2014년 수능 대비

MediVa

수학 시험의 기술

<6월 모의고사 수학 A형 분석>

수능의 성공적 준비를 위한 모의고사의 수능적 해법, 그리고 깔끔하면서 친절한 문항분석

할 것은 많고 한 것이 없다면, 시험에 나오는 것만 공부하자!

Orbis optimus ver.

서문

2010년 수능을 치고 2011년 모의고사부터 해설을 해마다 썼던 것 같습니다. 6월, 9월 모의고사 중 한 번은 꼭 썼던 것 같네요. 이번이 2014년 수능 대비 모의고사니 벌써 4년째 되어 가는 것 같습니다.

이번 해설은 더 특별한 것 같습니다. 제 이름으로 된 책이 나오기까지 노력하면서 계발해온 능력도 있고, 학과 생활 중에서도 비슷한 류의 작업들을 이것저것 하면서 생긴 내공도 있어서 해설이라고 하긴 조금 화려하게 만들어 버린 것 같습니다.

내용은 6월 모의고사 수학 A형 해설이지만 그냥 해설이라고 생각하기보다는 수능까지 공부를 어떻게 할 것인지에 대한 가이드로 생각해 주셨으면 좋을 것 같네요. 모든 문제를 직접 풀면서 수험생의 입장이라면, 내가 수능을 보는 입장이라면 어떻게 풀었을까 생각하면서 최대한 “자연스러운” 풀이과정을 유도할 수 있도록 자세하게 설명했습니다. 이미 해설들을 보셔서 문제를 푸는 방법들은 다 아시겠지만, 그래도 다시 한 번 보시면서 이 시험에서 내가 얻은 것은 무엇이며, 이 시험을 토대로 수능까지 어떻게 공부할 것인지를 생각해 보시기 바랍니다. 6월 모의고사 30문제는 답을 알고 나면 아무것도 아니지만, 그 답이 어떻게 하면 나올 수 있을 것인지 계속 고민하다 보면 수능에 대한 해법이 보일 것이니까요.

사실 해설을 쓰는 것은 매우 고된 일입니다. 일단 수능 친 지 꽤 오랜 시간이 흘렀고 전공에서는 수학과 관련한 것을 거의 다루지 않으니까요. 그래도 즐겁게 이 작업을 하는 것은, 문제를 논리적으로 풀어 가는 과정 하나하나가 질병을 분석하는 방법과 많이 닮아 있고, 또 알고 있는 전문 지식을 알기 쉽게 설명하는 것 역시 의학을 전공하는 사람이 해야 할 임무 중 하나이므로 부전공(?)과 비슷한 생각으로 <수능 수학 분석>을 하게 되는 것 같습니다.

이미 지난 시험이고 한숨이 절로 나오는 분들도 많으실 것입니다. 하지만 긍정적으로 생각하시기 바랍니다. 오늘 틀린 문제를 수능 때만 틀리지 않으면 되는 것이니까요. 그 반대가 된다면 얼마나 참담하겠습니까. 힘든 시기이지만 잘 견뎌 내시기를 바라고, 제가 만든 이 모의고사 분석지가 여러분의 입시 성공에 조금이나마 도움이 되기를 기원합니다.

MediVa,

서울대 의학과 2학년

허기영

문의는 zealot648@naver.com으로 해 주시기 바랍니다.

개인 사정으로 제 때 답변을 드리기 힘들 수도 있으니 그 점은 양해를 구합니다. ^^

6월 모의고사 이후, 몇 가지 생각해볼 점

1. 거시적 관점

— 나의 수학 공부는 제대로 된 방향에서 이루어지고 있는가?

6월 모의고사는 2가지 의미를 지니고 있습니다. 평가원의 입장에서는 6월 모의고사는 수능의 난이도를 결정하기 위한 지표이고, 학생에게는 자신의 학습 상황을 평가하는 시금석입니다. 지금까지 많은 공부를 해 오셨을 것입니다. 하지만 그게 보여주기 위한 공부였는지 — 남들뿐만 아니라 자기 자신에게 보여주기 위한 것 — 다시 한 번 생각해 보시기 바랍니다. 공부를 많이 하는 모습에 취해 정작 성적을 올리기 위한 중요한 것을 등한시하지는 않았는지, 남들이 열심히 하는 것을 따라하지는 않았는지, 또는 공부의 절대량이 부족하였는지 등을 다시 한 번 평가해 보시기 바랍니다. 이제부터 수능까지는 철저하게 약점 공략을 위한 공부가 필요할 때입니다. 수능까지 어떤 부분을 어떤 정도의 밀도로 얼마나 공부할 것인지 냉정하게 판단하시고 계획을 짜 보시기 바랍니다.

2. 미시적 관점

— 내가 지금 시험을 치는 태도는 수능 때도 문제가 없는가?

의외로 중요한 질문입니다. 내용 하나를 모르면 그 문제만 틀리지만 시험을 칠 때 잘못된 태도를 가지면 그 시험 전체를 망치게 됩니다. 어려운 문제 하나 때문에 시간이 부족한 적은 없는지, 자꾸 불필요한 실수를 하는지 생각해 보시기 바랍니다. 완벽주의에 빠져 오기를 부리다 수능 때 처참한 결과를 받는 경우는 꽤 많았습니다. 때로는 타협이 필요하고, 때로는 운에 문제를 맡겨야 될 때도 존재합니다. 만약 그럴 때가 온다면 어떻게 대처할 것인지 미리 프로토콜을 짜고, 시험을 푸는 전반적인 스키마를 정리해서 수능 전까지 치는 모의고사에서 평가 분석 해 보시기 바랍니다. 수능을 안정적으로 보기 위해서 모든 위협 요소들을 고려해 보시기 바랍니다.

— 내가 문제를 푸는 방식은 지속 가능한가?

이번에 B형 30번 문제가 화두가 되었는데, 그것은 시험을 치를 때의 태도에 대한 논의라고 할 수 있겠습니다. A형이라 조금 상황이 다르지만 A형도 30번과 같은 문제를 풀 때 어떤 경우라도 답으로 근접할 수 있겠는지 생각해 보시기 바랍니다. 수능 때 여러분이 맞닥뜨릴 30번 문제 또한 새롭고 당황스러울 문제일 것입니다. 과연 그 문제를 접할 때, 내가 지금까지 연습해 온 것으로 무난하게 처리할 수 있을 것인가 생각해 보시기 바랍니다. 만약 회의적이라면, 어떤 부분에 문제가 있고 그것을 어떻게 고칠지 부지런히 노력하십시오. 그 고민 하나 하나는 수능 때 커다란 힘이 될 것입니다.

이번 기회에 내가 어느 단원에 약한지 살펴보는 고민뿐만 아니라, 1년 레이스라는 관점에서 어떤 상황인지에 대한 자기성찰을 꼭 해 보시기 바랍니다. 이제 반쯤 왔습니다. 나머지 반 역시 지금만큼, 아니 지금보다 더 중요할 것입니다. 성공적인 하반기를 위한 고민, 결코 헛된 고민이 아닐 것이라 생각합니다.

6월 모의고사 문항 분석

1. $4^{\frac{1}{2}} \times 27^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

계산 지수의 계산

(준식) $= (2^2)^{\frac{1}{2}} \times (3^3)^{\frac{1}{3}}$
$= 2^1 \times 3^1$
$= 6$

➪ 답 : ③

Advice
수능에 해마다 나오는 간단한 계산 문제다. 절대 실수하지 않도록 평소에 연습을 해 두자.

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1\\2&2\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $2A-B$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

계산 행렬의 계산

(준식) $= \begin{pmatrix}2&4\\0&6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&-1\\2&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&5\\-2&4\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 9

➪ 답 : ④

Advice
역시나 수능에 해마다 나오는 문제로, 최근에는 아주 간단한 계산만 나오는 추세이다.

3. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{5\times7^{n+1}+3}{7^n}$의 값은? [2점]

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

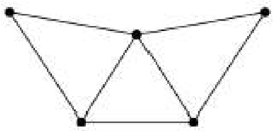
계산 수열의 극한 계산

(준식) $= \lim_{n\to\infty}\dfrac{35\times7^n+3}{7^n} = 35$

➪ 답 : ⑤

Advice
수열의 극한 역시 간단한 문제로서 종종 나온다. 크게 어려울 것은 없지만 연습을 해 두어서 빠르고 정확하게 계산할 수 있도록 해야 한다.

4. 다음 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬에서 행의 모든 성분의 합이 3인 행의 개수는? [3점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

추론 행렬과 그래프

각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬에서 꼭지점이 서로 연결되면 1, 그렇지 않으면 0으로 표시한다. 따라서 모든 성분의 합이 3인 행은 각 꼭짓점에서 연결된 변의 개수인 점이라고 할 수 있다. 따라서 나가는 변의 개수가 3개인 꼭짓점은 아래쪽의 2개이므로 2개이다.

➪ 답 : ②

Advice
그래프와 행렬은 지금까지 간단한 문제로만 출제되었는데, 이번에는 평소 나오던 것에서 약간 응용해서 출제되었다. 조금 시간을 투자해서 꼭짓점 사이의 연결 관계를 모두 표시하면 그리 어렵지는 않지만, 시간을 효율적으로 쓰기 위해서 행렬과 그래프의 성질을 이해해서 빠르게 풀 수 있도록 해 보자.

5. $\log_5(6-\sqrt{11})+\log_5(6+\sqrt{11})$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

계산 로그의 계산

(준식) $= \log_5\{(6-\sqrt{11})(6+\sqrt{11})\}$
$= \log_5(36-11)$
$= \log_5 25 = 2$

➪ 답 : ②

Advice
역시나 수능에 해마다 나오는 문제다. 지수 · 로그 계산은 절대로 실수하지 않도록 주의하도록 하자.

6. 함수 $f(x)=x^3-x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{2h}$의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

개념 미분계수의 정의

문제가 미분계수에 대한 문제라는 것이 빨리 파악하는 것이 포인트이다.

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times\frac{3}{2}=f'(1)\times\frac{3}{2}$

$f'(x)=3x^2-1$이므로

$f'(1)=2$

$\therefore \frac{3}{2}f'(1)=3$

➪ 답 : ③

Advice
미분계수의 정의를 물어보는 문제라는 것을 빠르게 파악하는 것이 관건이다. 그것만 파악하면 문제 자체는 쉽게 풀리지만 그걸 모르고 식을 대입해서 전개한다든가 하면 바로 꼬이게 되니 주의하자.

7. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1a_9=4$일 때, $a_2a_8+a_4a_6$의 값은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

계산 등비수열의 일반항

등비수열$\{a_n\}$의 초항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_1=a,\ a_9=ar^8$

$\Rightarrow\ a_1a_9=a\cdot ar^8=a^2r^8=4$

이를 이용하면

$a_2a_8=ar\cdot ar^7=a^2r^8=4$

$a_4a_6=ar^3ar^5=a^2r^8=4$

이 되므로, $a_2a_8+a_4a_6=8$

➪ 답 : ①

Advice
등비수열에 익숙한 학생이라면 1+9 = 2+8 = 4+6 이라는 것에 $a_2a_8=a_4a_6=a_1a_9=4$라는 사실을 바로 파악할 수 있었을 것이다. 그렇지 않더라도 등비수열의 일반항 공식만 정확히 알고 있으면 큰 무리 없이 풀 수 있던 문제였다.

8. x, y에 대한 연립일차방정식

$$\begin{pmatrix} t & -2 \\ 3 & t-7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

이 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 모든 실수 t의 값의 합은? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

개념 **역행렬과 연립일차방정식**

역행렬과 연립일차방정식의 성질을 이용한 간단한 문제이다. 딱히 함정이라 할 만한 것도 없으므로 빠르고 정확하게 풀도록 하자.

Concept

역행렬과 연립일차방정식

① 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$를 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$로 쓸 수 있다.

② 이 연립방정식의 해는

$ad-bc=0$일 때, 해가 무수히 많거나 없다.

$ad-bc\neq 0$일 때, 오직 하나의 해 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$를 갖는다.

Solution

문제의 연립일차방정식이 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가지려면

행렬 $\begin{pmatrix} t & -2 \\ 3 & t-7 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

역행렬이 존재하지 않을 조건은 행렬식 $D=ad-bc=0$이므로

$t\cdot(t-7)-(-2)\cdot(3)=0$

$\Leftrightarrow t^2-7t+6=0$

따라서 모든 실수 t의 합은 7이다.

➪ 답 : ④

9. 함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$$

일 때, $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{24}$ ④ $\frac{1}{27}$ ⑤ $\frac{1}{30}$

개념 미정계수의 결정

미정계수의 결정은 수능에 자주 출제되는 유형 중 하나이다. 풀이 방법은 대체적으로 정해진 틀에서 크게 벗어나지 않기 때문에, 기본적인 개념만 숙지하고 있다면 쉽게 풀 수 있는 유형이다. 수능에도 꽤 많이 출제된 유형이기 때문에 기출문제도 풀어 보면서 이 유형을 익혀 보도록 하자.

Concept

미정계수의 결정

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$($\alpha$는 상수)일 때

① $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

② $\alpha\neq0$이고 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$

Solution

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$에서 (분모) → 0 이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0이다.

➪ $\lim_{x\to2}\{f(x)-3\}=0$ ➪ $\lim_{x\to2}f(x)=3$

이제, 문제에서 값을 물어보는 식을 변형해 보도록 하자. 합차공식의 형태가 눈에 보이므로 이를 변형하자.

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{f(x)-3}\cdot\frac{1}{f(x)+3}$$

이 때 문제에서 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$라고 했고, 위에서 $\lim_{x\to2}\{f(x)-3\}=0$를 구했으므로

➪ $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{f(x)-3}\cdot\frac{1}{f(x)+3}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$

➪ 답 : ⑤

Tip

미정계수의 결정 문제는 수능에 자주 등장하는 유형이고, 풀이 방법만 정확히 알고 있다면 별다른 어려움 없이 풀 수 있다. 그렇기 때문에 문제를 보고 이 문제가 〈미정계수의 결정〉 문제에 해당한다는 것을 빠르게 알아챌 수 있어야 한다. 미정계수의 결정에서 가장 핵심이 되는 것은 분모가 0으로 가고 있는데, 정상적인 값이 나왔다면 분자도 0으로 가야 한다는 사실이다. 그것을 이용해서 일단 식을 세워 두고, 나음에 나오는 식들을 이용하면 문제를 쉽게 풀 수 있을 것이다. 때때로 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$임을 이용해서 미분계수와도 연계해서 나오므로 두 가지 내용을 잘 숙지해 두자.

