기출의 파급효과 수학

atom.ac/books/7608

기출의 파급효과 수학 시리즈

파급의 기출효과

cafe.naver.com/spreadeffect

파급의 기출효과 NAVER 카페

기출의 파급효과 수학은 **어려운 3점~4점 기출에서 얻어갈 수 있는 '꼭 필요한 도구와 태도'를 정리**합니다. '꼭 필요한 도구와 태도' 체화를 위해 관련도가 높은 준킬러 이상 기출을 바로바로 보여주며 체화 속도를 높입니다. 단시간 내에 점수를 극대화할 수 있도록 교재가 설계되었습니다.

학습하시다 질문이 생기신다면 '파급의 기출효과' 카페에서 질문을 할 수 있습니다.
교재 인증을 하시면 질문 게시판을 이용하실 수 있습니다.

얀드브, 슬기롭다, 파급효과, 출기능수 등등 **오르비 저자분들이 올리시는 학습자료를 받아보실 수 있습니다.**
위 저자 분들의 컨텐츠 질문 답변도 교재 인증 시 가능합니다.

이외에도 **검증된 우수한 컨설팅 팀이 정리한 과거부터 현재까지 정시, 수시 입결을 확인할 수 있습니다.**
입시에 대한 질문은 가입하시기만 하면 팀장 및 팀원분들께 하실 수 있습니다.

더 궁금하시다면 https://cafe.naver.com/spreadeffect/15에서 확인하시면 됩니다.

수학 영역

5지선다형

1. $\left(\sqrt{3^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$3^{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}}$

2. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_5-a_2의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

3d

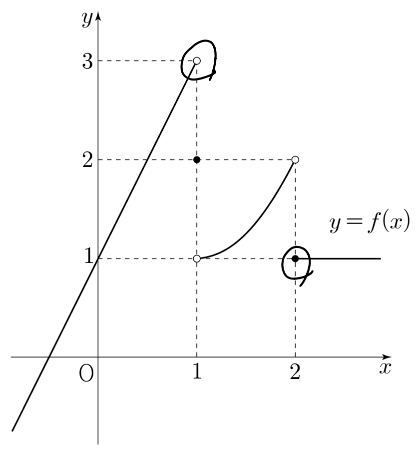
3. 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+1$의 최댓값은? [3점]

↳ 감소함수

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

f(0)= 10

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{x\to 2+}f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 2x + 4$이고 $f(-1) + f(1) = 0$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

$f(x) = x^2 + 4x - 1$

$f(2) = 11$

6. 양수 a에 대하여 함수 $f(x) = \sin\left(ax + \frac{\pi}{6}\right)$의 주기가 4π일 때, $f(\pi)$의 값은? [3점]

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ 1

$a = \frac{1}{2}$

$f(\pi) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

7. 함수 $f(x) = x^3 - 3x$에서 x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(k, f(k))$에서의 접선의 기울기가 서로 같을 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

$f'(k) = 3k^2 - 3 = \frac{64-12}{4-1} = 18$

$k^2 = 7$

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+3x+a}{x-2} & (x<2) \\ -x^2+b & (x\ge 2) \end{cases}$$

가 $x=2$에서 연속일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$x^2+3x+a=(x-2)(x+5)$, $a=-10$

$f(2)=7=-4+b$, $b=11$

9. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$f:g=3:2$

$$\lim_{x\to\infty}\{2f(x)-3g(x)\}=1,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$$

를 만족시킬 때, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)}$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

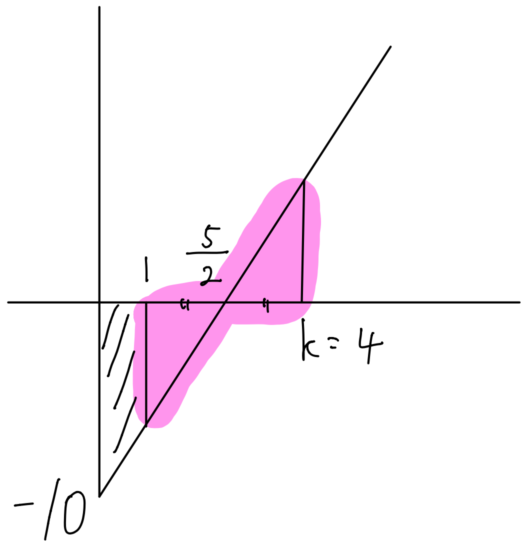
$$\frac{12+2}{9-2}=\frac{14}{7}=2$$

10. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=4t-10$$

이다. 점 P의 시각 $t=1$에서의 위치와 점 P의 시각 $t=k(k>1)$에서의 위치가 서로 같을 때, 상수 k의 값은? [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

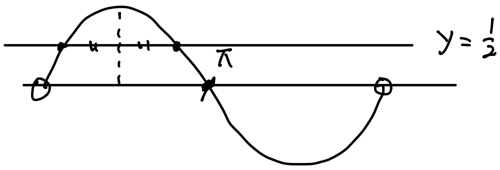


11. $0 < x < 2\pi$일 때, 방정식 $2\cos^2 x - \sin(\pi + x) - 2 = 0$의 모든 해의 합은? [4점]

① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

$2 - 2S^2 + S - 2 = 0$

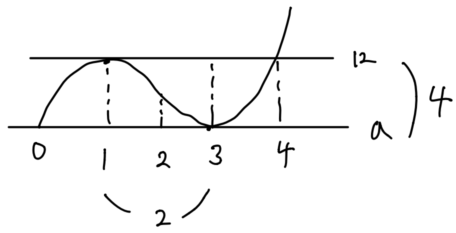
$\therefore 2S\left(S - \frac{1}{2}\right) = 0$



12. 닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a$의 최댓값이 12일 때, 상수 a의 값은? [4점]

↳ $x(x-3)^2 + a$

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10



13. 두 양수 a, $b(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를
$f(x)=(x-a)(x-b)$라 하자.

$$\int_0^a f(x)dx=\frac{11}{6},\ \int_0^b f(x)dx=-\frac{8}{3}$$

일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

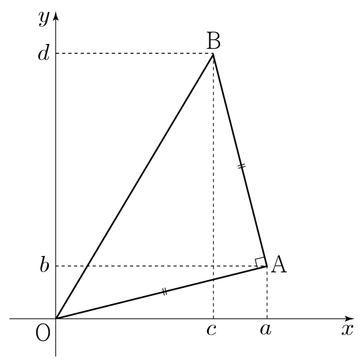
① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \frac{11}{6}+\frac{8}{3} = \frac{9}{2}$$

14. 4 이상의 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 n 이하의 네 자연수 a, b, c, d가 있다.

> ○ $a>b$
> ○ 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(c, d)$와 원점 O에 대하여 삼각형 OAB는 $\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이다.

다음은 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 T_n이라 할 때, $\sum_{n=4}^{20} T_n$의 값을 구하는 과정이다.



점 $\mathrm{A}(a, b)$에 대하여
점 $\mathrm{B}(c, d)$가 $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$를 만족시키려면
$c=a-b$, $d=a+b$이어야 한다.

이때, $a>b$이고 d가 n 이하의 자연수이므로 $b<\frac{n}{2}$이다.

$\frac{n}{2}$ 미만의 자연수 k에 대하여
$b=k$일 때, $a+b\le n$을 만족시키는 자연수 a의 개수는
$n-2k$이다.
2 이상의 자연수 m에 대하여

(i) $n=2m$인 경우
b가 될 수 있는 자연수는 1부터 $\boxed{(가)}$ 까지이므로 m-1

$T_{2m}=\sum_{k=1}^{\boxed{(가)}}(2m-2k)=\boxed{(나)}$ m-1

$=2m(m-1)-m(m-1)$
$=m(m-1)$

(ii) $n=2m+1$인 경우
$T_{2m+1}=\boxed{(다)}$

$\sum_{k=1}^{m}(2m+1-2k)$
$=2m^2+m-m(m+1)$
$=m^2$

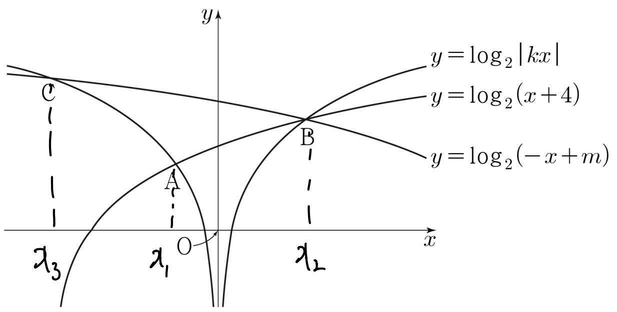
(i), (ii)에 의해 $\sum_{n=4}^{20} T_n=614$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$, $h(m)$이라 할 때, $f(5)+g(6)+h(7)$의 값은? [4점]

① 71 ② 74 ③ 77 ④ 80 ⑤ 83

$f(m)=m-1$ 4
$g(m)=m^2-m$ 30
$h(m)=m^2$ 49

15. 그림과 같이 1보다 큰 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_2|kx|$와 $y=\log_2(x+4)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하고, 점 B를 지나는 곡선 $y=\log_2(-x+m)$이 곡선 $y=\log_2|kx|$와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1 < x_2$이고, m은 실수이다.) [4점]



〈보 기〉

ㄱ. $x_2=-2x_1$이면 $k=3$이다.

ㄴ. $x_2{}^2=x_1x_3$

ㄷ. 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기의 합이 0일 때, $m+k^2=19$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $x_2+4 = kx_2 \to x_2=-2x_1$

$x_1+4 = -kx_1$ $\quad -2x_1+4 = -2kx_1$

$3x_1 = kx_1$

ㄴ. $x_2+4 = kx_2 = -x_2+m$

$x_1+4 = -kx_1$

$m-x_3 = -kx_3$

$4=(k-1)x_2$

$m=(k+1)x_2$

$4=(-1-k)x_1$

$m=(1-k)x_3$

$\therefore x_2^2 = x_1x_3$

ㄷ.

$$\frac{\log_2 kx_2-\log_2(-kx_1)}{x_2-x_1}=\frac{\log_2(-kx_1)-\log_2(-kx_3)}{x_1-x_3}$$

$$\frac{\log_2\left(\frac{-x_2}{x_1}\right)}{x_2-x_1}=\frac{\log_2\left(\frac{x_1}{x_3}\right)}{x_3-x_1}$$

$$\frac{\log_2\left(-\frac{\sqrt{x_1x_3}}{x_1}\right)}{\sqrt{x_1x_3}-x_1}=\frac{\log_2\left(\frac{x_1}{x_3}\right)}{x_3-x_1}$$

