta}\left(\frac{\tan^2\theta/\theta^2}{1-\tan^2\theta}\right)\xrightarrow[\theta\to0+]{}6$$

#51. [2014년 2015학년도 대학수학능력시험 20번(B형)]

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 ∠CAB = ∠BCA = θ인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 점 A가 아닌 점 D를 ∠DCB = θ가 되도록 잡는다. 삼각형 BDC의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\{\theta\times S(\theta)\}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



△BCD에서 Sin 법칙에 의해

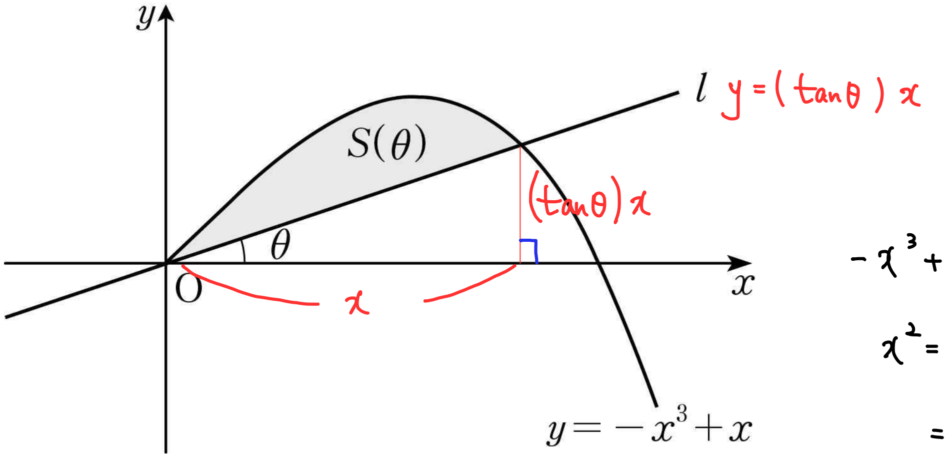
$$\frac{\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}\cos\theta}}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{CD}}{\sin 2\theta}\Rightarrow\overline{CD}=\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta\cdot\tan\frac{\theta}{2}\cdot\cos\theta}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\theta}{\theta}\times\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\sin 2\theta}{\theta}}{\frac{\sin 3\theta}{\theta}\cdot\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\theta}\cdot\cos\theta}\cdot\frac{1}{\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\theta}\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3\cdot\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot1=\frac{2}{3}\cdot2=\frac{4}{3}$$

#52. [2014년 10월 전국연합학력평가 19번(B형)]

그림과 같이 원점을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\theta\left(0 \le \theta < \frac{\pi}{4}\right)$인 직선을 l이라 하자. 곡선 $y=-x^3+x\,(x \ge 0)$과 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-0} \frac{S(\theta)}{\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)^2}$의 값은? [4점]



$-x^3 + x = \tan\theta \cdot x$

$x^2 = 1 - \tan\theta$

$= -(\tan\theta - \tan\frac{\pi}{4})$

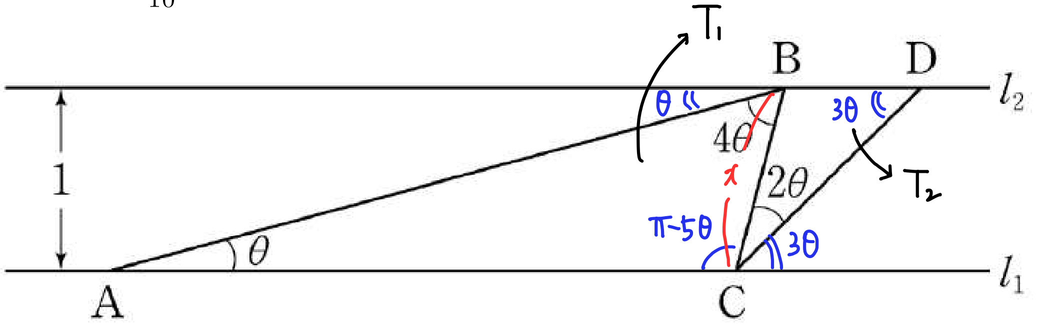
$S(\theta) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(\tan\theta)x^2 = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2(1-\tan\theta)$

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{-\frac{1}{4}\left(\tan\theta - \tan\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\tan\theta - \tan\frac{\pi}{4}\right)^2}{\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)^2}$$

$= -\frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 1$

#53. [2014년 9월 평가원모의고사 28번(B형)]

그림과 같이 서로 평행한 두 직선 l_1과 l_2 사이의 거리가 1이다. 직선 l_1 위의 점 A에 대하여 직선 l_2 위에 점 B를 선분 AB와 직선 l_1이 이루는 각의 크기가 θ가 되도록 잡고, 직선 l_1 위에 점 C를 $\angle \mathrm{ABC} = 4\theta$가 되도록 잡는다. 직선 l_2 위에 점 D를 $\angle \mathrm{BCD} = 2\theta$ 이고 선분 CD가 선분 AB와 만나지 않도록 잡는다. 삼각형 ABC의 넓이를 T_1, 삼각형 BCD의 넓이를 T_2라 할 때, $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{T_1}{T_2}$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{10}$) [4점]