6월 모의고사 문항 분석

10. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x\le 1) \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^{n+1}+3x^n}{x^n+1} & (x>1)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

개념 **함수의 연속성**

함수의 연속성 문제는 무난하게 나온다면 몇 개의 구간으로 나누어진 함수가 연속일 조건이 무엇인지에 대해서 나오는 경우가 많다. 이 경우 구간의 경계 양쪽의 값을 판단하여 함수의 연속 조건 중 가장 중요한 (함숫값) = (극한값)을 사용하면 대부분 어렵지 않게 풀 수 있다. 6월 모의고사에서도 함수의 연속성 문제가 몇 개 나왔는데, 이번 문제에서 대표가 될 만한 13~14번 문제에서 좀 더 자세히 다뤄보도록 하자.

Concept

함수의 연속

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속일 조건은

① $x=a$에서 함수가 정의되고(함숫값이 존재) ② $\lim\limits_{x\to a}f(x)$가 존재하고(극한값이 존재)

③ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$이어야 한다. (함숫값과 극한값이 같아야 한다.)

이 내용들을 숙지하고 있다면 큰 어려움 없이 풀 수 있는 문제라고 할 수 있겠다.

Step 1

먼저 문제에 있는 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^{n+1}+3x^n}{x^n+1}$ $(x>1)$을 **〈정상적인 함수〉**로 바꾸어 보도록 하자. 그러면 이 내용을 알아야 한다.

$\lim\limits_{n\to\infty}r^n$의 극한값 ➪ $r=1,\ -1$을 기준으로 값이 달라진다.

① $|r|>1 : \pm\infty$ ② $r=1\ :\ =1$ ③ $|r|<1:0$

여기서는 $x>1$이라고 범위가 제시되어 있기 때문에 2^n, 3^n 등으로 이루어진 극한값을 계산하는 것과 비슷한 방식으로 해결하면 된다. 즉, 밑이 가장 큰 x^n으로 분자와 분모를 나누어 주면 되는 것이다.

[계산] ➪ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^{n+1}+3x^n}{x^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x+3}{1+\dfrac{1}{x^n}}=2x+3$

이 때 x는 숫자처럼 생각해주면 헷갈리지 않고 계산이 가능하다.

Step 2

여기까지 되었으면 문제가 " $f(x)=\begin{cases} x+a & (x \leqq 1) \\ 2x+3 & (x>1) \end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a값의 값은? " 이라는 자주 봐 왔던 문제로 바뀌는 것을 알 수 있다.
문제의 함수를 보면 $x+a$ 나 $2x+3$이나 모두 〈연속함수〉이기 때문에, $x=1$에서만 연속이면 나머지 구간에서는 모두 연속이라고 할 수 있겠다.

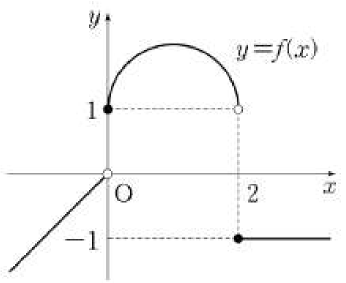
그러면 함수의 연속의 조건에 따라 (함숫값) = (극한값) ➪ $x=1$ 양 옆의 구간의 함숫값이 같다
라고 하고 식을 세우면 된다.

$x=1$ 왼쪽 구간에서 함숫값 = $1+a$
$x=1$ 오른쪽 구간에서 함숫값 = $2+3=5$
➪ $1+a=5$ $\therefore a=4$
➪ 답 : ②

Tip

함수의 연속을 묻는 문제는 여러 가지 유형이 있는데 이 문제는 보통 나오던 쉬운 유형을 한 번 응용해서 두 가지를 물어 본 유형이라 할 수 있다. Step 1은 보통 등비수열 형태로 주어진 함수의 극한을 물어보는 것이었고, Step 2는 그렇게 나온 구간함수가 연속일 조건을 물어보는 문제였다. 두 가지 모두 수능에 자주 출제되어 왔던 쉬운 문제들이지만 두 개를 합쳐 놔서 당황스러울 수 있었을 것 같다.
여기서는 편의상 Step 2에서 **(함숫값) = (극한값)을 양 옆의 구간의 함숫값이 같다**라고만 설명했는데, 그것은 이 문제처럼 양 구간의 함수가 다항함수와 같은 **연속함수로 주어질 때 쓸 수 있는 내용**이고, 제대로 푼다면 함숫값, 극한값 따로 살펴봐야 한다. 하지만 보통 그런 문제는 **그래프와 함께 나오거나, 합성함수로 된 경우**가 많으므로 다음 문제에서 살펴보도록 하자.

11. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \to +0} f(x)=1$

ㄴ. $\lim_{x \to 2-0} f(x)=-1$

ㄷ. 함수 $|f(x)|$는 $x=2$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념 **그래프** **함수의 연속성**

함수의 연속성에서 자주 출제되는 유형이라 할 수 있겠다. 다소 어렵게 나오는 경우 함수를 이것저것 변형해서 주므로 시간이 많이 걸리는데, A형에 나오는 것은 대부분 좌극한과 우극한의 정의, 연속성의 정의만 알고 있어도 풀리는 것으로 나오고 있어서 크게 어렵지는 않다고 할 수 있겠다. 역시 해마다 나오고 있는 유형이므로 미리미리 충분히 연습을 해 두어 수능 실전에서 빠르고 정확하게 풀어낼 수 있도록 해 두자.

Concept

좌극한과 우극한

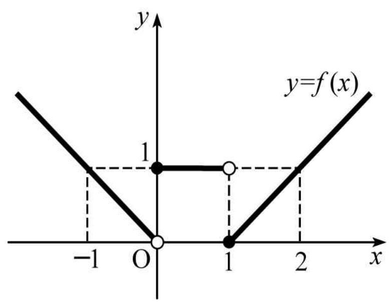
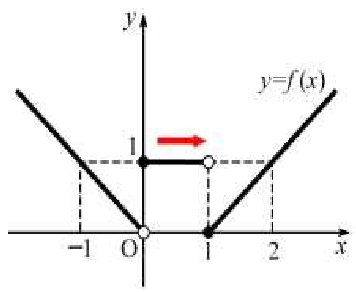
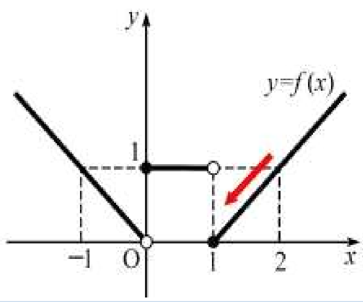
① **좌극한** $\lim_{x \to a-0} f(x)=\alpha$: x가 a보다 작은 값($x<a,\ x \neq a$)을 가지면서 a에 한없이 가까이 갈 때의 극한값

② **우극한** $\lim_{x \to a+0} f(x)=\alpha$: x가 a보다 큰 값($x>a,\ x \neq a$)을 가지면서 a에 한없이 가까이 갈 때의 극한값

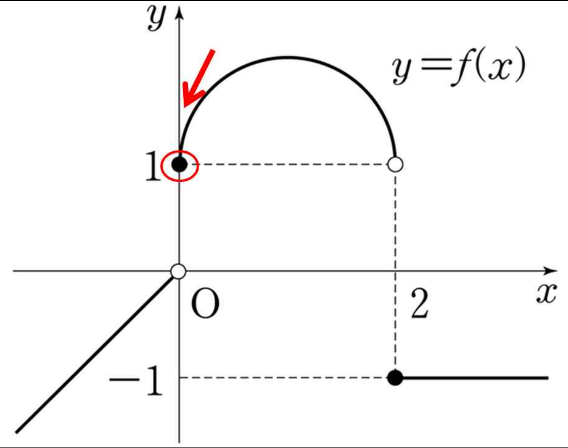
극한값의 존재 조건

좌극한값과 우극한값이 일치할 때 ➪ $\lim_{x \to a-0} f(x)=\lim_{x \to a+0} f(x)=\alpha \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x)=\alpha$

그래프에서 바로 이해하기

함수 $f(x)$가 다음과 같이 주어졌을 때	(좌극한) ➪ $\lim_{x \to 1-0} f(x)$	(우극한) ➪ $\lim_{x \to 1+0} f(x)$
		
Key Point	$x=1$ 왼쪽 끝의 y값을 읽는다 : 1	$x=1$ 오른쪽 끝의 y값을 읽는다 : 0

Step 1



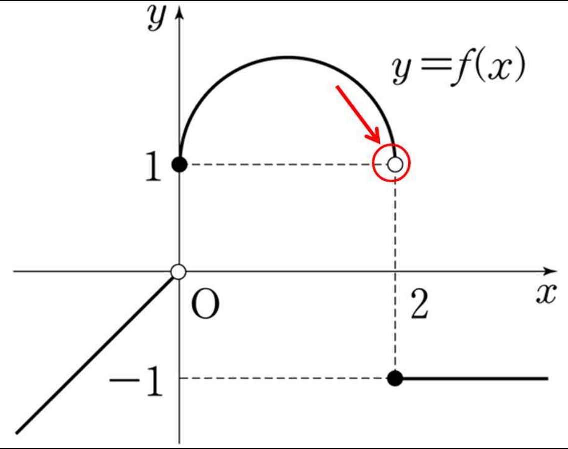
ㄱ. $\lim_{x\to+0} f(x)=1$ (O / X)?

$\lim_{x\to+0} f(x)$는 왼쪽 그림에서 보는 것처럼 $x=0$에서의 우극한이므로 오른쪽에서 다가가서 끝에 있는 점의 y좌표를 구하면 된다.

➪ 1

➪ (O)

Step 2



ㄴ. $\lim_{x\to2-0} f(x)=-1$ (O / X)?

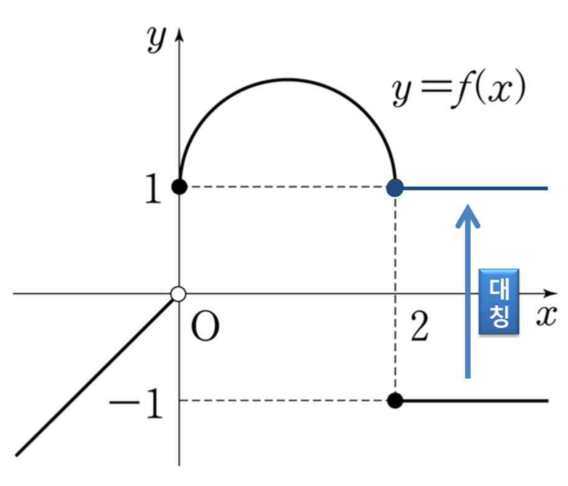
$\lim_{x\to2-0} f(x)$는 왼쪽 그림에서 보듯이 $x=2$에서의 좌극한이므로 왼쪽에서 다가가서 끝에 있는 점의 y좌표를 구하면 된다.

➪ 1

➪ (X)

주의할 것은 문제에서 물어보는 것은 **극한값**이므로, **함숫값이 존재하든지 상관이 없다는 것**이다. 즉, 검은 색으로 칠해졌든 그렇지 않든 상관이 없다는 것!

Step 3



ㄷ. 함수 $|f(x)|$는 $x=2$에서 연속이다. (O / X)?

$x=2$에서 연속인지를 물어봤으므로 다른 점은 살펴볼 필요 없이 $x=2$에서만 살펴보자.

$y=|f(x)|$는 $y=f(x)$의 **그래프를 x축으로 대칭이동 시킨 것**을 알고 있어야 한다. 따라서 그래프를 대칭이동 시켜주면 아래쪽에 있던 검은 점이 위쪽으로 옮겨가므로 $x=2$에서 뚫린 곳 없이 이어지는 것을 알 수 있다. ➪ (O)

그래프로 보지 않고 식을 이용해서 풀면

(좌극한) ➪ $\lim_{x\to2-0}|f(x)|=\lim_{x\to2-0}f(x)=1$

(우극한) ➪ $\lim_{x\to2+0}|f(x)|=\lim_{x\to2+0}\{-f(x)\}=1$

(함숫값) ➪ $|f(2)|=|-1|=1$ 이므로 모두 같아 연속.

Tip

아주 자주 나오는 유형 중에 하나로, 이번 수능에서도 나온다고 생각하면 된다. A형에서 주로 나오는 것은 좌극한, 우극한을 물어보고 함수에 몇 가지 변형을 가해서 연속인지 아닌지 살펴보는 것이다.

변형을 가하는 방법은 원래 함수에 **다른 함수를 곱하거나**(13번 문제에서 나옴), 함수를 **평행이동**(13번 문제에서 나옴)시키거나, **대칭이동**시키는 것 정도가 있다. 이 이외에 새로운 방법이 가끔 나오지만, 기본적으로 다음의 3가지 방법이 주로 나오기 때문에 이 방법들은 숙지해 두고 있으면 함수의 극한과 그래프가 같이 나오는 문제를 무난히 풀 수 있을 것이다.

12. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 10n$일 때, $a_n < 0$을 만족시키는 자연수 n의 개수는? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

개념 **수열의 합과 일반항의 관계**

수열의 합과 일반항의 관계에 대한 공식만 알고 있으면 풀리는 문제로, 가끔 등장하는 함정 요소도 없이 무난한 문제라고 할 수 있었다. 수열의 합과 일반항의 관계는 수능에 자주 이용되는 내용이므로 꼭 숙지를 해 두도록 하자.

Concept

수열의 합과 일반항의 관계

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$이라 할 때

$a_1 = S_1$

$a_n = S_n - S_{n-1}$ (단, n은 2 이상의 자연수)

수열의 합과 일반항의 관계에서 가장 중요한 것은 $a_n = S_n - S_{n-1}$만 생각하고 $a_1 = S_1$임을 잊어버리는 일이다. 특히나 $S_n = an^2 + bn + c$ $(c \neq 0)$처럼 끝에 상수항이 남아 있는 형태는 $S_2 - S_1$으로 구한 a_1과 S_1로 구한 a_1이 서로 다르므로 주의해야 한다. 이 문제는 상수항이 0이므로 그렇게 $S_2 - S_1$으로 구해도 문제가 없었지만, 실전에서는 어떻게 될지 모르므로 꼭 두 가지로 나누어서 풀도록 하자.

Solution

S_n을 이용해서 a_n을 구해 보도록 하자.