$\therefore 9x_1=x_3$, $x_2=-3x_1$

$\boxed{m=12,\ k=2}$, $m+k^2=16$

단답형

16. 함수 $f(x)=x^2+ax$에 대하여 $f'(1)=4$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

2

$2+a=4$

17. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 $\sin\theta\cos\theta=\frac{7}{18}$일 때, $30(\sin\theta+\cos\theta)$의 값을 구하시오. [3점]

40

$s^2+2sc+c^2=1+\frac{7}{9}=\frac{16}{9}$

$\therefore s+c=\frac{4}{3}$

18. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2-2x)f(x)$$

라 하자. 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값 2를 가질 때, $g'(3)$의 값을 구하시오. [3점]

8

$g'(x)=(2x-2)f(x)$

$\quad + (x^2-2x)f'(x)$

$g'(3)=4f(3)+\cancel{7f'(3)}$

$=8$

19. 첫째항이 $\frac{1}{4}$이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3+a_5=\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}$$

일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

16

$\frac{r^2+r^4}{4}=\frac{r^2}{4}(r^2+1)$

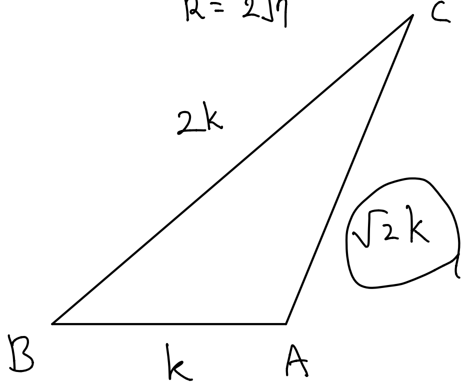
$4\cdot\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}\right)=\frac{4}{r^4}(r^2+1)$

$\therefore r^3=4, \quad a_{10}=\frac{1}{4}\cdot 4^3=4^2$

20. $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{CA}}=1:2:\sqrt{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 28π일 때, 선분 CA의 길이를 구하시오. [4점]

$R=2\sqrt{7}$

7



$4\sqrt{7}=\frac{2k}{\sin A}$

$28=4\sqrt{2}k$

$\sqrt{2}k=7$

$\cos A=\frac{1+2-4}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\sin A=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

21. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 2 & (a_n \geq 0) \\ a_n + 5 & (a_n < 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{15} < 0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값을 구하시오. [4점]

$a_1 = 2m$

$a_{m-1} = 4$
$a_m = 2$
$a_{m+1} = 0$
$a_{m+2} = -2$
$a_{m+3} = 3$
$a_{m+4} = 1$
$a_{m+5} = -1$
$a_{m+6} = 4$

1주기

$a_1 = 2m-1$ 5

$a_{m-1} = 3$
$a_m = 1$
$a_{m+1} = -1$
$a_{m+2} = 4$
$a_{m+3} = 2$
$a_{m+4} = 0$
$a_{m+5} = -2$
$a_{m+6} = 3$

1주기

$a_{15} = a_{8+7} < 0$

$\therefore a_8 < 0, \quad a_8 \neq a_1$

$\therefore a_8 = a_{m+5}$

$a_3 = a_m$

$a_1 = a_m + 4 \quad \therefore 5$

22. 실수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

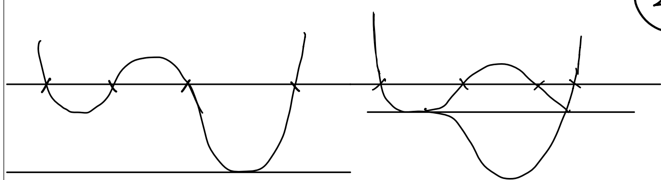
$$\underbrace{f(x) = 3x + a}_{1차}, \; g(x) = \int_2^x \underbrace{(t+a)f(t)}_{2차}dt \rightarrow 3차$$

라 하자. 함수 $h(x) = f(x)g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(-1)$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

> (가) 곡선 $y = h(x)$ 위의 어떤 점에서의 접선이 x축이다.
> (나) 곡선 $y = |h(x)|$가 x축에 평행한 직선과 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 4이다.

251

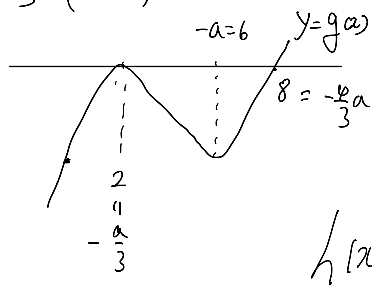
$h(x)$: 4차, (나) 성립.



$h(x) = f(x)g(x)$: $x=2$, $x=-\frac{a}{3}$ 에서 근.

