2014년 수능 대비

MediVa

수학 시험의 기술

<6월 모의고사 수학B형 분석>

수능의 성공적 준비를 위한 모의고사의 수능적 해법, 그리고 깔끔하면서 친절한 문항분석

할 것은 많고 한 것이 없다면, 시험에 나오는 것만 공부하자!

서문

2010년 수능을 치고 2011년 모의고사부터 해설을 해마다 썼던 것 같습니다. 6월, 9월 모의고사 중 한 번은 꼭 썼던 것 같네요. 이번이 2014년 수능 대비 모의고사니 벌써 4년째 되어 가는 것 같습니다.

이번 해설은 더 특별한 것 같습니다. 제 이름으로 된 책이 나오기까지 노력하면서 계발해온 능력도 있고, 학과 생활 중에서도 비슷한 류의 작업들을 이것저것 하면서 생긴 내공도 있어서 해설이라고 하긴 조금 화려하게 만들어 버린 것 같습니다.

내용은 6월 모의고사 수학 B형 해설이지만 그냥 해설이라고 생각하기보다는 수능까지 공부를 어떻게 할 것인지에 대한 가이드로 생각해 주셨으면 좋을 것 같네요. 모든 문제를 직접 풀면서 수험생의 입장이라면, 내가 수능을 보는 입장이라면 어떻게 풀었을까 생각하면서 최대한 “자연스러운” 풀이과정을 유도할 수 있도록 자세하게 설명했습니다. 이미 해설들을 보셔서 문제를 푸는 방법들은 다 아시겠지만, 그래도 다시 한 번 보시면서 이 시험에서 내가 얻은 것은 무엇이며, 이 시험을 토대로 수능까지 어떻게 공부할 것인지를 생각해 보시기 바랍니다. 6월 모의고사 30문제는 답을 알고 나면 아무것도 아니지만, 그 답이 어떻게 하면 나올 수 있을 것인지 계속 고민하다 보면 수능에 대한 해법이 보일 것이니까요.

사실 해설을 쓰는 것은 매우 고된 일입니다. 일단 수능 친 지 꽤 오랜 시간이 흘렀고 전공에서는 수학과 관련한 것을 거의 다루지 않으니까요. 그래도 즐겁게 이 작업을 하는 것은, 문제를 논리적으로 풀어 가는 과정 하나하나가 질병을 분석하는 방법과 많이 닮아 있고, 또 알고 있는 전문 지식을 알기 쉽게 설명하는 것 역시 의학을 전공하는 사람이 해야 할 임무 중 하나이므로 부전공(?)과 비슷한 생각으로 〈수능 수학 분석〉을 하게 되는 것 같습니다.

이미 지난 시험이고 한숨이 절로 나오는 분들도 많으실 것입니다. 하지만 긍정적으로 생각하시기 바랍니다. 오늘 틀린 문제를 수능 때만 틀리지 않으면 되는 것이니까요. 그 반대가 된다면 얼마나 참담하겠습니까. 힘든 시기이지만 잘 견뎌 내시기를 바라고, 제가 만든 이 모의고사 분석지가 여러분의 입시 성공에 조금이나마 도움이 되기를 기원합니다.

MediVa,
서울대 의학과 2학년
허기영

문의는 zealot648@naver.com으로 해 주시기 바랍니다.
개인 사정으로 제 때 답변을 드리기 힘들 수도 있으니 그 점은 양해를 구합니다. ^^

6월 모의고사 이후, 몇 가지 생각해볼 점

1. 거시적 관점

— 나의 수학 공부는 제대로 된 방향에서 이루어지고 있는가?

6월 모의고사는 2가지 의미를 지니고 있습니다. 평가원의 입장에서는 6월 모의고사는 수능의 난이도를 결정하기 위한 지표이고, 학생에게는 자신의 학습 상황을 평가하는 시금석입니다. 지금까지 많은 공부를 해 오셨을 것입니다. 하지만 그게 보여주기 위한 공부였는지 — 남들뿐만 아니라 자기 자신에게 보여주기 위한 것 — 다시 한 번 생각해 보시기 바랍니다. 공부를 많이 하는 모습에 취해 정작 성적을 올리기 위한 중요한 것을 등한시하지는 않았는지, 남들이 열심히 하는 것을 따라하지는 않았는지, 또는 공부의 절대량이 부족하였는지 등을 다시 한 번 평가해 보시기 바랍니다. 이제부터 수능까지는 철저하게 약점 공략을 위한 공부가 필요할 때입니다. 수능까지 어떤 부분을 어떤 정도의 밀도로 얼마나 공부할 것인지 냉정하게 판단하시고 계획을 짜 보시기 바랍니다.

2. 미시적 관점

— 내가 지금 시험을 치는 태도는 수능 때도 문제가 없는가?

의외로 중요한 질문입니다. 내용 하나를 모르면 그 문제만 틀리지만 시험을 칠 때 잘못된 태도를 가지면 그 시험 전체를 망치게 됩니다. 어려운 문제 하나 때문에 시간이 부족한 적은 없는지, 자꾸 불필요한 실수를 하는지 생각해 보시기 바랍니다. 완벽주의에 빠져 오기를 부리다 수능 때 처참한 결과를 받는 경우는 꽤 많았습니다. 때로는 타협이 필요하고, 때로는 운에 문제를 맡겨야 될 때도 존재합니다. 만약 그럴 때가 온다면 어떻게 대처할 것인지 미리 프로토콜을 짜고, 시험을 푸는 전반적인 스키마를 정리해서 수능 전까지 치는 모의고사에서 평가 분석 해 보시기 바랍니다. 수능을 안정적으로 보기 위해서 모든 위협 요소들을 고려해 보시기 바랍니다.

— 내가 문제를 푸는 방식은 지속 가능한가?

이번에 B형 30번 문제가 화두가 되었는데, 그것은 시험을 치를 때의 태도에 대한 논의라고 할 수 있겠습니다. 수능 때 여러분이 맞닥뜨릴 30번 문제 또한 새롭고 당황스러울 문제일 것입니다. 과연 그 문제를 접할 때, 내가 지금까지 연습해 온 것으로 무난하게 처리할 수 있을 것인가 생각해 보시기 바랍니다. 만약 회의적이라면, 어떤 부분에 문제가 있고 그것을 어떻게 고칠지 부지런히 노력하십시오. 그 고민 하나 하나는 수능 때 커다란 힘이 될 것입니다.

이번 기회에 내가 어느 단원에 약한지 살펴보는 고민뿐만 아니라, 1년 레이스라는 관점에서 어떤 상황인지에 대한 자기성찰을 꼭 해 보시기 바랍니다. 이제 반쯤 왔습니다. 나머지 반 역시 지금만큼, 아니 지금보다 더 중요할 것입니다. 성공적인 하반기를 위한 고민, 결코 헛된 고민이 아닐 것이라 생각합니다.

6월 모의고사 문항 분석

1. $4^{\frac{3}{2}}\times 27^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

계산 지수법칙

$4^{\frac{3}{2}}\times 27^{\frac{1}{3}}=(2^2)^{\frac{3}{2}}\times(3^3)^{\frac{1}{3}}=2^3\times 3^1=24$

➪ 정답: ⑤

Advice
수능에 해마다 나오는 간단한 계산 문제다. 절대 실수하지 않도록 평소에 연습을 해 두자.

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $AX=B$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 4

계산 행렬의 계산

$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}(4E)=\begin{pmatrix}4&-4\\-8&12\end{pmatrix}$

모든 성분의 합은 4이다.

➪ 정답: ④

Advice
역시나 수능에 해마다 나오는 문제로, 최근에는 아주 간단한 계산만 나오는 추세이다.

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{5\times 7^{n+1}+3}{7^n}$의 값은? [2점]

① 15　② 20　③ 25　④ 30　⑤ 35

계산 수열의 극한 계산

(준식) = $\lim_{n\to\infty}\frac{35\times 7^n+3}{7^n}=35$

➪ 정답 : ⑤

Advice
수열의 극한 역시 간단한 문제로서 종종 나온다. 크게 어려울 것은 없지만 연습을 해 두어서 빠르고 정확하게 계산할 수 있도록 해야 한다.

4. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_1+a_2=12,\ \frac{a_3+a_7}{a_1+a_5}=4$$

를 만족시킬 때, a_4의 값은? [3점]

① 24　② 28　③ 32　④ 36　⑤ 40

추론 등비수열

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$\frac{r^2(a_1+a_5)}{(a_1+a_5)}=r^2=4\quad\therefore r=2$

$a_1+a_2=a_1+2a_1=3a_1=12\quad\therefore a_1=4$

$a_4=a_1r^3=4\bullet 2^3=32$

➪ 정답: ③

Advice
등비수열은 수능 수열 문제를 푸는 데 기본이 되는 수열이다. 등비수열 문제에서는 식의 형태를 잘 보면 문제에서 요구하는 것을 빨리 구할 수 있다. a_3+a_7과 a_1+a_5는 모두 항이 4 차이가 나는 것을 합한 식이므로, 이들의 비는 곧 공비가 된다는 것을 파악하면 r을 빠르게 구할 수 있다.

5. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 2가 적혀 있는 카드는 4가 적혀 있는 카드보다 왼쪽에 나열하고 홀수가 적혀 있는 카드는 작은 수부터 크기 순서로 왼쪽부터 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 56 ② 60 ③ 64 ④ 68 ⑤ 72

계산 **경우의 수**

경우의 수 문제는 수능 수학에서 가장 까다로운 내용 중 하나이다. 그러나 B형의 특성상 경우의 수 문제가 고난도 문제로 나올 확률은 높지 않고, 최근 수능 추세 역시 경우의 수는 기본적인 내용 위주로 나오고 있으므로 너무 긴장할 필요는 없다.

경우의 수 문제는 기출문제를 많이 풀어 보면서 문제를 파악하고 어떻게 풀어 갈지를 빠르게 파악하는 훈련을 할 필요가 있다. 지금까지 나온 기출문제만 해도 엄청난 수가 있기 때문에, 꼭 하나하나 풀어보면서 감을 기르도록 하자.

Solution

경우의 수 문제는 문제를 어떻게 접근하느냐에 따라서 풀이가 복잡해질 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다.
먼저 일단 문제를 간단한 그림으로 그려 놓고 시작하면 좀 더 빠르게 풀 수 있다.

[문제] 카드 6장 배열 : ___ ___ ___ ___ ___ ___
[조건] ① [2], [4] 순서 ② [1], [3], [5] 순서 ➪ 순서가 정해진 배열

경우의 수 문제를 풀 때, **〈순서가 정해진 것은 모두 같은 문자로 두고, 같은 것이 있는 순열〉**을 쓴다는 것을 배웠으므로 이를 이용해 보도록 하자.

같은 것이 있는 순열
① [2], [4] → A, A로 치환
② [1], [3], [5] → B, B, B로 치환
➪ A, A, B, B, B, 6을 배열하는 경우의 수를 묻는 문제

이렇게 치환하고 같은 것이 있는 순열의 공식을 쓰면

(경우의 수) = $\frac{6!}{2!3!} = 60$

➪ 정답 : ②

Tip

경우의 수는 여러 가지 풀이법이 존재할 수 있고 어떤 것을 사용해야 하는지에 대한 제약은 없다. 그러나 경우의 수는 ① 빠르고 ② 정확하게 푸는 것이 중요하므로, 자기가 가장 자신 있는 풀이법을 익숙하게 연습해 두는 것이 좋다. 경우의 수의 특징은 이론이 많지 않다는 것이다. 기껏해야 쓸 수 있는 것이 순열, 조합, 중복조합 등 몇 가지 밖에 없다. 그러나 실전에서는 이 방법으로 웬만한 문제를 거의 다 풀 수 있기 때문에, 이 방법들을 자유롭게 쓸 수 있도록 연습하는 것이 중요하다. 이번 문제에서 활용한 같은 것이 있는 순열 역시 기본 문제 중에 하나로 자주 볼 수 있는 것들이므로, 잘 숙지해 두는 것이 좋겠다.

6월 모의고사 문항 분석

6. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=1,\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)}=2$$

를 만족시킬 때, $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{2x^2-x-1}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

개념 미분계수의 정의

미분계수의 정의를 이용한 것 중 다소 응용된 형태이다. 가장 간단한 형태로 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$를 이용하여 푸는 것이 있고 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$를 이용하는 것이 있는데, 이번 문제는 후자쪽의 문제라고 할 수 있다.

이 문제와 같은 경우는 기계적으로 풀고 싶다면 로피탈의 정리를 사용해도 된다. 간단한 문제의 경우 로피탈의 정리를 써도 별 문제가 없는 경우가 대부분이므로, 미분계수의 정의로 변형하는 것이 잘 되지 않거나 시간을 절약하고 싶다면 로피탈의 정리로 빠르게 답을 내는 것도 괜찮은 선택이다.

Concept

미정계수의 결정

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$($\alpha$는 상수)일 때

① $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

② $\alpha\neq 0$이고 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$이면 $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=0$

이 내용과 미분계수의 정의를 이용하면 이 문제를 쉽게 풀 수 있다.

Step 1

문제에서 〈다항함수〉라는 조건이 있으면 주의 깊게 봐야 한다. 다항함수는 항상 미분가능하기 때문에 자유자재로 다룰 수 있고, 문제에 따라서 〈차수〉를 결정하여 식을 쉽게 구할 수도 있으므로 문제에 다항함수라는 말이 나오면 꼭 체크하자.

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=1$ ➪ 미정계수의 결정 ②에 의해서 $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$,

미분계수의 정의에 의해서 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{f(x)-f(0)}{x}}=\frac{1}{f'(0)}=1$ ➪ $f'(0)=1$

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)}=2$ ➪ 미정계수의 결정 ②에 의해서 $\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$,

미분계수의 정의에 의해서 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}=\frac{1}{f'(1)}=2$ ➪ $f'(1)=\frac{1}{2}$

〈Rapid Solution〉 로피탈의 정리를 이용 ➪ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'(0)}=1$, 뒤의 식도 마찬가지로

Step 2

앞에서 구해진 것이 있고, 분모가 0으로 간다는 사실을 알았으므로 구해야 되는 식을 인수분해해서 형태를 변형하자.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{(2x+1)(x-1)}$$

여기서 $f(1)=0$이라는 사실을 알고 있으므로 $f(f(1))=f(0)=0$을 이용하면

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{(2x+1)(x-1)}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x+1}\cdot\frac{f(f(x))-f(f(0))}{x-1}\\
&=\frac{1}{3}\cdot[f(f(x))]'_{x=1}\\
&=\frac{1}{3}\cdot f'(f(1))f'(1)\\
&=\frac{1}{3}\cdot f'(0)f'(1)\\
&=\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

➪ 정답 : ①

〈Rapid Solution〉 로피탈의 정리를 이용

$x\to 1$일 때 $f(f(x))\to 0$이므로 로피탈의 정리를 사용할 수 있다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(f(x))f'(x)}{4x-1}=\frac{f'(0)f'(1)}{3}=\frac{1}{6}$$

Tip

로피탈의 정리를 이용하지 않고 푸는 풀이가 교과서적인 풀이인데, 다항함수라는 "무난한" 함수가 나온 경우는 대부분 로피탈의 정리를 써도 별 무리 없이 풀리므로 빠르고 기계적으로 풀려면 로피탈의 정리를 써도 큰 무리는 없다. 단, 로피탈의 정리를 쓸 때 $\frac{0}{0}$ 형태에서 쓴다는 사실은 알아 두고 써야 한다.

로피탈의 정리로 풀린다고 해도 교과서적인 풀이는 알아 두는 것이 좋다. 미분계수로 식을 변형시킬 때는 다음의 과정을 따르다.

미정계수의 결정으로 $f(a)=0$임을 확인 → $f(a)=0$을 이용해서 $f(x)$를 $f(x)-f(a)$로 변형

Step 1의 변형은 자주 봐 왔던 형태라 무난하게 잘 되었겠지만, Step 2는 식이 복잡해져서 잘 안되어서 로피탈을 쓴 경우가 많을 것이다. 그러나 수능 때 Step 1의 풀이를 요구할 가능성은 충분히 높기 때문에 Step 1도 꼭 연습을 해 봐서 혹시나 모를 경우에 당황하지 않도록 하자.

7. 일차변환 f를 나타내는 행렬이 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$이고, 일차변환 g는 두 점 $\mathrm{A}(1, 0)$, $\mathrm{B}(0, 1)$을 각각 두 점 $\mathrm{A}'(1, 2)$, $\mathrm{B}'(1, 3)$으로 옮긴다. 합성변환 $g \circ f$에 의하여 점 $\mathrm{C}(2, 1)$이 점 $\mathrm{C}'(\alpha, \beta)$로 옮겨질 때, $\alpha+\beta$의 값은? [3점]

① 22 ② 23 ③ 24 ④ 25 ⑤ 26

계산 일차변환

일차변환은 최근에 수능 범위로 들어온 내용이라 기출문제가 충분히 쌓이지 않았고, 지금까지의 내용 역시 일차변환의 개념만 정확히 알고 있으면 풀리는 내용 위주로 나오고 있다. 지금까지의 추세라면 수능에서 역시 일차변환 자체로만 고난도 문제가 나올 확률은 높지 않아 보이고, 어렵게 나온다면 다른 내용과 연계해서 나올 확률이 높다고 보인다.

Concept

일차변환

좌표평면 위의 변환 f : $(x, y) \rightarrow (x', y')$에서

$\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (a, b, c, d는 상수)와 같이 x', y'의 상수항이 없는 x, y에 대한 일차식으로 나타내어질 때, 변환 f를 일차변환이라 한다.

이 때, 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$를 일차변환 f를 나타내는 행렬이라 한다.

Solution

일차변환 f를 나타내는 행렬은 이미 있으므로, 일차변환 g를 나타내는 행렬을 구해보도록 하자. 그 행렬을 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라고 하자.

문제에서 〈두 점 $\mathrm{A}(1, 0)$, $\mathrm{B}(0, 1)$을 각각 두 점 $\mathrm{A}'(1, 2)$, $\mathrm{B}'(1, 3)$으로 옮긴다.〉라고 했으므로

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$이고, 이를 합쳐서 ➪ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$으로 쓸 수 있다. ➪ 따라서 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$이다.

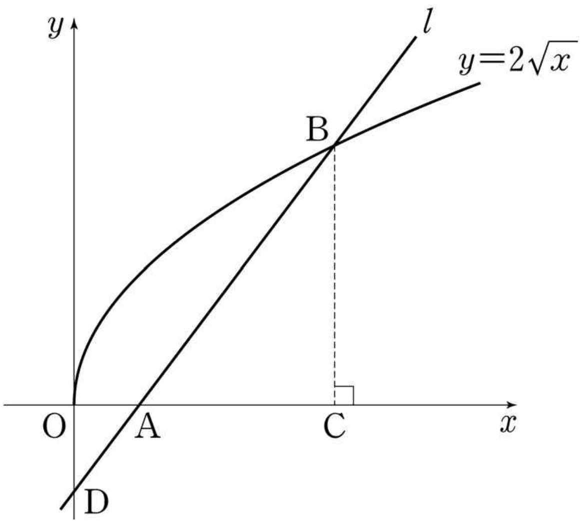
이제 $g \circ f$를 나타내는 행렬을 구하면 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$이고,

점 C를 합성변환에 의해서 옮기면

$\therefore \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix}$ $\quad \therefore \alpha+\beta = 6+16 = 22$

➪ 정답 : ①

[8 ~ 9] 점 A(1, 0)을 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 곡선 $y=2\sqrt{x}$와 만나는 점을 B, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C, 직선 l이 y축과 만나는 점을 D라 하자. 8번과 9번의 두 물음에 답하시오.



8. 점 $B(t, 2\sqrt{t})$에 대하여 삼각형 BAC의 넓이를 $f(t)$라 할 때, $f'(9)$의 값은? [3점]

① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

계산 **신유형** **미분법**

신유형은 문제 자체가 새롭다기보다는 문제를 2개를 엮어서 낸 방식 자체를 말하는 것이다. 8~9번 문제는 새로운 형식으로 나온 문제로, 문제 자체는 크게 어렵지 않은 문제이다. 그렇지만 이번 모의고사에서 2문제를 엮어서 내는 신유형이 등장했다는 것은 수능에서도 이런 유형이 충분히 등장할 수 있다는 것을 의미한다. A, B형 모두 등장하였고 그래프와 함께 나왔기 때문에 수능에서도 그래프와 함께 나올 것이라 생각이 된다.

