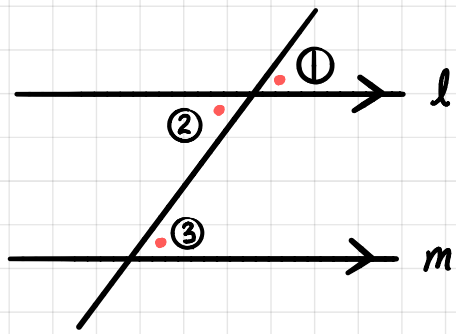
AWESOME BASIC CLASS

A. 기하 CLASS

A1 삼각형

삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.

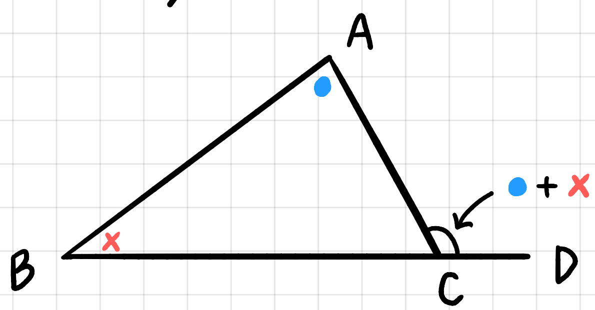
* 평행 & 수직 (보조선 ★)

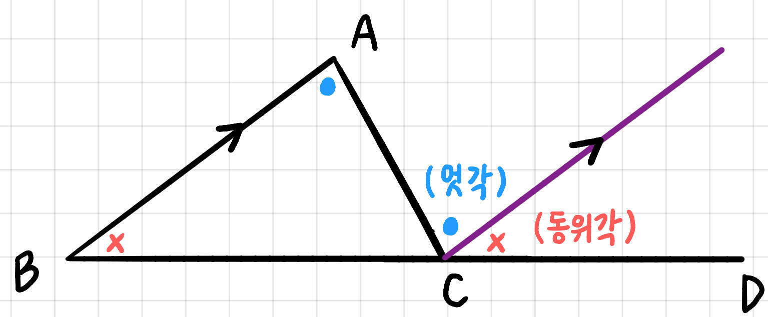


①② 맞꼭지각

②③ 엇각

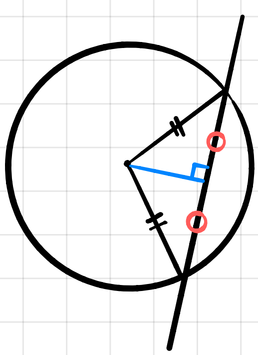
①③ 동위각





Q1.

* Link up



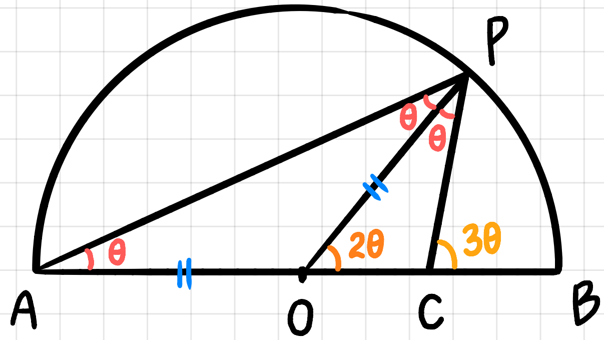
평면에서 한 정점으로부터 같은 거리에 있는 점들의 모임

- 원의 기본요소

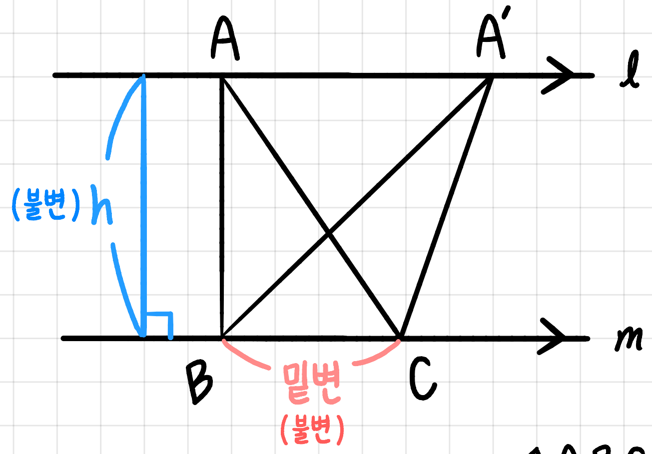
i) 중심

ii) 반지름

cf) 원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분 한다.



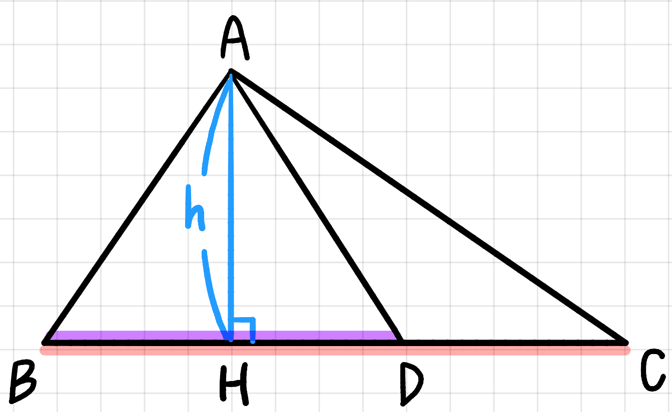
A2 평행선과 삼각형의 넓이



삼각형의 넓이 = $\frac{1}{2}$ × (밑변) × (높이)

↳ 수직

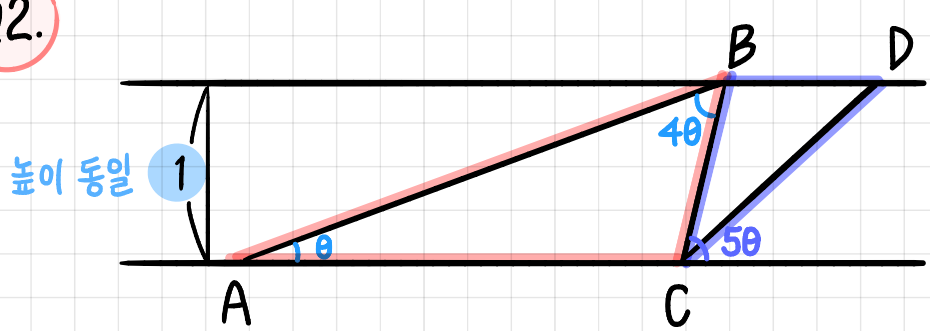
△ABC의 넓이 = △A'BC의 넓이



△ABC : △ABD = $\overline{BC}$: $\overline{BD}$

→ 밑변의 길이가 넓이를 결정한다 //

Q2.



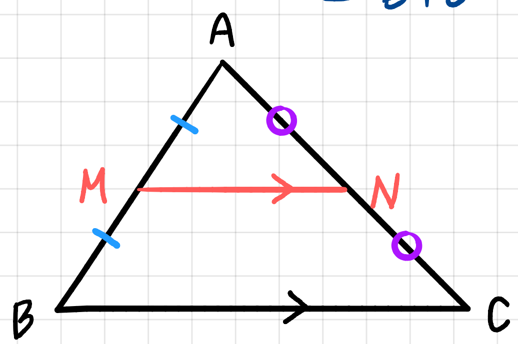
△ABC : T_1

△BCD : T_2

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$$

A3 중점 연결 정리

(1) 삼각형 : 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분은 나머지 변과 평행하고 그 길이는 나머지 변의 길이의 반과 같다.