$g'(x) = (x+a)\boxed{(3x+a)}$

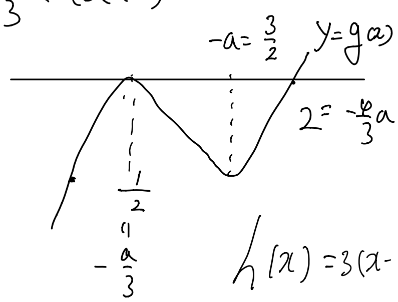
(1) $2 = -\frac{a}{3}$ $(a<0)$



$h(x) = 3(x-2)^3(x-8)$

$h(-1) = 729$

(2) $2 = -\frac{4}{3}a$ $(a<0)$



$h(x) = 3(x-\frac{1}{2})^3(x-2)$

$h(-1) = \frac{243}{8}$

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. ${}_n\Pi_2 = 25$일 때, 자연수 n의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$n^2 = 25$

24. 다항식 $(x+2a)^5$의 전개식에서 x^3의 계수가 640일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

${}_5C_3 \cdot (2a)^2 = 640$

$40a^2 = 640$

$a^2 = 16$

25. 빨간색 볼펜 5자루와 파란색 볼펜 2자루를 4명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜을 1자루도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 560 ② 570 ③ 580 ④ 590 ⑤ 600

$${}_4H_5 \cdot {}_4H_2$$
$$= {}_8C_3 \cdot {}_5C_2$$
$$= 56 \cdot 10$$
$$= 560$$

26. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 5개를 택해 일렬로 나열하여 만든 다섯 자리의 자연수 중에서 다음 조건을 만족시키는 N의 개수는? [3점]

> (가) N은 홀수이다.
> (나) $10000 < N < 30000$

① 720 ② 730 ③ 740 ④ 750 ⑤ 760

1 000 1
2 3
5

$$2 \times 5^3 \cdot 3 = 6 \cdot 125$$
$$= 750$$

27. 자연수 n에 대하여 $f(n)=\sum_{k=1}^{n} {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2k}$일 때, $f(n)=1023$을 만족시키는 n의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$$1023 = 2^{10} - 1 = \frac{2^{11}}{2} - 1$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(1+1)^{11} - 1$$

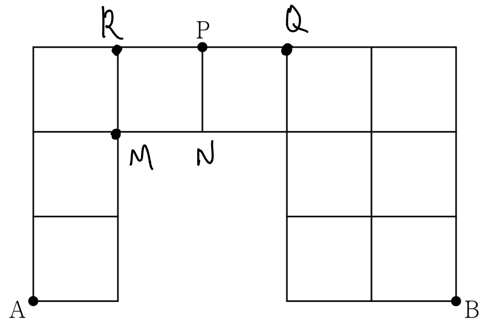
$$= \frac{1}{2}\cdot\left({}_{11}C_0 + \cdots + {}_{11}C_{11}\right) - 1$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left({}_{11}C_2 + \cdots + {}_{11}C_{10}\right)$$

$$= {}_{11}C_2 + {}_{11}C_4 + {}_{11}C_6 + {}_{11}C_8 + {}_{11}C_{10}$$

$$= {}_{11}C_9 + {}_{11}C_9 + {}_{11}C_5 + {}_{11}C_3 + {}_{11}C_1$$

28. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다.
이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 $\boxed{\text{P지점을}}$ 지나 B지점으로 갈 때, 한 번 지난 도로는 다시 지나지 않으면서 최단거리로 가는 경우의 수는? [4점]



① 78 ② 82 ③ 86 ④ 90 ⑤ 94

i) $\begin{cases} A \to M \to N \to P \to Q : {}_3C_1 = 3 \\ Q \to B : {}_5C_2 = 10 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} A \to R \to P : {}_4C_1 = 4 \\ P \begin{cases} \to N \to B : {}_4C_2 = 6 \\ \to Q \to B : {}_5C_2 = 10 \end{cases} \end{cases}$

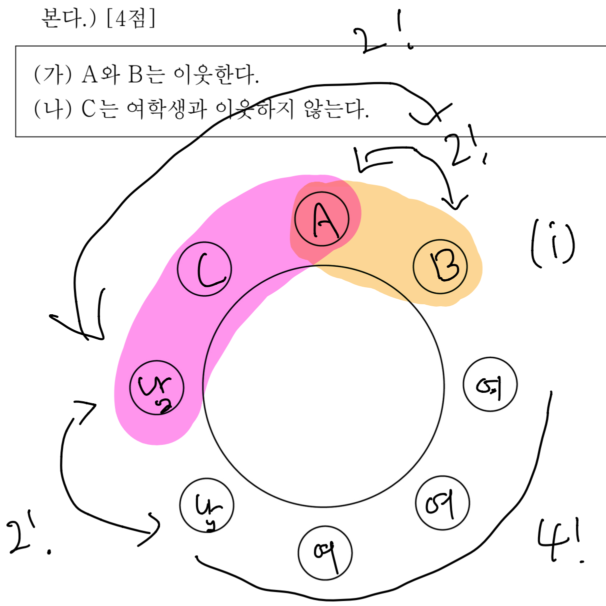
$\therefore 3\cdot 10 + 4\cdot(6+10)$

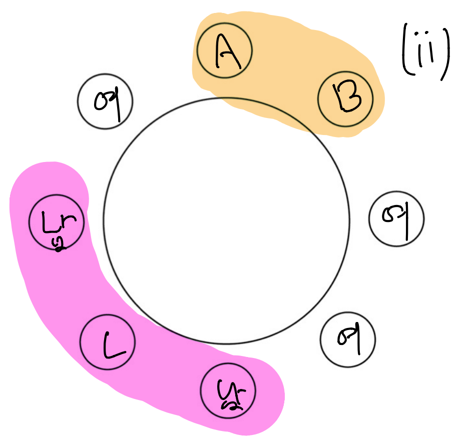
$= 30 + 64$

단답형

29. 두 남학생 A, B를 포함한 4명의 남학생과 여학생 C를 포함한 4명의 여학생이 있다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

(가) A와 B는 이웃한다.
(나) C는 여학생과 이웃하지 않는다.