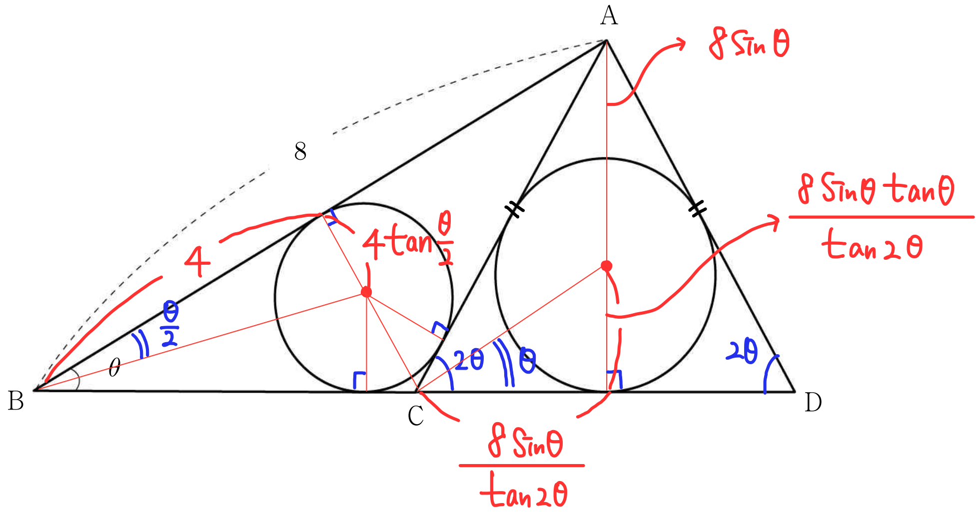
△ABC 와 △BCD 에서 sin 법칙에 의해

$$\overline{BC} = \frac{x\sin4\theta}{\sin\theta} \quad , \quad \overline{BD} = \frac{x\sin2\theta}{\sin3\theta}$$

$$\lim_{\theta\to0+} \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\cancel{x}\sin4\theta}{\sin\theta} \cdot 1}{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\cancel{x}\sin2\theta}{\sin3\theta} \cdot 1} = \frac{4}{\frac{2}{3}} = 6_{//}$$

#54. [2014년 7월 전국연합학력평가 21번(B형)]

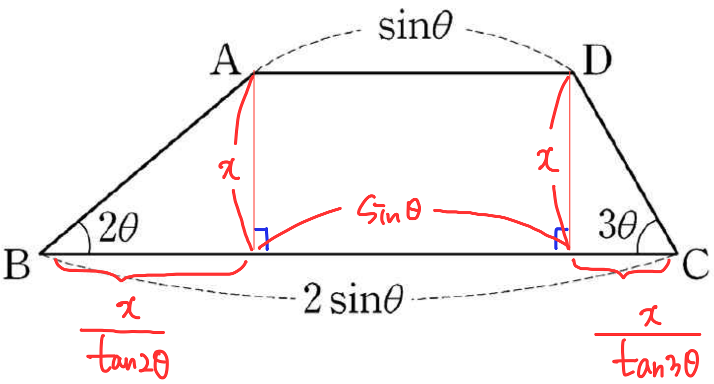
$\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\angle ABC=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 선분 BC의 연장선 위에 $\overline{AC}=\overline{AD}$인 점 D를 잡는다. 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_1, 삼각형 ACD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_2라 할 때, $\lim_{\theta\to+0}\frac{r_1 r_2}{\theta^2}$의 값은? [4점]



$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{4\tan\frac{\theta}{2}}{\theta}\times\frac{8\sin\theta\cdot\tan\theta}{\tan2\theta\cdot\theta}}{\theta^2/\theta^2}=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{2}=8$$

#55. [2014년 6월 평가원모의고사 29번(B형)]

그림과 같이 사다리꼴 ABCD에서 변 AD와 변 BC가 평행하고 $\angle B = 2\theta$, $\angle C = 3\theta$, $\overline{BC} = 2\sin\theta$, $\overline{AD} = \sin\theta$ 이다. 사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$$\therefore\ x\left(\frac{1}{\tan 2\theta}+\frac{1}{\tan 3\theta}\right)=\sin\theta$$