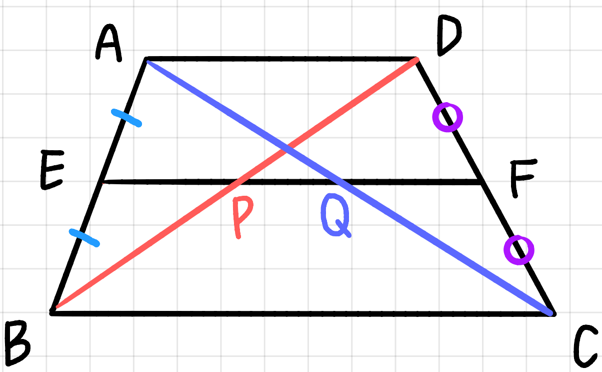


☆☆

$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$

$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ ⤳ 닮음비 = 1 : 2

(2) 사다리꼴



$\overline{EP} = \frac{1}{2}\overline{AD}$ $\overline{PF} = \frac{1}{2}\overline{BC}$

$\therefore \overline{EF} = \overline{EP} + \overline{PF}$

$= \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$

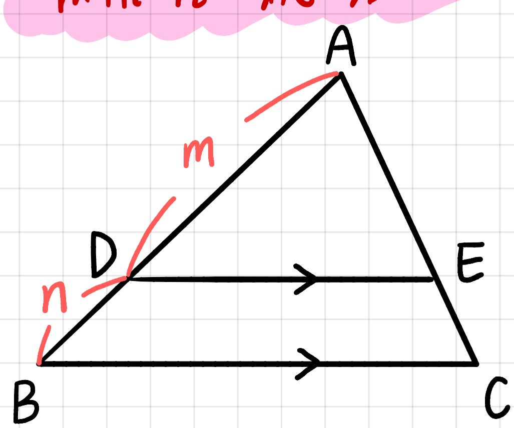
$\overline{PQ} = \frac{1}{2}(\overline{BC} - \overline{AD})$

$= \overline{EF} - \overline{EP} - \overline{FQ}$

$= \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}) - \frac{1}{2}\overline{AD} - \frac{1}{2}\overline{AD}$

$= \frac{1}{2}\overline{BC} - \frac{1}{2}\overline{AD}$

$m+n : n = AC : AE$



① $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$ 이면

$\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AC} : \overline{AE} = \overline{BC} : \overline{DE}$ → 닮음비

② $\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AC} : \overline{AE}$ 이면

$\overline{BC} \parallel \overline{DE}$

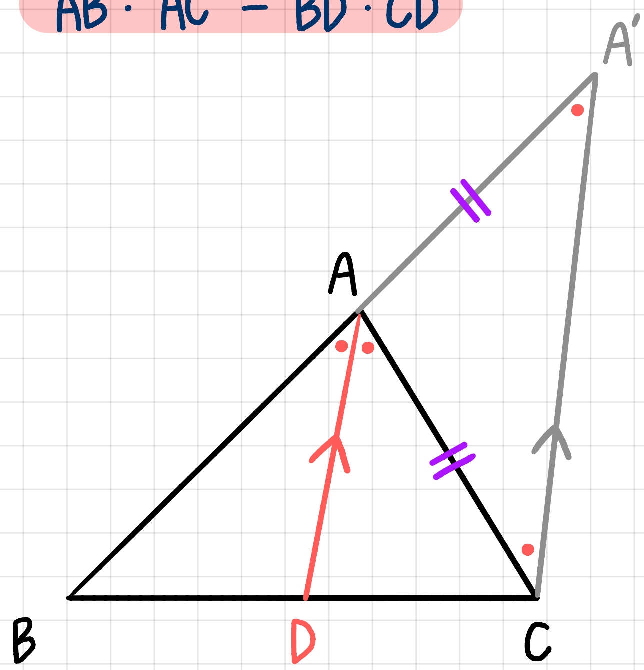
$\overline{BC} : \overline{DE} = m+n : m$

Etoos 정현경

A4 각의 이등분선의 정리

$\triangle ABC$에서 $\angle A$의 이등분선과 변 BC가 만나는 점을 D라 하면

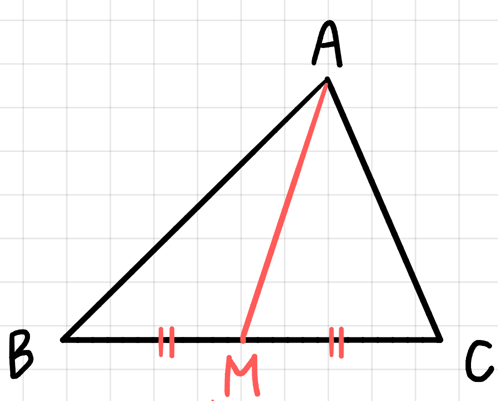
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$



↳ 중점이 아닐 수도 있다

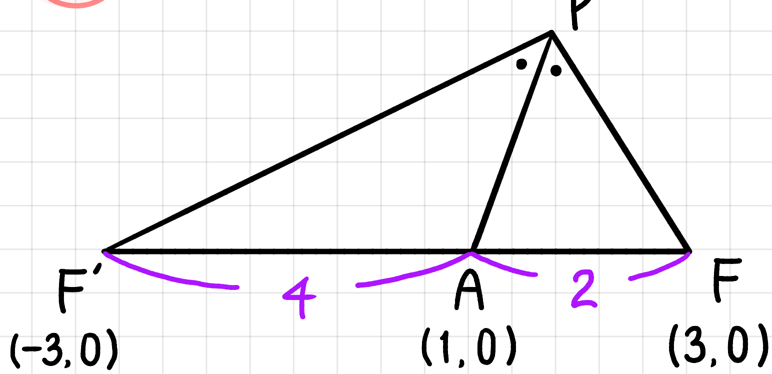
$$\overline{AB} : \underset{=\overline{AC}}{\overline{A'A}} = \overline{BD} : \overline{DC}$$

cf) 주의 - 파푸스의 중선정리



$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2\right)$$

Q3.



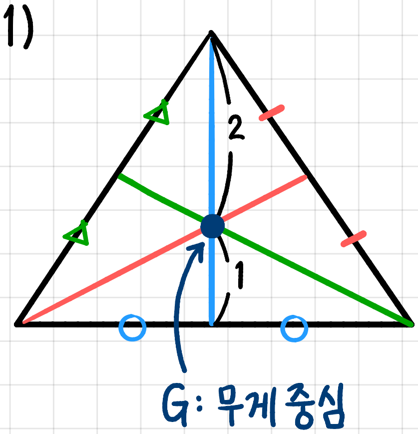
$F(3, 0) \qquad F'(-3, 0)$

$\overline{AF'} : \overline{AF} = 4 : 2 = 2 : 1$

$\therefore \overline{PF'} : \overline{PF} = 2 : 1$

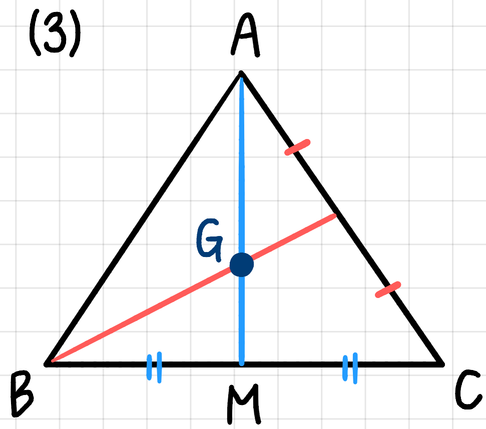
A5 무게 중심

(1)



(2) 2 : 1 내분

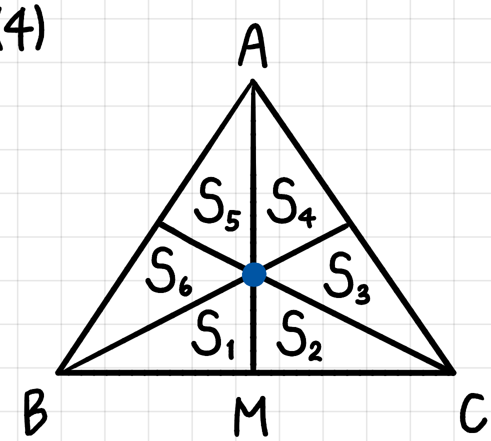
(3)