(i) : $2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 4! = 192$

(ii) : $2!\cdot 2!\cdot 4! = 96$

288

30. 다음 조건을 만족시키는 14 이하의 네 자연수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $x_1+x_2+x_3+x_4=34$
(나) x_1과 x_3은 홀수이고 x_2와 x_4는 짝수이다.

$2a+1 / 2b+1 / 2c+2 / 2d+2$

$(a, b, c, d \geq 0)$

206

$\therefore a+b+c+d = 14$

$0 \leq a, b, c, d \leq 6$

전체 : ${}_4H_{14}$

하나가 7이상 : ${}_4C_1 \times ({}_4H_7 - 3)$

7이 두개 : ${}_4C_2$

$\therefore {}_4H_{14} - {}_4C_1 \times ({}_4H_7 - 3) - {}_4C_2$

$= {}_{17}C_3 - 4\cdot({}_{10}C_3 - 3) - {}_4C_2$

$= 680 - 468 - 6$

$= 206$

※ 확인 사항

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^{n+1}}{3^n+1}$의 값은? [2점]

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

24. 함수 $f(x)=\log_3 6x$에 대하여 $f'(9)$의 값은? [3점]

$\to \log_3 6 + \log_3 x$

① $\frac{1}{9\ln 3}$ ② $\frac{1}{6\ln 3}$ ③ $\frac{2}{9\ln 3}$ ④ $\frac{5}{18\ln 3}$ ⑤ $\frac{1}{3\ln 3}$

$\frac{1}{x\ln 3}$

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2\right)=5$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3na_n}{n^2+4}$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

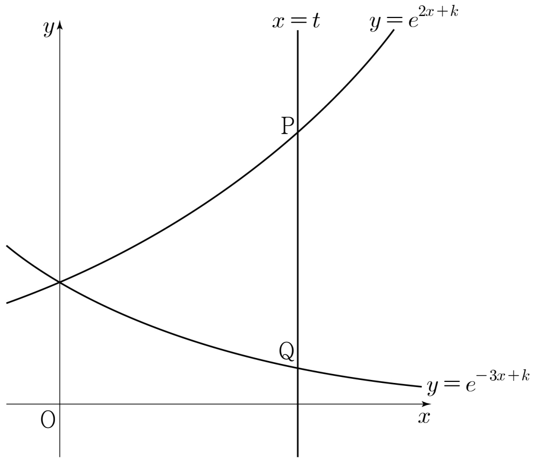
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$

$\dfrac{2n^2+6n^2}{n^2}$

$a_n \fallingdotseq 2n$

26. 좌표평면에서 양의 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=e^{2x+k}$, $y=e^{-3x+k}$과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}=t$를 만족시키는 실수 k의 값을 $f(t)$라 하자. 함수 $f(t)$에 대하여 $\displaystyle\lim_{t\to 0+}e^{f(t)}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$



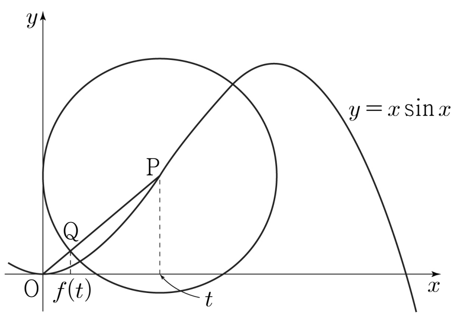
$e^{2t+f(t)} - e^{-3t+f(t)} = t$

$= e^{f(t)}\left(e^{2t}-e^{-3t}\right)$

$\therefore e^{f(t)} = \dfrac{t}{e^{2t}-e^{-3t}}$

$\therefore \dfrac{1}{5}$

27. 그림과 같이 곡선 $y=x\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t\sin t)(0<t<\pi)$를 중심으로 하고 y축에 접하는 원이 선분 OP와 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{f(t)}{t^3}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]



① $\frac{1}{4}$　② $\frac{\sqrt{2}}{4}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ 1

$\overline{OP} = \sqrt{t^2+t^2\sin^2 t} = t\sqrt{1+\sin^2 t}$

$\therefore \overline{OQ} = t\left(\sqrt{1+\sin^2 t} - 1\right)$

$\therefore f(t) = t - \overline{PQ} \times \frac{t}{\overline{OP}}$

$= t - \frac{t^2}{t\sqrt{1+\sin^2 t}}$

$= t\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}}\right)$

$= \frac{t\left(\sqrt{1+\sin^2 t} - 1\right)}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$