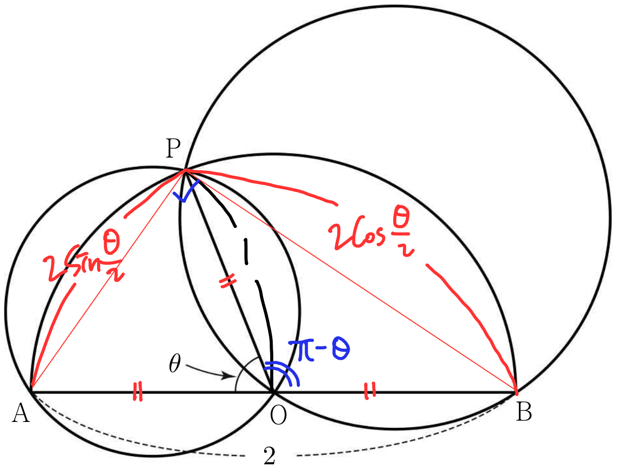
$$x=\frac{\sin\theta(\tan 2\theta\cdot\tan 3\theta)}{\tan 2\theta+\tan 3\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{2}\,\frac{1}{\theta^3/_{\theta^3}}\,\frac{\sin\theta/_{\theta}(\tan 2\theta/_{\theta}\cdot\tan 3\theta/_{\theta})}{\tan 2\theta/_{\theta}+\tan 3\theta/_{\theta}}\left(\sin\theta/_{\theta}+2\sin\theta/_{\theta}\right)=\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{1\cdot\cancel{2}\cdot 3}{5}\,(1+2)$$

$$=\frac{9}{5}$$

$$\therefore\ p+q=14$$

#56. [2014년 4월 전국연합학력평가 19번(B형)]
그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{AOP} = \theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$일 때, 세 점 A, O, P를 지나는 원의 넓이를 $f(\theta)$, 세 점 B, O, P를 지나는 원의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-} \frac{g(\theta) - f(\theta)}{\frac{\pi}{2} - \theta}$ 의 값은? [4점]



$\triangle$AOP, $\triangle$BOP에서 sin법칙에 의해

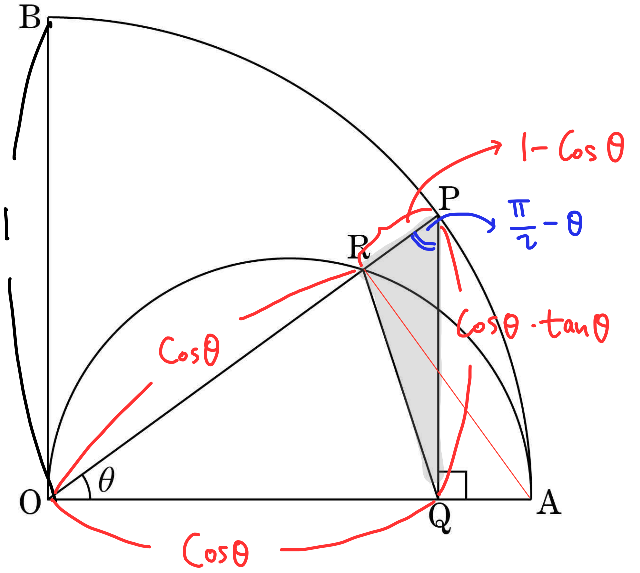
$$\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta} = 2r_1 \Rightarrow r_1 = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}$$

$$\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{\sin(\pi-\theta)} = 2r_2 \Rightarrow r_2 = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}+} \frac{\frac{\boxed{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\sin^2\theta}\pi - \frac{\boxed{\sin^2\frac{\theta}{2}}}{\sin^2\theta}\pi}{\frac{\pi}{2} - \theta} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\pi}{\sin^2\theta}\left(\frac{\boxed{\cos\theta - \cos\frac{\pi}{2}}}{\theta - \frac{\pi}{2}}\right) = \pi$$

#57. [2014년 3월 전국연합학력평가 19번(B형)]

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB와 선분 OA를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 Q, 선분 OP와 반원의 교점 중 O가 아닌 점을 R라 하고, $\angle \mathrm{POA}=\theta$라 하자. 삼각형 PRQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은? [4점]



$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)/_{\theta^2}\cos\theta\cdot\tan\theta/_{\theta}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\theta^3/_{\theta^3}}=\frac{1}{4}$$

[미적분_함수의극한+도형(2020년-2014년)]

정답

#1. $\frac{1}{4}$

#2. 60

#3. $\frac{8}{9}$

#4. $\frac{11}{12}, 23$

#5. 120

#6. 15

#7. 2

#8. 2

#9. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

#10. $\frac{1}{2}$

#11. 40

#12. $\frac{1}{4}$

#13. $\frac{1}{8}$

#14. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

#15. $\frac{1}{2}$

#16. $\frac{1}{2}$

#17. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

#18. 9

#19. 2

#20. $\frac{\pi^2}{2}$

#21. 2

#22. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

#23. $\frac{1}{4}$

#24. $\frac{8}{3}$

#25. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

#26. $\frac{1}{16}$

#27. 1

#28. 8

#29. 9

#30. 1

#31. 3

#32. $\frac{16}{27}$

#33. 20

#34. $\frac{\pi}{8}$

#35. $\frac{1}{2}$

#36. $\frac{1}{8}$

#37. 25

#38. $\frac{5}{2}$

#39. $\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$

#40. π^3

#41. 4

#42. $\frac{1}{4}$

#43. $2\ln 2$

#44. 30

#45. $\frac{1}{3}$

#46. 80

#47. 18

#48. 25

#49. $\sqrt{2}-1$

#50. 18

#51. $\frac{4}{3}$

#52. 1

#53. 6

#54. 8

#55. 14

#56. π

#57. $\frac{1}{4}$