그래프가 나오면 먼저 문제에 주어진 점들을 그래프에 표시한 뒤, 문제에서 요구하는 것이 무엇인지에 따라서 필요한 값들을 하나하나 구해 가는 과정을 정확하게 할 필요가 있다. 이 문제는 그 과정만 잘 따라가면 딱히 어렵지는 않았다.

9. $\overline{AB}:\overline{AD}=3:1$일 때, 점 B의 x좌표를 a라 하자. x축, 직선 $x=a$, 곡선 $y=2\sqrt{x}$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는? [3점]

① 32π ② 33π ③ 34π ④ 35π ⑤ 36π

계산 **신유형** **부피와 미분**

부피와 미분에서는 일반 부피의 부피와 회전체의 부피 두 가지가 나올 수 있는데, 대부분 회전체가 시험에 나오므로 공식만 정확히 외워두고 있으면 크게 문제가 되지는 않는다. 이 문제 역시 통상적인 회전체 문제에서 크게 벗어나는 점은 없는 문제였다. 빠르고 정확하게 계산만 하면 될 것이다.

[8번]

Solution

삼각형의 넓이 공식대로 계산하면 된다.

$\triangle BAC$의 넓이를 $f(t)$라 하면

$$f(t)=\frac{1}{2}(t-1)\times 2\sqrt{t}=\sqrt{t}(t-1)=t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}$$

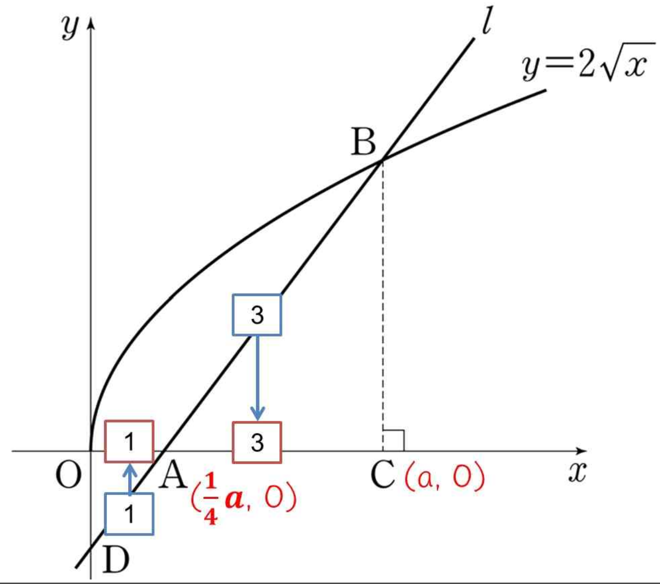
$$\therefore\ f'(t)=\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ f'(9)=\frac{9}{2}-\frac{1}{6}=\frac{26}{6}=\frac{13}{3}$$

➪ 정답 : ⑤

[9번]

Solution

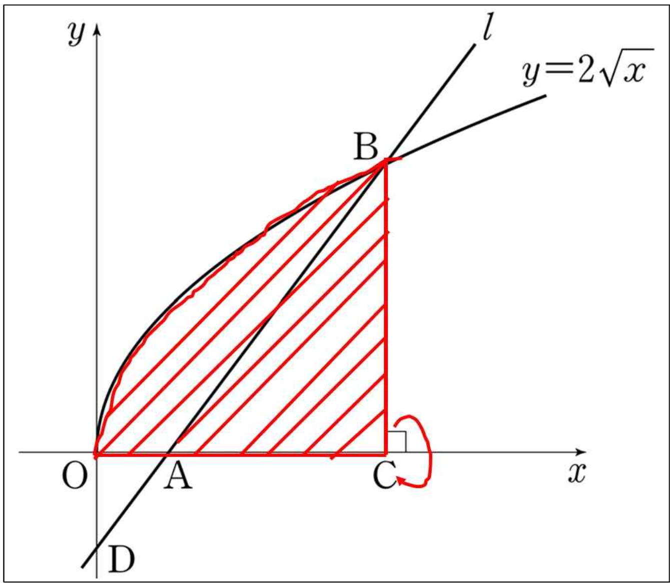


문제의 조건에 $\overline{AB}:\overline{AD}=3:1$이라고 나온 것을 그래프에 표시한다. 대각선의 길이의 비를 x축의 길이의 비로 옮기면 식을 간단하게 세울 수 있다.(파랑 → 빨강)

이를 이용하면 A의 x좌표가 $\frac{1}{4}a$라고 할 수 있다.

이 때 A의 x좌표가 1이라고 문제에 나와 있으므로

$\frac{1}{4}a=1$ ➪ $a=4$



a값을 구했으므로 C의 x좌표가 4라는 것을 알게 되었다. 회전체의 부피 공식을 써서 부피를 구하면

$$\pi\int_0^4 (2\sqrt{x})^2dx=\pi\int_0^4 4x\,dx=\pi\left[2x^2\right]_0^4=32\pi$$

➪ 정답 : ①

10. 고구마피자, 새우피자, 불고기피자 중에서 m개를 주문하는 경우의 수가 36일 때, 고구마피자, 새우피자, 불고기피자를 적어도 하나씩 포함하여 m개를 주문하는 경우의 수는? [3점]

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

계산 **중복조합**

중복조합은 경우의 수 문제를 푸는 주된 스킬 중에 하나인데, 교육과정이 바뀌면서 순열과 조합 파트가 고등학교 1학년 수학으로 내려가면서 중복조합이 수능의 직접적인 범위가 되었다. 따라서 중복조합은 수능에 나올 확률이 상당히 높다고 할 수 있다. 중복조합 문제는 대부분의 경우 기본적인 수준에서 나오지만, 가끔 4점짜리 문제로 까다로운 문제가 나올 수 있으므로 항상 경계를 늦추지 말아야 할 것이다.

Concept

중복조합

서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 선택하는 방법의 수 : ${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$

① 방정식 $x+y+z=n$(n은 자연수)를 만족하는
음이 아닌 정수해의 개수는? ▶ ${}_3\mathrm{H}_n$
양의 정수해의 개수는? ▶ ${}_3\mathrm{H}_{n-3}$(단, $n \geq 3$)

② $(a+b+c)^n$(n은 자연수)를 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수는? ▶ ${}_3\mathrm{H}_n$

Solution

고구마피자를 a개, 새우피자를 b개, 불고기피자를 c개 주문한다고 하자.

$a+b+c=m$(단, a, b, c는 음이 아닌 정수)

$\therefore {}_3H_m = {}_{2+m}C_m = {}_{2+m}C_2$

$$= \frac{(2+m)(1+m)}{2} = 36$$

$(2+m)(1+m) = 72 = 9 \times 8$

$\therefore m = 7$

하나씩 시킨 후 더 시키는 개수의 합은 $m-3(=4)$이므로

${}_3H_{m-3} = {}_3H_4 = {}_6C_2 = 15$

➪ 정답 : ②

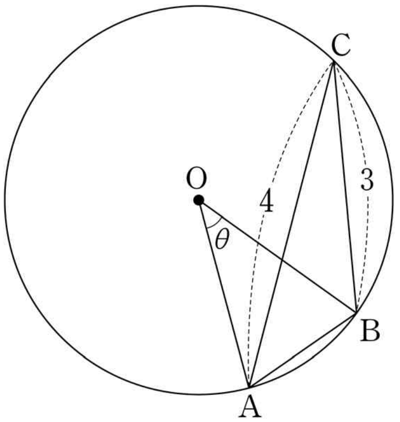
Tip

중복조합은 수능에 직접적으로 출제되는 범위 중에 있으므로 항상 수능에 나올 것을 생각해 두어야 한다. 대부분의 경우 중복조합은 위 Concept에 설명해 둔 유형을 실생활 문제로 풀어서 나오기 때문에, 문제를 보고 중복조합임을 떠올리면 대부분 어렵지 않게 풀 수 있다.

중복조합에서 중요한 것은 문제에 있는 조건을 중복조합 식으로 바꾸는 것이다. 이 문제의 경우 세 종류의 피자를 모두 합쳐 m개를 주문하는 것으로 생각할 수 있고, 이것은 $x+y+z=m$(x, y, z는 음이 아닌 정수)로 써서 중복조합의 기본적인 문제 형태로 바꿀 수가 있으므로 ${}_3H_m$ (3개 중에서 중복을 고려하여 m개를 선택)이라는 식을 쓰고, 그 다음에 공식을 쓰는 순서로 가면 무난하게 풀 수 있다. 식 세우는게 약간 까다로울 수 있으므로 평소에 연습해 두도록 하자.

6월 모의고사 문항 분석

11. 그림과 같이 중심이 O인 원 위에 세 점 A, B, C가 있다. $\overline{AC}=4$, $\overline{BC}=3$이고 삼각형 ABC의 넓이가 2이다. $\angle AOB=\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$) [3점]



① $\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$ ② $\dfrac{5\sqrt{2}}{18}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$
④ $\dfrac{7\sqrt{2}}{18}$ ⑤ $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

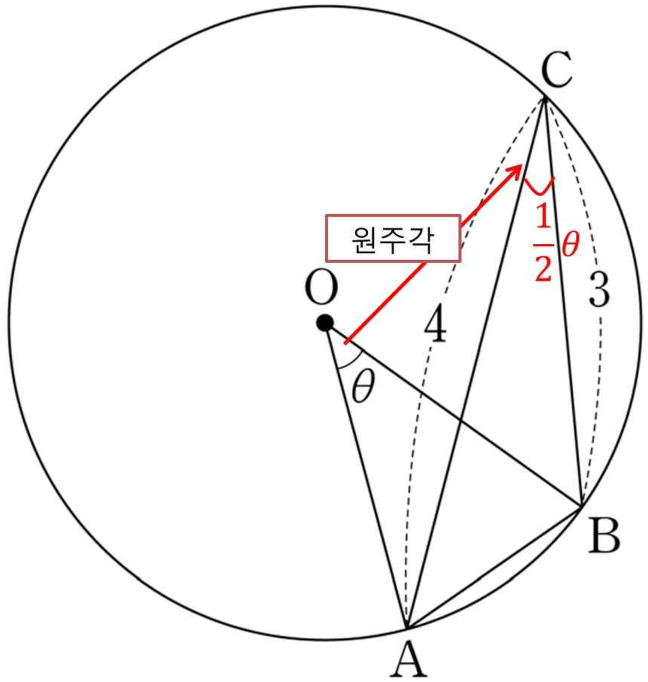
계산 **삼각함수 공식**

문제는 거창해 보이지만 삼각함수를 이용해서 넓이를 구하는 공식과, 원주각의 관계만 알고 있으면 어렵지 않게 풀 수 있는 문제였다.

수능에서 나오는 중학교 도형 내용들은 몇 가지 숙지를 해 두어야 한다. 특히나 원은 삼각함수와 관련해서 자주 나오기 때문에 공식들을 정확히 기억하고 있어야 한다. 뿐만 아니라 고등수학 (하) 과정에 있는 삼각형과 삼각함수 단원의 공식 역시 중요한 공식들이므로 놓치지 않아야 한다.

삼각함수의 덧셈정리의 경우 양이 많지만, 그 중에서 가장 중요한 것이 sin과 cos의 덧셈정리, 배각, 반각 공식이므로 이 공식들은 100% 정확하게 외우고 있는 것이 좋다.

Solution



$\angle AOB$가 중심각이고 $\angle ACB$는 그에 대한 원주각이므로 그 절반인 $\frac{1}{2}\theta$가 $\angle ACB$의 크기가 된다.

삼각형의 두 변과 사잇각을 알고 있으므로

$S=\frac{1}{2}\times4\times3\times\sin\frac{1}{2}\theta=6\sin\frac{1}{2}\theta=2$

➪ $\sin\frac{1}{2}\theta=\frac{1}{3}$

$\sin\frac{1}{2}\theta=\frac{1}{3}$이므로 $\cos\frac{1}{2}\theta=\sqrt{1-\sin^2\frac{1}{2}\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

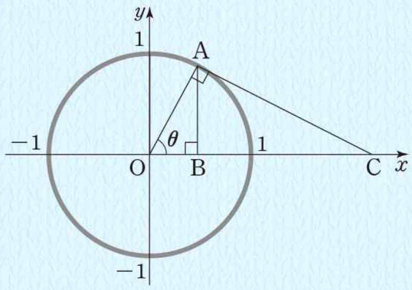
따라서 $\sin\theta=2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

➪ 정답 : ⑤

Concept

다음과 같이 어떤 직각삼각형이 주어지면 각 변의 길이를 삼각비로 표현할 수 있어야 한다.

변의 길이를 삼각비로 표현하기

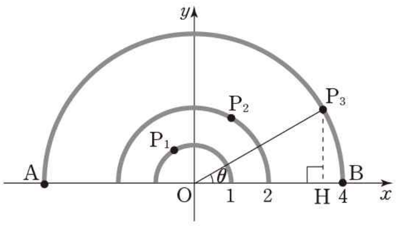


① 직각삼각형 OAB에서

$$\sin\theta=\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{AB}=\sin\theta$$

$$\cos\theta=\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{OB}=\cos\theta$$

② 직각삼각형 OAC에서 $\tan\theta=\frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{AC}=\tan\theta$



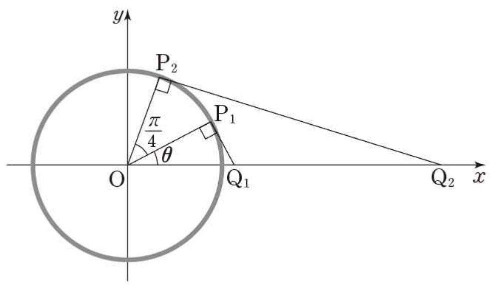
삼각형 ABP_3의 넓이 S_3를 θ로 나타내시오. [평가원 기출]

➡ **삼각형 ABP_3의 밑변 :** $\overline{AB}=8$

➡ **삼각형 ABP_3의 높이 :** $\overline{P_3H}=4\sin\theta$

➡ 삼각형 ABP_3의 넓이 :

$S_3=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{P_3H}=\frac{1}{2}\times8\times4\sin\theta$



원의 반지름의 길이가 1이고 $\angle P_1OQ_1=\theta$라고 할 때, $\triangle P_1OQ_1$, $\triangle P_2OQ_2$의 넓이를 θ로 나타내시오. [수능 기출]

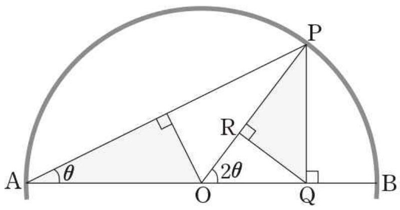
➡ $\overline{OP_1}=\overline{OP_2}=1$

➡ $\overline{P_1Q_1}=\tan\theta$, $\overline{P_2Q_2}=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

➡ 삼각형의 넓이 :

$\triangle P_1OQ_1=\frac{1}{2}\cdot\overline{OP_1}\cdot\overline{P_1Q_1}=\frac{1}{2}\times1\times\tan\theta$

$\triangle P_2OQ_2=\frac{1}{2}\cdot\overline{OP_2}\cdot\overline{P_2Q_2}=\frac{1}{2}\times1\times\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$



$\overline{AB}=2$일 때, $\triangle PRQ$의 넓이를 θ로 나타내시오. [수능 기출]

➡ $\overline{OP}=1$, $\angle POQ=2\theta$ (원주각과 중심각의 관계)

➡ 직각삼각형 OPQ에서 $\overline{OQ}=\cos2\theta$

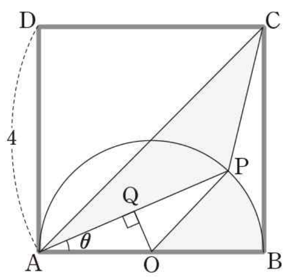
직각삼각형 ORQ에서 $\overline{OR}=\overline{OQ}\times\cos2\theta=\cos^2 2\theta$

➡ $\overline{PR}=\overline{OP}-\overline{OR}=1-\cos^2 2\theta=\sin^2 2\theta$

➡ 직각삼각형 ORQ에서 $\overline{QR}=\overline{OQ}\times\sin2\theta=\cos2\theta\sin2\theta$

➡ 직각삼각형 PRQ의 넓이 :

$\frac{1}{2}\cdot\overline{PR}\cdot\overline{QR}=\frac{1}{2}\times\sin^2 2\theta\times\cos2\theta\sin2\theta$



삼각형 APC의 넓이를 θ로 나타내시오. [평가원 기출]

➡ $\angle CAO=\frac{\pi}{4}$, $\angle CAP=\frac{\pi}{4}-\theta$, $\overline{AC}=4\sqrt{2}$

➡ 삼각형 OAQ에서 $\overline{AP}=2\overline{AQ}=2\times2\cos\theta=4\cos\theta$

➡ 삼각형 APC의 넓이 :

$\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AP}\cdot\sin(\angle CAP)$

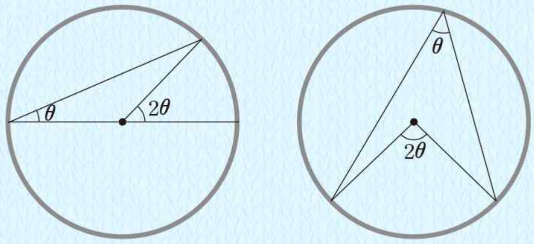
$=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times4\cos\theta\times\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

삼각함수는 주로 원과 연계되어 출제되기 때문에 원에 대한 다양한 지식이 필수적이다.

원주각과 중심각

① 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 반이다. (원주각과 중심각의 관계)

② 원의 둘레 위의 한 점과 지름의 양 끝점을 잇는 직선으로 이루어지는 각은 직각이다.



도형 문제를 풀 때, 보조선을 그으면 필요로 하는 도형을 얻을 수 있으며, 도형의 특성을 파악하는데 매우 도움이 된다. 만약 원이 문제에 나왔다면 다음 보조선 긋기와 원의 성질은 매우 중요하다.

(1) 원의 중심에서 접선의 접점에 수선을 내린다.

(2) 원 밖의 한 점에서 원에 접선을 긋는다.

(3) 원의 중심에서 현의 중점에 수선을 내린다.

이러한 보조선 긋기로 얻는 도형은 직각삼각형이다. 수선과 접선은 직각의 개념을 포함하기 때문에 직각삼각형이 나올 수밖에 없다.

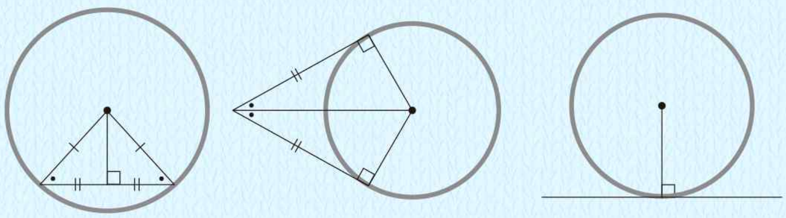
더욱이 직각삼각형은 θ에 대한 $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ 값을 얻는 도구로 매우 유용하기 때문에 수선과 접선을 적절히 그어 직각삼각형을 발견하는 것이 무엇보다 중요하다.

원의 중심과 현, 접선

① 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 (수직)이등분한다.

② 원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같다.

③ 원의 접선은 접점을 지나는 반지름과 수직이다. 즉, 반지름과 접선은 항상 $90°$로 만난다.



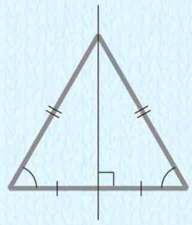
사실 직각삼각형은 수학 문제 풀이에서 매우 중요한 위치를 차지하고 있다. 뒤에서 다룰 이차곡선, 공간도형과 공간좌표에서 직각삼각형이 문제를 해결하는데 꼭 필요한 도구라는 것을 실감할 것이다. 수학 문제를 잘 풀고 싶다면 눈을 크게 뜨고 직각삼각형을 찾아라! 만약 없다면 만들어내라!