$= \frac{t\cdot s^2}{\sqrt{1+s^2}\cdot\left(\sqrt{1+s^2}+1\right)}$

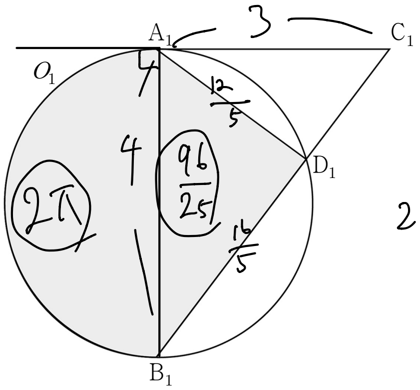
$\therefore \frac{1}{2}$

28. 그림과 같이 길이가 4인 선분 $\mathrm{A_1B_1}$을 지름으로 하는 원 O_1이 있다. 원 O_1의 외부에 $\angle \mathrm{B_1A_1C_1}=\frac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{A_1B_1}}:\overline{\mathrm{A_1C_1}}=4:3$이 되도록 점 $\mathrm{C_1}$을 잡고 두 선분 $\mathrm{A_1C_1}$, $\mathrm{B_1C_1}$을 그린다. 원 O_1과 선분 $\mathrm{B_1C_1}$의 교점 중 $\mathrm{B_1}$이 아닌 점을 $\mathrm{D_1}$이라 하고, 점 $\mathrm{D_1}$을 포함하지 않는 호 $\mathrm{A_1B_1}$과 두 선분 $\mathrm{A_1D_1}$, $\mathrm{B_1D_1}$로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 호 $\mathrm{A_1D_1}$과 두 선분 $\mathrm{A_1C_1}$, $\mathrm{C_1D_1}$에 동시에 접하는 원 O_2를 그리고 선분 $\mathrm{A_1C_1}$과 원 O_2의 교점을 $\mathrm{A_2}$, 점 $\mathrm{A_2}$를 지나고 직선 $\mathrm{A_1B_1}$과 평행한 직선이 원 O_2와 만나는 점 중 $\mathrm{A_2}$가 아닌 점을 $\mathrm{B_2}$라 하자. 그림 R_1에서 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{D_2}$를 잡고, 점 $\mathrm{D_2}$를 포함하지 않는 호 $\mathrm{A_2B_2}$와 두 선분 $\mathrm{A_2D_2}$, $\mathrm{B_2D_2}$로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

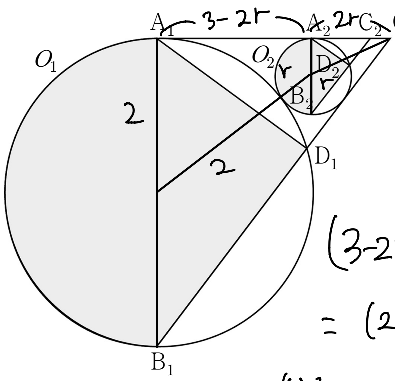
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



25 : 48

R_2



$(3-2r)^2+(2-r)^2$

$=(2+r)^2$

$4r^2-20r+9=0$

⋮　⋮

$\therefore r=\frac{1}{2}$

① $\frac{32}{15}\pi+\frac{256}{125}$　② $\frac{9}{4}\pi+\frac{54}{25}$　③ $\frac{32}{15}\pi+\frac{512}{125}$

④ $\frac{9}{4}\pi+\frac{108}{25}$　⑤ $\frac{8}{3}\pi+\frac{128}{25}$

3×32

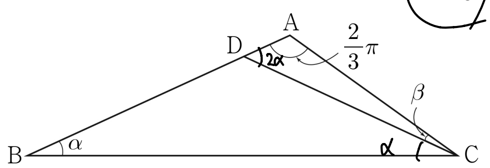
$\therefore \dfrac{2\pi+\frac{96}{25}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{16}{15}\cdot\left(2\pi+\frac{96}{25}\right)$

$= \frac{32\pi}{15} + \frac{512}{125}$

단답형

29. 그림과 같이 $\angle \mathrm{BAC} = \frac{2}{3}\pi$이고 $\overline{\mathrm{AB}} > \overline{\mathrm{AC}}$인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{CD}}$인 선분 AB 위의 점 D에 대하여 $\angle \mathrm{CBD} = \alpha$, $\angle \mathrm{ACD} = \beta$라 하자. $\cos^2\alpha = \frac{7+\sqrt{21}}{14}$일 때, $54\sqrt{3} \times \tan\beta$의 값을 구하시오. [4점]

18



$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$= 2\cos^2\alpha - 1$
$= \frac{\sqrt{21}}{7}$

$\sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

$\cos\beta = \cos\left(\pi - 2\alpha - \frac{2}{3}\pi\right)$
$= -\cos\left(2\alpha + \frac{2}{3}\pi\right)$
$= -\left(\frac{\sqrt{21}}{7} \cdot -\frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= \frac{3\sqrt{21}}{14}$

$\sec\beta = \frac{14}{3\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{9}$