$\triangle ABM = \frac{1}{2}\triangle ABC$ (A2 참고)

$\triangle ABG = \frac{2}{3}\triangle ABM = \frac{1}{3}\triangle ABC$

(4)



$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$

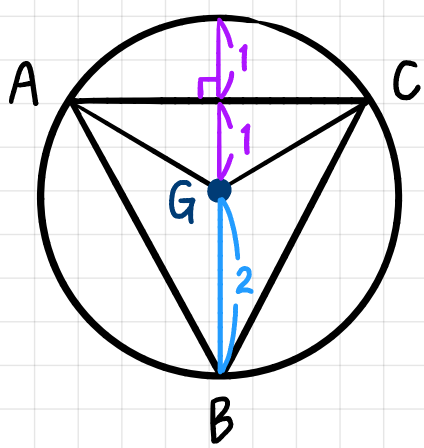
$= \frac{1}{6}\triangle ABC$

(5)

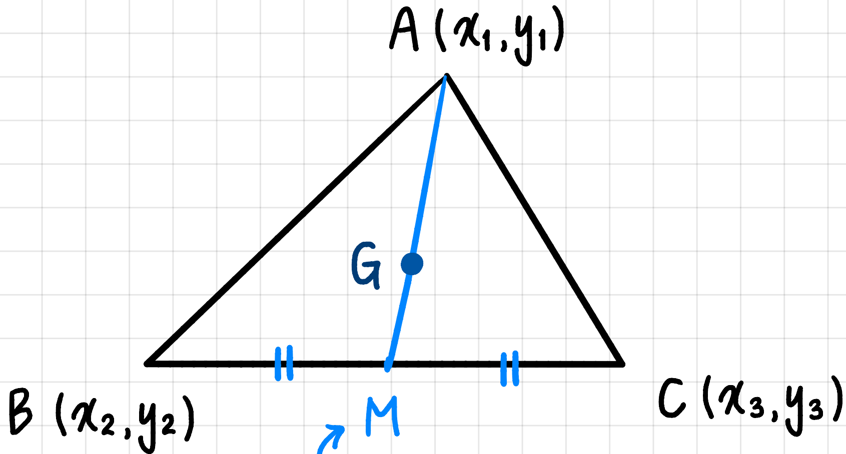
$A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ $C(x_3, y_3)$

$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

Q4.



⊕ A5 보충



$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

중점 → 두 점의 평균값

무게중심 G → $\overline{AM}$ 의 2 : 1 내분점

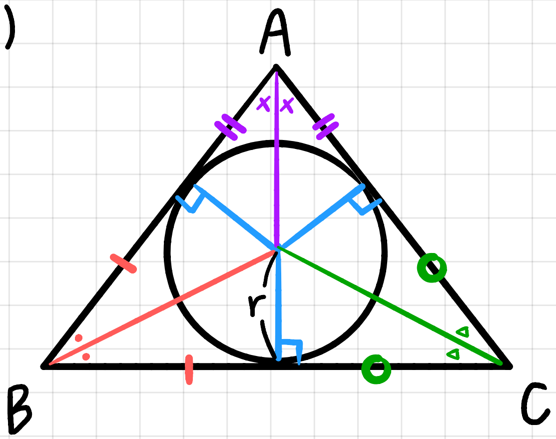
$$G\left(\frac{2\times\frac{x_2+x_3}{2}+1\times x_1}{2+1}, \frac{2\times\frac{y_2+y_3}{2}+1\times y_1}{2+1}\right)$$

$$= G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

무게중심 → 세 점의 평균값

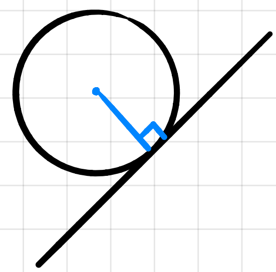
A6 삼각형의 내접원 중심 (내심)

(1)



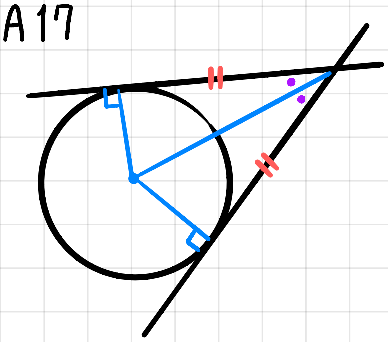
Key. 접점, 합동

※ 참고 A16

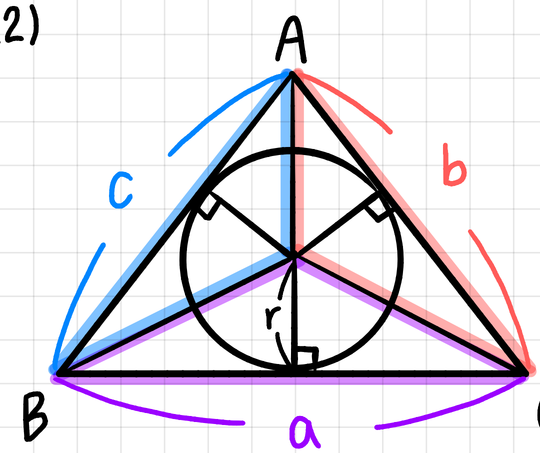


$d = r$

※ 참고 A17



(2)

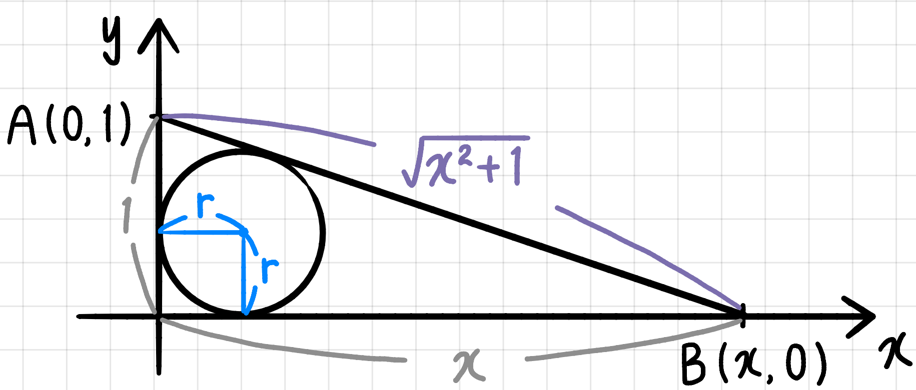


$\triangle ABC$ 넓이 $S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$

$= \frac{1}{2}r(a+b+c)$

$$\therefore r = \frac{2S}{a+b+c}$$

Q5. r을 x에 관한 식으로 표현하기

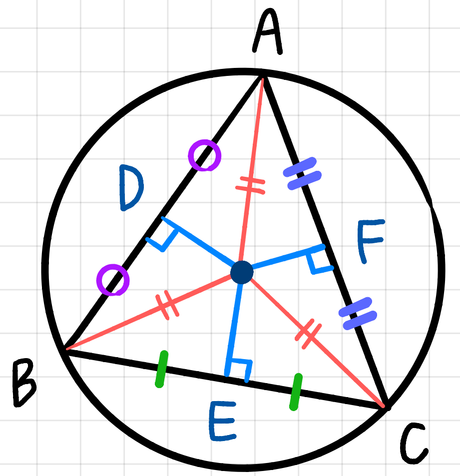


$S = \frac{1}{2}x$

$$\therefore r = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}x}{1 + x + \sqrt{x^2+1}}$$

Etoos 정현경

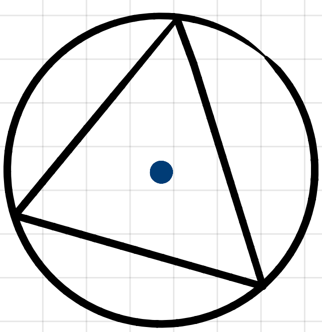
A7 삼각형의 외심



정의 : 각변의 수직이등분 선의 교점

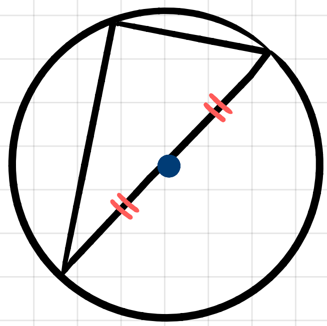
참고 > "사인 법칙"과 연결되는 경향성이 있음.