문제에서 이등변삼각형이나 정삼각형을 만나면 꼭짓점에서 그 대변에 수선, 즉 수직이등분선을 그어 직각삼각형을 만들기 바란다.

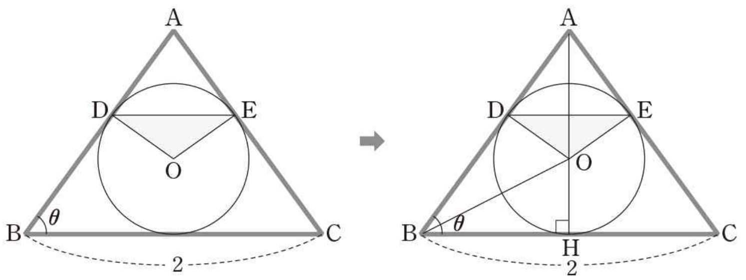
이등변삼각형

① 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다.

② 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선(수선)은 밑변을 수직이등분한다.



이 내용을 바탕으로 기출문제를 풀어 보자.



$\angle ABC = \angle ACB = \theta$이고 $\overline{BC} = 2$일 때, 삼각형 OED의 넓이를 θ로 나타내시오. [수능 기출]

삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 원의 중심 O를 지나고 $\overline{BC}$에 수직이등분선을 내리자. 그리고 중심 O를 지나는 $\angle B$의 이등분선을 그리자.

➡ $\overline{BO}$는 각 θ를 이등분한다.

➡ 직각삼각형 BOH에서

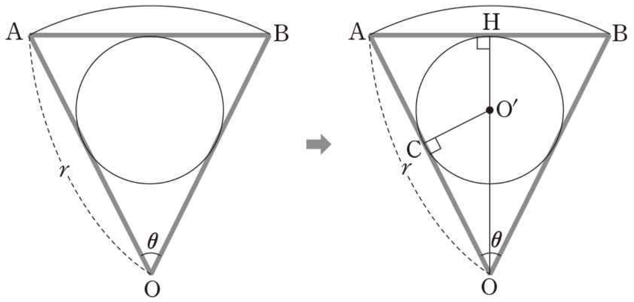
$\overline{BH} = 1,\ \overline{OH} = \tan\dfrac{\theta}{2}$

➡ $\overline{OH} = \overline{OE} = \overline{OD} = \tan\dfrac{\theta}{2}$

➡ $\angle A = \pi - 2\theta,\ \angle DOE = \pi - (\pi - 2\theta) = 2\theta$

➡ 삼각형 OED의 넓이 :

$\dfrac{1}{2} \times \overline{OE}^2 \times \sin 2\theta = \dfrac{1}{2}\tan^2\dfrac{\theta}{2}\sin 2\theta$



$\overline{OA} = r$일 때, 내접원의 반지름의 길이를 θ로 나타내시오. [평가원 기출]

삼각형 OAB의 꼭짓점 O에서 원의 중심 O′을 지나고 $\overline{AB}$에 수직이등분선을 내리자. 그리고 중심 O′에서 $\overline{AO}$에 수선을 내리자.

➡ 직각삼각형 AOH에서 $\overline{OH} = r\cos\dfrac{\theta}{2}$

➡ 직각삼각형 OCO′에서 $\overline{OO'} = \dfrac{\overline{CO'}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$

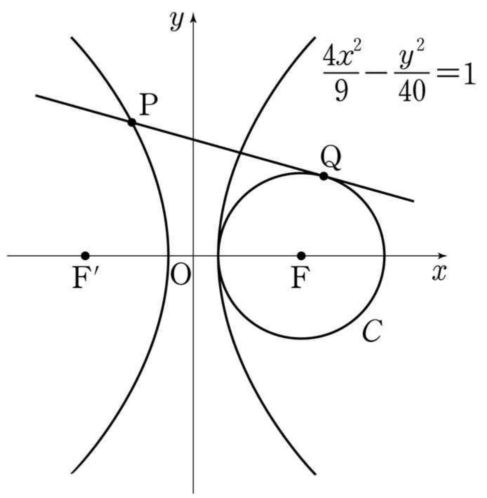
➡ 내접원의 반지름의 길이 :

$\overline{O'H} = \overline{OH} - \overline{OO'} = r\cos\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{a}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$

문제에서 직각삼각형을 발견하면, 피타고라스의 정리와 함께 떠올려야 하는 것이 삼각비이다. 삼각함수에서는 이 삼각비가 문제해결의 실마리가 되므로 직각삼각형을 만들 수 있는 보조선 긋기가 매우 중요하다. 이러한 보조선은 원의 접선, 원의 중심에서 접선에 내린 수선, 이등변삼각형의 한 꼭짓점에서 그 대변에 내린 수선 등이 있다.

12. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{4x^2}{9}-\frac{y^2}{40}=1$의 두 초점은 F, F$'$이고, 점 F를 중심으로 하는 원 C는 쌍곡선과 한 점에서 만난다. 제2사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P에서 원 C에 접선을 그었을 때 접점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=12$일 때, 선분 PF$'$의 길이는?

[3점]



① 10　② $\frac{21}{2}$　③ 11　④ $\frac{23}{2}$　⑤ 12

추론　이차곡선의 정의 응용

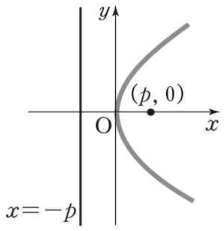
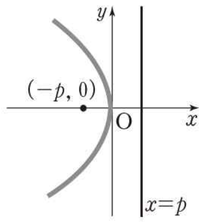
이차곡선 문제는 크게 이차곡선의 정의를 이용한 문제와 접선의 방정식을 이용한 문제로 나눌 수 있다. 대개 그래프 상에서 문제를 풀어가는 이차곡선 정의가 많이 나오지만, 이번 시험에는 이차곡선의 접선의 방정식을 이용한 문제도 나왔으므로 두 내용 모두 철저히 기억하고 있어야 한다.

이차곡선의 정의에서 가장 중요한 것은 역시 정의를 정확히 암기하고, 중요한 점들을 이용하는 것이다. 중요한 점들은 이차곡선의 초점, 타원, 쌍곡선의 x축과의 교점이 될 것이다. 이차곡선의 정의를 이용한 문제는 반드시 이 점들이 문제풀이에 연관이 있으므로 이 점들을 중심으로 문제에 접근하는 것이 좋다.

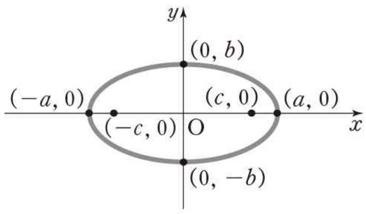
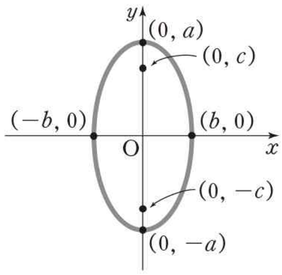
먼저 문제풀이에 앞서 이차곡선의 정의를 정리하고 가 보자.

Concept

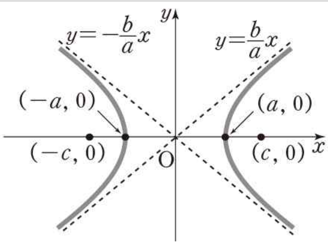
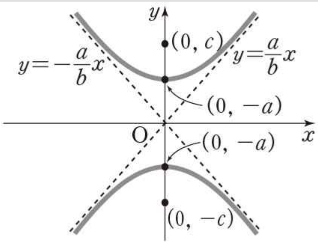
● **포물선의 정의** : 한 초점과 준선에서 같은 거리 p에 있는 점들의 집합

방정식	$y^2=4px$	$y^2=-4px$
곡선의 개형		
초점의 좌표	$(p,\ 0)$	$(-p,\ 0)$
준선의 방정식	$x=-p$	$x=p$

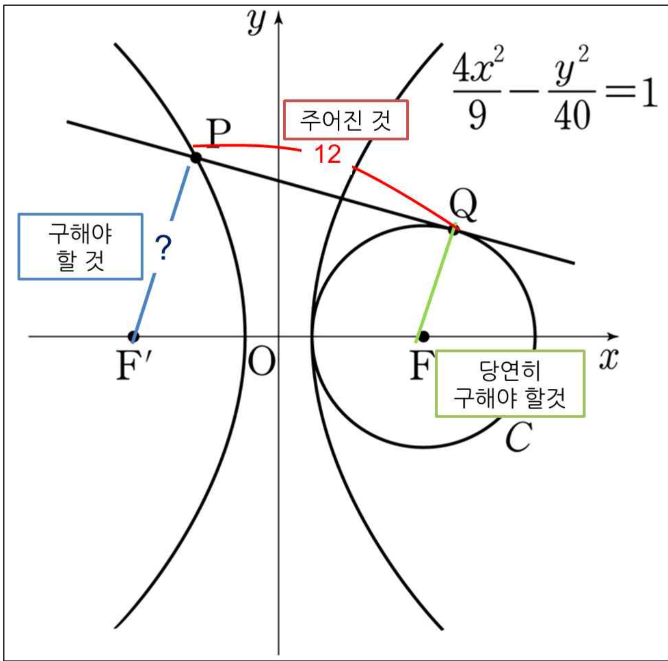
● **타원의 정의** : 두 초점에서의 거리의 합이 $2a$로 일정한 점들의 집합

방정식	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>c)$	$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1\,(a>c)$
곡선의 개형		
중심과 초점의 거리	$c=\sqrt{a^2-b^2}$	$c=\sqrt{a^2-b^2}$
초점의 좌표	$(\pm c,\ 0)$	$(0,\ \pm c)$
꼭짓점의 좌표	$(\pm a,\ 0)$, $(0,\ \pm b)$	$(\pm b,\ 0)$, $(0,\ \pm a)$
장축의 길이	$2a$	$2a$

● **쌍곡선의 정의** : 두 초점에서 거리의 차가 $2a$로 일정한 점들의 집합

방정식	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(c>a)$	$\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=-1\,(c>a)$
곡선의 개형		
중심과 초점의 거리	$c=\sqrt{a^2+b^2}$	$c=\sqrt{a^2+b^2}$
초점의 좌표	$(\pm c,\ 0)$	$(0,\ \pm c)$
꼭짓점의 좌표	$(\pm a,\ 0)$	$(0,\ \pm a)$
주축의 길이	$2a$	$2b$
점근선의 방정식	$y=\pm\dfrac{b}{a}x \Leftarrow \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$	$y=\pm\dfrac{a}{b}x \Leftarrow \dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=0$

Solution

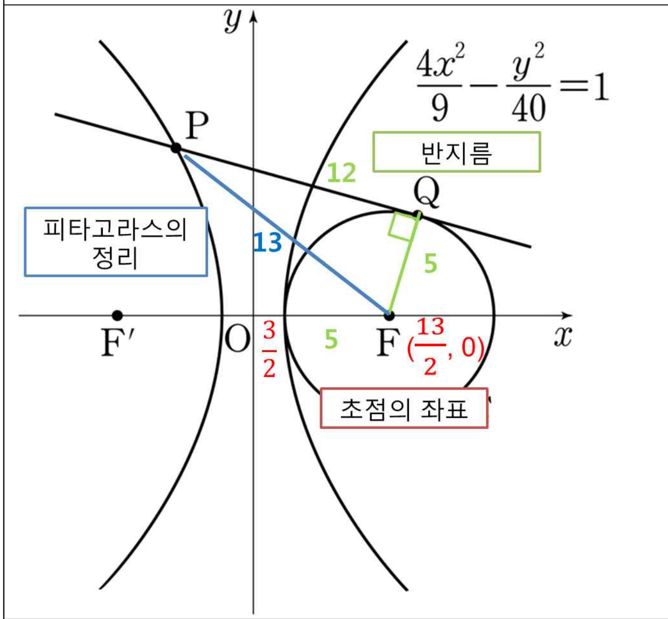


Step 1 : 주어진 값들과 구해야 할 것 파악

먼저 문제에서 주어진 것들, 구해야 할 것, 그리고 중간에 당연히 구해야 할 것을 확인해보자.

먼저 문제에서는 $\overline{PF'}$를 구하라고 하였으므로 그 길이가 어디 있는지 확인하고, 문제에서 주어진 $\overline{PQ}$가 어떤 선분인지도 확인하자.

그 다음에 당연히 구해야 하는 초점이 어디 있는지 확인하고, 초점을 구하면 자연스럽게 반지름도 구해진다는 것을 파악하자.



Step 2 : 초점의 좌표 구하고 구할 수 있는 값 구하기

그러면 이제 초점의 좌표를 구해 보자.

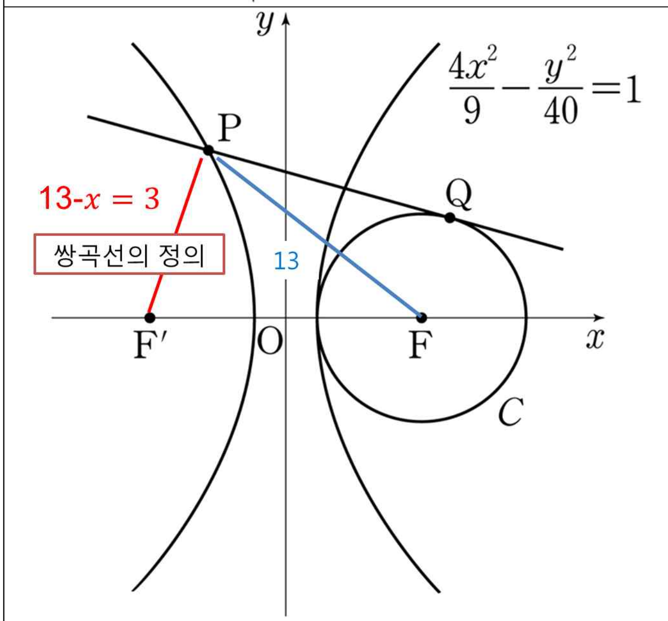
$\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{40}=1$이므로, 초점의 좌표는 $\left(\frac{13}{2},0\right)$이다.

또 주축의 길이는 3이므로,

원 C의 반지름의 길이는 $\frac{13}{2}-\frac{3}{2}=5$이다.

원의 중심(초점)과 접점을 이으면 접선과 수직이 되므로 직각삼각형 $\triangle PQF$가 보인다. 이 때 피타고라스의 정리를 이용하면 $5^2+12^2=13^2$이므로 $\overline{PF}=13$이 된다.

* 자주 보이는 숫자에는 주목할 필요가 있다.



Step 3 : 쌍곡선의 정의로 마무리

이제 $\overline{PF}$가 구해졌으므로 쌍곡선의 정의를 이용하면 $13-x=3$이 된다.

⇦초점으로부터 선분의 길이의 차가 주축의 길이로 일정

$\therefore\ x=10$

➪ 정답 : ①

13. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고,

$$n^2 a_{n+1}=(n^2-1)a_n+n(n+1)2^n \ (n \ge 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식에 의하여
>
> $$a_{n+1}=\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}a_n+\frac{n+1}{n}2^n$$
>
> 이다. $b_n=\dfrac{n-1}{n}a_n$이라 하면
>
> $$b_{n+1}=b_n+\boxed{\text{(가)}} \ (n \ge 1)$$
>
> 이고, $b_1=0$이므로
>
> $$b_n=\boxed{\text{(나)}} \ (n \ge 1)$$
>
> 이다. 그러므로
>
> $$a_n=\begin{cases} 2 & (n=1) \\ \dfrac{n}{n-1}\times\left(\boxed{\text{(나)}}\right) & (n>2) \end{cases}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(5)+g(10)$의 값은? [4점]

① 1014 ② 1024 ③ 1034 ④ 1044 ⑤ 1054

개념 **연역적 추론** **수열 증명**

무한등비급수 문제처럼 해마다 수능에 한 문제씩은 반드시 나오는 유형이다. 주로 수열의 점화식에서 일반항을 구하는 증명 과정이나 수학적 귀납법에 대한 내용이 많이 나온다.

증명 문제 역시 문제가 긴 편이므로 문제를 빠르고 효율적으로 풀 수 있도록 연습을 해야 한다. 보통 4점짜리로 나오는 경우가 많으므로 여기서 시간을 많이 날리면 문제가 생길 수 있으므로 잘 풀리지 않으면 다른 문제를 먼저 풀고 돌아와서 푸는 식으로 푸는 것도 좋은 전략이다.

증명 문제는 전체적인 과정을 처음부터 하려고 하지 말고 (가), (나) 주변의 식을 이용해서 답만 빠르게 구하는 식으로 가는 것이 좋다.

Step 1

역시 문제를 처음부터 다 읽는 것은 위험하다. 괄호가 있는 부분을 중심으로 문제를 읽어 가는 것이 문제를 빠르고 효율적으로 풀 수 있는 방법이다.

(가) 주변을 먼저 살펴보자.

$b_{n+1}=b_n+(\text{가})\ (n\geq 1)$이라고 되어 있다. 주변을 살펴보면

① $b_n=\dfrac{n-1}{n}a_n$
② $a_{n+1}=\dfrac{(n+1)(n-1)}{n^2}a_n+\dfrac{n+1}{n}2^n$

임을 확인할 수 있다. 그러면 이 내용에서 (가)를 구할 수 있다는 말이다.

(가)의 양변을 살펴보면 모두 b_n에 관한 점화식임을 확인할 수 있으므로, ②번의 식을 모두 b_n으로 나타내보자. 이 때 ①을 사용하는 것이다.

$a_{n+1}=\dfrac{(n+1)(n-1)}{n^2}a_n+\dfrac{n+1}{n}2^n$를 잘 분석하면 $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{n-1}{n}a_n+\dfrac{n+1}{n}2^n$으로

$b_n=\dfrac{n-1}{n}a_n$을 쓸 수 있는 형태가 보인다. 우변에서 a_n을 b_n으로 변형시킬 수 있는 것이 보이므로 좌변도 변형시키자.

등식의 양변을 $\dfrac{n+1}{n}$으로 나누면

$\dfrac{n}{n+1}a_{n+1}=\dfrac{n-1}{n}a_n+2^n$ ➪ $b_{n+1}=b_n+2^n$ ➪ (가) : 2^n

Step 2

(가)를 구했으므로 이를 이용해서 (나)도 구하자.

(나)는 b_n을 구하는 것인데, 이미 $b_{n+1}=b_n+2^n$이라는 점화식을 구했으므로 계차수열임을 알 수 있다. 따라서

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k$로 식을 세울 수 있고, $b_1=0$이라고 바로 위에 나와 있으므로

$b_n=\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-2$임을 구할 수 있다.

이제 (가), (나)를 모두 구했으므로 대입만 하면 된다. $f(5)+g(10)=2^5+2^{10}-2=32+1022=1054$ ➪ **정답 : ⑤**

Tip

예전 증명 문제에서는 문제 길이가 매우 길어서 읽는데 시간이 많이 걸렸지만 최근 증명 문제는 식을 간결하게 주는 대신 정확히 유도과정을 이해할 수 있는 문제가 나오고 있다. 그래도 처음부터 모든 것을 이해하면서 풀려고 하면 문제풀이 속도가 심하게 느려질 수 있으므로, 문제에서 구하라는 것을 중심으로 다른 정보를 조합하는 것이 좋다.
점화식 문제에서 몇 가지 기본 점화식은 알고 있는 것이 좋다. 특히 계차수열의 점화식이나, $a_{n+1}=pa_n+q$ 형태의 점화식은 아는 것으로 가정하고 문제에서 구할 것을 요구하는 경우가 있으므로 이 점화식들은 반드시 유도과정과 일반항을 알아 두는 것이 문제를 빨리 푸는 지름길이다.
문제에서 (가), (나)를 구했으면 망설임 없이 답만 구하고 다음 문제로 넘어가자. 나머지 과정들은 문제풀이와 무관하다.

6월 모의고사 문항 분석

14. 이차정사각행렬 A가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $A^3 = E$
> (나) $A - E$의 역행렬이 존재한다.