$\tan^2\beta = \sec^2\beta - 1 = \frac{84}{81} - 1 = \frac{1}{27}$

$\tan\beta = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

$\therefore 54\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} = 18$

30. 함수 $f(x)$를

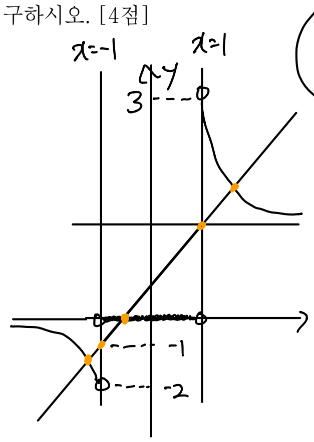
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{ax^{2n} + bx^{2n-1} + x}{x^{2n} + 2} \quad (a,\ b\text{는 양의 상수})$$

라 하자. 자연수 m에 대하여 방정식 $f(x) = 2(x-1) + m$의 실근의 개수를 c_m이라 할 때, $c_k = 5$인 자연수 k가 존재한다. $k + \sum_{m=1}^{\infty}(c_m - 1)$의 값을 구하시오. [4점]

3

13

$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ \frac{a+b+1}{3} & x = 1 \\ \frac{a-b-1}{3} & x = -1 \\ a + \frac{b}{x} & |x| > 1 \end{cases}$



$a=3$

$\therefore \frac{a+b+1}{3} - \frac{a-b-1}{3} = 4$

$\frac{2b}{3} + \frac{2}{3} = 4,\ b = 5$

$\frac{a+6}{3} < a+5,\ \frac{a-6}{3} > a-5$

$-\frac{9}{2} < a < \frac{9}{2},\ a = 3$

$C_1 = C_2 = 2$
$C_3 = 5$
$C_4 = C_5 = \cdots = C_7 = 2$
$C_8 = \sim = 1$

※ 확인 사항

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않을 때, $(2\vec{a}-m\vec{b})-(n\vec{a}-4\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$를 만족시키는 두 상수 m, n의 합 $m+n$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$n=1$ $m=5$

24. 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$ 위의 점 $(4, 7)$에서의 접선의 x절편은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

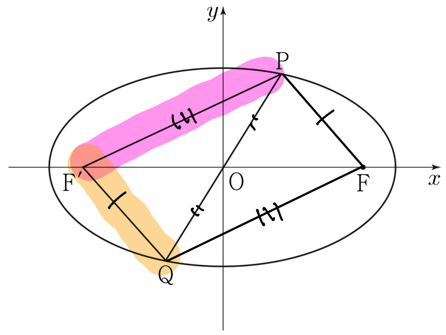
$\frac{4x}{2} - \frac{7y}{7} = 1$

$2x-y=1$ $y=2x-1$

$=2(x-\frac{1}{2})$

25. 좌표평면 위에 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$이 있다. 타원 위의 두 점 P, Q에 대하여 직선 PQ가 원점 O를 지나고 삼각형 PF′Q의 둘레의 길이가 20일 때, 선분 OP의 길이는? (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) [3점]

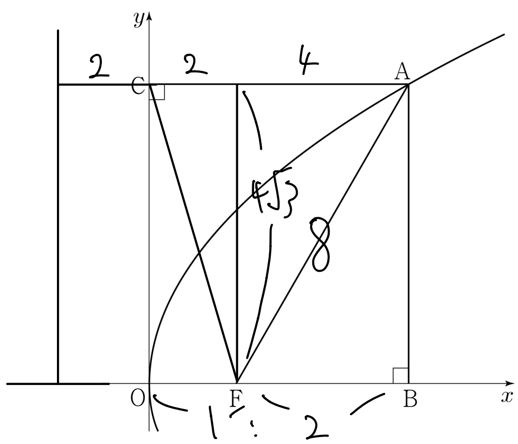
① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5



+ = 12

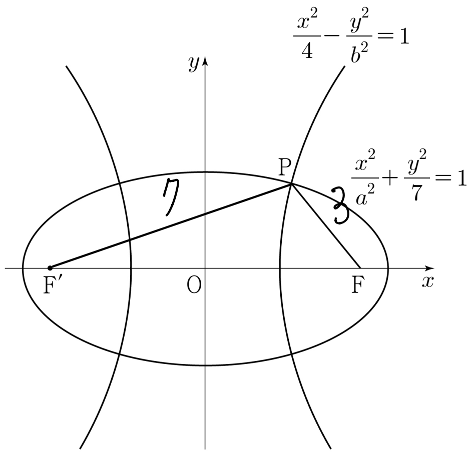
$\overline{OP} = 4$

26. 그림과 같이 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 F$(p, 0)(p>0)$인 포물선이 있다. 포물선 위의 점 A에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하자. $\overline{FA}=8$이고 사각형 OFAC의 넓이와 삼각형 FBA의 넓이의 비가 $2:1$일 때, 삼각형 ACF의 넓이는? (단, 점 A는 제1사분면 위의 점이고, 점 A의 x좌표는 p보다 크다.) [3점]



① $\frac{27}{2}$ ② $9\sqrt{3}$ ③ 18 ④ $12\sqrt{3}$ ⑤ 24

27. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)\,(c>0)$을 초점으로 하는 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{7}=1$과 두 점 F, F′을 초점으로 하는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=3$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