⊕



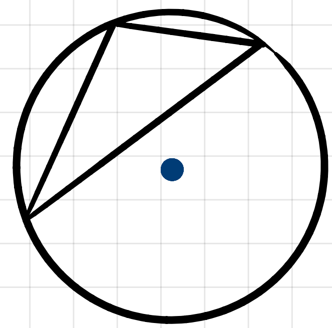
예각 삼각형

외심이 삼각형의 내부에 존재



☆ 직각 삼각형

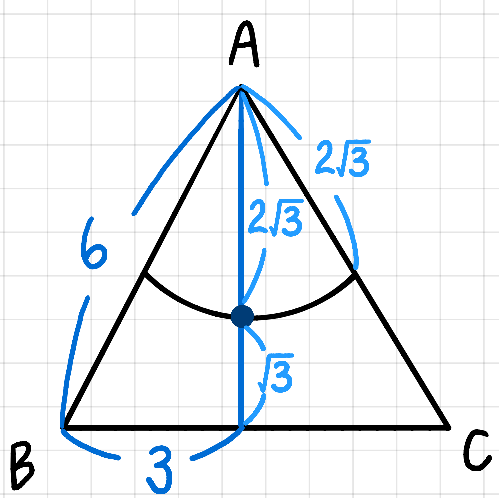
외심이 삼각형의 빗변의 중점 위에 존재



둔각 삼각형

외심이 삼각형의 외부에 존재

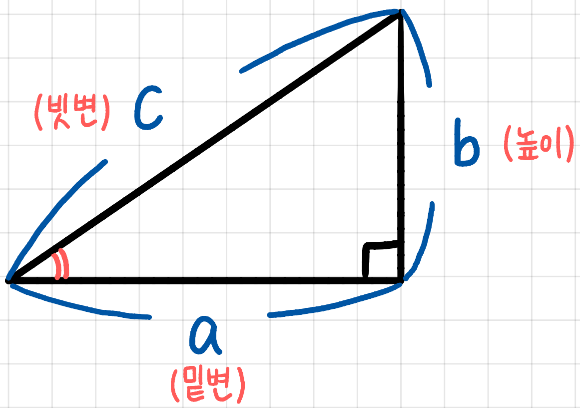
Q6.



* 정삼각형에서 외심, 내심, 무게중심이 일치한다.

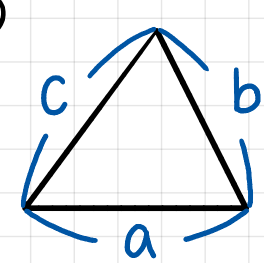
Etoos 정현경

A8 피타고라스의 정리



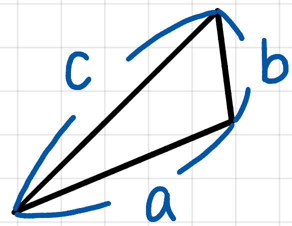
$$a^2+b^2=c^2$$

cf) ①



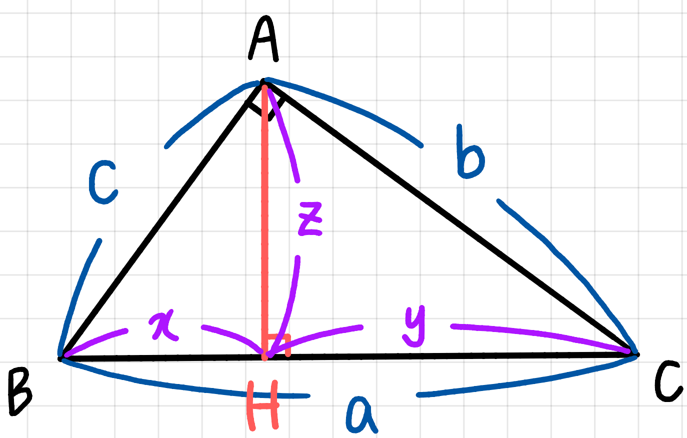
$a^2+b^2>c^2$

②



$a^2+b^2<c^2$

A9 직각삼각형의 활용



act. 수직작도 ☆☆

1st. 수선의 발 내리기

2nd. 직각삼각형

i) 피타고라스의 정리

ii) 삼각비 활용

iii) 비례

(1) $\triangle ABC \sim \triangle ABH \sim \triangle ACH$

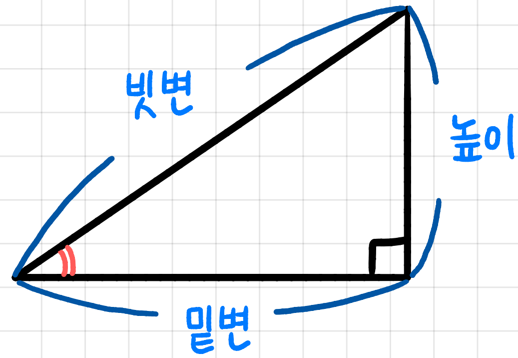
$c : x = a : c$ $\quad\therefore c^2 = ax$

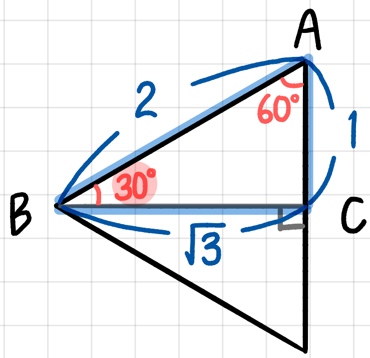
(2) 넓이

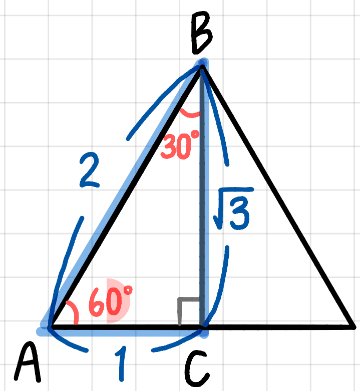
$\frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}az$ $\quad\therefore bc = az$