행렬 $(A-E)^{60}$의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

① 3^{30} ② $2 \cdot 3^{30}$ ③ 3^{31}
④ $4 \cdot 3^{30}$ ⑤ $5 \cdot 3^{30}$

추론 **행렬의 성질**

항상 어려워하는 행렬의 성질 문제이다. 행렬의 성질 문제에서는 문제에 주어진 형태를 어떻게 만들 수 있을 것인지에 대해서 항상 생각해야 한다. 또 역행렬이 나오면 교환법칙이 성립함을 이용하고, 이를 이용해서 식을 변형할 수도 있어야 한다. 행렬의 성질은 유형별로 외워서 공략하는 문제가 아니고, 문제에서 힌트를 얻어서 하나하나 처리해야 함을 잊지 말자.

Solution

행렬의 성질을 너무 어렵게 생각하지 말고, 〈형태〉에 집중해서 그 형태로 식을 바꿔 간다고 생각하면서 풀면 생각보다 문제가 쉽게 풀릴 수 있다. 먼저 $A^3 = E$라는 식이 있고, $A-E$의 역행렬이 존재한다는 말이 있다. 다음과 같은 추론 과정으로 풀어 나가자.

추론 과정		결과
$A-E$의 역행렬이 존재하니까 이 식을 이용하자.	⇨	쓸 수 있는 식이 $A^3 = E$뿐이므로 $A^3 - E = O$로 변형하면 $(A-E)(A^2+A+E) = O$라는 식을 얻을 수 있다. 일단 $A-E$의 역행렬이 존재하니까 그걸 쓰면 $A^2+A+E = O$을 구할 수 있다.
⇩		
$(A-E)^{60}$을 구해야 한다. 그런데 $(A-E)^{60}$은 직접 계산하기 힘들다.	⇨	$A^2+A+E = O$을 구했으니까 이 식을 사용하자. $(A-E)^{60}$을 구하려면 최소한 $(A-E)^2$정도의 값은 알아야 할 것 같다. ➪ 그런데 이 식은 $A^2+A+E=O$에서 유도할 수 있다. 즉, $(A-E)^2+3A=O$로 식을 변형하면 $(A-E)^2 = -3A$가 된다.
⇩		
구한 $(A-E)^2 = 3A$를 써 보자.	⇨	$(A-E)^2 = 3A$니까 $(A-E)^{60} = \{(A-E)^2\}^{30} = (3A)^{30} = 3^{30}A^{30}$ 이다. 그런데 문제에서 $A^3 = E$라고 했으므로 $3^{30}A^{30} = 3^{30}(A^3)^{10} = 3^{30}E$이다. 따라서 $(A-E)^{60} = \begin{pmatrix} 3^{30} & 0 \\ 0 & 3^{30} \end{pmatrix}$ ➪ 성분합 : 2×3^{30} ➪ **정답 : ②**

15. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{P}(1,0)$, $\mathrm{Q}(0,1)$이 있다. 원점을 중심으로 하는 회전변환 f에 의하여 점 P가 제1사분면 위의 점 R로 옮겨진다. 삼각형 OPQ와 삼각형 OPR의 공통부분의 넓이가 삼각형 OPQ의 넓이의 $\frac{2}{3}$배일 때, 회전변환 f를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은? (단, O는 원점이다.) [4점]

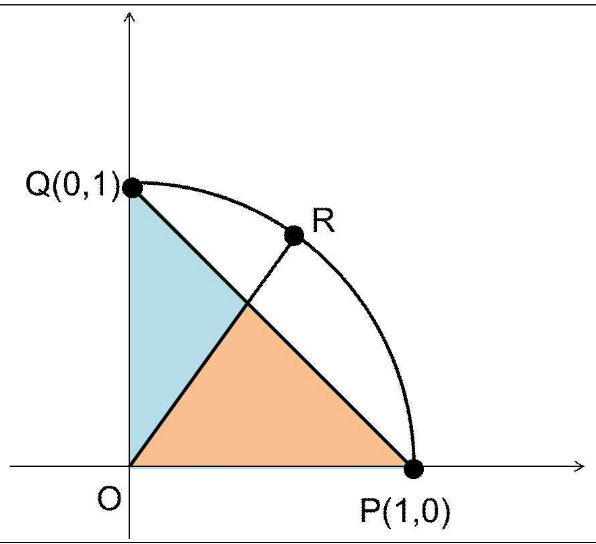
① $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{10}$
④ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

추론 **일차변환**

일차변환 문제에서 다소 생각을 해야 하는 문제이지만, 일차변환의 뜻을 알고 있다면 크게 어렵지는 않은 문제였다. 물론 통상적인 일차변환 문제보다 좀 더 생각을 해야 하는 문제였지만, 4점짜리 문제라는 점을 생각하면 생각보다 무난하게 풀리는 문제였다고 할 수 있다.

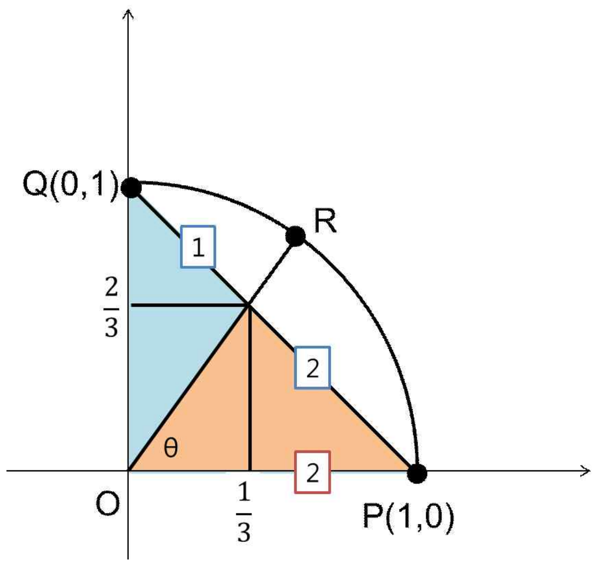
일단 문제가 조금 복잡하다고 여겨지면 그래프를 그려서 생각하면 훨씬 더 간단하게 느껴질 수 있으므로 그래프를 그리는 것을 많이 연습하는 것이 필요하다.

Solution



Step 1 : 문제에서 요구하는 대로 그림 그리기

문제가 길지만 그래프를 제대로 그리기만 한다면 크게 어렵지 않다. 먼저, P, Q점을 찍고 P가 회전변환에 의해서 R로 옮겨지므로 OP를 반지름으로 하는 사분원을 그려서 R을 표시하자. 그리고 OPQ와 OPR의 공통부분을 표시(살구색)하면 문제에서 언급된 것을 모두 그린 것이다.



Step 2 : 주어진 값들과 구해야 할 것 파악

문제에서 삼각형 OPQ와 삼각형 OPR의 공통부분의 넓이가 OPQ의 $\frac{2}{3}$이므로, 문제의 그림에서 판단해보면 PQ와 OR의 교점이 PQ를 2:1로 내분하는 점이라는 것을 알 수 있다. ➪ 교점의 좌표 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

회전한각을 θ라하면 $\tan\theta=2$이고,

회전변환은 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은

$2\cos\theta$, $\tan\theta=2$, (θ는 예각)이므로

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ $2\cos\theta=2\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$ ➪ 정답 : ④

6월 모의고사 문항 분석

16. 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3$ 위의 점 (t, t^3)과 직선 $y=x+6$ 사이의 거리를 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $g(t)$는 0이 아닌 극솟값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

추론 **신유형** **극대 · 극소와 미분**

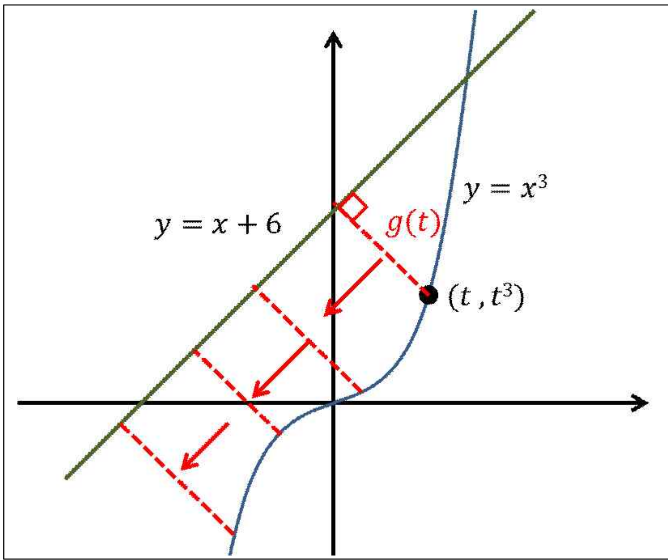
이번 시험에서 다소 까다로울 수 있는 문제였는데 직관과 식을 적절하게 활용하면 큰 문제없이 풀릴 수 있는 문제였다.

계속 강조하지만 그래프 문제가 나오면 그래프 위에 중요 포인트가 되는 점들을 표시하고, 그 그래프를 보면서 판단을 해야 한다. 그래프는 개형 정도로 그리는 것이 좋고, 문제를 읽어 가면서 중요한 포인트를 하나하나 체크해 가는 것이 필요하다.

극대 · 극솟값은 모든 것을 식으로 해결하려 하지 말고, 때로는 문제에서 직관적으로 파악할 필요도 있다. 실제 수능 기출에서도 그런 추론을 해야 하는 문제들이 나오고 있으므로 극대 · 극소에 대해서 좀 더 유연하게 생각하는 것이 필요하다.

Step 1

문제에서 묻고 있는 $g(t)$가 어떤 함수인지, 그래프를 그려서 상황을 파악해 보도록 하자.



문제의 조건에 있는 내용으로 $g(t)$가 어떤 것을 의미하는지 표시해 보도록 하자.
$y=x^3$이나 $y=x+6$은 모두 쉽게 그릴 수 있는 그래프들이므로 그래프를 그리고, $(t,\ t^3)$은 $y=x^3$ 위의 점이므로, 점을 표시한 뒤 직선과의 거리를 표시하면 그것이 $g(t)$가 된다. t가 바뀌면 점의 위치가 변하므로 자연스럽게 $g(t)$의 값도 변할 것이다.

그 다음 문제에서 구하라는 것을 보면
ㄱ. 연속성 ➪ ㄴ. 극솟값 ➪ ㄷ. 미분가능성
인 것을 알 수 있다.

여기까지 했으면 ㄱ, ㄴ, ㄷ을 직관적으로 생각을 해 볼 수 있다.
먼저 ㄱ번을 보면 t가 움직일 때 거리도 움직이는데, $(t,\ t^3)$이 놓여 있는 $y=x^3$의 그래프 자체가 연속인 그래프이므로 $(t,\ t^3)$의 그래프와 $y=x+6$ 사이의 거리도 큰 문제없이 계속 연속일 것이라 생각할 수 있다.
ㄴ번은 $g(t)$를 나타내는 선분을 그대로 평행이동 시키면서 거리를 짐작해 보면(위 그림의 빨간 화살표처럼 이동) $g(t)$가 커지다 작아지다 다시 커지는 양상을 띠고 있으므로 0이 아닌 극솟값은 명백히 존재할 것이라 생각된다.
ㄷ번은 직접 미분계수를 봐야 하기 때문에 직관으로 풀기에는 조금 힘들지만 $t=2$인 곳은 교점이라는 사실이 중요하고, $y=x^3$의 그래프는 $x=2$를 기준으로 점대칭이 아니기 때문에 당연히 미분계수 역시 다를 것이라 생각해서 답을 ㄱ, ㄴ이라 낼 수 있다.
➪ 이 풀이는 시간이 없어서 급한 경우 이렇게 생각해볼 수 있는 것이고 실제로는 거리 공식을 쓰면 된다.

Step 2

직관적으로 생각을 해 보고 문제가 파악이 되었지만 직관으로 풀기에는 찜찜하다 생각되면 직접 $g(t)$ 식을 세워 보도록 하자. 고등수학 (하)에서 〈점과 직선 사이의 거리〉 공식을 배웠으므로 그것을 이용하면

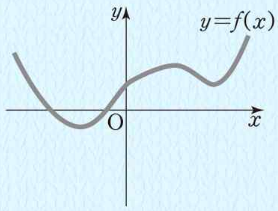
$$g(t)=\frac{|t-t^3+6|}{\sqrt{2}}$$

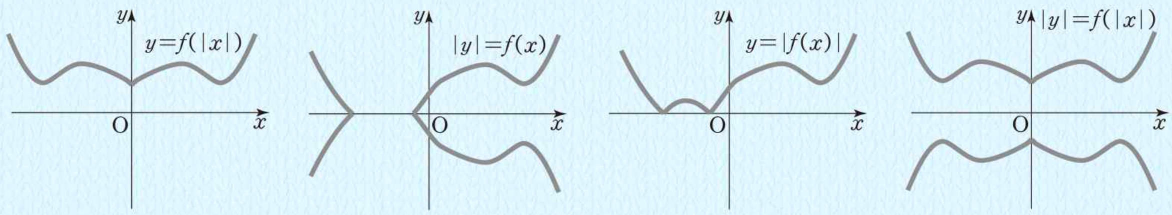
$y=g(t)$의 식이 나왔으므로 이 그래프를 그리기만 하면 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 무리 없이 확인할 수 있을 것이다. 그러면 직관이 맞는지 확인해 보도록 하자. 잠깐 가물가물한 절댓값 기호가 있는 함수의 그래프를 그리는 방법을 상기해 보자.

Concept

❻ 절댓값 기호가 있는 함수의 그래프 그리기

① $y=f(|x|)$ ➡ $x\geq 0$인 $y=f(x)$를 그린 후 y축에 대하여 대칭으로 그린다.
② $|y|=f(x)$ ➡ $y\geq 0$인 $y=f(x)$를 그린 후 x축에 대하여 대칭으로 그린다.
③ $y=|f(x)|$ ➡ $y=f(x)$를 그린 후 x축 아래 부분을 접어 올린다.
④ $|y|=f(|x|)$ ➡ 제1사분면을 그린 후 나머지 사분면은 제1사분면을 대칭으로 그린다.





시험에 자주 출제되는 것은 ①과 ③이다. ①은 y축 오른쪽 부분만 그린 후 이것을 y축에 대하여 대칭으로 그리면 된다. ③은 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후 x축 아래 부분을 위로 접어 올리면 된다.
절댓값 기호가 있는 함수의 그래프는 절댓값 기호 안의 값을 분할하여 그리면 된다.
예컨대, ① $y=f(|x|)$는 $x\geq 0$일 때와 $x<0$일 때로 분할하여 그린다.
(1) $x\geq 0$일 때 $y=f(|x|) \rightarrow y=f(x)$
(2) $x<0$일 때 $y=f(|x|) \rightarrow y=f(-x)$
즉, $y=f(-x)$는 $x<0$의 범위에서 $x\geq 0$일 때의 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭으로 그리면 된다.

이 경우는 ③번에 해당하므로 이를 생각하면서 그래프를 그려보도록 하자.

Step 3

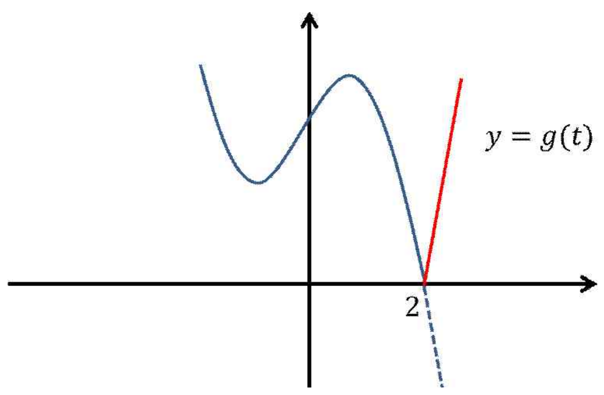
먼저 $y=\dfrac{t-t^3+6}{\sqrt{2}}$의 그래프를 먼저 그려 보아야 한다.

그래프를 그리기 위해서 미분하면 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-3t^2)$이므로 $t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 극값을 가지며

최고차항의 계수가 음수이므로 $t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 극솟값, $t=+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 극댓값을 갖는 것을 알 수 있다.

t		$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		$+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		2
$f(t)$		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\dfrac{6\sqrt{3}}{27}+6\right)$		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(+\dfrac{6\sqrt{3}}{27}+6\right)$		0
$f'(t)$	↘	0(극소)	↗	0(극대)	↘	↘

극솟값, 극댓값은 복잡하게 생겼는데 둘 다 양수라는 사실 정도는 확인해 두자.



문제에 있는 함수의 그래프를 그리면 다음과 같다. ㄷ번까지 살펴보기 위해서 $t=2$일 때 값을 확인하면 0이 나오는데, 절댓값 함수의 그래프에서는 $y=0$인 점이 중요하므로 그 점도 표시해서 왼쪽처럼 그래프를 그리고 절댓값을 씌웠으므로 x축 아래 부분을 x축대칭하면 $y=g(t)$의 그래프가 나온다.

이제는 그래프 분석만 하면 되므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ를 빠르게 한번에 풀 수 있다.

ㄱ ➪ 다항함수의 그래프에 절댓값을 씌워도 연속은 연속이므로 (O)

ㄴ ➪ $g(t)$는 $t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 0이 아닌 극솟값을 가짐 (O)

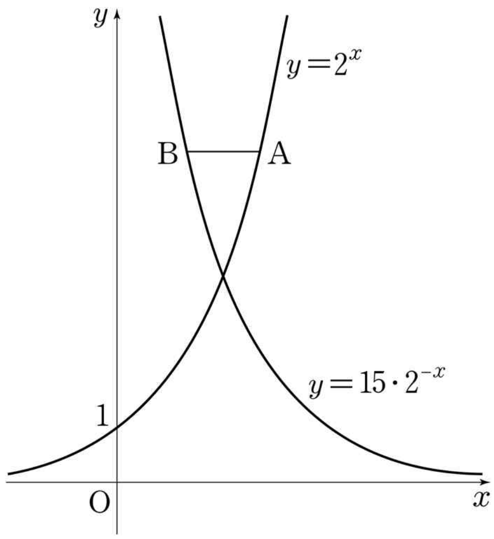
ㄷ ➪ $t=2$에서 미분불가능하다 (뾰족점) (X)

➪ 정답 ③

Tip

비교적 새로운 스타일의 문제라고 할 수 있는데, 그래프를 보면서 직관적으로 처음에 문제를 파악하는 것이 중요하다. 그 다음에 점과 직선 사이의 거리 공식으로 확정을 하면 더 확실하게 알 수 있다. 정 급한 경우 직관으로만 풀어도 답이 나오는 과정이 논리적으로 문제인 것이라고는 할 수 없다.
이번 경우처럼 식을 직접 세울 수 있는 경우도 있지만, 수능 때는 식을 세우기 어려운 그래프를 줄 수도 있으므로 직관적인 풀이도 항상 염두에 두고 있는 것이 좋다. 실제로 수능 기출에서는 몇몇 단서만으로 그래프의 개형을 추정해야 하는 문제들이 종종 나왔으므로 모든 것을 식으로 해결하려고 하지 말고, 직관을 동원해서 그래프의 개형을 알아 내는 것도 중요한 작업이다.

17. 그림과 같이 함수 $y=2^x$의 그래프 위의 한 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=15\cdot 2^{-x}$의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 점 A의 x좌표를 a라 할 때, $1<\overline{\mathrm{AB}}<100$을 만족시키는 2 이상의 자연수 a의 개수는? [4점]



① 40 ② 43 ③ 46 ④ 49 ⑤ 52

추론 **지수함수의 그래프**

지수함수의 그래프 문제는 수능에서 응용 분야가 무궁무진하므로 일반화해서 정리하기는 힘들다. 그렇다 하더라도 그래프를 읽는 기본 스킬들은 갖추고 있어야 한다.

이 문제의 경우 문제에서 하라는 대로 하면 크게 어려움 없이 풀리는 문제로, 지수함수 문제 치고는 쉬운 편이라고 할 수 있었다.

Step 1

A를 지나고 x축에 평행한 직선이 만나는 점을 B라 하였고, A의 x좌표를 a라 했으므로 그대로 대입하자.