$a_1 = S_1 = -9$

$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 11$ $(n \geq 2)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 a_5까지 음수이고 a_6부터 양수이다.

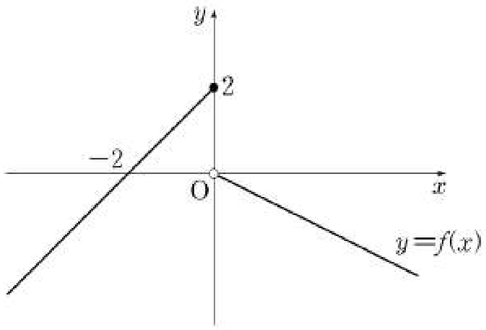
따라서 $a_n < 0$인 자연수 n의 개수는 5이다.

➪ 답 : ①

[13~14] 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x \le 0) \\ -\frac{1}{2}x & (x>0) \end{cases}$$

의 그래프가 그림과 같다. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. 함수 $g(x)=f(x)\{f(x)+k\}$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

14. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고

$$a_{n+1}=f(f(a_n)) \ (n \ge 1)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

추론 그래프 신유형 함수의 연속성

이번 평가원 모의고사에서 새로 등장한 유형이다. 문제 자체는 그리 새롭지 않지만 2문제가 세트로 나온 것은 이번 시험이 처음이므로 이번 수능 때도 2문제 세트로 된 문제가 나올 확률이 매우 높다.

13번 문제 자체는 그리 새롭지 않다. 변형된 함수가 연속인지 묻거나 연속이 될 조건을 묻는 것은 수능에 매우 자주 나왔던 유형이고, 그래프로 제시된 경우도 많으므로 크게 새롭지는 않았다. 6월 모의고사는 전 범위가 아니어서 함수의 극한 문제가 많이 나온 편이어서 함수의 극한에서 그래프가 나오는 유형이 거의 다 나왔다고 할 수 있다. 여기 나오는 유형과 유사한 기출문제들을 찾아서 풀어 보기를 바란다.

추론 그래프 신유형 점화식과 수열의 극한

다소 새로울 수 있는 문제라고 할 수 있다. 13번 문제와는 그래프를 같이 쓴다는 것을 제외하고는 별 관련이 없고, 수열의 극한 문제이기 때문에 13번 문제에서 힌트를 얻으려 해서는 안 될 것이다.

그래프를 이용한 수열의 극한에서 $y=x$의 그래프를 이용한 $a_{n+1}=f(a_n)$ 형태의 문제는 종종 나왔는데, 이번에는 한 번 더 응용해서 $a_{n+1}=f(f(a_n))$ 형태로 나온 것이 특징이다. 식이 좀 복잡하게 생겨서 당황스러웠을 수 있겠지만, 바로 규칙을 찾기 힘들면 직접 대입해보면서 규칙을 찾으면 규칙이 생각보다 쉽게 발견되므로 처음부터 완벽한 풀이로 접근하려고 할 필요는 없다.

[13번 문제]

Solution

함수의 그래프가 나와 있고 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 것을 물어봤다.
문제가 되는 함수 $g(x)$는 $f(x)\{f(x)+k\}$로, **평행이동한 함수**와 **원래 함수를 곱한 형태**로 되어 있다는 것이 특징이다. 둘 다 수능에 자주 출제되어 왔던 유형이라 할 수 있다.

문제에서는 $x=0$에서의 연속성만 물어봤기 때문에 $f(x)\{f(x)+k\}$를 직접 구할 필요 없이, $x=0$에서의 연속성만 확인하면 된다. 연속성을 확인할 때는 ① **좌극한값** ② **우극한값** ③ **함숫값** 세 개가 모두 같으면 되므로 이 값들을 구해 보자.

보기 좋게 표로 정리했는데, 실제 문제를 풀 때는 이렇게까지 거창하게 할 필요는 없다.

$x=0$에서의	$f(x)$	$f(x)+k$	$f(x)\{f(x)+k\}$
좌극한값	2	$2+k$	$2\cdot(2+k)=4+2k$
우극한값	0	k	0
함숫값	2	$2+k$	$2\cdot(2+k)=4+2k$

세 값이 모두 같아야 연속!

앞에서 풀었던 문제와는 달리 곱셈이 추가되었으므로 그래프를 변형해서 그리기가 어렵기 때문에 식을 써서 푸는 방법이 더 간단하다.

세 값이 모두 같아야 하므로
$4+2k=0 \quad \therefore k=-2$
➪ **답 : ①**

[14번 문제]

Step 1

일단 수열이 점화식으로 정의되어 있으므로 이 수열이 어떤 수열인지 해석해 볼 필요가 있다.
뭔가 복잡하게 생겼으므로 주어진 값들을 대입해서 규칙을 찾아내 보도록 하자.

$a_1=1,\ a_{n+1}=f(f(a_n))\ \ (n\geq 1)$에서

$$a_2=f(f(a_1))=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

$$a_3=f(f(a_2))=f\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right)=f\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$$

$$a_4=f(f(a_3))=f\left(f\left(\frac{5}{4}\right)\right)=f\left(-\frac{5}{8}\right)=\frac{13}{8}\ \cdots$$

로 가는 것을 확인할 수 있다. 대입할 때 $f(x)$의 그래프가 구간으로 나누어져 있기 때문에 $n=3$부터는 처음에는 $x>0$일 때의 함수를 이용하고 그 다음에는 $x<0$일 때의 함수를 이용하는 것을 확인할 수 있을 것이다.

Step 2

여기서 점화식을 세워 보는 것이 중요하다. 이런 규칙대로라면 계속 $f(f(a_n))$에서

처음 $f(a_n)$을 계산할 때는 $y=-\frac{1}{2}x$를 이용하고, 다음 $f(f(a_n))$을 계산할 때는 $y=x+2$를 사용할 것이므로

$f(f(a_n))=f\left(-\frac{1}{2}a_n\right)=-\frac{1}{2}a_n+2$라는 점화식을 세울 수가 있다.

Step 3

점화식을 세웠으면 극한값은 다음의 성질을 이용하여 쉽게 구할 수 있다.

> **점화식을 이용한 수열의 극한 계산**
>
> $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$이면, $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$이다.
>
> → $a_{n+1}=pa_n+q$에서 사용하자. $(-1<p<1$인 경우만$)$

많이 이용되는 성질이므로 알아 두도록 하자.

$a_{n+1}=f(f(a_n))=-\frac{1}{2}a_n+2$에서

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$로 두면

$\alpha=-\frac{1}{2}\alpha+2$에서 $\alpha=\frac{4}{3}$

➪ 답 : ④

> *Tip*
>
> 문제에서 평소에 보지 못한 점화식이 나와서 당황했을 수 있는데, 차분하게 직접 대입해보면서 규칙을 찾는 것이 좋다. 수능에서는 〈발견적 추론〉이라고 해서 직접 규칙을 찾는 문제를 많이 출제하는데, 이 문제 역시 바로 규칙이 잘 안 보이면 직접 대입을 해 가면서 규칙을 찾으려고 하는 것이 좋다.
> $a_{n+1}=f(a_n)$과 같은 문제를 풀 때 그래프를 이용해서 푸는 경우가 있는데, 이 문제 같은 경우는 합성함수로 되어 있기 때문에 그 방법으로 풀기가 쉽지 않을 것이다. 수능에서는 직접 규칙을 찾고, 배웠던 내용을 이용해서 풀 수 있는 문제를 출제한다는 원칙을 잊지 말기 바란다.

15. 지면으로부터 H_1인 높이에서 풍속이 V_1이고 지면으로부터 H_2인 높이에서 풍속이 V_2일 때, 대기 안정도 계수 k는 다음 식을 만족시킨다.

$$V_2 = V_1 \times \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{\frac{2}{2-k}}$$

(단, $H_1 < H_2$이고, 높이의 단위는 m, 풍속의 단위는 m/초이다.)

A지역에서 지면으로부터 12m와 36m인 높이에서 풍속이 각각 2(m/초)와 8(m/초)이고, B지역에서 지면으로부터 10m와 90m인 높이에서 풍속이 각각 a(m/초)와 b(m/초)일 때, 두 지역의 대기 안정도 계수 k가 서로 같았다. $\frac{b}{a}$의 값은? (단, a, b는 양수이다.) [4점]

① 10 ② 13 ③ 16 ④ 19 ⑤ 22

계산 실생활 지수함수와 로그함수

해마다 나오는 유형 중에 하나로, 문제 길이는 길지만 문제풀이에 이용되는 부분은 얼마 되지 않으므로 그 부분을 빠르게 추출해서 문제를 풀 수 있도록 해야 한다. 해마다 나오는 유형이고 배점도 높은 만큼 반드시 공략할 수 있도록 연습을 충분히 해 두도록 하자.

Step 1

지문 읽기

지면으로부터 H_1인 높이에서 ①풍속이 V_1이고 지면으로부터 H_2인 ①높이에서 풍속이 V_2일 때, ①대기 안정도 계수 k는 다음 식을 만족시킨다.

③ $V_2 = V_1 \times \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{\frac{2}{2-k}}$

(단, $H_1 < H_2$이고, 높이의 단위는 m, 풍속의 단위는 m/초이다.)

A지역에서 지면으로부터 ②12m와 36m인 높이에서 ②풍속이 각각 2(m/초)와 8(m/초)이고, B지역에서 지면으로부터 ②10m와 90m인 높이에서 ②풍속이 각각 a(m/초)와 b(m/초)일 때, 두 지역의 ② 대기 안정도 계수 k가 서로 같았다. $\frac{b}{a}$의 값은? (단, a, b는 양수이다.) [4점]

① 문제에 여러 가지 어려운 표현들이 나오지만, 문제 풀이에서 중요한 것은 문자들이 어떤 것이 있는지만 알면 된다. 이 문제에서는 풍속, 높이, 대기 안정도 계수라는 문자가 나오므로 그대로 대입을 하자.

② 위에서 언급된 문자들이 그대로 아래에 나온다.

③ 문제에서 사용해야 할 식이고, 이 식을 이해할 필요는 전혀 없다. 단지 문제에 나온 숫자를 대입해서 $\frac{b}{a}$를 구하는 것이 중요할 뿐이다.

이런 유형의 문제에서 절대 문제를 이해하려고 하지 말고, **대입**만 정확히 해서 계산을 정확히 하는 데만 신경 쓰자. 대기 안정도가 뭔지 이해할 필요가 전혀 없다. 이 문제는 단지 대입해서 구하라는 것만 정확히 구하라는 문제이다.

Step 2

그렇게 문제를 읽는 것을 파악했으면 이제 식을 세우자.

A지역에서 지면으로부터 12m와 36m인 높이에서 풍속이 각각 2(m/초)와 8(m/초)이고 + $V_2 = V_1 \times \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{\frac{2}{2-k}}$ ➩ $8 = 2 \times \left(\frac{36}{12}\right)^{\frac{2}{2-k}}$ ➩ 대기 안정도 k를 구할 수 있다. B지역에서 지면으로부터 10m와 90m인 높이에서 풍속이 각각 a(m/초)와 b(m/초)일 때 + $V_2 = V_1 \times \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{\frac{2}{2-k}}$ ➩ $b = a \times \left(\frac{90}{10}\right)^{\frac{2}{2-k}}$ ➩ 대기 안정도 k를 구할 수 있다.

풍속, 높이에 정확히 대입만 하면 A, B 지역에서의 대기안정도 k가 각각 나오는데 그 값이 서로 같다고 문제에 나왔으므로 각각에서 k를 구해서 서로 같다고 방정식을 세우면 되겠다.

A지역의 k : $\frac{2}{2-k} = \log_3 4$ ➩ $2-k = \frac{2}{\log_3 4}$ ➩ $k = 2 - \frac{2}{\log_3 4}$

B지역의 k : $\frac{2}{2-k} = \log_9 \frac{b}{a}$ ➩ $2-k = \frac{2}{\log_9 \frac{b}{a}}$ ➩ $k = 2 - \frac{2}{\log_9 \frac{b}{a}}$

k가 서로 같음 : $2 - \frac{2}{\log_3 4} = 2 - \frac{2}{\log_9 \frac{b}{a}}$ ➩ $\frac{2}{\log_3 4} = \frac{2}{\log_9 \frac{b}{a}}$

➩ $\log_3 4 = \log_9 \frac{b}{a}$ ➩ $\log_9 16 = \log_9 \frac{b}{a}$ ➩ $\frac{b}{a} = 16$

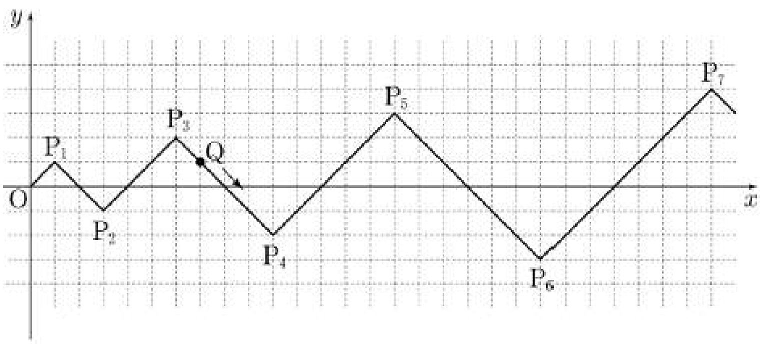
식이 복잡해 보이지만, 문제에서 하라는 대로 계산만 하면 답은 자연스럽게 나오는 것이 이 유형의 특징이다.

16. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 $P_n(x_n, y_n)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) $x_1 = y_1 = 1$

(나) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + (n+1) \\ y_{n+1} = y_n + (-1)^n \times (n+1) \end{cases} \quad (n \geq 1)$

점 Q는 원점 O를 출발하여 $\overline{OP_1}$을 따라 점 P_1에 도착한다. 자연수 n에 대하여 점 P_n에 도착한 점 Q는 점 P_{n+1}을 향하여 $\overline{P_nP_{n+1}}$을 따라 이동한다. 점 Q는 한 번에 $\sqrt{2}$만큼 이동한다. 예를 들어, 원점에서 출발하여 7번 이동한 점 Q의 좌표는 (7, 1)이다. 원점에서 출발하여 55번 이동한 점 Q의 y좌표는? [4점]



① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

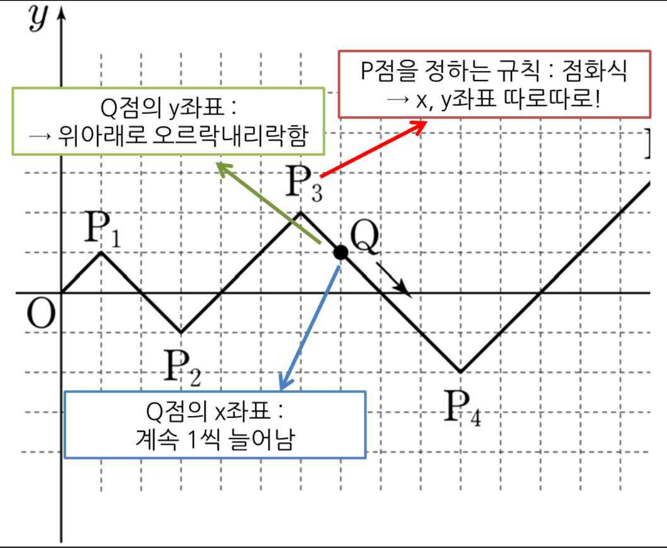
추론 발견적 추론 군수열

문제가 길고 복잡해 보이지만, 이런 문제는 직접 대입해 보면서 규칙을 찾는 것이 좋다. 우리가 보통 봐 왔던 점화식이 아니라면 바로 일반항을 구하려 하기보다는 일단 문제에 주어진 점들을 대입하면서 규칙을 찾고, 그 규칙으로부터 일반항을 도출할 수 있도록 하는 것이 좋다.

이 문제처럼 좌표가 있는 문제라면 x좌표와 y좌표를 따로따로 분석하는 것이 좋다. 두 좌표를 한 번에 보려고 하면 복잡하여 문제풀이가 힘들어지지만 따로따로 보면 규칙성이 쉽게 보이기 때문에 군수열을 이용하여 답을 구하기 쉽게 된다.

Step 1

문제도 길고 점화식도 복잡해 보이지만, 찬찬히 문제를 읽어보면 우리가 구해야 하는 것은 Q의 y좌표인 것을 알 수 있다.

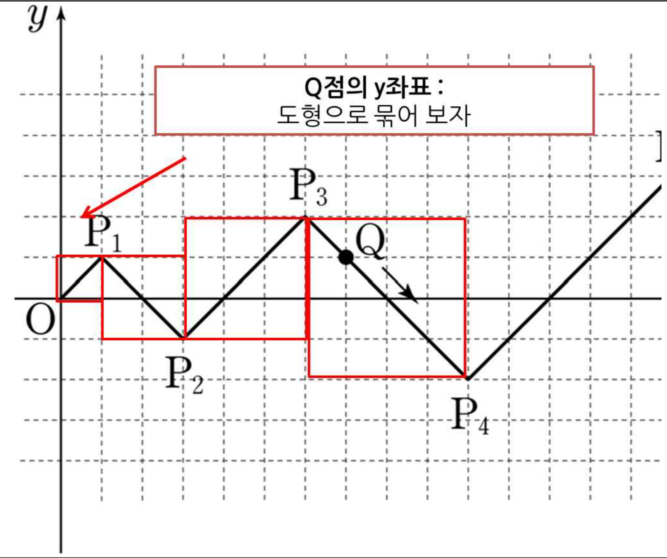


점화식은 한눈에 눈에 들어오지 않으니까 문제의 그림을 활용해 보도록 하자. 문제의 그림을 보니까 Q가 P들로 이어진 도형을 따라서 오른쪽으로 움직인다는 것을 알 수 있다.

x축으로는 계속 +1로만 움직이고

y축으로는 위아래로 왔다갔다하는 것을 알 수 있다.

이 말을 점화식으로 쓴 것이 (가), (나)의 설명이다.



문제에서 구하라는 것이 y좌표이고 실제로 y좌표가 위아래로 움직이고 있으므로 y좌표를 주로 살펴봐야 할 것이다.

일단 Q가 움직이는 양상으로 도형으로 파악하면 왼쪽 그림처럼 위로 1칸 올라가고, 다시 2칸 내려가고, 다시 3칸 올라가고 하는 식으로 규칙성을 가지고 움직이는 것을 알 수 있다.

➪ **군수열**을 생각해볼 수 있다.

군수열이라는 말이 나오는데, 수열을 묶어서 분석하는 방법이라고 생각하면 되겠다. 군수열을 분석하는 방법은 다음과 같다.

군수열 문제를 푸는 방법 : 어떻게 묶을 것인가?

— 반복되는 숫자를 확인한다

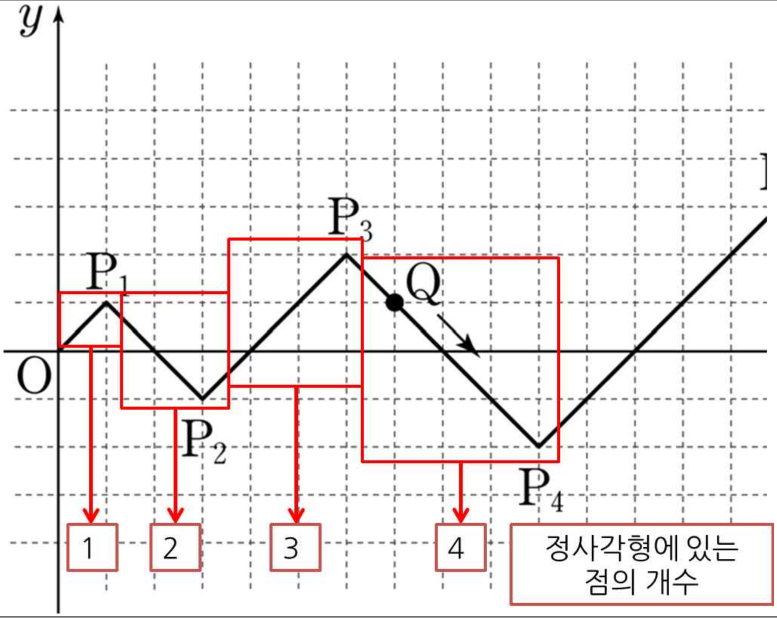
— 숫자가 증가하고 감소하는 것이 있는지 확인한다

— 묶이는 숫자의 개수도 눈여겨본다

➪ 묶고 나서 묶은 군에서 가장 구하기 쉬운 값을 기준으로 나머지 값을 찾아간다.

잘 와 닿지 않는데, 이 문제를 이 풀면서 어떻게 푸는지 직접 확인해 보도록 하자. 보통 군수열의 일반항을 구하는 것은 시간이 많이 걸리므로, 일반항보다는 문제에서 구하라는 항 번호 중심으로 수열을 분석하는 것이 좋다. 이번 문제에서는 55번 이동한 Q의 y좌표를 물어봤으므로 y_{55}를 구하는 것이다.

Step 2

Q점의 y좌표	
수열 묶기	
55번째 점은 몇 번째 상자에 있는지 확인	각 상자의 변의 길이는 계속 1개씩 늘어나므로 정사각형 안에 들어가 있는 점들도 1개씩 늘어난다는 것을 알 수 있다. 이를 이용해서 55번째 점은 몇 번째 상자에 있는지 확인해 보자. n번째 상자에는 n개의 점이 포함되어 있으므로, n번째 상자까지 포함된 점의 개수는 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 이다. 이 때 $n=10$을 넣으면 55가 나오므로, 55번째 점은 10번째 상자에 있고, 10번째 상자의 가장 오른쪽에 있는 점임을 알 수 있다.

Step 3

이 문제는 운이 좋게도 상자의 가장 마지막 점이 문제에서 구하라는 값이다. 이 문제의 경우 상자의 가장 오른쪽 에 있는 점이 상자에서 가장 대표적인 점이라고 할 수 있다. 왜냐하면 그 점들은 증가에서 감소로, 또는 감소에서 증가로 바뀌는 점이므로 값이 1, −1, 2, −2, 3, −3 과 같은 식으로 규칙적으로 변하고 있기 때문이다.
이 경우 10번째 상자의 가장 오른쪽에 있는 점의 y좌표는 1, −1, 2, −2, 3, −3 ... 처럼 2개씩 묶어 보면 −5임을 알 수 있다. ➪ Q의 y좌표는 −5이다. ➪ 답 ①

Q. 만약 문제에서 44번 이동한 점을 물어봤다면?

A. 역시 같은 방식으로 푼다. n번째 상자까지 포함된 점의 개수를 이용하면 44번 째 점은

$n=8$ ➪ 36번째 점까지 포함

$n=9$ ➪ 45번째 점까지 포함

이므로 9번째 상자에 포함된 것을 알 수 있으며, 9번째 상자의 가장 오른쪽에 있는 점이 45번째 점이므로, 44번째 점은 그 점 바로 전에 있는 점임을 알 수 있다. 앞서 했던 것처럼 9번째 상자의 가장 오른쪽에 있는 점의 y좌표는 5이고, 문제의 그림을 보면 홀수 번째 상자에서는 점이 계속 올라가고 있으므로 44번째 점의 y좌표는 5에서 하나 적은 4가 된다.

Tip

수능 문제에서는 문제에서 요구하는 값만 구하면 된다. 그렇기 때문에 군수열에서 일반항을 구하려고 고생하기보다는, 문제에서 구하라는 값이 몇 번째 군에 들어가 있는지를 재빠르게 확인하고 거기서 문제에서 요구하는 값을 찾아가는 식으로 푸는 것이 시간을 절약하는 방법이다.

6월 모의고사 문항 분석

17. 곡선 $y=x^3-3x^2+x+1$ 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하다. 점 A의 x좌표가 3일 때, 점 B에서의 접선의 y절편의 값은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

개념 **접선의 방정식과 미분**

4점짜리 문제이지만 미분을 이용하여 접선의 방정식을 구하는 것만 알고 있다면 쉽게 풀리는 문제였다. A형 미통기 파트는 4점짜리도 쉽게 출제되는 문제가 꽤 있으므로 4점이라고 해서 당황하지 말고 차분하게 풀 수 있도록 하자.

Concept

접점이 주어졌을 때 접선의 방정식 ▸ 접점에서의 기울기 구하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$

이때 접선과 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\tan\theta=f'(t)$이다.

Step 1

접점을 알고 있을 때 접선의 방정식을 구하는 것은 매우 간단하다. 접선이 서로 평행하다는 것은 접선의 기울기가 서로 같다는 것이고, 그것은 두 접점에서의 미분계수가 서로 같다는 것이다.

이 중 A의 x좌표가 3인 것을 알고 있으므로 이를 이용하면 B의 x좌표도 금방 구할 수 있다.

$f'(x)=3x^2-6x+1$ ➪ $f'(3)=27-18+1=10$

B의 x좌표를 a라 하면 $f'(a)=10$ ➪ $3a^2-6a+1=10$ ➪ $3a^2-6a-9=0$ ➪ $a^2-2a-3=0$ ➪ $a=-1,\ 3$

이 때 A의 x좌표가 3이므로, B의 x좌표는 자연스럽게 -1이 된다.

Step 2

B의 x좌표를 확인했으므로 $f(x)$에 $x=-1$을 대입하여 B의 y좌표를 구하자.

$f(-1)=-1-3-1+1=-4$

$\therefore\ B(-1,\ -4)$

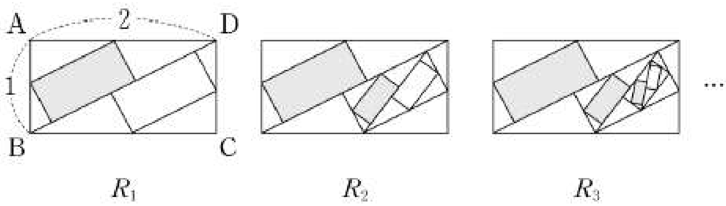
B에서의 접선이 B점을 지나므로 접선의 방정식은

$y=10(x+1)-4=10x+6$

➪ y절편은 6

➪ 답 : ②

18. 직사각형 ABCD에서 $\overline{AB}=1$, $\overline{AD}=2$이다.
그림과 같이 직사각형 ABCD의 한 대각선에 의하여 만들어지는 두 직각삼각형의 내부에 두 변의 길이의 비가 $1:2$인 두 직사각형을 긴 변이 대각선 위에 놓이면서 두 직각삼각형에 각각 내접하도록 그리고, 새로 그려진 두 직사각형 중 하나에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 새로 그려진 두 직사각형 중 색칠되어 있지 않은 직사각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 직사각형 중 하나에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{37}{61}$ ② $\frac{38}{61}$ ③ $\frac{39}{61}$ ④ $\frac{40}{61}$ ⑤ $\frac{41}{61}$

계산 도형 **무한등비급수**

무한등비급수 문제 역시 해마다 나오는 유형으로 점수 배점도 높은 편이고, 문제의 길이에 비해서 답은 비교적 빨리 구해지기 때문에 문제를 빠르게 푸는 훈련 위주로 하는 것이 좋다. 문제에 나온 설명을 한 줄 한 줄 자세히 읽기보다는 문제에 있는 그림을 중심으로 직관적으로 파악하고, 필요한 내용을 줄글에서 확인하는 식으로 풀어야 한다.

무한등비급수 문제를 풀 때 가장 중요한 것은 닮음비를 빠르게 파악하는 것이다. 길이에 대한 닮음비가 a : b일 때 넓이에 대한 닮음비가 $a^2:b^2$이라는 것을 알고 있으면 많은 도움이 되므로 이 내용은 꼭 알아 두도록 하자.