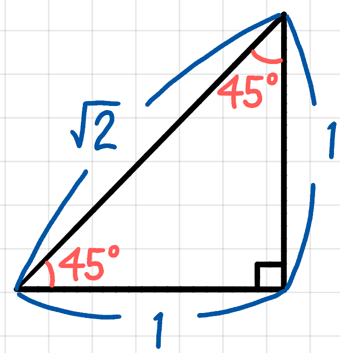
A10 삼각비

	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

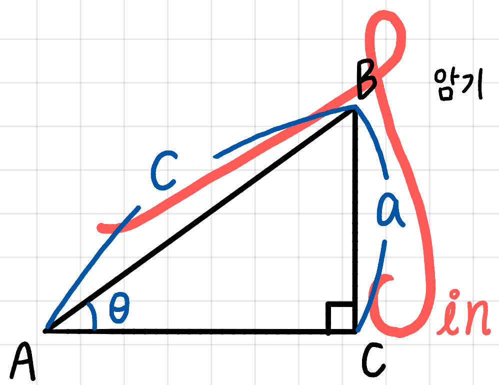


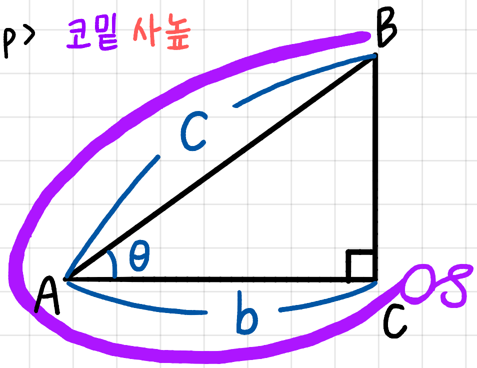


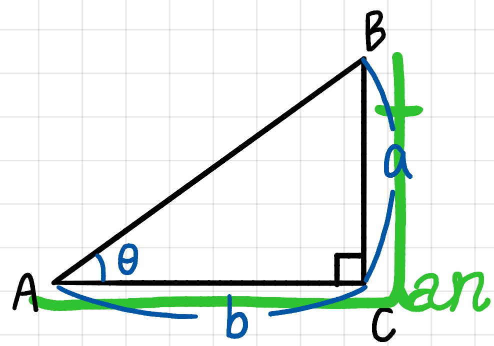




암기 tip> 코밑 사높







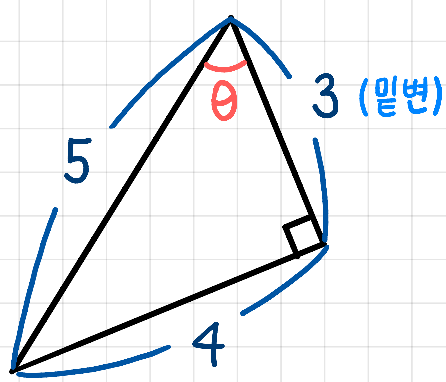
$\sin\theta = \frac{a}{c} = \frac{\text{높이}}{\text{빗변}}$

$\cos\theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{밑변}}{\text{빗변}}$

$\tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{\text{높이}}{\text{밑변}}$

≒ 기울기

예시)

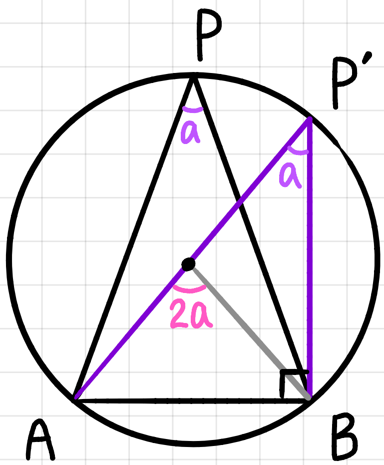


$\sin\theta = \frac{4}{5}$

$\cos\theta = \frac{3}{5}$

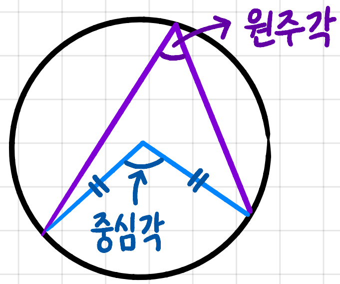
$\tan\theta = \frac{4}{3}$

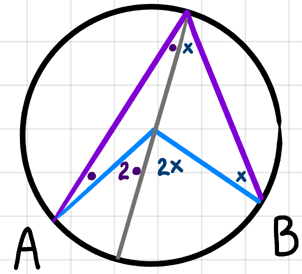
A11 원주각과 중심각



① 하나의 호에 대한 원주각의 크기는 항상 같다.

② 중심각의 크기 = 2 × (원주각의 크기)

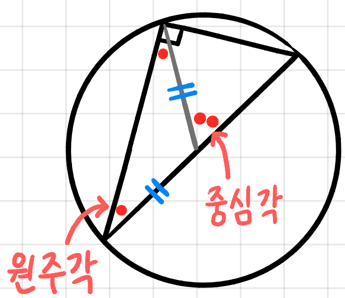




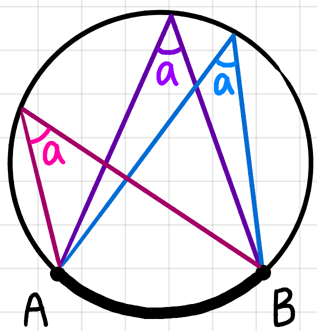
원주각 = ● + x

중심각 = 2● + 2x

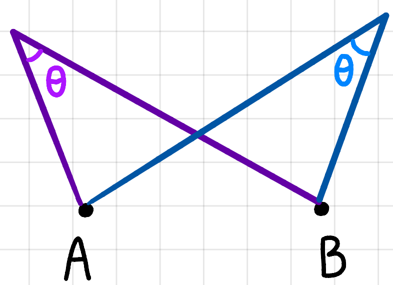
* 참고 A12



cf)

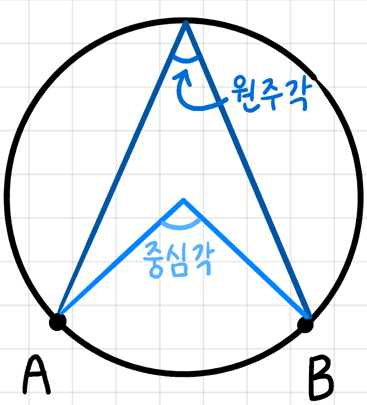


한 호 $\overset{\frown}{AB}$ (= 현 $\overline{AB}$) 에 대해
원주각의 크기는 항상 일정하다.



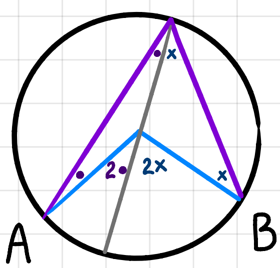
네 점을 공통으로
지나는 원 작도 가능

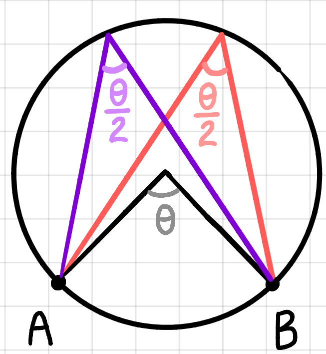
⊕ A11 보충



2 (원주각) = 중심각

∴

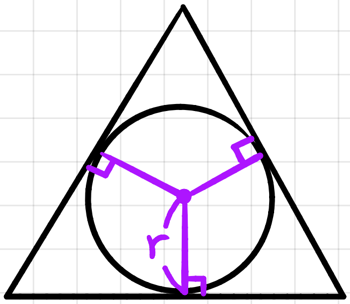




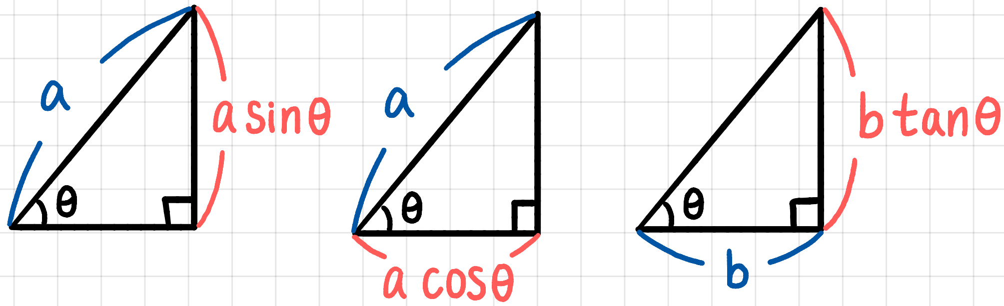
어떤 하나의 현 (or 호) 에 대한
원주각은 일정하다.

