$f(x) = -\dfrac{kx^3}{x^2+1}$ $(k>1)$

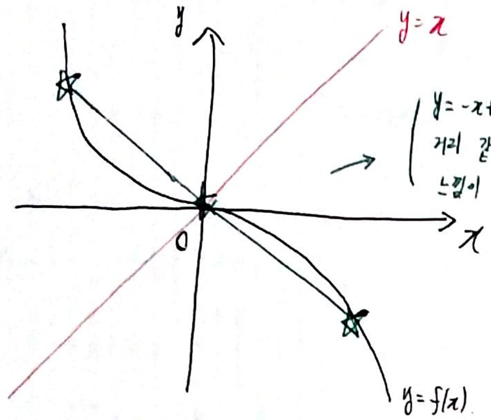
$f(x) = f^{-1}(x) \rightarrow x = \alpha \sim \beta.$

(2018 1021-가 교육청)

$g\left(f(x-2\beta)+2\alpha\right) = x.$

Sol. $k>1$ 이므로 $f(x)$를 그려보면 대략

$$f'(x) = -k \cdot \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} \le 0$$



($y=-x+C$ 의 직선들 그려 거리 같은 두 점 찾는 느낌이 감소함수의 역함수)

(+) ($f(x)+f(-x) = 0$, $x=0$ 중심 원점 점대칭)

→ $f(x)$가 감소함수이므로 $f(x)=x$ ($f(x)$가 증가함수일 때 원함수와 역함수의 교점 찾는 방식) 뿐만 아니라

$f(a)=b$, $f(b)=a$ 꼴, 즉 $f(x)=-x+C$ 꼴도 추론해야 한다.

($f(x)$가 감소함수일 때 $f(x)=f^{-1}(x)$의 교점을 표현하는 방식)

정리하면	
$f'(x)\ge 0$일 경우 교점 ($f(x)=x$의 근)	$f'(x)\le 0$일 경우 교점. ($f(x)=x$의 근) or ($f(x)=-x+C$의 두 점 교차)

이 문제의 경우 특수하게도 원점 점대칭 감소함수이므로

$f(x)=\pm x$ 에서만 교점이 나온다.

$f(x)=\pm x.$

$-\dfrac{kx^3}{x^2+1} = +x \iff -\dfrac{kx^3}{x^2+1} = -x.$

↓ ↓

$x\left(1+\dfrac{kx^2}{x^2+1}\right)=0$ $\qquad$ $x\left(\dfrac{kx^2}{x^2+1}-1\right)=0.$

$x\left((k+1)x^2+1\right)=0$ $\qquad$ $x\left((k-1)x^2-1\right)=0$

↓ ↓

$\therefore x=0$ $\qquad$ $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{k-1}}.$ $(k>1).$

$\alpha = -\sqrt{\dfrac{1}{k-1}}$

$\beta = \sqrt{\dfrac{1}{k-1}}$ $\quad(-\alpha=\beta)$

$f(-\beta)=\beta,\ f(\beta)=-\beta.$

$\left(g\left(f(x-2\beta)+2\alpha\right) = g\left(f(x-2\beta)-2\beta\right) = x\right).$

$f'(x-2\beta)\cdot g'\left(f(x-2\beta)+2\alpha\right) = 1.$

$g'\left(f(x-2\beta)-2\beta\right) = \dfrac{1}{f'(x-2\beta)}$ --- Ⓐ

$f'(\beta) = 2g'(\alpha) = 2g'(-\beta)$ 이므로.

Ⓐ에 $x=\beta$ 대입 시

$g'(-\beta) = \dfrac{1}{f'(-\beta)} = g'(\alpha).$

$\boxed{f(x)\text{는 원점대칭이므로 } f'(\beta)=f'(-\beta)}$

$g'(\alpha) = \dfrac{1}{f'(-\beta)} = \dfrac{1}{f'(\beta)} = \dfrac{f'(\beta)}{2}.$

$f'(\beta) = -\sqrt{2} = f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{k-1}}\right)$ --- ($f(x)$는 감소함수)

$f'(x)$에 $x=\dfrac{1}{\sqrt{k-1}}$ 대입. $f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{k-1}}\right) = \dfrac{2-3k}{k} = -\sqrt{2}.$

$(3-\sqrt{2})k = 2,\quad k = \dfrac{6+2\sqrt{2}}{7}.$

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\frac{5}{2}x & (1 \le x) \end{cases}$$

(20190629-4 평가원)

$f(x)=f^{-1}(x)$의 근 3개. $(-1, 1, 2)$. $2a+4b-10c=?$

sol. ☆ (f = 증가 ↓ $f(x)=x$) ⟷ (f = 감소 ↓ $f(x)=x$ OR $f(x)=-x+C$)

if. f=증가.

$f(-1)=-1$, $f(1)=1$, $f(2)=2$.

$-a+b=-1$

$a+b=c+\frac{5}{2}=1$.

$a=1$, $b=0$, $c=-\frac{3}{2}$.

$4c+5=-1\neq 2$. (모순)

↓

$\therefore f$ = 감소.