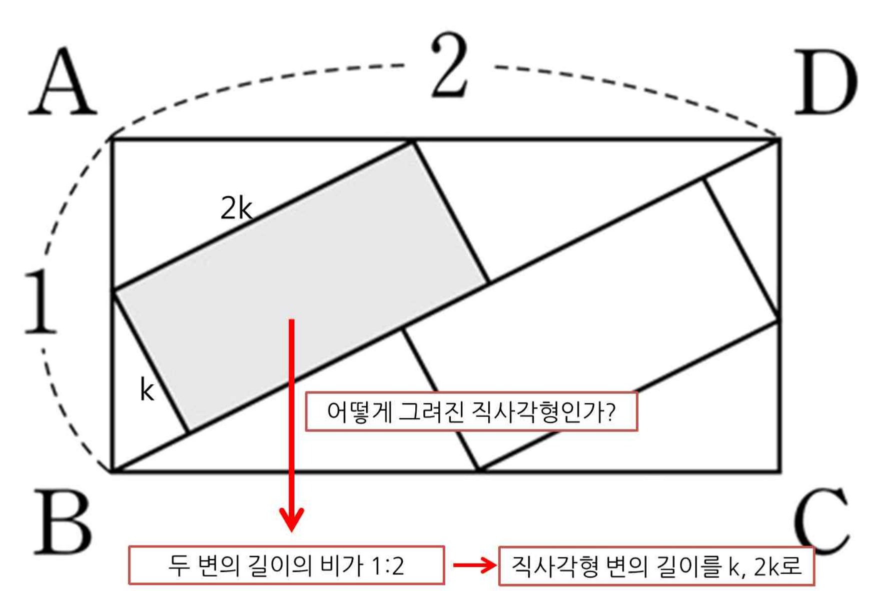
Step 1

보통 문제를 꼼꼼히 읽으면서 문제를 푸는 것이 보통이지만, 무한등비급수 문제는 그렇게 풀면 언어영역처럼 되므로 문제에 제시된 도형을 먼저 보면서 지문 내용을 확인하는 식으로 푸는 것이 좋다.
그 전에, 이 유형의 문제는 95% 이상 무한등비급수 문제이므로 다음의 구조를 꼭 알아 두자.

이등변삼각형 피타고라스의 정리 삼각비 원주각 원의 성질 …	+	닮음	=	무한등비급수 문제
첫째항 a		공비 r		답 $\dfrac{a}{1-r}$

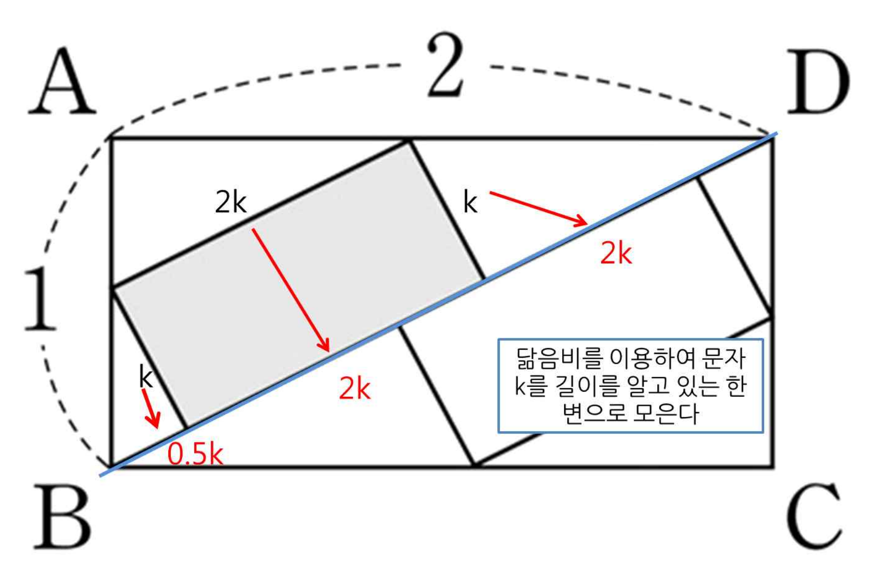
따라서 첫째항을 먼저 구하고, 공비를 구하는 식으로 2가지 내용을 빠르게 파악해서 공식을 쓴다고 생각하자.

먼저 첫째항을 구해 보도록 하자.



첫째항은 문제에서 가장 첫번째 그림에 있는 색칠된 도형일 확률이 높은데, 혹시 모르니 꼭 줄글에서 확인하자.

그러면 색칠한 도형의 넓이를 구해야 하는데, 직사각형이 어떻게 그려진 것인지에 대한 정보가 필요하다.
➪ 이 정보를 줄글에서 뒤져 보면 두 변의 길이의 비가 1:2라는 것을 알 수 있다.
➪ 변의 길이를 k, $2k$로 두고, k에 대한 방정식을 세우자.



그러면 이제 식을 세워야 하는데, 포인트는 k를 <u>길이를 알고 있는 한 변으로 모으는 것</u>이다. 이 때 도형에 대한 감각이 필요하다. 이 경우 ABC와 닮은 삼각형을 이용하여 k를 직사각형 ABCD의 대각선으로 모았다.

➪ $\frac{1}{2}k+2k+2k=\sqrt{5}$

➪ $k=\frac{2}{9}\sqrt{5}$

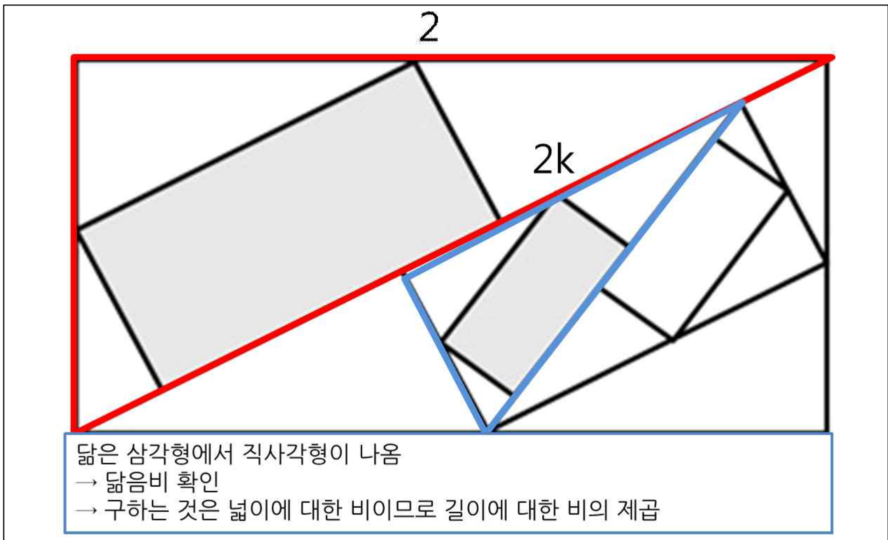
따라서 직사각형의 넓이는

$2k\times k=2k^2=2\cdot\frac{20}{81}=\frac{40}{81}$

Step 2

첫째 항을 구할 때 길이를 모아서 식을 세우는 것은 많이 연습해볼 필요가 있다. 도형이 그때그때 달라지는데, **닮음과 피타고라스의 정리는 매우 자주 이용되는 내용**이므로 꼭 생각을 해 두도록 하자. 비슷한 기출문제들을 많이 풀어 보면 도움이 된다.

이제 닮음비를 구해야 된다. 닮음비는 조금만 생각해보면 다음 도형에서 직접 고생을 하지 않고도 구할 수 있다.



무한등비급수의 특징은 같은 작업을 계속 반복하는 것이므로 그것을 이용하면 닮음비를 쉽게 구할 수 있다.
➪ 두 번째 직사각형에서도 방금 구한 것처럼 넓이를 구하게 된다. 이 때 두 번째 직사각형이 들어가 있는 직각삼각형(파랑)은 처음 직각삼각형(빨강)과 닮았다.
➪ 서로 대응되는 변을 보면 닮음비가 $2:2k$임을 알 수 있다.
➪ 구하는 것은 직사각형의 넓이이므로 넓이의 비는 $1^2:k^2$이 됨을 알 수 있다.

이 넓이의 비가 무한등비급수의 공비 $\frac{1}{k^2}=r$가 된다. $k^2=\frac{20}{81}$이므로, 무한등비급수 값을 구하면

$$S=\frac{\frac{40}{81}}{1-\frac{20}{81}}=\frac{40}{61}$$ ➪ 답 ④

Tip

무한등비급수 문제는 배점이 높은 만큼 반드시 빨리 풀 수 있어야 하고, 꼭 맞혀야 하는 문제이다. 무한등비급수 문제에서 시간이 낭비되는 이유는 문제 이해가 늦어지거나, 초항이나 닮음비를 구할 때 어려움을 겪기 때문이다.
문제풀이에서 언급한 것처럼 긴 줄글은 반드시 문제에 있는 그림을 보고 참고하는 식으로 보면서 시간을 절약하자. 그 다음에 도형에서 초항을 구할 때는 문제의 조건을 활용하여, 길이를 알고 있는 변으로 미지수를 모을 수 있도록 하자. 식을 세울 때 주로 사용되는 도형의 성질이나 공식은 **닮음, 피타고라스 정리, 제2코사인법칙, 원의 성질이 주로 나오므로** 이 내용들을 꼭 숙지해 두도록 하자. 가급적 많은 문제를 풀면서 속도감 있게 문제를 푸는 연습을 해 두어야 한다.

19. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고,

$$n^2 a_{n+1} = (n^2-1)a_n + n(n+1)2^n \quad (n \ge 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식에 의하여
>
> $$a_{n+1} = \frac{(n+1)(n-1)}{n^2}a_n + \frac{n+1}{n}2^n$$
>
> 이다. $b_n = \frac{n-1}{n}a_n$이라 하면
>
> $$b_{n+1} = b_n + \boxed{\text{(가)}} \quad (n \ge 1)$$
>
> 이고, $b_1 = 0$이므로
>
> $$b_n = \boxed{\text{(나)}} \quad (n \ge 1)$$
>
> 이다. 그러므로
>
> $$a_n = \begin{cases} 2 & (n=1) \\ \frac{n}{n-1} \times \left(\boxed{\text{(나)}}\right) & (n \ge 2) \end{cases}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(5)+g(10)$의 값은? [4점]

① 1014 ② 1024 ③ 1034 ④ 1044 ⑤ 1054

개념 **연역적 추론** **수열 증명**

무한등비급수 문제처럼 해마다 수능에 한 문제씩은 반드시 나오는 유형이다. 주로 수열의 점화식에서 일반항을 구하는 증명 과정이나 수학적 귀납법에 대한 내용이 많이 나온다.

증명 문제 역시 문제가 긴 편이므로 문제를 빠르고 효율적으로 풀 수 있도록 연습을 해야 한다. 보통 4점짜리로 나오는 경우가 많으므로 여기서 시간을 많이 날리면 문제가 생길 수 있으므로 잘 풀리지 않으면 다른 문제를 먼저 풀고 돌아와서 푸는 식으로 푸는 것도 좋은 전략이다.

증명 문제는 전체적인 과정을 처음부터 하려고 하지 말고 (가), (나) 주변의 식을 이용해서 답만 빠르게 구하는 식으로 가는 것이 좋다.

Step 1

역시 문제를 처음부터 다 읽는 것은 위험하다. 괄호가 있는 부분을 중심으로 문제를 읽어 가는 것이 문제를 빠르고 효율적으로 풀 수 있는 방법이다.

(가) 주변을 먼저 살펴보자.

$b_{n+1} = b_n + (\text{가})$ $(n \geq 1)$이라고 되어 있다. 주변을 살펴보면

① $b_n = \dfrac{n-1}{n} a_n$
② $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n-1)}{n^2} a_n + \dfrac{n+1}{n} 2^n$

임을 확인할 수 있다. 그러면 이 내용에서 (가)를 구할 수 있다는 말이다.

(가)의 양변을 살펴보면 모두 b_n에 관한 점화식임을 확인할 수 있으므로, ②번의 식을 모두 b_n으로 나타내보자. 이 때 ①을 사용하는 것이다.

$a_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n-1)}{n^2} a_n + \dfrac{n+1}{n} 2^n$를 잘 분석하면 $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n} \cdot \dfrac{n-1}{n} a_n + \dfrac{n+1}{n} 2^n$으로

$b_n = \dfrac{n-1}{n} a_n$을 쓸 수 있는 형태가 보인다. 우변에서 a_n을 b_n으로 변형시킬 수 있는 것이 보이므로 좌변도 변형시키자.

등식의 양변을 $\dfrac{n+1}{n}$으로 나누면

$\dfrac{n}{n+1} a_{n+1} = \dfrac{n-1}{n} a_n + 2^n$ ➪ $b_{n+1} = b_n + 2^n$ ➪ (가) : 2^n

Step 2

(가)를 구했으므로 이를 이용해서 (나)도 구하자.

(나)는 b_n을 구하는 것인데, 이미 $b_{n+1} = b_n + 2^n$이라는 점화식을 구했으므로 계차수열임을 알 수 있다. 따라서

$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$로 식을 세울 수 있고, $b_1 = 0$이라고 바로 위에 나와 있으므로

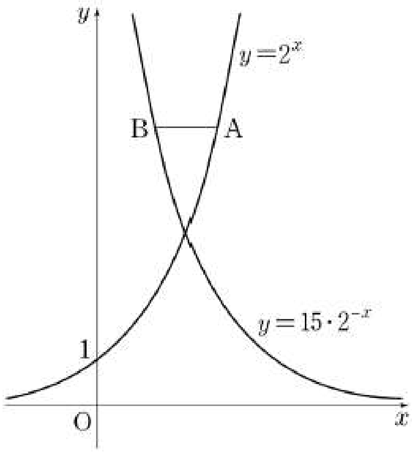
$b_n = \dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^n - 2$임을 구할 수 있다.

이제 (가), (나)를 모두 구했으므로 대입만 하면 된다. $f(5) + g(10) = 2^5 + 2^{10} - 2 = 32 + 1022 = 1054$ ➪ **답 : ⑤**

Tip

예전 증명 문제에서는 문제 길이가 매우 길어서 읽는데 시간이 많이 걸렸지만 최근 증명 문제는 식을 간결하게 주는 대신 정확히 유도과정을 이해할 수 있는 문제가 나오고 있다. 그래도 처음부터 모든 것을 이해하면서 풀려고 하면 문제풀이 속도가 심하게 느려질 수 있으므로, 문제에서 구하라는 것을 중심으로 다른 정보를 조합하는 것이 좋다.
점화식 문제에서 몇 가지 기본 점화식은 알고 있는 것이 좋다. 특히 계차수열의 점화식이나, $a_{n+1} = pa_n + q$ 형태의 점화식은 아는 것으로 가정하고 문제에서 구할 것을 요구하는 경우가 있으므로 이 점화식들은 반드시 유도과정과 일반항을 알아 두는 것이 문제를 빨리 푸는 지름길이다.
문제에서 (가), (나)를 구했으면 망설임 없이 답만 구하고 다음 문제로 넘어가자. 나머지 과정들은 문제풀이과 무관하다.