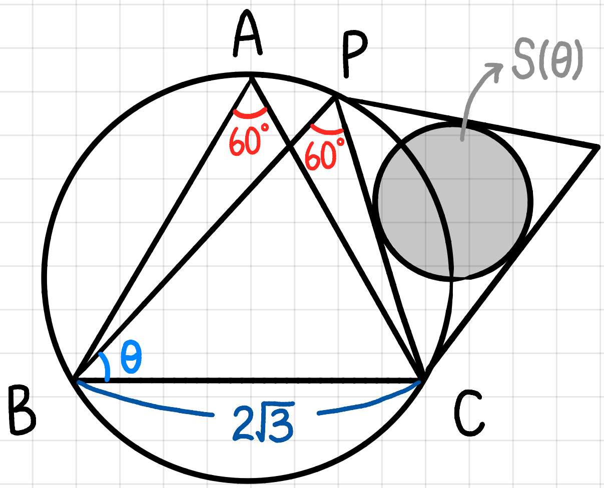
Q8.

idea.



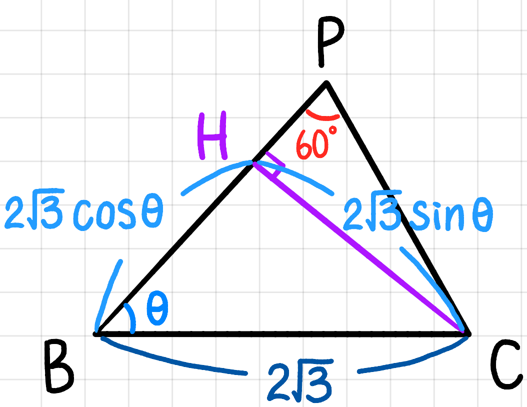
tip>





목표 → 정삼각형의 한 변의 길이

→ $\overline{PC}$ 구하기



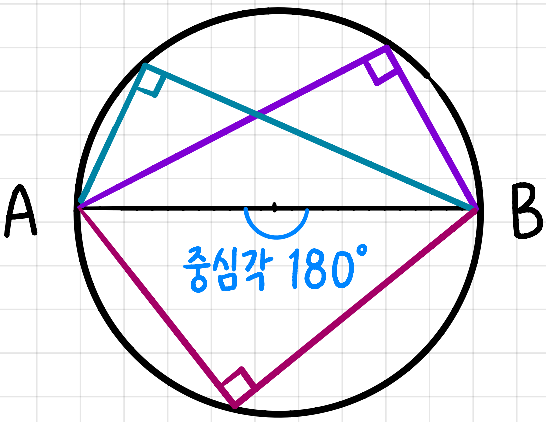
$$\frac{\overline{HB}}{2\sqrt{3}} = \cos\theta \qquad \therefore \overline{HB} = 2\sqrt{3}\cos\theta$$

$$\frac{\overline{HC}}{2\sqrt{3}} = \sin\theta \qquad \therefore \overline{HC} = 2\sqrt{3}\sin\theta$$

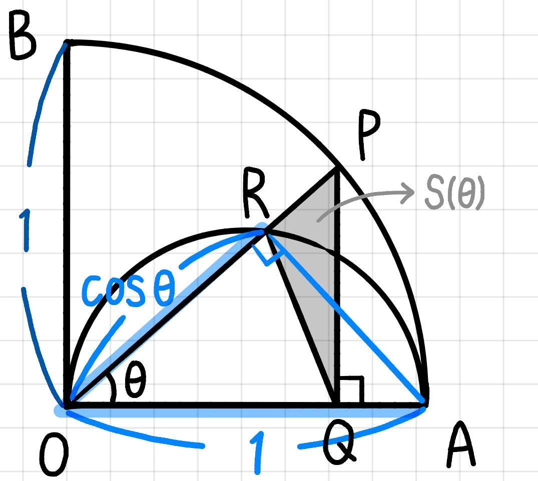
특수각의 삼각비 $1 : \sqrt{3} : 2$ 에 의해

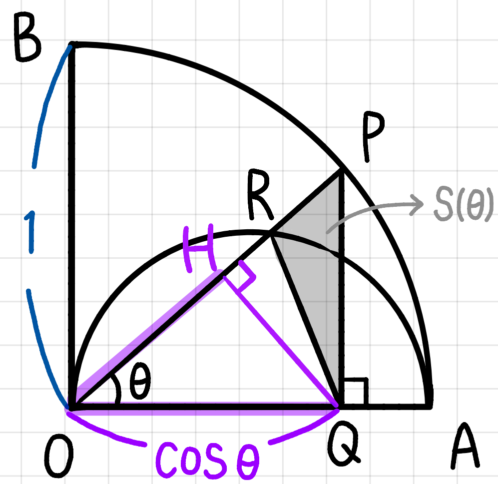
$\overline{PH} = 2\sin\theta$ $\quad$ $\overline{PC} = 4\sin\theta$

A12 지름의 원주각 → 직각



Q9.





$\overline{PR} = 1 - \cos\theta$ (밑변)

점 Q에서 $\overline{PO}$에 내린 수선의 발 H

$\overline{QH} = \cos\theta \cdot \sin\theta$ (높이)

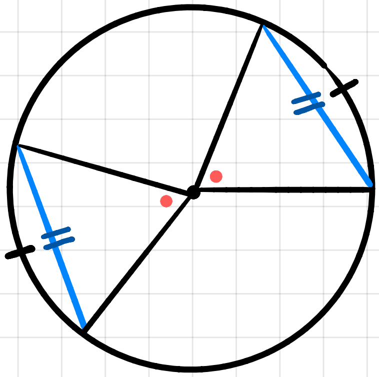
$$\therefore S(\theta) = \frac{1}{2}(1-\cos\theta)(\cos\theta \cdot \sin\theta)$$

+) 다른 풀이

$\overline{PQ} = \sin\theta$ $\qquad \angle OPQ = \frac{\pi}{2} - \theta$

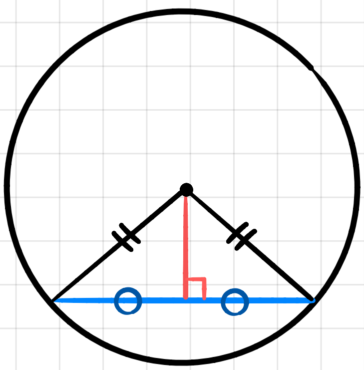
$$\therefore S(\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta(1-\cos\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

A13 중심각과 현, 호



중심각이 같으면 호의 길이, 현의 길이가 같다.

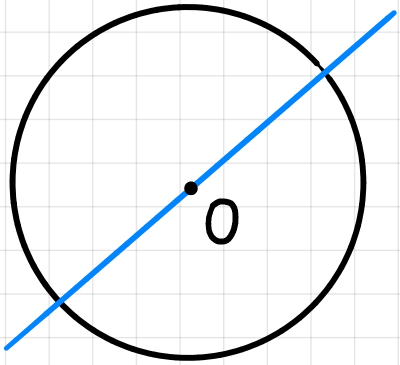
A14 현의 수직이등분선



원의 중심에서 현에 내린 수선은 이 현을 이등분 한다.

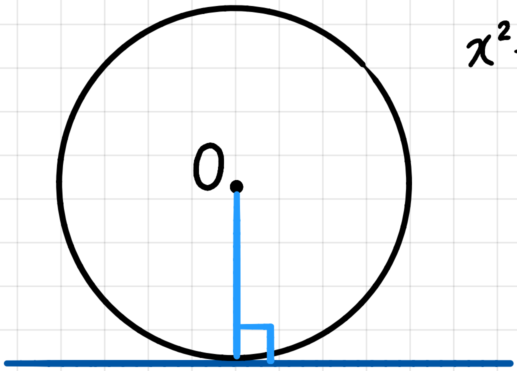
역으로 현의 수직이등분선은 이 원의 중심을 지난다.