A점의 좌표는 $A(a,\ 2^a)$이고, A를 지나고 x축에 평행한 직선은 같은 $y=2^a$이므로 B점의 x좌표는

$2^a=15\cdot 2^{-x}$에서 $a=\log_2 15-x$ ➪ $x=-a+\log_2 15$

Step 2

$\overline{AB}=a-(-a+\log_2 15)=2a-\log_2 15$이고 이 값이 1과 100 사이에 있으므로

$1<2a-\log_2 15<100$을 만족하는 자연수 a의 개수를 구하는 것이다.

부등식을 정리하면 $\frac{1}{2}log_2 30<a<50+\frac{1}{2}log_2 15$이다.

자연수 a의 개수를 구하는 것이므로 $\log_2 30$과 $\log_2 15$의 대략적인 값을 구하자.

$\log_2 16<\log_2 30<\log_2 32$이므로 $\log_2 30=4.xxx$이고

$\log_2 8<\log_2 15<\log_2 16$이므로 $\log_2 15=3.xxx$이다.

따라서 $2.xxx<a<51.xxx$이므로 a는 3부터 51까지의 자연수다.

➪ a는 49개

➪ 정답 : ④

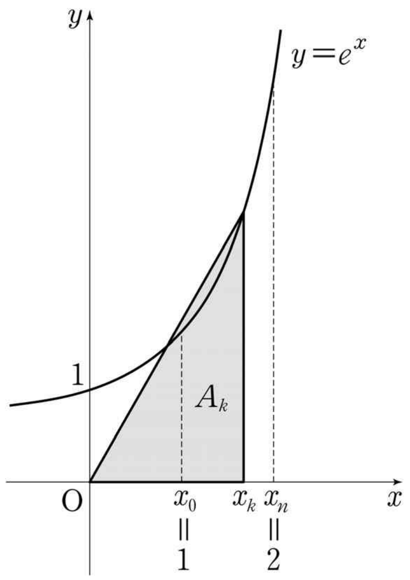
18. 함수 $f(x)=e^x$이 있다. 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌 구간 $[1, 2]$를 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로

$$1=x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n=2$$

라 하자. 세 점 $(0, 0)$, $(x_k, 0)$, $(x_k, f(x_k))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 A_k $(k=1, 2, \cdots, n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}e^2-e$ ② $\frac{1}{2}(e^2-e)$ ③ $\frac{1}{2}e^2$

④ e^2-e ⑤ $e^2-\frac{1}{2}e$



개념 정적분과 무한급수

문제가 복잡해 보이지만 식을 세우고 정적분과 무한급수 형태인 것을 확인하면 별 무리 없이 풀리는 문제였다. 정적분과 무한급수는 과정을 이해하는 것도 좋지만, 공식을 정확히 기억하기만 해도 별 무리는 없으므로 공식을 꼭 알아두도록 하자.

정적분과 무한급수를 변형하는 여러 공식들은 모두 치환적분으로 유도가 가능한데, 간단한 2개의 형태만 알고 있어도 풀이에 큰 무리는 없으므로 여러 공식을 사용하기보다, 식을 빠르고 정확히 세우고 문제에 따라서 2개 중에 하나를 사용하는 식으로 풀이하는 것이 좋다.

Concept

정적분과 무한급수

함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속일 때 $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$

(단, $\Delta x=\frac{b-a}{n}$, $x_k=a+k\Delta x=a+\frac{b-a}{n}\cdot k$) 이므로 연속함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

① $\lim_{h\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{(b-a)k}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$

② $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{pk}{n}\right)\cdot\frac{p}{n}=\int_a^{a+p}f(x)dx$

③ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{pk}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(a+px)dx$ ▶ $\frac{k}{n}$을 x로, $\frac{1}{n}$을 dx로

Step 1

보통 정적분과 무한급수 문제에서는 [0, 1]을 n등분하는데, 이번 문제에서는 [1, 2]를 n등분했으므로 이 점에 주의해서 분점의 식을 세워 보도록 하자.

폐구간 [1, 2]를 n등분하였으므로 $x_k = 1 + \frac{k}{n}$으로 쓸 수 있다.

그 다음, 세 점 $(0, 0)$, $(x_k, 0)$, $(x_k, f(x_k))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 A_k으로 정의했으므로

$A_k = \frac{1}{2} \cdot x_k \cdot f(x_k) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{k}{n}\right) \cdot f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$로

➩ $A_k = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{k}{n}\right) e^{1 + \frac{k}{n}}$

Step 2

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} A_k$을 구하라고 했으므로 전형적인 정적분과 무한급수 문제임을 알 수 있다. 일단 식을 세워 두고 문제에 따라서 변한 정적분 식으로 변형하도록 하자.

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k}{n}\right) e^{1 + \frac{k}{n}}$

$= \int_0^1 \frac{1}{2}(1+x)e^{1+x}dx$ ⇦ $\frac{k}{n}$을 x로, $\frac{1}{n}$을 dx로

여기서 $1 + x$를 t로 치환하면 $dx = dt$

(준식) $= \int_1^2 \frac{1}{2} te^t dt$가 된다. 부분적분법을 이용하면

$\int te^t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C$이므로

(준식) $= \left[\frac{1}{2}(te^t - e^t)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left\{(2e^2 - e^2) - (e - e)\right\} = \frac{1}{2}e^2$

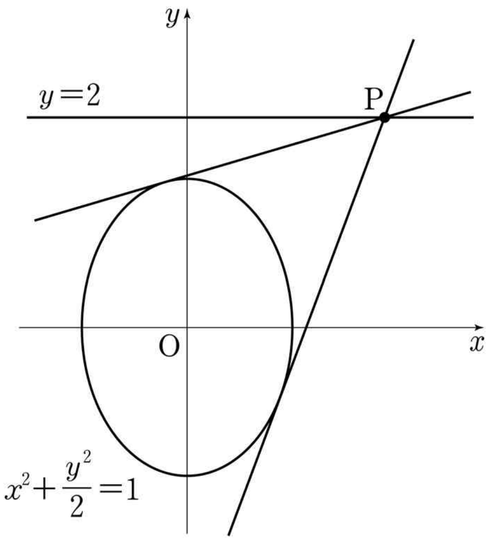
➩ 정답 : ③

Tip

무한급수와 정적분을 변환하는 공식들이 헷갈릴 수 있다. 그런 경우는 가장 간단한 공식을 이용하여 $\frac{k}{n}$을 x로, $\frac{1}{n}$을 dx로 변환하고 구간을 [0, 1]로 잡은 다음 익숙한 치환적분을 통해서 변환하면 쉽게 답을 낼 수 있다.

19. 직선 $y=2$ 위의 점 P에서 타원 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$에 그은 두 접선의 기울기의 곱이 $\frac{1}{3}$이다. 점 P의 x좌표를 k라 할 때, k^2의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10



계산 **이차곡선의 접선의 방정식**

이차곡선 문제에서 정의를 이용한 것과 접선을 이용하는 문제가 나오는데, 이번에는 접선을 이용하는 문제이다. 접선을 이용하는 문제는 두 가지 공식을 알아 두어야 한다. ① 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식 ② 기울기가 m인 접선의 방정식, 다음 쪽에 이 내용들을 정리해 두었으니 꼭 정확히 암기하도록 하자.

이차곡선은 공식이 기억나지 않으면 $y=mx+n$으로 식을 세우고 판별식 $D=0$을 이용해서 답을 낼 수도 있다는 것을 항상 최후의 무기로 가지고 있도록 하자.

①번을 쓰는 경우는 대부분 곡선 위의 점이 주어진 형태이고, 그렇지 않은 경우는 문자의 수가 적은 ②를 많이 쓰게 된다. 문제에 따라서 유동적으로 사용할 수 있도록 하고, 대부분 이 공식을 이용하면 큰 무리 없이 풀린다.

Solution

타원에서 기울기가 m인 접선의 방정식을 구하면 $y=mx\pm\sqrt{1\cdot m^2+2}$이다.
이 접선이 $(k, 2)$를 지나므로 대입하면
$2=mk\pm\sqrt{m^2+2}$
$(k^2-1)m^2-4km+2=0$이 되고
두 접선의 기울기의 곱이 $\frac{1}{3}$이라고 했으므로 위 이차방정식의 두 근의 곱이 $\frac{1}{3}$인 것이다.

➪ 근과 계수와의 관계에 의하여 $\frac{2}{k^2-1}=\frac{1}{3}$

➪ $k^2=7$

➪ 정답 : ②

Tip

이차곡선의 접선 문제는 충분히 복잡하게 나올 수 있다. 그러나 그러면 계산 과정이 너무 복잡해지기 때문에 수능에 출제되는 이차곡선의 접선 문제는 대부분 접선의 방정식 공식을 이용하면 큰 문제없이 풀리는 식으로 출제되고 있다. 그래서 대부분의 경우 이차곡선을 평행이동 하지 않고 원점을 중심으로 제시해서 접선의 방정식 공식을 그대로 쓸 수 있게 하므로, 공식은 반드시 외워 두는 것이 좋다. 기울기가 m인 직선의 방정식은 어렵지 않게 유도가 가능하지만 시간 절약을 위해서 이차곡선별로 외워 두는 것이 좋다. 이 접선의 방정식 공식은 대부분의 경우에 사용되고, 곡선 위의 점을 직접 준 경우에만 다른 공식을 사용한다고 생각하면 된다. 이 문제의 경우 접선의 방정식이 기억나지 않으면 직접 직선식을 세워서 이차방정식을 세워서 구해도 되지만 그럴 경우 시간이 많이 걸릴 수 있으므로 가급적 공식을 외우자.

❷ 이차곡선의 접선의 방정식을 이용하는 문제

이차곡선의 접선은, 접점이나 접선의 기울기가 주어지는 두 가지 경우가 있는데 그 공식을 모두 기억해야 한다. 물론, 접선의 식을 이차곡선의 식에 대입한 후 판별식 $D=0$을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수도 있지만 시간이 촉박한 시험에서는 그다지 좋은 방법이 아니다. 제한된 시험 시간 안에 빠르게 문제를 풀려면 기본적인 수학 공식 정도는 반드시 외우고 시험장에 들어가야 한다.

❶ 공식 암기 SKILL : $x^2 \Rightarrow x_1x$, $y^2 \Rightarrow y_1y$, $x \Rightarrow \dfrac{x+x_1}{2}$, $y \Rightarrow \dfrac{y+y_1}{2}$

이차곡선	이차곡선 위의 한 점 (x_1, y_1)에서의 접선	
원	$x^2+y^2=r^2$	$x_1x+y_1y=r^2$
포물선	$y^2=4px$	$y_1y=2p(x+x_1)$
타원	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$
쌍곡선	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

❷ 접선 유도 SKILL : 접선을 $y=mx+n$으로 놓고 판별식 $D=0$을 이용한다.

이차곡선	기울기가 m인 접선	
원	$x^2+y^2=r^2$	$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
포물선	$y^2=4px$	$y=mx+\dfrac{p}{m}$
타원	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$
쌍곡선	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

접선의 공식만 외우고 있어도 그냥 풀 수 있는 문제가 자주 출제된다.

> 쌍곡선 $x^2-4y^2=a$ 위의 점 $(b, 1)$에서의 접선이 쌍곡선의 한 점근선과 수직이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 양수이다.) [수능 기출]

[풀 이]

점 $(b, 1)$이 쌍곡선 $x^2-4y^2=a$ 위의 점이므로 $b^2-4=a$ ······ ㉠

이 쌍곡선의 점근선은 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$이고 점 $(b, 1)$에서의 접선의 방정식은 $bx-4y=a$, 즉 $y=\dfrac{b}{4}x-\dfrac{a}{4}(b>0)$이다.

접선의 기울기 $\dfrac{b}{4}$가 양수이므로 접선과 수직이 되는 점근선은 $y=-\dfrac{1}{2}x$이다.

$\dfrac{b}{4}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1 \quad \therefore\ b=8$

$b=8$을 ㉠에 대입하면 $8^2-4=a \quad \therefore\ a=60$

$\therefore\ a+b=60+8=68$ **정답**

20. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-2 \le x < 2$일 때, $f(x) = 2\|x\|+3$이다. (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = f(x+4)$이다.

양수 m에 대하여 무리방정식

$$\sqrt{f(x)-mx} = f(x)-mx-2$$

를 만족시키는 서로 다른 실근의 개수가 4 이하가 되도록 하는 m의 최솟값은? [4점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

추론 **무리방정식**

수학 Ⅱ 방정식 문제에서 가장 자주 나오는 유형 중에 하나가 그래프를 이용해서 근의 개수를 구하거나, 주어진 근의 개수를 만족하는 조건을 구하는 것이다. 무리방정식이든 유리방정식이든 싹 정리해서 일, 이차방정식으로 푸는 것은 같지만, 무연근을 고려해야 한다는 점을 항상 잊지 않고 있으면 어렵지 않게 풀 수 있다.

Concept

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 (a, b)에서 만난다. ➡ $f(a)=g(a)=b$

그래프		방정식
$y=f(x)$, $y=g(x)$	➡	$f(x)=g(x)$
두 곡선이 점 A에서 만난다. 두 곡선의 교점의 개수가 n이다.		점 A의 x좌표가 방정식의 해이다. 방정식을 만족하는 실근의 개수는 n이다.

이 내용은 방정식 단원이 아니더라도 반드시 알아야 한다.

이제 방정식 문제를 풀 때 주의해야 할 것들을 짚어 보자.

방정식 문제를 풀 때 주의할 것

① 먼저 방정식을 정리한 다음에 그래프를 이용하여 해를 구한다.

② 무연근을 반드시 제거해야 한다.

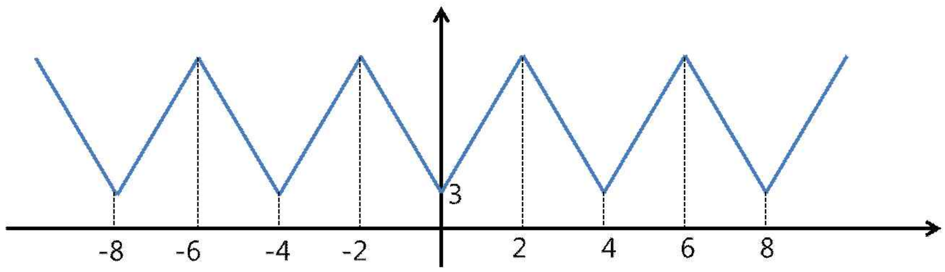
- 분수방정식 : 분모는 0이 아니어야 한다.
- 무리방정식 : $\sqrt{\ }$ 안에 있는 식은 항상 0 이상이어야 한다.

Step 1

먼저 $y=f(x)$가 어떻게 생긴 그래프인지 확인해 보자.

(가) $-2 \le x < 2$일 때, $f(x)=2\|x\|+3$이다. ➪ 절댓값 기호가 있는 함수의 그래프 (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+4)$이다. ➪ 주기가 4인 주기함수

이 내용을 바탕으로 그래프를 그리면 아래와 같다.



Step 2

$y=f(x)$의 그래프를 그렸으니 문제에 있는 무리방정식을 풀자.

근호가 있는 무리방정식을 풀 때는 근호 전체를 통째로 t라 치환하고 $t \geq 0$이라 조건을 붙여주면 간단하게 풀 수 있다.

$\sqrt{f(x)-mx}=t$라고 하면 무리방정식은

$t=t^2-2$가 되고 이차방정식을 정리하면 $t^2-t-2=0$

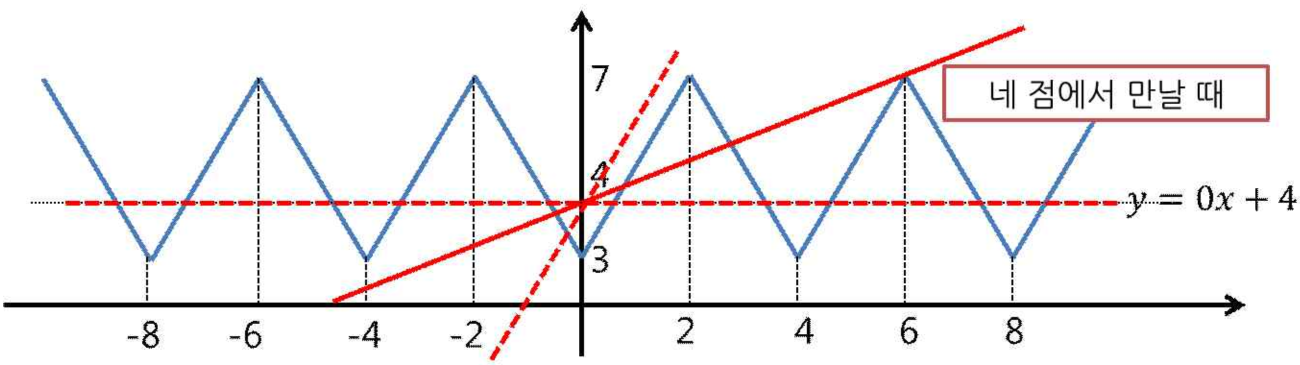
➪ $t=-1,\ 2$ 인데 $t \geq 0$이므로 $t=2$

➪ $f(x)-mx=4$

➪ $f(x)=mx+4$

Step 3

이제 서로 다른 실근의 개수가 4 이하가 되도록 하는 m의 최솟값을 물었는데 $f(x)=mx+4$는 $y=f(x)$와 $y=mx+4$의 교점으로 확인해 보도록 하자.



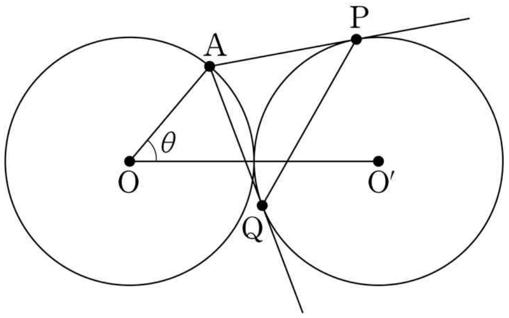
$y=mx+4$에서 이 그래프가 (0, 4)를 지난다는 것은 알고 있으므로 이 점을 반드시 지나게 그래프를 회전시켜가면서 언제 4개 만나는지 확인해보자.

➪ 직선의 기울기가 충분히 클 때에는 1개 만난다는 사실을 알 수 있고 $(2,7)$을 지나는 순간이 2개 만난다는 사실을 알 수 있다. 직선이 $(6,7)$을 지나는 순간을 살펴보면 양수 쪽에서 3개 만나고 $(6,7)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이고 $(0,4)$를 지나므로 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x+4$이고 $x=-4$일 때 값이 2이므로 왼쪽에서는 만나지 않는다.

➪ 따라서 $m=\frac{1}{2}$일 때 기울기가 가장 작으면서 만나는 점이 4개라는 사실을 알 수 있다. ➪ **정답 : ④**

21. 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1인 두 원 O, O′이 외접하고 있다. 원 O 위의 점 A에서 원 O′에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하자. $\angle AOO' = \theta$라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \frac{\overline{PQ}}{\theta}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]

① 2 ② 4 ③ $2\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{3}$



계산 **초월함수의 극한**

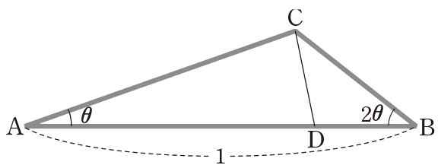
예전부터 수능에 항상 나왔던 문제인데, 도형 문제이므로 처음에 시작을 잘못하면 헤매다가 계산도 실수하고 틀리기 좋은 문제라고 할 수 있다.
삼각함수 문제는 논리적으로 알 수 있는 길이부터 구해 가면서, 도형의 성질을 사용하는 식으로 가야 한다. 삼각함수에서 식을 세울 때 가장 유용하게 이용되는 것은 사인법칙과 코사인법칙으로 이들을 잘 숙지해 두고 있어야 하며 원의 성질 역시 두말할 필요 없이 중요하다.

Concept

삼각함수 문제의 구조

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=1$이고 $\angle A=\theta$, $\angle B=2\theta$이다. 변 AB 위의 점 D를 $\angle ACD=2\angle BCD$가 되도록 잡는다.