→ 역함수의 정의에 의해, $f(x)=-x+C$의 두 근을

d와 e라고 하면

$f(x)=x$의 근 중 적어도 하나는 구간 (d, e)에 존재.

(부가) if $f(x)=x$의 근이 (d, e)에 없다면

d와 e는 $y=x$을 기준으로 한 쪽면에

존재하는 것이므로 모순이다.)

즉 $f(x)=-x+C$의 두 근(최소 두 근)이 존재한다면

그 두 근 사이 구간에 하나의 근은 spare로 남기자.

이 문제에선 $f(-1)=2 \longleftrightarrow f(2)=-1$인 두 근

사이, 즉 $(-1, 2)$ 구간 사이의 $x=1$에서

$f(x)=x$의 근이 나옴이 추론 가능하다.

이후는 N.G.D.

$f(-1)=2$ $f(2)=-1$ $f(1)=1$

$-a+b=2$

$4c+5=-1$

$a+b=c+\frac{5}{2}=1$.

$c=-\frac{3}{2}$

$b=\frac{3}{2}$

$a=-\frac{1}{2}$

$\therefore 2a+4b-10c=20$

Ans. 20.

$f(x)$: 최고차 양수의 삼차함수.

$(f\circ f)(x) = x$.

(20190930 - 나 평가원)

모든 실근은 $0, 1, a, 2, b$.

(?) $\boxed{f'(1)<0,\ f'(2)<0}$, $f'(0) - f'(1) = 6$.

$f(5) = ?$ $(1<a<2<b)$

Sol. $(f\circ f)(x) = x$.

↓

let. $f(x) = g(x)$ 의 방정식. (다만 올바른 역함수로 정의 불가.)

$f(g(x)) = x$ 인 $g(x)$의 설정.

다만 $f(x)$의 기울기의 부호가 아직 미정이므로

$f'(x)$의 기울기 변화가 부호 변화로 이어질 경우

$f'(x) \geq 0 \rightarrow f(x) = x$ 탐색.

$f'(x) \leq 0 <$ $f(x) = x$ 또는 $f(x) = -x + C$ 탐색.

위와 같은 경우로 나누어 풀 수 있다.

Case1. $f(x)$는 증가함수.

$f(x) = g(x)$. ($g(x)$는 온전한 $f(x)$의 역함수).

→ $f(x) = x$ 근 탐색 시 5개가 나올 수 없다.

⇓

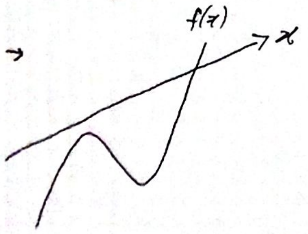
Case2. $f(x)$는 극값을 가지는 함수.

Case1이 불가하므로 $f'(x)$의 부호 변화도 불가피하다.

위의 서술대로 나눠 푸는 것이 옳다.

이때 $f(x) = x$의 근의 개수가 1~3개 중 어느 것인지를 먼저 보면

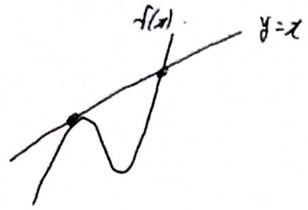
1개 →



불가.

(앞 페이지의 논리 근거)

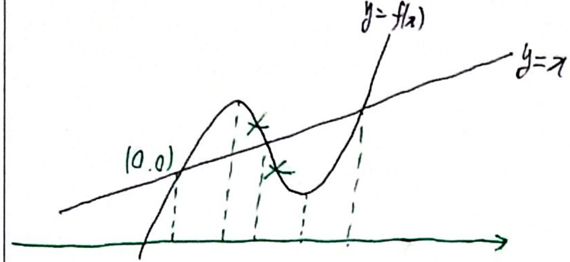
2개 →



(마찬가지.)

→ $f(x) = x$의 근은 3개다.

간단히 그려보면



앞 문단에서 서술한 근거를 토대로

$f(x) = -x + C$ 의 두 근은

$f'(x) \leq 0$ 구간에 존재.

$(f\circ f)(x) = x$의 근은 $0<1<a<2<b$ 순이므로

① $f(x) = x$ 의 근은, $0, a, b$.

② $f(x) = -x + C$의 근은, $1, 2$.

($f(1) = 2$, $f(2) = 1$ 이라는 표현)

$f(x)$의 식을 구하기 위해 (변수 4개)

식 4개가 필요한데

$f(0) = 0$

$f(1) = 2$

$f(2) = 1$

$f'(0) - f'(1) = 6$.

→ $f(x)$를 구할 수 있다!!

N.G.D → $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{11}{2}x$.

⊕ 추가 설명.(?)

Q. $f'(1)<0$, $f'(2)<0$ 이 두 조건 사용은?

A. 과조건이나 마찬가지라 굳이 Case1으로만 오고 사용은 하지 않았다. 실전에서는 눈짐만 잘하면 Case1 분류가 필요 없었을 것이나, 없어도 푸는 데 지장이 없다.