A15 중심을 지나는 직선



→ 원을 이등분 한다.

A16 원과 접선



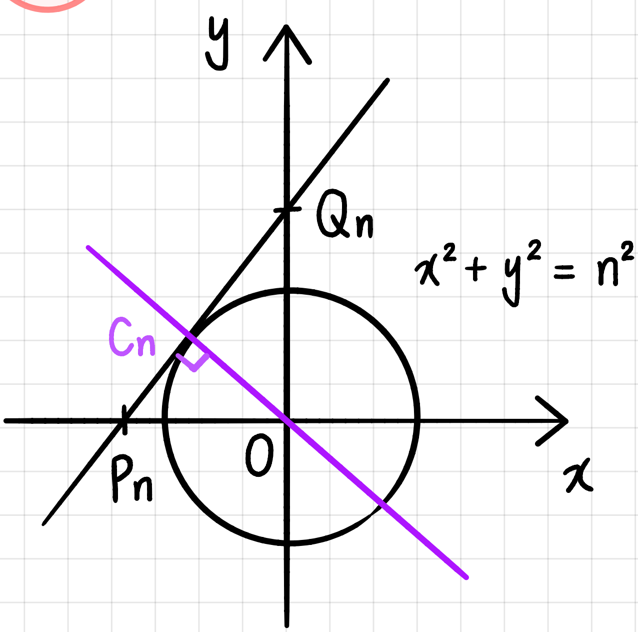
중심이 원점일 때만 !

$x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식

$\rightarrow$ $x_1x+y_1y=r^2$

중심에서 직선까지의 거리 d = 반지름 r

Q11.



1st. $\overline{P_nQ_n} \perp \overline{C_nO}$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{기울기 곱} = -1}$

2nd. 직선 P_nQ_n 에서 원점까지의 거리 d

= 반지름 r

직선 P_nQ_n 의 방정식 $y=nx+m$ 과 원점 $(0,0)$ 사이의 거리 = n

$nx-y+m=0$

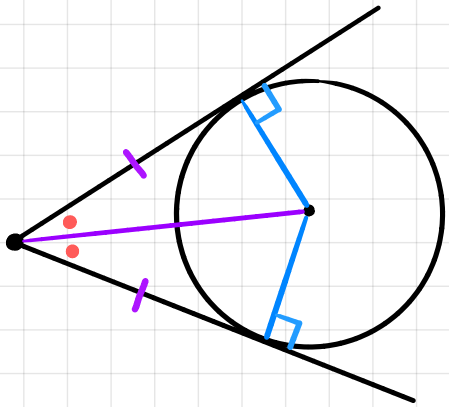
$$\frac{|m|}{\sqrt{n^2+1}}=n \qquad \therefore |m| = n\sqrt{n^2+1}$$

이때 y 절편이 양수이므로 $m=n\sqrt{n^2+1}$

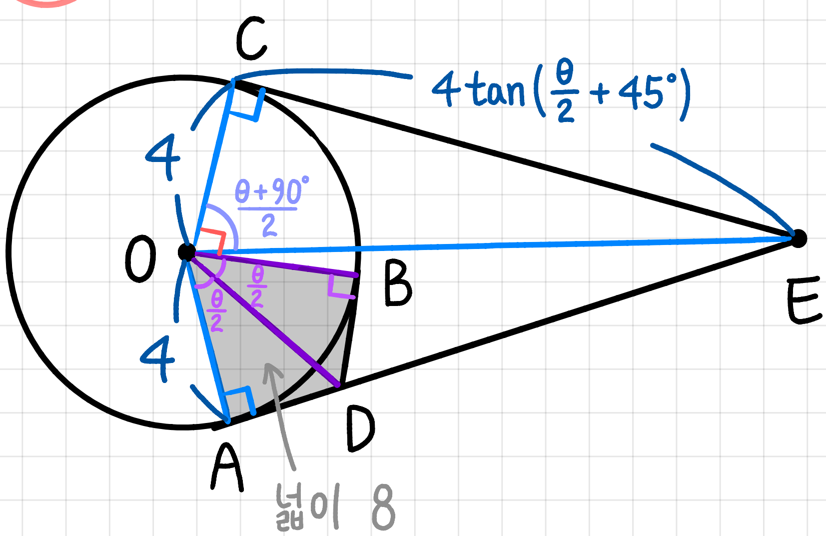
$\therefore$ 직선 P_nQ_n 의 방정식 : $y=nx+n\sqrt{n^2+1}$

A17 원과 곡선 밖의 접선

↳ 원의 접선의 응용



Q11.



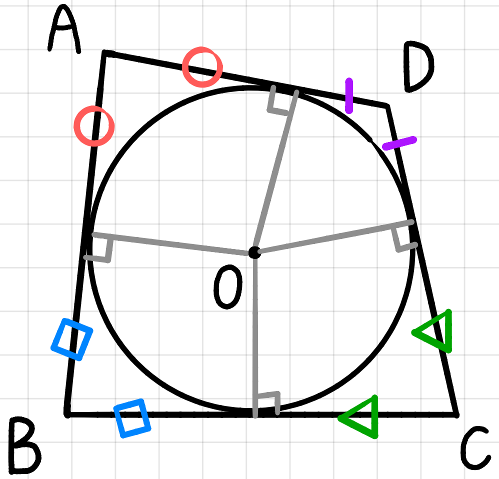
∠COB는 직각

□OADB 넓이

$= \left(\frac{1}{2} \times 4 \times \overline{AD}\right) \times 2$

$= \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4\tan\frac{\theta}{2}\right) \times 2$

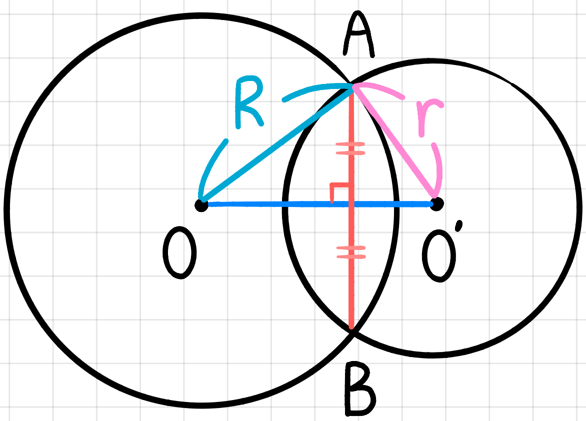
A18 외접 사각형과 원



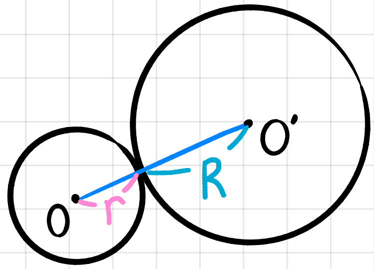
□ABCD가 원에 외접할때

$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

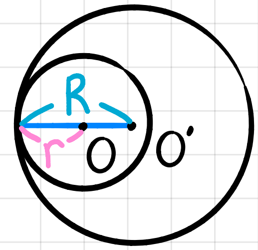
A19 원의 공통현



cf)



$\overline{OO'} = R + r$



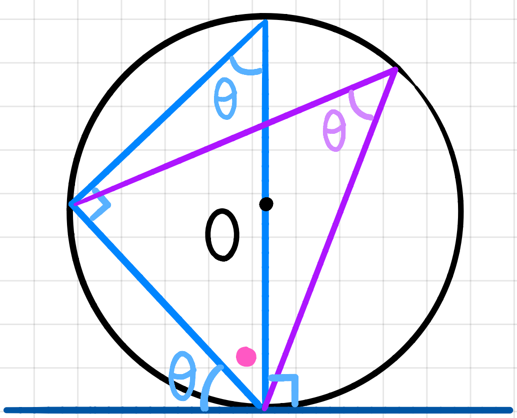
$\overline{OO'} = R - r$

$$R - r < \overline{OO'} < R + r$$

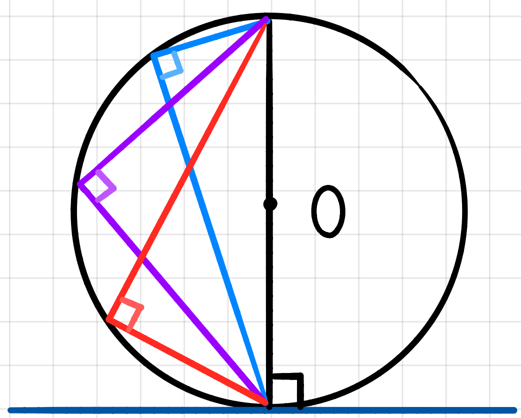
A20 접선과 접점의 현

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는
그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.