$\lim_{\theta \to +0} \frac{\overline{CD}}{\theta} = a$일 때, $27a^2$의 값을 구하시오. $\left(단, 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$



[수능 기출]

변수의 설정	식 구하기	극한의 계산
이 문제에서 구해야 하는 것은 극한값 $\lim_{\theta \to +0} \frac{\overline{CD}}{\theta}$이다. 이때 θ라는 변수가 등장하므로 $\overline{CD}$의 길이를 θ에 대하여 나타내야 한다.	$\overline{CD}$를 θ에 대하여 나타내려면 간단하게는 보조선을 긋고, 삼각함수 관계를 확인하는 것부터 복잡하게는 사인법칙과 코사인법칙을 사용하는 것까지 다양하게 알아야 한다. 여기서 문제풀이의 시간이 결정되므로 다양한 문제 풀이를 통해 빠르게 식을 세울 수 있도록 훈련을 게을리하지 않아야 한다.	$\overline{CD}$를 θ에 대하여 나타냈다면 마지막으로 극한값을 빠르고 정확하게 구해야 한다. 이 과정 역시 생각보다 만만치 않기 때문에 초월함수의 극한 계산 연습을 많이 해 두고, 극한에서 유용하게 사용되는 도구인 '로피탈의 정리'를 적재적소에 사용할 수 있어야 한다.

삼각형을 다루는 공식에서 빠지지 않는 것이 바로 사인법칙과 코사인법칙이다.

사인법칙과 코사인법칙

① 사인법칙 : 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

② 코사인법칙

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

➡ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

기억이 가물가물한가? 고등수학(하) 이후로 처음 봤다고? ㅠㅠ

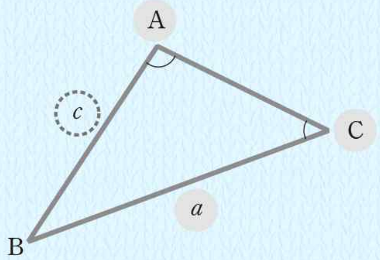
이 법칙을 언제 써야할지 모른다면 기억용량 낭비일 뿐이다.

모르면 배우자. 아직 늦지 않았다.

사인법칙 사용 SKILL

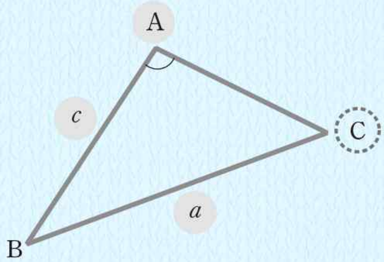
① 외접원의 반지름의 길이를 알거나 구해야 할 때

② 두 각의 크기와 한 변의 길이로 다른 한 변의 길이를 구할 때



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

③ 한 각의 크기와 두 변의 길이로 다른 한 각의 크기를 구할 때

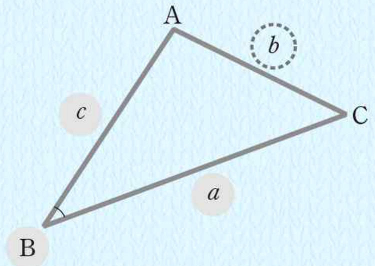


$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

사인법칙보다는 코사인법칙이 더 많이 이용된다. 코사인법칙을 외울 때는 아무 생각 없이 외우지 말고 공식의 형태를 보면서(어떤 변의 길이를 구할 때는 나머지 두 변의 길이를 제곱하고 마주보는 대응각의 코사인 값을 곱해서 빼준다는 식으로) 외우는 것이 좋다.

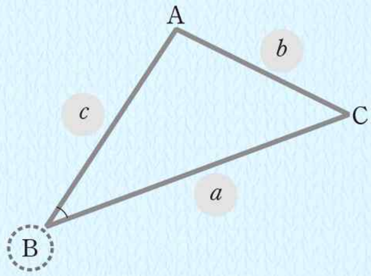
코사인법칙 사용 SKILL

① 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기로 나머지 한 변의 길이를 구할 때



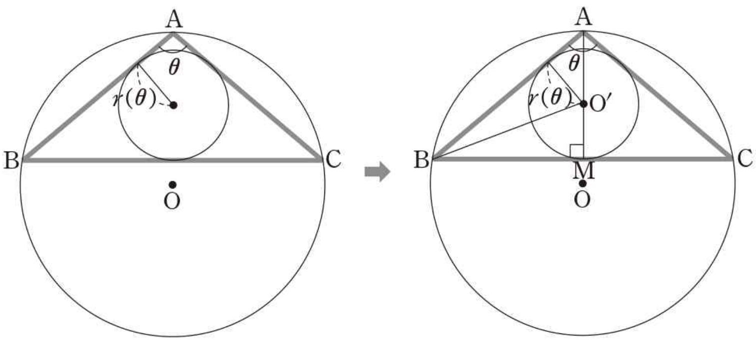
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

② 세 변의 길이로 각의 크기를 구할 때



$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \Rightarrow \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

사인법칙과 코사인법칙은 삼각함수의 계산이나 극한값 계산 문제에 자주 등장하는 법칙들이다. 기출문제를 풀면서 어떻게 사용되는지 살펴 보자.



원 O의 반지름이 1일 때, r을 θ로 나타내시오. [수능 기출]

삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 원의 중심 O′을 지나고 $\overline{\mathrm{BC}}$에 수직이등분선을 내리자. 그리고 중심 O′을 지나는 ∠B의 이등분선을 그리자.

➡ 삼각형 ABC에서 외접원의 반지름의 길이가 1이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}=2\cdot1$$

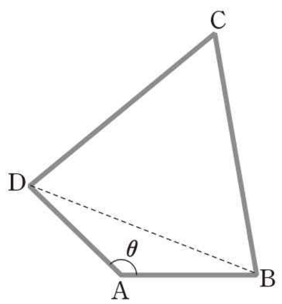
$$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=2\sin\theta,\ \overline{\mathrm{BM}}=\sin\theta$$

➡ $\angle\mathrm{ABM}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$, $\angle\mathrm{O'BM}=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}$

➡ 직각삼각형 BMO′에서

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)=\frac{\overline{\mathrm{O'M}}}{\overline{\mathrm{BM}}}=\frac{r(\theta)}{\sin\theta}$$

➡ $r(\theta)=\sin\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)$



$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}=1$, $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{DB}}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 θ로 나타내시오. [평가원 기출]

두 변과 끼인 각이 보이므로 가차 없이 코사인법칙을 쓰자.

➡ $\overline{\mathrm{DB}}=x$라 하면 △ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$x^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\theta$$

➡ 삼각형 BCD의 넓이 : $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

➡ 삼각형 ABD의 넓이 : $\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\theta$

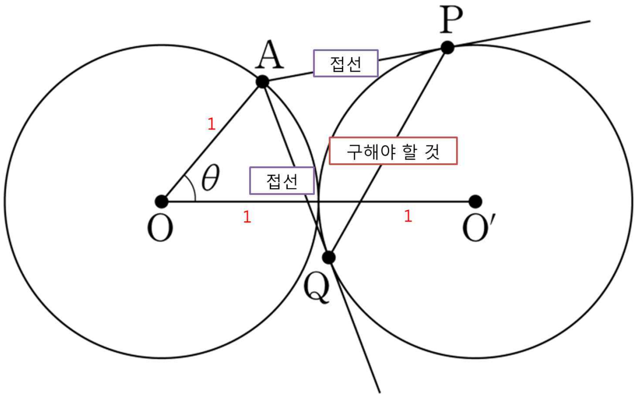
➡ 사각형 ABCD의 넓이 :

△BCD+△ABD

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(2-2\cos\theta)+\frac{1}{2}\sin\theta$$

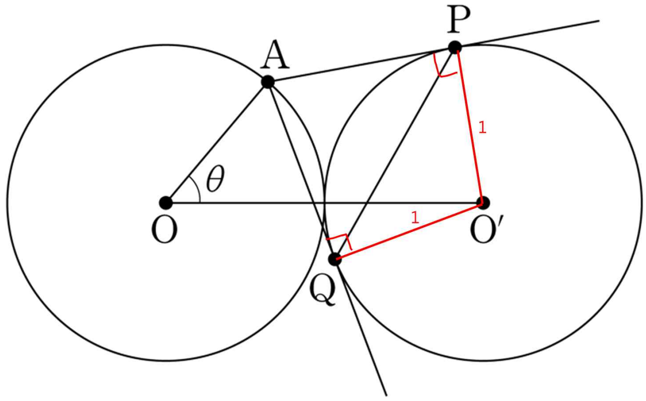
Solution

STEP 1



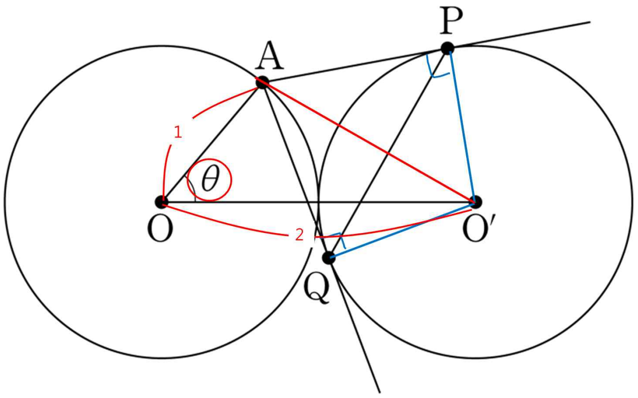
주어진 값과 구할 값을 표시한다.

STEP 2



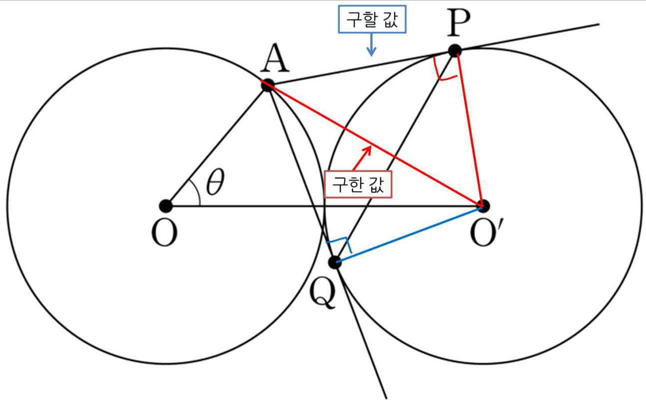
접선이니까 중심과 접점을 잇고 본다.

STEP 3



그 다음에 값을 구할 수 있는 게 없으므로 $\overline{AO}$를 잇는데, 이 때 코사인법칙을 쓸 수 있는 삼각형이 보인다.

STEP 4

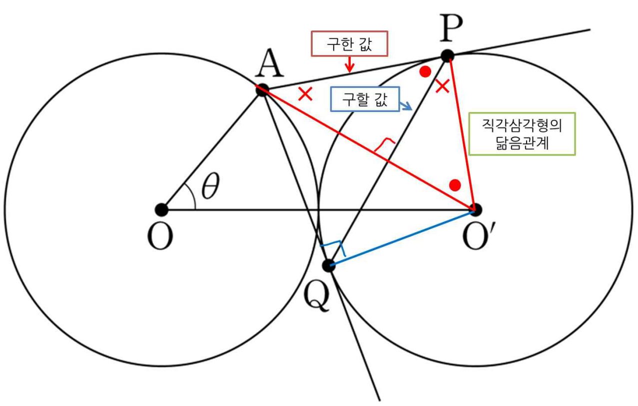


코사인법칙을 쓰면 $\overline{AO'}^2 = 1^2 + 2^2 - 4\cos\theta$

구하고 났더니 직각삼각형이 보여서 $\overline{AP}$의 길이를 구한다.

$\overline{AP}^2 = \overline{AO'}^2 - 1^2 = 4 - 4\cos\theta$

STEP 5



$\overline{AP}$를 구하고 났더니 $\overline{AO'}$와 $\overline{PQ}$가 수직인 것이 보이고 직각삼각형들의 닮음관계를 이용할 수 있는 것이 보인다. (⇦ 한 점에서 그은 두 접선은 서로 길이가 같다는 성질에서 유도된 것들)

STEP 6

왼쪽 그림에서 $\overline{PQ}$를 구해야 하는데, $\frac{1}{2}\overline{PQ}$는

$\overline{AP}$에 $\sin\angle OAP = \frac{\overline{PO'}}{\overline{AO'}}$를 곱하면 된다.

따라서 $\frac{1}{2}\overline{PQ} = \sqrt{4-4\cos\theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$

➪ $\overline{PQ} = 2\sqrt{\frac{4-4\cos\theta}{5-4\cos\theta}}$

문제에서 $\lim_{\theta\to0}\frac{\overline{PQ}}{\theta}$를 구하라 했으므로

➪ $\lim_{\theta\to0} 2\sqrt{\frac{4-4\cos\theta}{5-4\cos\theta}} \cdot \frac{1}{\theta}$

$= \lim_{\theta\to0}\frac{2}{\sqrt{5-4\cos\theta}} \cdot \sqrt{\frac{4-4\cos\theta}{\theta^2}}$

$= \frac{2}{1} \cdot \lim_{\theta\to0}\sqrt{\frac{4\sin\theta}{2\theta}} = 2\sqrt{2}$ (⇦ 로피탈의 정리)

22. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3 = 10,\ a_2 + a_5 = 24$일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

개념 **등차수열**

$a_2 + a_5 = (a_3 - d) + (a_3 + 2d) = 20 + d = 24$

$\therefore d = 4,\ a_6 = a_3 + 3d = 10 + 12 = 22$

➪ 정답 : 22

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} + 10x - 1}{x}$의 값을 구하시오. [3점]

개념 **초월함수의 극한**

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} + 10x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{2x} 2 + 10 = 2 + 10 = 12$

➪ 정답 : 12

24. 지면으로부터 H_1인 높이에서 풍속이 V_1이고 지면으로부터 H_2인 높이에서 풍속이 V_2일 때, 대기 안정도 계수 k는 다음 식을 만족시킨다.

$$V_2 = V_1 \times \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{\frac{2}{2-k}}$$

(단, $H_1 < H_2$이고, 높이의 단위는 m, 풍속의 단위는 m/초이다.) A지역에서 지면으로부터 12m와 36m인 높이에서 풍속이 각각 2(m/초)와 8(m/초)이고, B지역에서 지면으로부터 10m와 90m인 높이에서 풍속이 각각 a(m/초)와 b(m/초)일 때, 두 지역의 대기 안정도 계수 k가 서로 같았다. $\frac{b}{a}$의 값을 구하시오. (단, a, b는 양수이다.) [3점]

계산 실생활 지수함수와 로그함수

해마다 나오는 유형 중에 하나로, 문제 길이는 길지만 문제풀이에 이용되는 부분은 얼마 되지 않으므로 그 부분을 빠르게 추출해서 문제를 풀 수 있도록 해야 한다. 해마다 나오는 유형이고 배점도 높은 만큼 반드시 공략할 수 있도록 연습을 충분히 해 두도록 하자.

Step 1

지문 읽기

지면으로부터 H_1인 높이에서 ①풍속이 V_1이고 지면으로부터 H_2인 ①높이에서 풍속이 V_2일 때, ①대기 안정도 계수 k는 다음 식을 만족시킨다.

① 문제에 여러 가지 어려운 표현들이 나오지만, 문제 풀이에서 중요한 것은 문자들이 어떤 것이 있는지만 알면 된다. 이 문제에서는 풍속, 높이, 대기 안정도 계수라는 문자가 나오므로 그대로 대입을 하자.

③ $V_2 = V_1 \times \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{\frac{2}{2-k}}$

(단, $H_1 < H_2$이고, 높이의 단위는 m, 풍속의 단위는 m/초이다.)

② 위에서 언급된 문자들이 그대로 아래에 나온다.

A지역에서 지면으로부터 ②12m와 36m인 높이에서 ②풍속이 각각 2(m/초)와 8(m/초)이고, B지역에서 지면으로부터 ②10m와 90m인 높이에서 ②풍속이 각각 a(m/초)와 b(m/초)일 때, 두 지역의 ② 대기 안정도 계수 k가 서로 같았다. $\frac{b}{a}$의 값은? (단, a, b는 양수이다.) [4점]

③ 문제에서 사용해야 할 식이고, 이 식을 이해할 필요는 전혀 없다. 단지 문제에 나온 숫자를 대입해서 $\frac{b}{a}$를 구하는 것이 중요할 뿐이다.

이런 유형의 문제에서 절대 문제를 이해하려고 하지 말고, **대입**만 정확히 해서 계산을 정확히 하는 데만 신경 쓰자. 대기 안정도가 뭔지 이해할 필요가 전혀 없다. 이 문제는 단지 대입해서 구하라는 것만 정확히 구하라는 문제이다.

Step 2

그렇게 문제를 읽는 것을 파악했으면 이제 식을 세우자.

A지역에서 지면으로부터 12m와 36m인 높이에서 풍속이 각각 2(m/초)와 8(m/초)이고

$+ \;\; V_2 = V_1 \times \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{\frac{2}{2-k}}$ ➪ $8 = 2 \times \left(\frac{36}{12}\right)^{\frac{2}{2-k}}$ ➪ 대기 안정도 k를 구할 수 있다.

B지역에서 지면으로부터 10m와 90m인 높이에서 풍속이 각각 a(m/초)와 b(m/초)일 때

$+ \;\; V_2 = V_1 \times \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{\frac{2}{2-k}}$ ➪ $b = a \times \left(\frac{90}{10}\right)^{\frac{2}{2-k}}$ ➪ 대기 안정도 k를 구할 수 있다.

풍속, 높이에 정확히 대입만 하면 A, B 지역에서의 대기안정도 k가 각각 나오는데 그 값이 서로 같다고 문제에 나왔으므로 각각에서 k를 구해서 서로 같다고 방정식을 세우면 되겠다.

A지역의 k : $\frac{2}{2-k} = \log_3 4$ ➪ $2-k = \frac{2}{\log_3 4}$ ➪ $k = 2 - \frac{2}{\log_3 4}$

B지역의 k : $\frac{2}{2-k} = \log_9 \frac{b}{a}$ ➪ $2-k = \frac{2}{\log_9 \frac{b}{a}}$ ➪ $k = 2 - \frac{2}{\log_9 \frac{b}{a}}$

k가 서로 같음 : $2 - \frac{2}{\log_3 4} = 2 - \frac{2}{\log_9 \frac{b}{a}}$ ➪ $\frac{2}{\log_3 4} = \frac{2}{\log_9 \frac{b}{a}}$

➪ $\log_3 4 = \log_9 \frac{b}{a}$ ➪ $\log_9 16 = \log_9 \frac{b}{a}$ ➪ $\frac{b}{a} = 16$

식이 복잡해 보이지만, 문제에서 하라는 대로 계산만 하면 답은 자연스럽게 나오는 것이 이 유형의 특징이다.

➪ 정답 : 16

25. 삼각방정식 $\sqrt{6}\sin x-\sqrt{2}\cos x-2=0$의 모든 실근의 합을 $\frac{q}{p}\pi$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $0\le x\le 2\pi$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

계산 **삼각방정식**

삼각방정식의 경우 실수하지 않고 계산하는 것이 중요하다. 문제에서 제시된 x의 범위를 반드시 체크하도록 하고, 치환한 경우에도 범위를 판단해서 잘못된 근을 구하거나 근을 빠뜨리지 않도록 하자. 대부분의 경우 합성을 이용하거나 치환을 이용하면 별 무리 없이 풀린다. 치환은 보통 제곱이 들어간 경우 사용한다. 삼각함수의 합성은 자기가 가장 편한 방법으로 하기로 하자. 대체적으로 sin을 cos보다 좀 더 많이 활용하는 편이다.

Concept

삼각함수의 합성 : 각도가 같은 삼각함수의 **최댓값**이나 **최솟값**을 구할 때

① $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ (단, $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

② $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$ (단, $\sin\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

Solution

우선 식을 합성하기 편하게 양 변을 $\sqrt{2}$로 나누면 $\sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{2}$이다.