20. 그림과 같이 함수 $y=2^x$의 그래프 위의 한 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=15\cdot 2^{-x}$의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 점 A의 x좌표를 a라 할 때, $1<\overline{\mathrm{AB}}<100$을 만족시키는 2 이상의 자연수 a의 개수는? [4점]



① 40 ② 43 ③ 46 ④ 49 ⑤ 52

추론 **지수함수의 그래프**

지수함수의 그래프 문제는 수능에서 응용 분야가 무궁무진하므로 일반화해서 정리하기는 힘들다. 그렇다 하더라도 그래프를 읽는 기본 스킬들은 갖추고 있어야 한다.

이 문제의 경우 문제에서 하라는 대로 하면 크게 어려움 없이 풀리는 문제로, 지수함수 문제 치고는 쉬운 편이라고 할 수 있었다.

Step 1

A를 지나고 x축에 평행한 직선이 만나는 점을 B라 하였고, A의 x좌표를 a라 했으므로 그대로 대입하자.

A점의 좌표는 $A(a,\ 2^a)$이고, A를 지나고 x축에 평행한 직선은 같은 $y=2^a$이므로 B점의 x좌표는

$2^a=15\cdot 2^{-x}$에서 $a=\log_2 15-x$ ➪ $x=-a+\log_2 15$

Step 2

$\overline{AB}=a-(-a+\log_2 15)=2a-\log_2 15$이고 이 값이 1과 100 사이에 있으므로

$1<2a-\log_2 15<100$을 만족하는 자연수 a의 개수를 구하는 것이다.

부등식을 정리하면 $\frac{1}{2}log_2 30<a<50+\frac{1}{2}log_2 15$이다.

자연수 a의 개수를 구하는 것이므로 $\log_2 30$과 $\log_2 15$의 대략적인 값을 구하자.

$\log_2 16<\log_2 30<\log_2 32$이므로 $\log_2 30=4.xxx$이고

$\log_2 8<\log_2 15<\log_2 16$이므로 $\log_2 15=3.xxx$이다.

따라서 $2.xxx<a<51.xxx$이므로 a는 3부터 51까지의 자연수다.

➪ a는 49개

➪ 답 : 49

21. 함수

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x \ge 0) \end{cases}$$

의 극댓값이 5일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

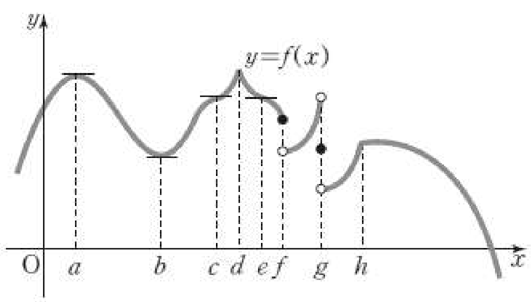
개념 **극대 · 극소와 미분**

다항함수가 아닌 함수에서 극대 · 극소를 볼 때는 미분계수가 0인 점뿐만 아니라 미분계수가 존재하지 않는 점도 살펴봐야 한다. 극대 · 극소는 증가에서 감소로 바뀌거나 감소에서 증가로 변하는 것으로 정의되므로 미분계수는 그 점에서 존재할 수도 있고 존재하지 않을 수도 있다. 이 문제처럼 구간이 나눠진 경우는 구간의 경계는 반드시 살펴봐야 할 점이다.

Concept

극댓값과 극솟값 명확히 하기

· **극점** : 극대점 + 극소점
· **극값** : 극댓값 + 극솟값(y값)
① $x=a$: 미분계수 = 0, 극대점
② $x=b$: 미분계수 = 0, 극소점
③ $x=c$: 미분계수 = 0, 극점 아님
④ $x=d$: 미분계수 없음(뾰족), 극대점
⑤ $x=e$: 미분계수 = 0, 극점 아님
⑥ $x=f$: 미분계수 없음, 불연속, 극점 아님
⑦ $x=g$: 미분계수 없음, 불연속, 극점 아님
⑧ $x=h$: 미분계수 없음, $x=h$의 왼쪽에서 증가함수지만 오른쪽에서는 수평 상태가 유지되므로 극대가 아님



Step 1

함수가 구간으로 나눠져 있으므로 각각의 그래프를 그릴 수 있어야 한다. 이 때 a라는 미지수가 섞여 있어서 바로 그래프를 그릴 수가 없다.

이를 해결해야 하는데 일단 문제에서 극댓값이 5라고 했으므로, 극댓값이 나올 가능성이 있는 미분계수가 0이 되는 점부터 먼저 찾아두도록 하자.

① $y=a(3x-x^3)$을 미분하면 $y'=a(3-3x^2)$이므로 $x=-1,\ 1$에서 미분계수가 0이다.
➪ 이 함수는 $x<0$에서만 정의되므로 $x=-1$에서만 미분계수가 0이다.
➪ $a>0$인지 $a<0$인지에 따라서 $x=-1$에서 극대, 극소가 달라진다.

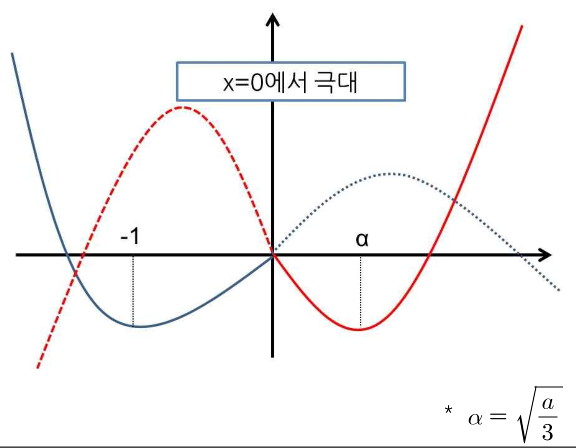
② $y=x^3-ax$를 미분하면 $y'=3x^2-a$이므로 $x=\pm\sqrt{\frac{a}{3}}$에서 미분계수가 0이다.

➪ $a>0$이면 $x=\sqrt{\frac{a}{3}}$에서 미분계수가 0이 되고, $a<0$이면 여기서는 미분계수가 0인 점이 없다.

Step 2

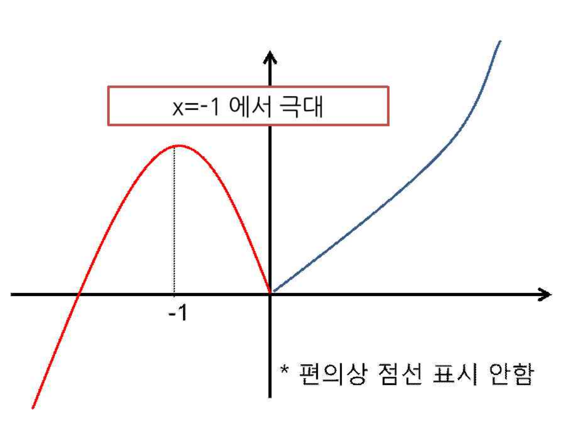
이제 극댓값이 5가 될 수 있는 경우가 언제인지 봐 보자. 앞에 미분한 것에서 $a>0$일 때와 $a<0$일 때의 상황이 많이 달라지므로 경우를 쪼개 보자. $a=0$인 경우는 대입하면 바로 말이 안된다는 것을 알 수 있으므로 제외하자.

① $a>0$



극대점을 확인해야 하므로 그래프를 그려 보면 왼쪽 실선처럼 되는 것을 알 수 있다. 이 때 극대가 되는 점은 $x=0$일 때이다.
➪ 따라서 $f(0)=5$가 되어야 하는데 $x=0$을 대입하면 0이 되므로 모순이다.
➪ $a>0$이 될 수 없다.

② $a<0$



이번에는 $x=-1$에서 극대가 되는 것을 확인할 수 있다.
따라서 $f(-1)=a(-3+1)=-2a=5$이므로
$a=-\frac{5}{2}$가 된다.
➪ $a<0$이므로 성립한다.

a를 구했으므로 $f(2)=8+5=13$
➪ 답 ⑤

Tip

극대, 극소가 되는 점을 구할 때 미분계수가 0이 되는 점만 생각해서는 안 된다. 미분계수가 존재하지 않는 점을 반드시 고려해 주어야 한다. 특히 절댓값이 붙은 함수나 구간함수 같은 경우는 미분불가능하면서 극대 · 극소(뾰족점)인 점이 자주 나오기 때문에 그 점을 빼 놓으면 문제를 제대로 풀 수 없다.
그래도 일단 극대 · 극소는 100% 미분을 활용하게 되어 있으므로 잘 풀리지 않으면 일단 식을 미분하고 시작하는 것도 나쁘지는 않은 방법이라 할 수 있다.

22. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3=8$, $a_6-a_4=12$일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

계산 등차수열의 일반항

등차수열 $\{a_n\}$의 초항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=8$

$a_6-a_4=(a+5d)-(a+3d)=2d=12$

$\therefore d=6$

$\therefore a=-4$

$\therefore a_6=a+5d=-4+5\cdot 6=26$

➪ 답 : 26

23. 함수 $f(x)=5x^2+3x-1$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

계산 다항함수의 미분법

$f'(x)=10x+3$

$f'(1)=13$

➪ 답 : 13

24. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$3n^2+2n<a_n<3n^2+3n$$

을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5a_n}{n^2+2n}$의 값을 구하시오. [3점]

계산 수열의 극한의 성질

문제에 나온 부등식을 문제에서 요구하는 형태로 변형한다.

$$\frac{15n^2+10n}{n^2+2n}<\frac{5a_n}{n^2+2n}<\frac{15n^2+15n}{n^2+2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{15n^2+10n}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{15n^2+15n}{n^2+2n}=15$$

이므로 샌드위치 정리에 의해서 극한값은 15

➪ 답 : 15

Advice

샌드위치 정리는 극한의 성질을 이용하는 문제에서 종종 나온다. 가끔 어려운 문제로 나오기도 하지만 문제에서 부등식을 주고 극한값을 구하라고 할 때 대부분 어렵지 않게 풀 수 있으므로 너무 걱정할 필요는 없다.

25. 두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+a}-2}{x-2}=b$일 때, $10a+4b$의 값을 구하시오. [3점]

계산 미정계수의 결정

(분모)→0 이므로 (분자)→ 0이어야 한다.

따라서 $\sqrt{2+a}-2=0 \Rightarrow a=2$

$a=2$를 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$$

$$=\lim_{x-2}\frac{x-2}{(x-2)\sqrt{x+2}+2}$$

$$=\frac{1}{4}=b$$

따라서 $10a+4b=21$

➪ 답 : 21

26. 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (2, 1)에서의 접선의 기울기가 2이다.

$g(x)=x^3f(x)$일 때, $g'(2)$의 값을 구하시오. [4점]

계산 미분법

$y=f(x)$ 위의 점 (2, 1)에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(2)=2$, $f(2)=1$

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$이므로

$g'(2)=12f(2)+8f'(1)=12+16=28$

➪ 답 : 28

Advice

2점 수준의 4점짜리 문제이다. 미통기에서 종종 점수를 줄 생각인지 한 두 문제 정도 공식만 쓰면 되는 문제가 나오므로 시간 부족으로 이런 문제를 못 푸는 일이 없어야 한다.

27. 방정식 $x^{\log_2 x} = 8x^2$의 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오. [4점]

계산 **로그방정식**

4점 치고는 매우 간단한 문제이다. 로그방정식에서 식이 복잡하면 로그를 취하는 것은 반드시 알고 있어야 할 스킬이다. 로그방정식 문제는 대체적으로 그리 어렵지 않지만, 치환한 것을 그대로 답을 써서 틀리는 경우가 자주 있으므로 그런 실수만 조심하면 무난히 점수를 가져갈 수 있겠다.

Solution

식이 복잡하므로 양변에 밑이 2인 로그를 취하자.

$(\log_2 x)^2 = 3 + 2\log_2 x$가 된다.

$\log_2 x = t$로 치환하고 방정식을 정리하면

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$\therefore t = -1,\ 3$

$\log_2 x = -1,\ 3$이라는 것이므로

$x = \frac{1}{2},\ 8$ ⇦ 이 과정에서 $x = \frac{1}{10},\ 1000$으로 쓰면 안됨!

$\therefore\ \alpha\beta = 4$

Tip

아주 쉬운 유형인데 의외로 오답률이 높을 수 있을 수도 있었다. 보통 $\log x = t$로 치환하므로 $t = -1,\ 3$에서 무의식적으로 $x = \frac{1}{10},\ 1000$으로 옮겨서 답을 100으로 쓰는 실수를 할 수가 있다. 로그방정식은 항상 밑과 진수 범위를 살펴 주고, 치환한 것을 올바르게 답으로 옮길 수 있도록 해야 어이없이 틀리지 않게 될 것이다.

28. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 7$이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+2} = a_n - 4 \quad (n = 1, 2, 3, 4)$ (나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6} = a_n$이다.

$\sum_{k=1}^{50} a_k = 258$일 때, a_2의 값을 구하시오. [4점]

추론 **주기수열**

발견적 추론처럼 보이지만 문제에서 명백하게 주기수열의 형태가 보이므로 조금만 차분하게 풀면 크게 어렵지 않게 풀 수 있는 문제라고 할 수 있다. 문제에 나왔던 주기수열의 표현들은 수능에도 나왔던 표현들이므로 반드시 알아 두고 있자.

Solution

문제에 나온 점화식을 잘 해석한다면 수열이 어떤 모양인지 알 수 있다.

(가) $a_{n+2} = a_n - 4$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

은 등차수열의 모습과 비슷한데, n이 한정되어 있으므로 직접 대입해서 정리해보자.

➪ $a_1 = 7,\ a_3 = 3,\ a_5 = -1$ 이고 $a_4 = a_2 - 4,\ a_6 = a_4 - 4$라는 식을 얻을 수 있다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6} = a_n$이다.

이거는 누가 봐도 확실한 주기함수 표현이고 주기가 6임을 보여준다. 따라서 a_1 ~ a_6만 구하면 나머지는 계속 반복이라는 것이다.

$a_1,\ a_3,\ a_5$는 값을 알고 있고 $a_2 = x$라고 하면 $a_4 = x - 4,\ a_6 = x - 8$이므로

a_n은 $7,\ x,\ 3,\ x-4,\ -1,\ x-8$이 계속 반복되는 수열임을 알 수 있다.

여기서 $\sum_{k=1}^{50} a_k = 258$이라고 했으므로 이것으로 쓸 수 있다.