역으로 원의 현과 그 한 끝점을 지나는 직선으로 이루어지는 각의 크기가
이 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같으면 이 직선은 원의 접선이다.

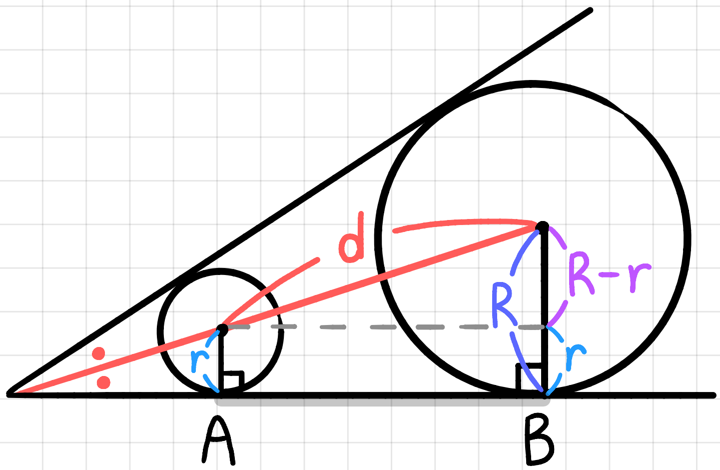


● + $\theta = 90^\circ$



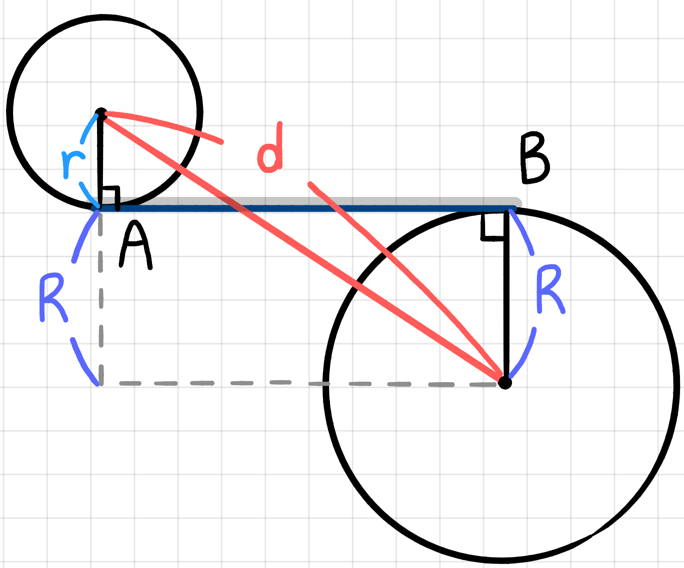
A21 원의 공통접선

(1) 공통 외접선 $\overline{AB}$의 길이



$$\overline{AB} = \sqrt{d^2-(R-r)^2}$$

(2) 공통 내접선 $\overline{AB}$의 길이

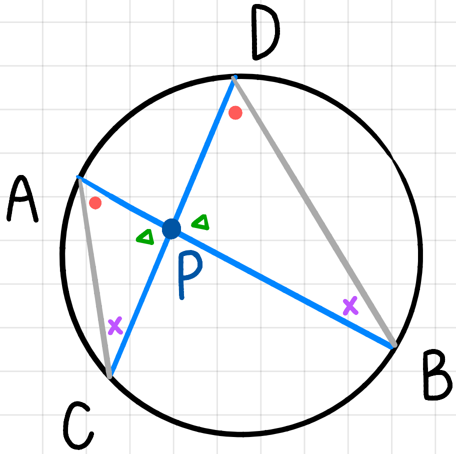


$$\overline{AB} = \sqrt{d^2-(R+r)^2}$$

A22 원과 비례

원의 두 현 AB, CD 또는 이들의 연장선의 교점을 P라고 하면

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$$



$\overset{\frown}{CB}$에 대해 각 ●이 같다.

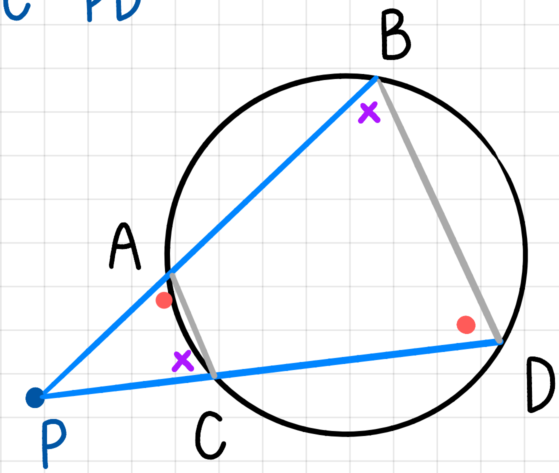
$\overset{\frown}{AD}$에 대해 각 ×이 같다.

A11 참고 - 한 호에 대한 원주각의 크기는 일정하다.

◁는 맞꼭지각

$$\overline{PA}:\overline{PD}=\overline{PC}:\overline{PB}$$

$$\therefore\ \overline{PD}\times\overline{PC}=\overline{PA}\times\overline{PB}$$

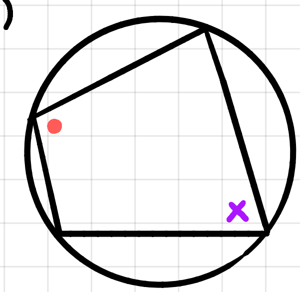


$$\triangle PAC \sim \triangle PDB$$

$$\overline{PA}:\overline{PC}=\overline{PD}:\overline{PB}$$

$$\therefore\ \overline{PC}\times\overline{PD}=\overline{PA}\times\overline{PB}$$

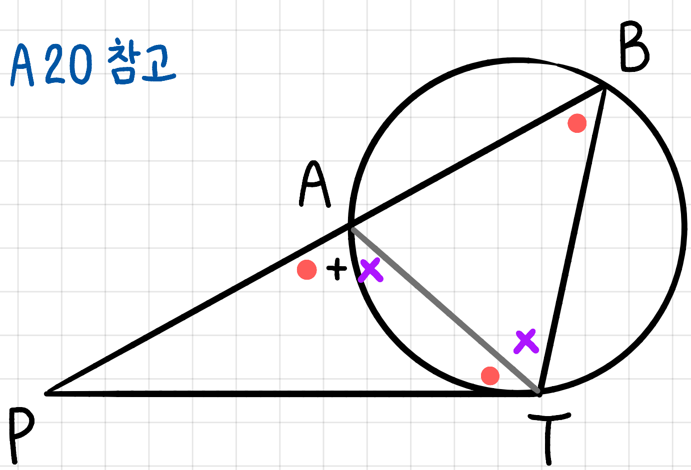
cf)



$$● + × = 180^\circ$$

A23 원과 비례의 응용

A20 참고



$$\triangle APT \sim \triangle TPB$$

$$\therefore\ \overline{PA}:\overline{PT}=\overline{PT}:\overline{PB}$$

$$\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$$