이 식을 삼각함수의 합성을 통해서 합성하면 $2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$ $(0\le x\le 2\pi)$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\leqq x\leqq 2$에서 $\frac{-\pi}{6}\leqq x-\frac{\pi}{6}\leqq\frac{11}{6}\pi$이므로

$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$ ➪ $x=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi$

따라서 $\frac{5\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}=\frac{16\pi}{12}=\frac{4\pi}{3}$

$\therefore p+q=3+4=7$ ➪ 정답: 7

Tip

삼각방정식의 풀이는 수학(하) 과정에 나오는 내용이다. 그리고 이 내용이 수학 Ⅱ 에서 다시 한 번 반복되는데, 큰 차이는 없고 일반항에 대한 내용이 나오는 것이 차이다. 그러나 실제로 일반항을 구할 일은 수능에서 별로 없는데, 그 이유는 수능에서는 계산을 간단하게 만들기 위해 이 문제처럼 변역을 주기 때문이다. 그렇기 때문에 이 문제처럼 간단한 삼각방정식은 수학(하)에서 했던 것처럼 그래프를 이용해서 풀고, 일반항은 암기만 해 두고 있다가 가끔 필요한 문제에서 사용하자.

26. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\log a_n$의 가수와 $\log a_{n+1}$의 가수는 서로 같다.
>
> (나) $1 < \dfrac{a_n}{a_{n+1}} < 100$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 500$일 때, a_1의 값을 구하시오. [4점]

추론 **상용로그 + 수열**

상용로그와 수열이 함께 연계되어 나온 문제이다. 상용로그에서 가수가 서로 같다는 것에서 두 상용로그의 차가 정수가 나온다는 사실을 이용할 수 있는 것을 생각하는 게 중요했다. 이 방법은 상용로그 공부를 했던 친구라면 자주 봤던 스킬이므로, 크게 어렵지 않게 생각해낼 수 있었을 것이고 그 다음 과정부터는 크게 어렵지 않았다.

Solution

$\log a_n$과 $\log a_{n+1}$의 가수가 같으므로

$\log a_n - \log a_{n+1} =$ (정수)이다.

따라서 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 10^{\text{정수}}$이고, $1 < \dfrac{a_n}{a_{n+1}} < 100$이라 했으므로 이를 만족하는 정수는 -1 밖에 없다.

$\therefore a_{n+1} = \left(\dfrac{1}{10}\right) a_n$

➪ a_n은 공비가 $\dfrac{1}{10}$인 등비수열.

➪ 초항을 a라 하면 무한등비급수의 합 공식에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-\frac{1}{10}} = 500$$

➪ $a = 450$

➪ 정답 : **450**

Tip

4점짜리 문제치고는 통상적인 내용을 담고 있는 문제라고 할 수 있다. 상용로그의 가수가 같으면 서로 빼 보는 것은 지금까지 자주 나와서 익숙한 스킬이므로 그것을 적용하면 점화식이 쉽게 나오고, 그 다음에 무한등비급수의 공식을 쓰기만 하면 되므로 별다른 생각 없이 계산만 정확히 하면 답이 쉽게 나오는 문제이다. 상용로그는 대체적으로 일반적인 풀이법을 이용한 문제들이 많이 나오는 단원이므로 기본 유형들을 정확히 익혀 두는 것이 좋다.

6월 모의고사 문항 분석

27. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$에 대하여

$$F(x)=\int_0^x t\,f(x-t)\,dt \quad (x \ge 0)$$

일 때, $F'(a)=\ln 10$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오. [4점]

계산 **정적분으로 나타내어진 함수의 미분**

정적분으로 나타내어진 함수의 미분에서 문자가 섞인 복잡한 식이 나왔다. 그 때는 적분변수에 주의해서 정확히 미분하기만 하면 계산이 어렵지 않게 되므로 계산 실수를 하지 않도록 개념을 확실히 해서 미분을 빠르고 정확하게 할 수 있도록 하자.

Concept

정적분으로 나타내어진 함수의 미분

① $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt=f(x) \rightarrow \int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$를 x에 관하여 미분!

② $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{ax}^{bx} f(t)dt=bf(bx)-af(ax) \rightarrow \int_{ax}^{bx} f(t)dt=F(bx)-F(ax)$를 x에 관하여 미분!

정적분으로 나타내어진 함수의 미분 : 변수가 두 개 있는 경우

$\int$ 기호 안에 있는 문자 중 상수에 해당하는 문자를 밖으로 뺀다

변수가 두 개 있는 경우 세심하게 미분을 해야 하는데, 이 문제에서 정리해 보도록 하자.

Step 1

문제에서 $F(x)$가 주어졌고, $F'(a)$를 물어봤으므로, $F(x)$식을 먼저 정리해야 한다.

$F(x)=\displaystyle\int_0^x t\,f(x-t)\,dt$에서 적분변수에 주의하여 식을 정리하자.

➪ $\int$ 기호 안에서 적분변수가 t이므로 t를 제외한 문자는 모두 상수로 취급하자.

➪ 또, $f(x-t)$에서 $x-t=a$로 치환하면 $f(x)$ 기호 안에 있는 것을 바깥으로 빼낼 수 있다.

➪ $x-t=y \Rightarrow -dt=dy$

$$\int_0^x t\,f(x-t)\,dt ➪ \int_x^0 (x-y)f(y)(-dy) ➪ \int_0^x (x-y)f(y)da = x\int_0^x f(y)da-\int_0^x yf(y)da$$

Step 2

이제 양 변을 x에 관해서 미분하자.

(준식) = $\displaystyle\int_0^x f(y)dy+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(y)dy$

$f(y)=\dfrac{1}{1+y}$이므로 $\displaystyle\int_0^x f(y)dy=\ln|1+x|$

$\ln|1+a|=\ln 10$ ➪ $a=9$ $(\because a>0)$

➪ 정답 : 9

28. 사차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수는 모두 양수이다.
> (나) $g(-1)=g(2)=0$
> (다) 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x-2)$가 만나는 네 점의 x좌표는 각각 -2, 1, 2, 6이다.

분수부등식 $\dfrac{f(x)}{g(x-2)} \le 1$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. [4점]

추론 **분수부등식**

문제에서 조건들이 이것저것 많이 있지만, 이 내용들은 모두 수능 기출로 한 번씩 나왔던 것으로, 계산이 조금 복잡하지만 식을 구하는 과정만 잘 따라간다면 크게 새로울 것은 없는 문제라고 할 수 있겠다. 조건을 만족하는 다항함수를 구하는 것은 주어진 식을 이용해서 미지수를 최소화하고 빠르게 계산하여 식을 구하는 것이 포인트이므로, 기출문제에서 이런 유형들을 좀 더 풀어보면서 계산을 빠르고 정확하게 하는 연습을 할 필요가 있다. 분수부등식은 무연근 놓치는 실수만 하지 않으면 대체적으로 무난하다.

Step 1

이 문제는 시간만 넉넉하면 누구나 풀 수 있지만, 식을 어떻게 세우느냐에 따라서 문제풀이에 걸리는 시간이 달라지므로 빠르게 문제에 접근하는 것 위주로 접근할 필요가 있다.

> ① 사차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$
> ② $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수는 모두 양수이다.
> ③ $g(-1)=g(2)=0$
> ④ 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x-2)$가 만나는 네 점의 x좌표는 각각 -2, 1, 2, 6이다.

이 조건들 중 식을 세울 때 바로 사용할 수 있는 것을 살펴보자. ①번은 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$로 식을 세울 수 있게 해 주지만 미지수가 너무 많아지므로 일단 바로 이렇게 미지수를 5개 잡지 말고 다른 조건들부터 살펴보자.
② 조건은 당장 사용할 수 없는 조건이니 패스하고,
③ 조건이 중요하다. $g(x)$는 이차함수인데, $g(x)=0$의 두 근이 나온 것이므로
$g(x)=a(x+1)(x-2)$ $(단, a>0)$이라고 쓸 수 있다. (⇦ ②번 조건도 활용)
여기서 ④번을 보면 $f(x)=g(x-2)$의 근이 -2, 1, 2, 6이라고 준 것이므로 여기서 식을 거의 구할 수 있다.
$g(x)$는 이미 구했으므로 $g(x-2)=a(x-1)(x-4)$이다. (⇦ x자리에 $x-2$를 대입)
그 다음에 $f(x)-g(x-2)=0$의 근이 -2, 1, 2, 6이라는 것이므로 이를 이용하면
➪ $f(x)-g(x-2)=k(x+2)(x-1)(x-2)(x-6)$이 된다. (⇦ $f(x)$가 4차함수이므로 바로 식이 나온다.)
➪ $f(x)=k(x+2)(x-1)(x-2)(x-6)+a(x-1)(x-4)$
뭔가 복잡해 보이지만, 나머지정리를 이용하여 식을 세운 것이다.

> **나머지정리**
> 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나눌 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면
> ① $f(x)=(x-a)Q(x)+R$ ② $f(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지는 $f(a)$
> ➪ $f(a)$가 0이면 $f(x)=(x-a)Q(x)$

Step 2

Step 1에서 세운 식에서 더 이상 미지수를 없앨 수 없으므로 이제 그냥 여기서 풀 수 있는 문제라는 것을 알아야 한다.

그러면 $\dfrac{f(x)}{g(x-2)} \le 1$에 알고 있는 것들을 대입해서 정리해보자.

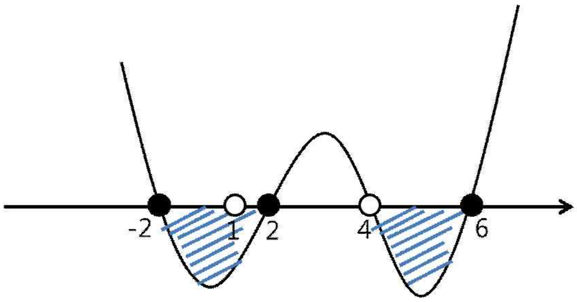
➪ $f(x)-g(x-2)=k(x+2)(x-1)(x-2)(x-6)$에서 $f(x)=g(x-2)+k(x+2)(x-1)(x-2)(x-6)$을 대입

➪ $\dfrac{g(x-2)+\cdots}{g(x-2)} \leqq 1$ ➪ $1+\dfrac{k(x+2)(x-1)(x-2)(x-6)}{g(x-2)} \leqq 1$

➪ $\dfrac{k(x+2)(x-1)(x-2)(x-6)}{a(x-1)(x-4)} \leqq 0$

자, 여기서 마음대로 약분하지 말고, $x \neq 1,\ x \neq 4$을 쓰고 약분하자. 분모가 0이 아니어야 한다는 것은 수학의 기본!

➪ $\dfrac{(x+2)(x-2)(x-6)}{(x-4)} \leqq 0$ (⇦ 최고차항의 계수가 모두 양수이므로 약분해도 부등호 방향 그대로)

➪ 

$-2 \le x < 1,\ 1 < x \le 2,\ 4 < x \le 6$

➪ $x=-2,\ -1,\ 0,\ 2,\ 5,\ 6$

➪ 정답 : **10**

Tip

이 문제의 포인트는 크게 2개라고 할 수 있다. 첫째로, 고차방정식을 해를 알 때 거기서 고차방정식을 세울 수 있는지. 즉, 나머지정리를 잘 활용할 수 있는지를 물어보는 것이다. 다음으로, 분수방정식을 실수 없이 풀 수 없는지. 무연근이 있는데 그것을 놓치지 않고 제거할 수 있는지가 문제에서 가장 중요한 포인트였다. 분수방정식을 정리할 때 $x-1$을 아무 생각 없이 약분하면 답이 11이 나오게 되므로, 혹시 그 답으로 틀렸다면 항상 무연근을 생각해야 한다는 사실을 잊지 말자.

29. 좌표평면에서 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 A에 대하여 점 B는 다음 조건을 만족시킨다.

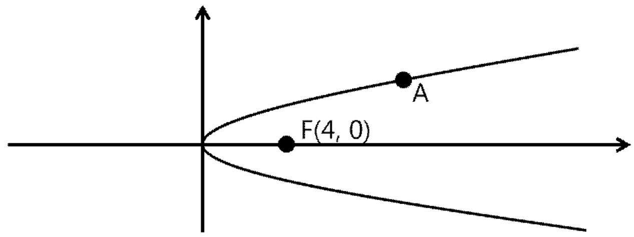
> (가) 점 A가 원점이면 점 B도 원점이다.
> (나) 점 A가 원점이 아니면 점 B는 점 A, 원점 그리고 점 A에서의 접선이 y축과 만나는 점을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심이다.

점 A가 포물선 $y^2=16x$ 위를 움직일 때 점 B가 나타내는 곡선을 C라 하자. 점 $(3, 0)$을 지나는 직선이 곡선 C와 두 점 P, Q에서 만나고 $\overline{\mathrm{PQ}}=20$일 때, 두 점 P, Q의 x좌표의 값의 합을 구하시오. [4점]

추론 **이차곡선의 정의 + 접선의 방정식**

이차곡선에서 정의를 이용하는 문제는 대부분 계산이 간단하지만 접선을 이용하는 문제는 복잡한 식을 다뤄야 하므로 계산이 복잡해질 수 있다. 이 문제도 어려워 보이지만 문제에서 하라는 대로 차근차근 식을 세워서 나간다면 의외로 무난하게 풀리는 문제라고 할 수 있다. 조금 복잡해 보이지만 차근차근 풀어 볼 수 있도록 하자. 이차곡선의 접선의 방정식은 꼭 외워두고 있자.

Step 1

	일단 모르면 그림을 그려 본다. $y^2=16x$이므로 $p=4$ 여서 초점이 $F(4,\ 0)$으로 나온다. 문제에서 A가 포물선 위의 점이라고 했고 B는 그에 따라서 바뀌는 점들이므로 일단 여기까지 표시해 두도록 하자.

그 다음에 B를 구해야 하는데 복잡해 보이니 찬찬히 읽어 보자.

> (가) 점 A가 원점이면 점 B도 원점이다.
> (나) 점 A가 원점이 아니면 점 B는 점 A, 원점 그리고 점 A에서의 접선이 y축과 만나는 점을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심이다.

(가)는 그냥 말 그대로인 것 같고 (나)가 포인트인 것 같은데, 생각보다 어렵지 않다. 무게중심은 공식을 알고 있으므로 세 점만 구하면 되겠다.

점 A가 포물선 위의 점이라 했는데, 그런 경우 보통 별다른 말이 없으면 $(x_1,\ y_1)$으로 두므로 이렇게 두고 시작하자.

그러면 접선의 방정식은 $y_1y=8(x+x_1)$이 되므로, (⇦ y^2은 y_1y로, x는 $\dfrac{x+x_1}{2}$로)

y축과 만나는 점은 $y=\dfrac{8}{y_1}x+\dfrac{8x_1}{y_1}$에서 $\left(0,\ \dfrac{8x_1}{y_1}\right)$임을 알 수 있다.

➪ 세 점을 알았으니 무게중심의 공식 $G\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$에서 $B\left(\dfrac{x_1}{3},\ \dfrac{y_1^2+8x_1}{3y_1}\right)$이 된다.

➪ 이 때 $y_1^2=16x_1$을 대입하면(⇦ 포물선 위의 점이므로) $B\left(\dfrac{x_1}{3},\ \dfrac{8x_1}{y_1}\right)$이 된다.

이 식을 보면 A가 원점이면 $y_1=0$이 되므로 그것 때문에 (가) 조건을 달아준 것을 알 수 있다.

Step 2

이제 B의 좌표를 구했으니, B를 이용해서 C의 자취를 구해야 하는데 자취라는 말이 나오면 당황하는 친구들이 있을 것이다. 하지만 생각보다 어렵지 않으므로 너무 걱정하지 말자.

먼저 $B\left(\dfrac{x_1}{3},\ \dfrac{8x_1}{y_1}\right)$는 계속 움직이는 점이므로 이게 도형 C를 그린다는 말인데, 이 때 자취를 구하면 $x^2+y^2=1$과 같은 식으로(예로 든 것) $x_1,\ y_1$ 등의 문자가 사라지고 $x,\ y$만 남게 되어야 한다.

그러면 $\dfrac{x_1}{3}=x,\ \dfrac{8x_1}{y_1}=y$에서 $x_1,\ y_1$을 제거하고 $x,\ y$만 남기는 것이 우리가 할 일이라고 생각하면 된다.

이 때 사용할 수 있는 식을 살펴봐야 한다. x_1, y_1에 대한 관계식은

$(x_1,\ y_1)$이 포물선 위의 점이라는 것을 이용한 $y_1^2 = 16x_1$이 있다.

이것을 이용해 보도록 하자.

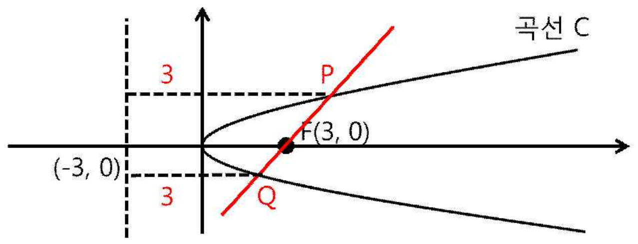
➪ 앞의 식들을 $x_1 = \cdots$, $y_1 = \cdots$ 형태로 고치면 된다.

➪ $x_1 = 3x$, $y_1 = \dfrac{24x}{y}$

➪ $y_1^2 = 16x_1$에 대입하면 $\dfrac{72^2x^2}{y^2} = 16 \cdot 3x$

➪ 식을 정리하면 $y^2 = 12x$가 나온다.

Step 3



이제 곡선 C가 $y^2 = 12x$라는 것이 나왔으니 포물선의 그래프를 그리면 왼쪽과 같다.
점 (3, 0)이 초점인데, 이 점을 지나는 직선이 곡선 C와 두 점 P, Q에서 만난다 했으므로 그 점을 표시하자.
포물선에서 초점이 나오면 당연히 준선을 표시해야 하므로 함께 표시했다.

이 때, 〈$\overline{FP} = 3 + P$의 x좌표, $\overline{FQ} = 3 + Q$의 x좌표 〉가 성립하므로 (⇦ 포물선의 정의)

$\overline{PQ} = \overline{FP} + \overline{FQ} = 20$에서 P, Q의 x좌표의 합은 14가 나온다.

➪ 정답 : 14

Tip

이차곡선 문제 치고 상당히 계산이 많이 필요한 문제라고 할 수 있다. 일단 접선의 방정식을 못 세우면 풀 수 없고, 접선의 방정식을 세워도 무게중심을 제대로 구하지 못하면 막힐 수 있었다. 거기까지 했더라도 자취의 방정식을 구하는 것이 다소 까다로울 수 있으며, 그래서 나온 포물선의 정의를 이용해서 x좌표의 합까지 구해야 하는 이차곡선의 종합적인 문제라고 할 수 있겠다.
다소 어렵게 느껴질 수 있지만 사실 계산 과정만 정확하다면 차근차근 풀리는 스타일의 문제이므로, 이차곡선의 접선 부분 계산 연습을 많이 해두면 큰 도움이 될 것이라 생각한다.

30. 좌표평면에서 곡선 $y=x^2+x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표를 각각 s, t $(0<s<t)$라 하자. 양수 k에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 k가 되도록 하는 점 (s, t)가 나타내는 곡선을 C라 하자. 곡선 C 위의 점 중에서 점 $(1, 0)$과의 거리가 최소인 점의 x좌표가 $\frac{2}{3}$일 때, $k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

★ Killer 문제

추론	발견적 추론	최대·최소와 미분

시험 끝나고 차분히 풀면 생각보다 어렵지 않은 문제인데, 시험장에서는 꽤나 어렵게 느껴졌을 수도 있겠다. 이번 6월 모의고사의 특징이 계산 과정이 다소 까다롭지만 추론 과정은 조금 덜 해도 되는 것이 특징으로, 이와 같은 추세로 나온다면 수능까지 계산 연습을 많이 해두는 것이 중요하다고 할 수 있겠다.

Step 1

시험 끝나고 문제를 다시 볼 때는 시험장에서의 마음으로 문제를 다시 한 번 읽어보고, 그 때 놓쳤던 것이 무엇인지를 파악해야 한다.