$(7 + x + 3 + x - 4 + (-1) + x - 8) \times 6 + 7 + x = 258$ ⇦ 6개짜리 8묶음 + 앞의 2 항

➪ $(3x - 3) \times 8 + 7 + x = 25x - 17 = 258$

➪ $25x = 275$ ➪ $x = 11 = a_2$

➪ 답 11

29. 이차정사각행렬 A가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $A^3=E$
> (나) $A-E$의 역행렬이 존재한다.

행렬 $(A-E)^{60}$의 모든 성분의 합이 $2^a\times 3^b$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이고, E는 단위행렬이다.) [4점]

추론 행렬의 성질

항상 어려워하는 행렬의 성질 문제이다. 행렬의 성질 문제에서는 문제에 주어진 형태를 어떻게 만들 수 있을 것인지에 대해서 항상 생각해야 한다. 또 역행렬이 나오면 교환법칙이 성립함을 이용하고, 이를 이용해서 식을 변형할 수도 있어야 한다. 행렬의 성질은 유형별로 외워서 공략하는 문제가 아니고, 문제에서 힌트를 얻어서 하나하나 처리해야 함을 잊지 말자.

Solution

행렬의 성질을 너무 어렵게 생각하지 말고, 〈형태〉에 집중해서 그 형태로 식을 바꿔 간다고 생각하면서 풀면 생각보다 문제가 쉽게 풀릴 수 있다. 먼저 $A^3=E$라는 식이 있고, $A-E$의 역행렬이 존재한다는 말이 있다. 다음과 같은 추론 과정으로 풀어 나가자.

추론 과정		결과
$A-E$의 역행렬이 존재하니까 이 식을 이용하자.	⇨	쓸 수 있는 식이 $A^3=E$뿐이므로 $A^3-E=O$로 변형하면 $(A-E)(A^2+A+E)=O$라는 식을 얻을 수 있다. 일단 $A-E$의 역행렬이 존재하니까 그걸 쓰면 $A^2+A+E=O$을 구할 수 있다.
⇩		
$(A-E)^{60}$을 구해야 한다. 그런데 $(A-E)^{60}$은 직접 계산하기 힘들다.	⇨	$A^2+A+E=O$을 구했으니까 이 식을 사용하자. $(A-E)^{60}$을 구하려면 최소한 $(A-E)^2$정도의 값은 알아야 할 것 같다. ➪ 그런데 이 식은 $A^2+A+E=O$에서 유도할 수 있다. 즉, $(A-E)^2+3A=O$로 식을 변형하면 $(A-E)^2=-3A$가 된다.
⇩		
구한 $(A-E)^2=3A$를 써 보자.	⇨	$(A-E)^2=3A$니까 $(A-E)^{60}=\{(A-E)^2\}^{30}=(3A)^{30}=3^{30}A^{30}$ 이다. 그런데 문제에서 $A^3=E$라고 했으므로 $3^{30}A^{30}=3^{30}(A^3)^{10}=3^{30}E$이다. 따라서 $(A-E)^{60}=\begin{pmatrix}3^{30}&0\\0&3^{30}\end{pmatrix}$ ➪ 성분합 : 2×3^{30} ➪ $a=1,\ b=30$ ➪ **답 :** $a+b=31$

6월 모의고사 문항 분석

30. 자연수 k에 대하여 $\log k$의 지표와 가수를 각각 x좌표와 y좌표로 갖는 점을 P_k라 하자. 다음 조건을 만족시키는 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $1 \le m < n < 100$
> (나) $\overline{\mathrm{P}_m\mathrm{P}_n} = \sqrt{1+(\log 2)^2}$

★ Killer 문제

추론	발견적 추론	상용로그의 지표와 가수

A형은 상위권의 입장에서는 대부분이 평이한 문제이고 한 두 문제가 1등급과 2등급을 가르는 형식으로 출제되고 있다. 물론 경우에 따라서 다소 어려운 문항이 2개 이상 출제된 경우도 있지만 나머지 문항이 평이하고 시간도 얼마 걸리지 않게 나와서 어려운 문제에 충분한 시간을 할애해서 진검승부를 하는 구도로 되는 것이 지금까지의 수능이었다.

이 문제 역시 A형 30번 문제답게 등급을 가를 수 있는 문제로 출제되었다. 최상위권이라면 이 문항까지 반드시 맞혀야 하므로, 어떻게 공략할 것인지, 또 수능에 이런 킬러 문항이 나오면 어떻게 풀 것인지 생각해 보자.

Step 1

30번 문제는 대부분 발견적 추론인 경우가 많다. 따라서 시간을 충분히 갖고 차분히 풀 수 있도록 하는 것이 중요하며, 시간이 부족하면 그냥 버리고 다른 문제를 완벽히 맞게 하는 게 효과적일 수 있다.

먼저 $P_k = (\text{지표},\ \text{가수})$라고 문제에서 정의해줬다. 이를 $\log k = n + \alpha$(n은 정수 $0 \le \alpha < 1$)과 같이 익숙하게 써 오던 형태로 쓰면 $P_k = (n,\ \alpha)$라고 쓸 수 있다.

다음으로 조건에 있는 (가), (나)를 분석해보도록 하자. (가)는 m, n에 대한 언급이 (나)에 나오므로 (나)부터 살펴보자.

> (나) $\overline{P_m P_n} = \sqrt{1+(\log 2)^2}$

일단 P_m이라는 점은 $\log m$의 지표를 x좌표로, 가수를 y좌표로 하는 점이라고 할 수 있다. n도 있으니까
$P_m = (n_1,\ \alpha_1)$, $P_n = (n_2,\ \alpha_2)$라고 써 두면 생각하기 편할 것이다.
그러면 $\overline{P_m P_n}$은 거리 공식에 의해서
$\overline{P_m P_n} = \sqrt{(n_2-n_1)^2 + (\alpha_2-\alpha_1)^2}$으로 쓸 수 있고 이 값이 $\sqrt{1+(\log 2)^2}$이라는 것이다.
따라서 $(n_2-n_1)^2 + (\alpha_2-\alpha_1)^2 = 1+(\log 2)^2$이다.

Step 2

여기까지는 그럭저럭 쉽게 도달할 수 있을 것인데, 그 다음부터가 관건이다.
먼저 우리가 늘 써온 것처럼 n은 정수이고 $0 \le \alpha < 1$라는 사실을 잊지 말아야 한다.
따라서 $\alpha_2 - \alpha_1$같은 경우는 아무리 커도 절댓값이 1을 넘을 수가 없다. 즉 $-1 < \alpha_2 - \alpha_1 < 1$ ➪ $0 \le (\alpha_2-\alpha_1)^2 < 1$
이렇게 쓰고 보니까 $(\alpha_2-\alpha_1)^2$이라는 것도 결과적으로 〈소수〉부분이라는 것을 알 수 있다.
반면에 $n_2 - n_1$은 정수이므로 결과적으로 $(n_2-n_1)^2 + (\alpha_2-\alpha_1)^2$에서
$(n_2-n_1)^2$은 정수 부분, $(\alpha_2-\alpha_1)^2$은 소수 부분이라는 것을 알 수 있다.
이것은 이 값이 $1+(\log 2)^2$이라는 (정수) + (소수) 형태로 써 준 사실로부터 생각해볼 수 있는 것이다.
그게 아니더라도 상용로그에서 지표가 정수이고 가수가 소수라는 성질은 많이 이용해 온 것이므로 충분히 추론 가능하다.

Step 3

그러면 위의 결론으로부터 $(n_2 - n_1)^2 = 1$, $(\alpha_2 - \alpha_1)^2 = (\log 2)^2$이라는 식을 얻을 수 있다.

이제 남은 (가) 조건을 살펴보자.

(가) $1 \leqq m < n < 100$

이 조건을 큰 의미를 갖는다. $(n_2 - n_1)^2 = 1$라는 식을 만족하는 $(n_1,\ n_2)$의 순서쌍은 그냥 자리에서 생각해도 $(1,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 4)$... 로 엄청나게 많다.

하지만 (가) 조건이 오면 $\log k$의 지표가 0 또는 1로 한정되므로, n_1과 n_2는 0, 1 둘 중에 하나가 되어야 한다.

뿐만 아니라 $m < n$이라는 조건도 있으므로 당연히 $\log m$의 지표보다 $\log n$의 지표가 커야 한다.

따라서 $n_1 = 0$($\log m$의 지표), $n_2 = 1$로 결정난다. 이제 α_1, α_2의 순서쌍만 구해 주면 된다.

Step 4

앞에서 $(\alpha_2 - \alpha_1)^2 = (\log 2)^2$이라고 했으므로 $|\alpha_2 - \alpha_1| = \log 2$라고 식을 세울 수 있다.

여기서 주의할 것은 $\alpha_2 - \alpha_1 = \log 2$라고 무의식적으로 절댓값을 빼 버리면 안 된다는 것이다.

앞에서 지표로 $m < n$의 크기가 결정되어 있으므로 α_1, α_2는 대소 관계가 어떻게 되어도 상관이 없기 때문이다.

그러면 $\alpha_2 - \alpha_1 = \log 2$인 경우와 $\alpha_2 - \alpha_1 = -\log 2$인 경우로 나눠서 순서쌍을 구해 주자.

i) $\alpha_2 - \alpha_1 = \log 2$

여기서 잘 안 될 수가 있는데, 앞에서 n_1, n_2를 구했던 것을 이용해서 m, n을 직접 구해보자.

그 이유는 m, n이 자연수라는 조건이 있으므로 이를 사용하기 위함이다.

$\log m = 0 + \alpha_1$, $\log n = 1 + \alpha_2$이다. 여기에 $\alpha_2 - \alpha_1 = \log 2$를 이용하면

$\log n - \log m = \alpha_2 - \alpha_1 = 1 + \log 2$ ➪ $\log \dfrac{n}{m} = 20$ ➪ $n = 20m$

이 때 m은 한 자리 자연수이므로 $(m,\ n) = (1,\ 20)$, $(2,\ 40)$, $(3,\ 60)$, $(4,\ 80)$ ➪ 4개

ii) $\alpha_2 - \alpha_1 = -\log 2$

마찬가지로 풀면 $\log n - \log m = \alpha_2 - \alpha_1 = 1 - \log 2$ ➪ $\log \dfrac{n}{m} = 5$ ➪ $n = 5m$

m은 한 자리 자연수이고 n은 두 자리 자연수이므로 $(m,\ n) = (2,\ 10)$, $(3,\ 15)$, $(4,\ 20)$, $(5,\ 25)$, $(6,\ 30)$, $(7,\ 35)$, $(8,\ 40)$, $(9,\ 45)$ ➪ 8개

따라서 답은 12개이다.

이렇게 실전에서 풀면 깔끔한데, 다들 Step 4가 잘 안 되었을 것이다. 다음 장에서 우리가 이 문제를 풀 수 없었던 이유를 다시 한 번 체크해보고, 어떻게 자연스럽게 이런 풀이를 수능 때 떠올릴 수 있는지 생각해보자.

Diagnosis

Step 1 자체가 안 된 경우

➪ 이 경우는 시간이 부족했거나 문제를 차분히 읽지 못해서일 확률이 높다. 30번 문제를 풀어야 하는 학생이라면 대부분 Step 1의 문제는 아닐 것이라 생각한다.

Step 2 에서 막힌 경우

➪ Step 2에서 가장 중요한 것은 상용로그에서 지표와 가수의 특성 (정수, 소수)를 알고 있으며 그것을 문제에서 주어진 형태에서 알 수 있느냐이다.

➪ 이 과정은 자연수, 유리수, 무리수 등의 조건을 등한시했던 것을 개선함으로써 해결될 수 있다. 어떤 문제든지 자연수, 유리수, 무리수 등이라는 말이 언급되면 그 내용을 써야 하는지 살펴보아야 한다. 상용로그는 명백하게 지표는 정수, 가수는 소수라고 정의를 하고 시작하며, 이를 이용했던 문제도 꽤나 많으므로 이런 개념들을 소홀히 하지 않았나 생각해 봐야 한다.

➪ 예를 들어 "$m+n\sqrt{2}=3+\sqrt{2}$일 때, m, n의 값을 구하여라." 라는 문제에서 아무 생각 없이 $m=3$, $n=1$이라고 답을 하지 않았나 생각해 봐야 한다. **〈이 문제에서 m, n이 유리수일 때〉** 라는 말이 없으면 문제 자체가 성립되지 않거나 다른 조건이 있는 것이다. 이런 조건들에 대해서 평소에 유심히 살펴보는 습관을 기르고 기출문제들 중에 이런 성질을 이용하는 문제가 있는지 꼭 찾아서 풀어보자.

Step 3 에서 막혔거나 실수한 경우

➪ $a^2=1$은 $a=\pm1$이라고 잘 풀지만 문자로 주어졌을 때 실수로 절댓값을 붙이지 않을 수 있다. 이것은 **평소에 계속 생각하면서 절댓값을 붙이는 것을 "무의식적"으로 할 수 있게 훈련**을 해 주어야 한다. 그렇지 않으면 수능 때 "무의식적" 인 실수를 할 수도 있다.

➪ n_0, n_1의 값을 구하지 못하고 헤맨 경우는 **새로운 문자를 도입했을 때 그것이 어디서 나온 것인지 정리하지 못하고 헤맸거나 문제에 주어진 조건이 문자의 범위를 줄이는 데 기여한다는 것을 잘 이해하지 못했을 가능성**이 높다. 수능 기출문제를 다시 한 번 꼼꼼하게 풀어보면서 문제에 주어진 조건들이 어떻게 문제의 답을 줄여 가는데 이용되는지 하나하나 따져가면서 생각해 볼 필요가 있다.

Step 4 에서 막혔거나 실수한 경우

➪ $\alpha_2-\alpha_1=\pm\log2$까지는 구했지만 여기서 제대로 된 식을 만들지 못했을 가능성이 가장 높다. 이 경우에는 궁여지책으로 m이 한 자리 자연수이므로 이를 이용해서 1, 2, 3, 4... 9까지 일일이 대입하면서 시도하다가 놓쳤을 가능성이 높다.

➪ 이 문제는 "$\log m$과 $\log n$의 가수가 서로 같을 때, m, n의 값을 구하여라" 와 같은 문제를 어떻게 풀어왔는지를 생각해보면 의외로 빨리 답이 나올 수가 있다. 아무 생각 없이 $\log m-\log n$을 하고 답을 구해왔다면, 2% 부족한 공부를 해온 것이다. $\log m-\log n$을 하는 이유는 이렇게 함으로써 가수가 제거되고 정수부분만 남기 때문에 〈m, n에 대한 식 = 정수〉와 같은 형태의 식이 나와서 m, n에 대한 식이 정수라고 해서 하나하나 세서 풀 수 있기 때문이다.