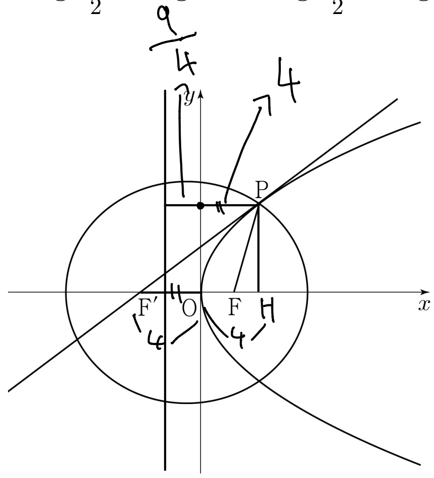


① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

$2a=10,\ a^2=25$
$c^2=25-7=18$
$b^2=18-4=14$
39

28. 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{F}\left(\dfrac{9}{4},0\right)$, $\mathrm{F}'(-c,0)\,(c>0)$을 초점으로 하는 타원과 포물선 $y^2=9x$가 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{25}{4}$이고 포물선 $y^2=9x$ 위의 점 P에서의 접선이 점 F′을 지날 때, 타원의 단축의 길이는? [4점]

① 13 ② $\dfrac{27}{2}$ ③ 14 ④ $\dfrac{29}{2}$ ⑤ 15



$\overline{\mathrm{OF'}}=4$
$\overline{\mathrm{OF}}=\dfrac{9}{4}$

$\overline{\mathrm{FH}}=\dfrac{9}{4}$, $\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{25}{4}$

$\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{1}{4}\sqrt{25^2-9^2}$
$=\sqrt{34}$

$\therefore \overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{34+64}=10$

장축: $10+\dfrac{25}{4}=\dfrac{65}{4}$, $\overline{\mathrm{FF'}}=\dfrac{25}{4}$

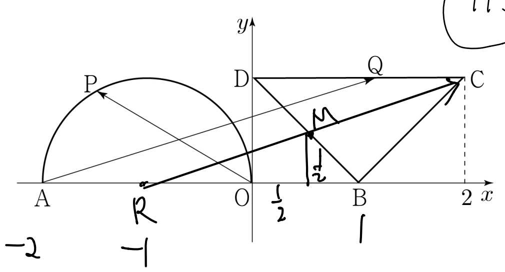
$b^2=\left(\dfrac{65}{8}\right)^2-\left(\dfrac{25}{8}\right)^2=\dfrac{(65+25)(65-25)}{64}$
$=\dfrac{90\times 40}{64}=\dfrac{3600}{64}$

$2b=2\cdot\dfrac{60}{8}=15$

단답형

29. 좌표평면 위에 네 점 A$(-2, 0)$, B$(1, 0)$, C$(2, 1)$, D$(0, 1)$이 있다. 반원의 호 $(x+1)^2+y^2=1\,(0 \le y \le 1)$ 위를 움직이는 점 P와 삼각형 BCD 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{AQ}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M^2+m^2=p+2\sqrt{q}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 유리수이다.) [4점]

115



$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{AQ}|$

$= |\cancel{\overrightarrow{OR}}+\overrightarrow{RP}+\cancel{\overrightarrow{AR}}+\overrightarrow{RQ}|$

$= |\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{RQ}| \le |\overrightarrow{RP}|+|\overrightarrow{RQ}|$

최대 : Q = C

$|\overrightarrow{RC}|=\sqrt{10}$, $|\overrightarrow{RP}|=1$

$\sqrt{10}+1$

최소 : P = A , Q = M (선분BD 중점)

$|\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{RD}| = |(-1,0)+(\frac{1}{2},\frac{1}{2})|$

$= \sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}}$

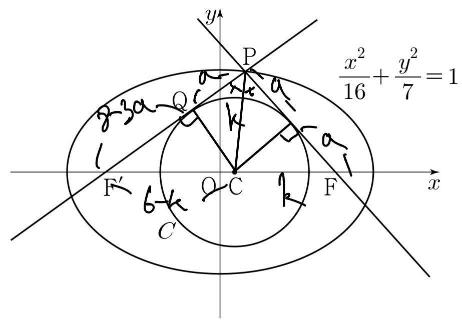
$\therefore M^2+m^2 = 11+2\sqrt{10}+\frac{1}{2}$

$= \frac{23}{2}+2\sqrt{10}$

$p\times q = 115$

30. 그림과 같이 두 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)\,(c>0)$인 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ 위의 점 P에 대하여 직선 FP와 직선 F$'$P에 동시에 접하고 중심이 선분 F$'$F 위에 있는 원 C가 있다. 원 C의 중심을 C, 직선 F$'$P가 원 C와 만나는 점을 Q라 할 때, $2\overline{PQ}=\overline{PF}$이다. $24\times\overline{CP}$의 값을 구하시오. (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]

63



$\overline{CP}=k=\overline{FC}$

$\overline{F'C}=6-k$

$8-2a : 2a = (6-k) : k$

$\Rightarrow k=\frac{3}{2}a$

$k^2-a^2=(6-k)^2-(8-3a)^2$

$\frac{5}{4}a^2 = (6-\frac{3}{2}a)^2-(8-3a)^2$

$= -\frac{27}{4}a^2+30a-28$

$\therefore 8a^2-30a+28$

$= 4a^2-15a+14 = (4a-7)(a-2) = 0$

$a<2$이므로 $a=\frac{7}{4}$, $k=\frac{21}{8}$ $24\times\overline{CP}=63$

※ **확인 사항**

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.