지문 차분히 다시 읽어보기

좌표평면에서 곡선 ① $y=x^2+x$위의 두 점 A, B의 x좌표를 각각 s, $t(o<s<t)$라 하자.	① 일단 s, t라는 새로운 문자가 나왔으니 어떤 문자인지 체크를 해 두자. 가능하다면 이 때 그래프를 그려 두고 크게 써 두는 것이 나중에 문제를 풀어갈 때 크게 도움이 될 것이다.
② 양수 k에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 k가 되도록 하는 ③점 $(s,\ t)$가 나타내는 곡선을 C라 하자.	② 넓이란 말이 나왔으니 간단한 삼각형 넓이거나 좀 복잡하면 적분을 써야 할지도 모른다고 생각해 두어야 한다. 어떤 경우가 되었건 그래프를 그릴 생각은 하고 있자. ③ s, t라는 문자가 나왔는데 ①번과 같은 보기는 보통 휘리릭 넘기므로 s, t가 어떤 점인지 다시 앞에서 확인하게 될 것 같다.
④ 곡선 C 위의 점 중에서 점 (1, 0)과의 거리가 최소인 점의 x좌표가 $\frac{2}{3}$일 때, $k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고 p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]	④ 최소라는 말이 나왔으니 여기가 키포인트가 될 것이라고 짐작할 것이다. 지금까지 충분히 공부를 해 왔다면 미분을 이용해야 될 것을 생각할 수 있겠다.

시험 볼 때 이것저것 생각해서 지금은 이 조건들이 어떤 의미를 갖는지 알겠지만, 시험장에서 처음 본다면 생각보다 문제를 이해하는데 시간이 많이 걸릴 수 있다. 그럴 때는 가장 간단한 조건부터 〈가시화〉해서 문제에 뭐라도 써 놓는 것이 멘붕해서 헤매지 않게 하는 좋은 방법이다.

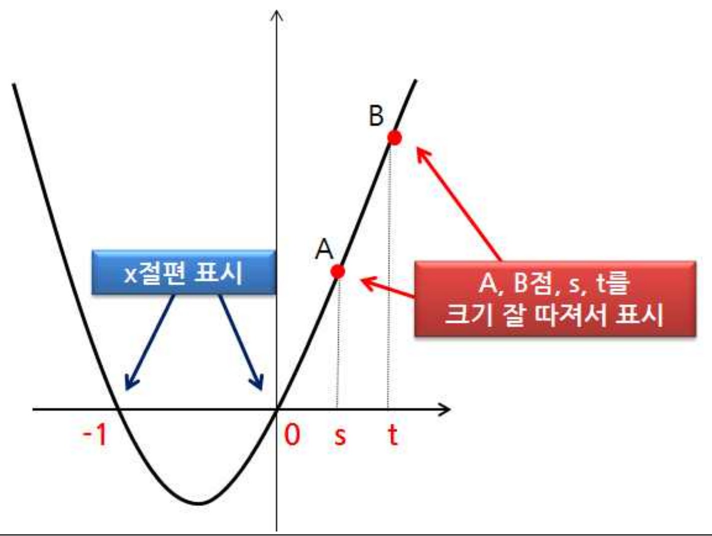
Tip

수능에서 **〈천재적인 풀이〉**에 절대 집착하지 말기를 바란다. 2011년 수능 24번 문제처럼 정답률이 낮은 것도 〈천재적인 풀이〉를 요구하기보다는 문제를 차분히 읽어가면서 분석하는 능력을 요구한 것이기 때문에, 수능에서 독특한 풀이에 집착하다 보면 문제의 핵심을 놓칠 수 있다. 계산이 조금 복잡해질 것 같아 보여도 당황하지 말고 차분히 해 보도록 하자. 그래도 너무 복잡하면 그 때 다른 풀이를 생각해 보는 것이다. 특히나 이번 6월 모의고사는 계산을 차분히 하는 능력을 많이 물어봤기 때문에 수능 때도 그런 문제가 나올 확률이 높다.

Step 2

말이 거창한데 일단 뭐라도 시험지에 써 보는 것이라 생각하면 되겠다. 〈발견적 추론〉 문제면 직접 몇 개 수를 집어넣어 보고, 그래프 문제면 문제에 나온 식들을 간단히 문제에 그래프로 옮기는 것이다.

문제 조건을 그림으로 옮기기 : 조건 ①

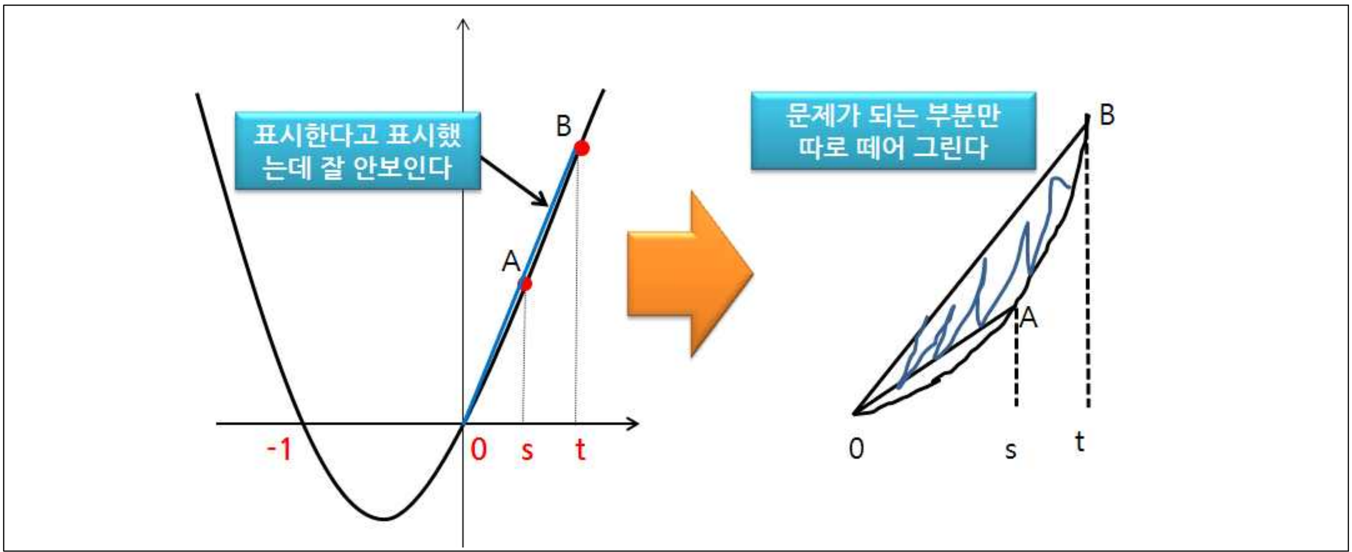


수학을 잘 하는 학생이라도 웬만하면 그래프는 그리는 것이 안전하다. 그리고 그래프는 너무 공들여 그릴 필요는 없지만 이차함수니까 x절편과 전반적인 개형 정도는 나타나게 그려야 한다. 이걸 잘못 그리면 문제풀이가 산으로 갈 수가 있다.

그 다음에 문제에서 나온 s, t를 표시하는데, 큰직큰직하게 나중에 알아보기 편하게 써 두자. 풀이가 길어질수록 뭐가 s이고 뭐가 t인지 헷갈리면서 식이 엉망이 되는 경우가 높으므로 처음부터 잘 표시해서 그런 일이 없도록 해야 한다.

여기까지 조건 ①을 그림으로 옮겼는데, 옮기고 나니까 한결 마음이 놓인다. 이제 조건 ②를 옮겨 보자.

문제 조건을 그림으로 옮기기 : 조건 ②



마우스로 그리는 거긴 하지만 손으로 그리는 느낌으로 그리고 있다. 보통 그래프를 왼쪽에 있는 것처럼 처음에 많이 그리게 되는데, 여기에 넓이를 표시하려다 보면 보이지가 않는다. 그러면 필요한 부분만 따로 떼어서 그리도록 하자. 포물선 폭 넓힌다고 그림 다 지우고 하면 시간이 많이 낭비된다. 어차피 우리는 문제 풀어서 답 내는 것이 중요하니까 너무 그림의 퀄리티에 집착하는 삽질은 금물이다.

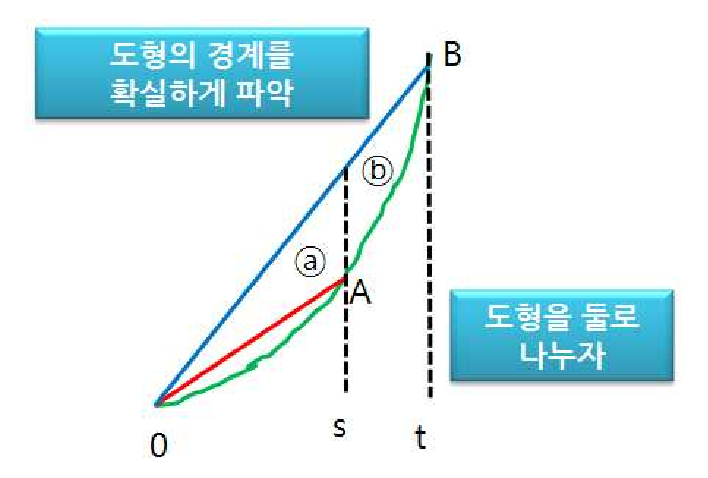
아무튼 넓이를 구해야 하니까 오른쪽 그림처럼 옮겨 두면 여기서 넓이를 어떻게 구할지 생각해보자. 여기까지 주저리주저리 말이 길지만 시험장에서는 얼마 걸리지 않는 과정이다.

Step 3

이제 넓이를 계산하러 가야 한다. 그래프를 보면 어떻게 구할지 감이 올 것이다.

조건 ② 그림에서 넓이 구하기

: 양수 k에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 k



앞에서 넓이를 구하기 쉽게 그림을 다시 그렸다면 식을 세우기도 좋을 것이다. 적분 문제에서는 넓이를 구할 때 경계를 정확히 파악하는 것이 중요하다.

그렇게 생각하면 자연스럽게 구해야 할 도형을 둘로 쪼개야겠다는 생각을 하게 된다. 왜냐하면 경계가 서로 다르기 때문이다.

ⓐ 위경계 : 직선 OB / 아래경계 : 직선 OA
ⓑ 위경계 : 직선 OB / 아래경계 : 곡선 AB

이제 넓이를 구하기 위해서 각각의 직선의 방정식들을 구해 두자. 다행히 OA, OB 모두 원점을 지나는 직선이므로 $y=mx$ 형태의 직선이다 그리 어렵지 않다.

각각의 직선의 방정식들을 구하려면 A, B점의 좌표를 알아야 한다. $A(s,\ s^2+s)$, $B(t,\ t^2+t)$인데, 시험 때 A, B가 곡선 위의 점이라는 사실이 눈에 안 보여서 갑자기 당황할 수도 있으나 침착하자.

조건 ② 그림에서 넓이 구하기

이용공식

직선의 방정식

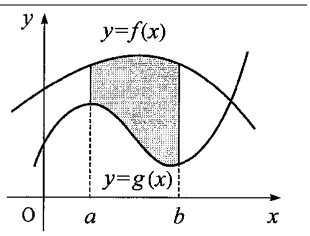
$OA\ :\ y=(s+1)x$

$OB\ :\ y=(t+1)x$

넓이와 적분

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$



계산

도형 ⓐ : 삼각형이므로 간단하게 $S=\frac{1}{2}\times s\times\{(t+1)s-(s^2+s)\}=\frac{1}{2}s(ts-s^2)$

도형 ⓑ : 넓이와 적분 공식을 쓰자. 문자가 많아서 헷갈릴 수 있으나 차분하게 하면 된다.

$$S=\int_s^t\{(t+1)x-(x^2+x)\}dx=\int_s^t(tx-x^2)dx=\left[\frac{1}{2}tx^2-\frac{1}{3}x^3\right]_s^t$$

$$=\frac{1}{2}t(t^2-s^2)-\frac{1}{3}(t^3-s^3)$$

ⓐ + ⓑ : $\cancel{\frac{1}{2}ts^2}-\frac{1}{2}s^3+\frac{1}{2}t^3-\cancel{\frac{1}{2}ts^2}-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{3}s^3=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{6}s^3=k$

문자가 많아서 까다롭게 느껴질 수 있는 계산이므로 심호흡해서 실수 없이 처리해야 한다. 직선과 곡선으로 둘러싸인 넓이 공식이 기억나면 그걸 써도 되겠다. 물론 기억이 나지 않으면 위처럼 정공법으로 가도 되고, 생각하는 것만큼 복잡하지는 않다.

Step 4

보통 계산이 잘 안 되는 학생들은 Step 3에서 막힐 수도 있는데 그런 경우는 적분 계산 연습을 좀 해 둘 필요가 있다. 수능이 계산이 복잡하지 않게 나오는 시험이라지만 저 정도의 계산은 하는 것을 요구하므로 그 정도는 실수하지 않고 할 수 있어야 한다.

이제 조건 ②까지 되었고 점 $(s,\ t)$가 나타내는 곡선 C가 $\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{6}s^3=k$라고 까지 알았다. 이것보다는 $x,\ y$가 좀 더 익숙하니까 $(s,\ t)=(x,\ y)$로 바꾸어서 $\frac{y^3}{6}-\frac{x^3}{6}=k$라고 생각하고 있어도 되겠다. (조건③)

이제 조건 ④가 남았는데 다시 한 번 읽어보자.

곡선 C 위의 점 중에서 점 (1, 0)과의 거리가 최소인 점의 x좌표가 $\frac{2}{3}$

여기서 잘 안 되었을 가능성이 높다. 최대·최소 문제는 보통 미분을 쓰는데, 미분을 쓰려고 식을 만들려 해 보니 $\frac{y^3}{6}-\frac{x^3}{6}=k$ 이라는 그래프가 전혀 익숙하지 않기 때문이다. 이때부터 멘탈이 붕괴된다.

Step 4 : Solution 1

그러나 $\frac{y^3}{6}-\frac{x^3}{6}=k$라는 식이 생각보다 복잡하지 않으므로 이 곡선 위의 점을 $(a,\ b)$라 두고 $\frac{b^3}{6}-\frac{a^3}{6}=k$에서 식을 변형해서 $b=(a^3+6k)^{\frac{1}{3}}$이라고 구하고 접근해도 된다. 즉 곡선 위의 점이 $\left(a,\ (a^3+6k)^{\frac{1}{3}}\right)$ 이 되므로, $(1,\ 0)$과의 거리 공식을 써서 a에 관해서 미분하는 〈정공법〉을 쓰는 것이다.

이 과정이 의외로 잘 안 된다. $b=(a^3+6k)^{\frac{1}{3}}$까지는 구했어도 식의 흉측함에 놀라서 뭔가 틀린 것이 아닐까 눈을 의심하고 다른 풀이를 생각하는 경우가 많다. 그러나 별의별 복잡한 식을 미분하는 것을 연습했다면 사실 이 정도야 그렇게 복잡한 것도 아니다. 〈수능은 계산이 복잡하지 않다〉 라는 명제를 자기 마음대로 해석하면 이 풀이로 갈 수 없다.

그 다음 과정이야 명료하다.

$d=\sqrt{(a-1)^2+(a^3+6k)^{\frac{2}{3}}}$ 이므로, d 안에 있는 식을 a에 관해서 미분하면

$2(a-1)+\frac{2}{3}(a^3+6k)^{-\frac{1}{3}}\cdot 3a^2$이 되고,

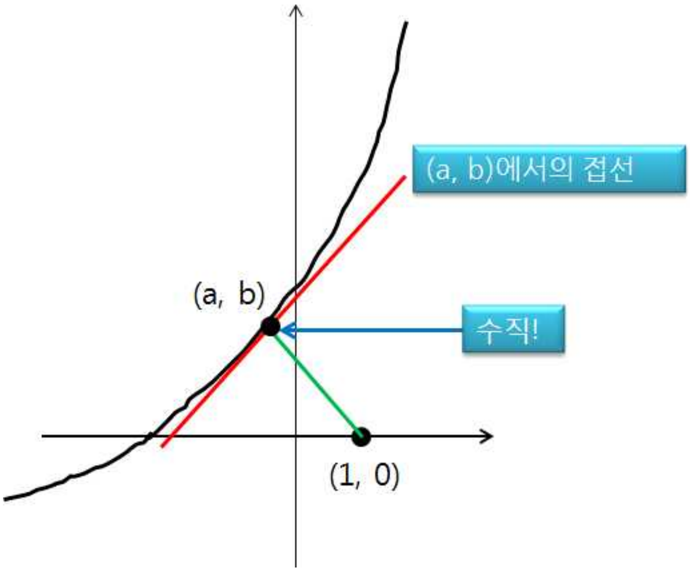
$a=\frac{2}{3}$일 때 최소이므로 위 식에 $a=\frac{2}{3}$을 대입하면 0이 나올 것이다.

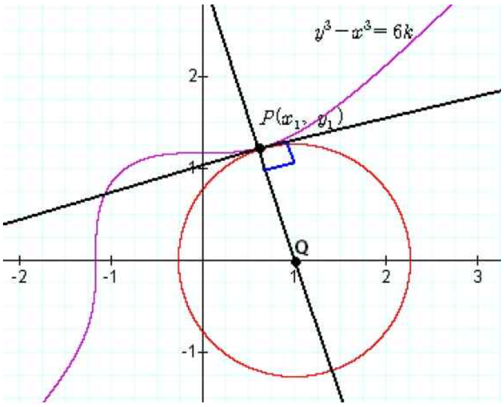
따라서 $-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{8}{27}+6k\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{4}{3}=0$

$\Rightarrow\frac{8}{9}\left(\frac{8}{27}+6k\right)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\ \Leftrightarrow\ \frac{8}{27}+6k=\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}=\frac{64}{27}\ \Leftrightarrow\ 6k=\frac{56}{27}\ \Leftrightarrow\ k=\frac{28}{81}$이 나온다. → 답 : 109

Step 4 : Solution 2

위의 풀이가 계산이 복잡하다고 생각되어서 다른 풀이를 생각했다면 이 풀이일 확률이 높다.





실제 그래프 : 이 그래프는 오르비 닉네임 <코난샘> (신동훈 선생님)의 B형해설 그림에서 발췌하였습니다.

(1, 0)과 거리가 최소가 되는 곡선 위의 점을 $(a,\ b)$ 라고 하면 $(a,\ b)$와 $(1,\ 0)$를 잇는 직선과 $(a,\ b)$를 지나는 접선이 수직일 것이다.

그러면 $\frac{y^3}{6}-\frac{x^3}{6}=k$를 음함수 미분법으로 미분하면

$\frac{1}{2}y^2\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2}x^2=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y^2}$이니까 접선의 기울기는

$\frac{a^2}{b^2}$이겠고, 이것과 법선의 기울기 $\frac{b}{a-1}$를 곱하면

-1 이 되겠다.

따라서 $\frac{a^2}{b(a-1)}=-1$ 이고 $a=\frac{2}{3}$이라고 했으니

$\frac{4}{9}=\frac{1}{3}b \Leftrightarrow b=\frac{4}{3}$

$b=\left(\frac{8}{27}+6k\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}$이므로

$\frac{8}{27}+6k=\frac{64}{27}\quad \therefore k=\frac{28}{81}$ → 답 : 109

다만 위 풀이에서 주의해야 할 것은 <수직일 때 최소>라는 것을 쓰는 것에 대해서 다시 한 번 생각해야 한다는 것이다. 이 풀이를 쓰기 전에 문제의 그래프의 개형을 간단히 생각해보고, 풀이에 문제가 없는지 생각해보아야 한다.

Tip

최근 논란이 되었던 문제인데, 사실 수능장에서는 어떤 풀이로 답만 나오기만 하면 되므로 둘 다 훌륭한 풀이라고 할 수 있다. 1번 풀이의 경우 전형적인 최대·최소 형태로 변형한 것이므로 이론의 여지가 없지만 2번 풀이의 경우 수학 공부를 하다가 자주 볼 수 있는 풀이이지만 다소 꺼림칙한 점이 있을 수 있는 풀이이다. 2번 풀이 역시 시험장에서 많은 학생들이 떠올렸을 것으로 생각되는데, 주의할 점은 (1, 0)에서 원을 그려 가면서 접하는 점이 최소가 된다고 할 때, 그래프의 개형을 한 번 생각해 볼 필요가 있겠다. 이 경우에도 그래프가 다소 복잡하므로 모든 것을 다 그릴 필요는 없겠지만 문제가 되는 1사분면 근처에서 대략적으로 어떤 형태를 띠고 있는지는 생각해 두는 것이 좋다. 실제 그래프는 아래와 같다.