➪ 마찬가지로 이 문제도 m, n이 자연수라는 말이 나왔고 가수에 대한 식이 나왔으므로 여기서 가수에 대한 식을 자연수인 m, n에 대한 식으로 바꾸는 것이라 생각하면 산뜻하게 문제를 해결할 수 있었을 것이다. 앞으로 문제를 풀 때도 이 점을 생각하면서 풀면 많은 도움이 될 것이다.

2012년 수능 30번 문항 복습

30. 자연수 a, b에 대하여 곡선 $y=a^{x+1}$과 곡선 $y=b^x$이 직선 $x=t(t \geqq 1)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 다음 조건을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오. 예를 들어, $a=4$, $b=5$는 다음 조건을 만족시킨다. [4점]

> (가) $2 \leqq a \leqq 10$, $2 \leqq b \leqq 10$
> (나) $t \geqq 1$인 어떤 실수 t에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} \leqq 10$이다.

★ Killer 문제

추론	발견적 추론	지수함수와 로그함수

제가 2012년 수능이 끝날 때 썼던 칼럼입니다. 30번 문제에 대한 고민을 다시 한 번 해 보시는 기회가 되면 좋겠습니다.

Step 1

문제에 나온 조건들을 한 번 읽어보자.

① 자연수 a, b
② 곡선 $y=a^{x+1}$과 곡선 $y=b^x$
③ 직선 $x=t(t \geqq 1)$와 만나는 점을 P, Q
④ 조건을 만족시키는 $(a,\ b)$의 모든 순서쌍의 개수
⑤ $2 \leqq a \leqq 10$, $2 \leqq b \leqq 10$
⑥ $t \geqq 1$인 어떤 실수 t에 대하여
⑦ $\overline{\mathrm{PQ}} \leqq 10$

Step 2

먼저 **구해야 하는 것**이 무엇인지를 살펴본다.

> ④ 조건을 만족시키는 $(a,\ b)$의 모든 순서쌍의 개수

가 바로 우리가 구해야 할 것이다. 그것을 어떻게 구해야 할 것인가는 “조건”과 문제의 “표현”에 나와 있을 것이다.

먼저 **조건을 만족시킨다**는 말이 나왔으니 조건으로 눈을 돌려 보자. 문제에서 조건은 (가), (나)로 나왔지만 세분화해서 보자.

> **<문제에서 말해 준 조건>**
> ⑤ $2 \leqq a \leqq 10$, $2 \leqq b \leqq 10$
> ⑥ $t \geqq 1$인 어떤 실수 t에 대하여
> ⑦ $\overline{\mathrm{PQ}} \leqq 10$

이 때, 문제 표현을 샅샅이 봤다면, **① 자연수 a, b**를 발견할 수 있을 것이다. 그러면 a, b 모두 각각 2 이상 10 이하의 자연수이므로 a, b 각각 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 까지 가능하다. 경우가 생각보다 많지 않

기 때문에 최후의 방법으로 ‘일일이 대입’하는 것도 고려할 수 있다.

그 다음 눈에 들어오는 조건이 ⑦ $\overline{PQ} \leq 10$ 이다. 그러면 P, Q는 어디 있는 것일까? P, Q는

③ 직선 $x = t(t \geq 1)$와 만나는 점을 P, Q라 하자.

라고 문제에 나와 있다. **문제에는 마음대로 정한 점은 없다. 어떤 점인지 모두 설명이 나오게 된다.** 그러면 t가 무엇인지도 나올 것이다. 역시나

⑥ $t \geq 1$인 어떤 실수 t에 대하여

라고 t에 관한 설명도 나와 있다.

여기서 주의할 것은 **“어떤”** 이라는 말이다. 어떤 이라는 말은 수학(상) 과정의 명제 단원에 나와 있는 것인데, “모든”과 착각해서는 안 된다. **“어떤”**은 **한 가지만 있어도 가능한 것**이고, **“모든”**은 **항상 성립해야 하는 것**을 의미한다. 착각하지 말아야 할 것은 “어떤 ~에 대하여”와 “어떤 ~에 대하여도”는 전혀 같지 않은 말이라는 것이다. 후자는 “모든 ~에 대하여”의 뜻이 된다.

결과적으로 ⑥의 의미는 $\overline{PQ} \leq 10$인 경우가 하나만이라도 존재하면 그것은 a, b가 될 수 있다는 것이다. 이것을 다시 생각해 보면, "항상 $\overline{PQ} \leq 10$가 아닌 경우"가 있을 수 있다는 것이며, 그것이 어떤 경우인지를 안다면 문제를 풀 수 있게 되는 것이다.

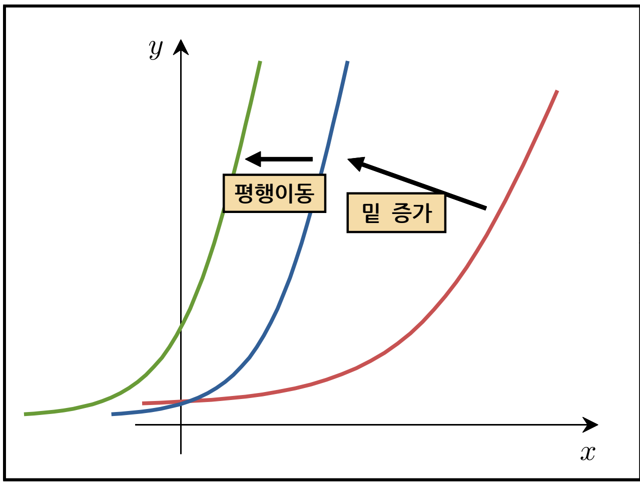
Step 3

이제

② 곡선 $y = a^{x+1}$과 곡선 $y = b^x$

를 보자. 우리는 앞에서 a, b가 모두 2 이상의 자연수라는 것을 확인했으므로, 지수함수의 밑이 모두 1보다 크므로 그래프의 개형이 오른쪽 위로 올라가는 형태임을 알 수 있다. 그리고 두 식은 “지수” 부분이 하나는 $x+1$, 다른 하나는 x인 상황이다.

이제 우리는 그래프를 그릴 때 필요한 **① 밑의 크기와 ② 평행이동**을 하나하나 살펴봐야 한다.



〈밑의 크기와 그래프〉

밑의 크기가 증가하면

0보다 큰 부분의 그래프가 위로 간다.

빨간색 → 파란색

〈평행이동과 그래프〉

그래프가 x축으로 -1만큼 평행이동하면

0보다 큰 부분의 그래프가 위로 간다.

파란색 → 초록색

우리가 $y = a^{x+1}$와 $y = b^x$의 그래프를 그린다고 했을 때, 컴퓨터로 그리는 것이 아니므로 a, b의 대소에 따라서 위 그림처럼 간략하게 그래프를 그릴 것이다. 그러므로 우리는

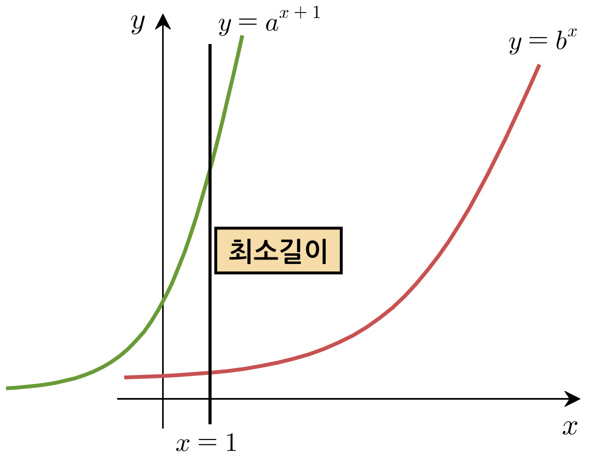
$a > b$, $a = b$, $a < b$의 세 가지 경우

로 쪼개어 그림을 그릴 수 있을 것이고,

평행이동(x축 방향으로 -1만큼)

여기에 만 고려해주면 모든 경우에 대해서 살펴볼 수 있다. 이렇게 그래프를 그리면 $y = a^{x+1}$의 그래프와 $y = b^x$의 그래프가 어떤 모양인지에 따라서 “항상 $\overline{\mathrm{PQ}} \leq 10$가 되지 못하는 경우” 즉, “항상 $\overline{\mathrm{PQ}} > 10$인 경우”가 있는지를 알 수 있게 된다.

① $a > b$



<최소 길이>

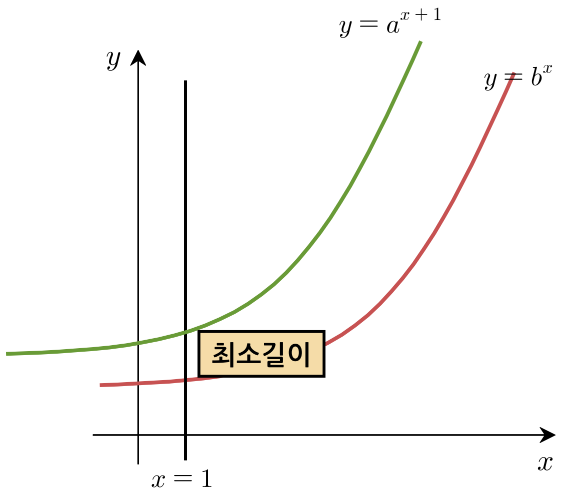
$x = t$의 직선이 오른쪽으로 갈수록, 즉 t가 커질수록 차이가 계속 증가하므로, t가 최소일 때 최소 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 나온다.
따라서 $t = 1$일 때

$$a^2 - b$$

가 바로 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값이다.

따라서 우리는 $a^2 - b$가 10 이하가 되어야 조건을 만족하고, $a^2 - b$가 10보다 커버리면 “항상 $\overline{\mathrm{PQ}} > 10$인 경우”가 되어 버린다. 조건을 만족하는 (a, b)의 순서쌍은 $(3, 2)$ 밖에 없다.)(a가 4일 때는 b가 6보다 커야 되는데, b는 a보다 작다고 했으므로 불가능하다. a가 더 큰 경우는 따져 볼 필요도 없다.)

② $a = b$



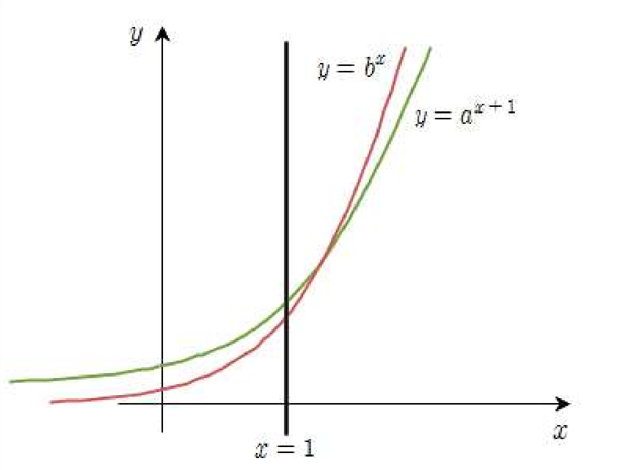
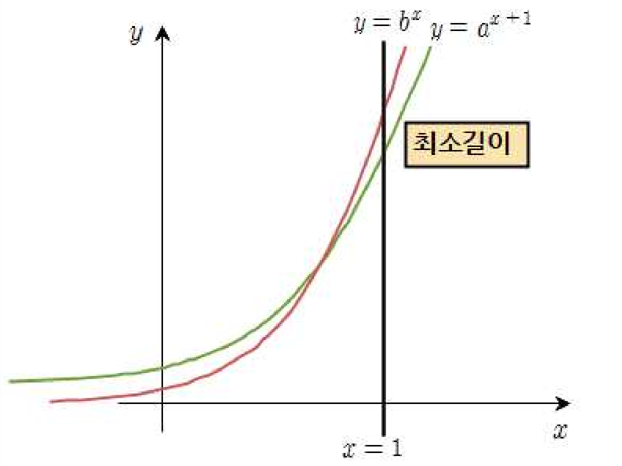
<최소 길이>

$x = t$의 직선이 오른쪽으로 갈수록, 즉 t가 커질수록 차이가 계속 증가하므로, t가 최소일 때 최소 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 나온다.
따라서 $t = 1$일 때,

$$a^2 - b$$

가 바로 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값이다.

$a = b$이므로, $a^2 - a$가 10 이하가 되어야 한다. 이를 만족하는 a는 2, 3 밖에 없다. (자연수니까 직접 대입하는 것이 빠르다. 이차방정식을 풀 필요는 없다.)

③ $a<b$		〈최소 길이〉 $a<b$인 경우는 그래프가 항상 만나게 되는데, 교점의 x좌표가 1보다 큰 경우와 작은 경우가 있다. 큰 경우는 왼쪽과 같은 경우로, $a<b$이면서 $a^2>b$인 경우이다. 이 때 최소 길이는 0이다.
		〈최소 길이〉 이처럼 $a<b$이면서 $a^2<b$인 경우는 그래프가 만나기는 하지만 $x<1$인 지점에서 만나기 때문에 최소 길이는 $b-a^2$이 된다. 그러나 $2 \leqq a \leqq 10$, $2 \leqq b \leqq 10$이므로, $b-a^2<10$이 될 수밖에 없어서 이 경우도 문제의 조건을 항상 만족한다.

$a<b$인 경우는 $a=2$일 때, $b=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$의 8가지, $a=3$일 때 $b=4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$의 7가지 ⋯ 이렇게 가므로 $1+2+3+\cdots+7+8=\dfrac{8\times 9}{2}=36$의 36가지이다.

Step 4

정리하면
① $a>b$인 경우 : 1가지
② $a=b$인 경우 : 2가지
③ $a<b$인 경우 : 36가지
총 39가지이다. 따라서 답은 **39가지**가 된다.

〈덤〉 어떤/모든 관련 예시문제

(1) $0<x<1$인 모든 실수 x에 대하여 $|x-a|<1$이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하라.
(2) $0<x<1$인 어떤 실수 x에 대하여 $|x-a|<1$이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하라.
(3) $0<x<1$인 어떤 실수 x에 대하여도 $|x-a|<1$이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하라.

답 (1) $0 \leqq a \leqq 1$ (2) $-1<a<2$ (3) $0 \leqq a \leqq 1$