패턴21

구분구적법

편집:우에노리에

1. **2009** **교육청(3점)**

모든 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 $f(x+2)=f(x)$ 를 만족시키고, $-1 \leqq x \leqq 1$ 에서 다음과 같이 정의된다.

$$f(x)=30x^2+15$$

이 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(10+\frac{2k}{n}\right)$ 의 값을 구하시오.

2. **2010** **평가원(4점)**

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 있다. 2 이상인 자연수 n에 대하여 폐구간 $[0,1]$을 n등분한 각 분점 (양 끝점도 포함)을 차례대로 $0=x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n=1$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $n=2m$(m은 자연수)이면 $\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m} \leqq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left\{\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right\}=\int_0^1 f(x)dx$

ㄷ. $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n} \leqq \int_0^1 f(x)dx \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{n}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

3. **2011** **교육청(4점)**

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=1,\ f(1)=2$ (나) $f'(x)>0,\quad f''(x)>0$ (단, $0<x<1$)

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 함수 $y=\{f(x)\}^2$의 그래프는 구간 $(0,\ 1)$에서 아래로 볼록하다.

ㄴ. $\displaystyle\int_0^1 \{f(x)+f(1-x)\}dx<3$

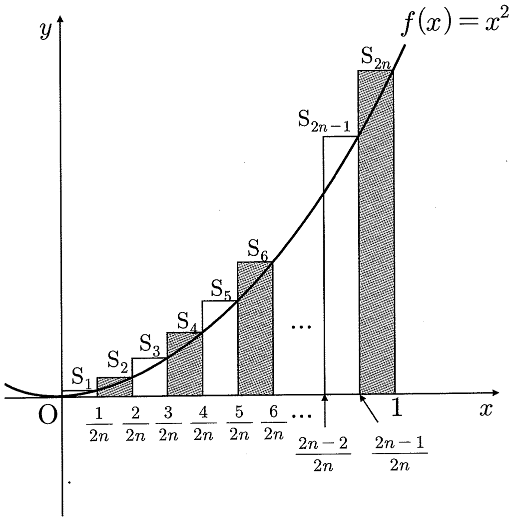
ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}^2+\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2}{2}\cdot\frac{1}{n} \geq \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. **2006** 평가원(4점)

함수 $f(x)=x^2$에 대하여 그림과 같이 구간 $[0,\ 1]$을 $2n$ 등분한 후, 구간 $\left[\dfrac{k-1}{2n},\ \dfrac{k}{2n}\right]$를 밑변으로 하고 높이가 $f\left(\dfrac{k}{2n}\right)$인 직사각형의 넓이를 S_k라 하자. (단, n은 자연수이고 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2n$이다.)



<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k=\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx$

ㄴ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(S_{2k}-S_{2k-1})=0$

ㄷ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_{2k}=\frac{1}{2}\int_0^{1} x^2\,dx$

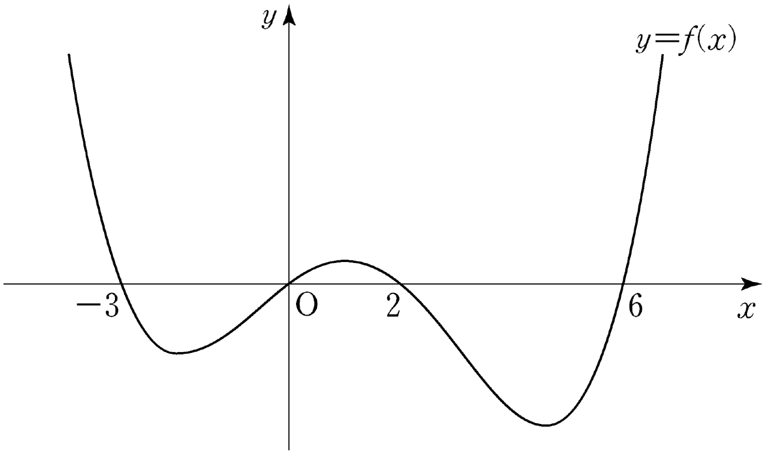
① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 2012 평가원(4점)

사차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(m+\frac{k}{n}\right)<0$$

을 만족시키는 정수 m 의 개수는?



① 3 ② 4 ③ 5

④ 6 ⑤ 7

6. 2009 평가원(4점)

함수 $f(x)=\sin\frac{x^2}{2}$에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $0<x<1$일 때, $x^2\sin\frac{x^2}{2}<f(x)<\cos\frac{x^2}{2}$ 이다.

ㄴ. 구간 $(0,\,1)$에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.

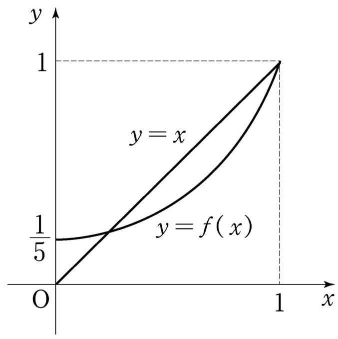
ㄷ. $\int_0^1 f(x)\,dx \leqq \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

7. **2005** **평가원(4점)**

오른쪽 그림은 직선 $y = x$ 와 다항함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 일부이다. 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geqq 0$ 이고 $f(0) = \frac{1}{5}$, $f(1) = 1$ 일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



[보 기]

ㄱ. $f'(x) = \frac{4}{5}$ 인 x 가 개구간 $(0, 1)$ 에 존재한다.

ㄴ. $\int_0^1 f(x)dx + \int_{\frac{1}{5}}^1 f^{-1}(x)dx = 1$

ㄷ. $g(x) = (f \circ f)(x)$ 일 때, $g'(x) = 1$ 인 x 가 개구간 $(0, 1)$ 에 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. **2008** **교육청(4점)**

$0 \leqq x \leqq 1$ 에서 정의된 다항함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

Ⅰ. $1 < f(x) < 2$
Ⅱ. $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$

이 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $0 < x < 1$ 인 임의의 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geqq 0$이다.

ㄴ. 방정식 $f(x) - 2x = 0$의 해가 개구간 $(0, 1)$에 적어도 한 개 존재한다.

ㄷ. $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} < \int_0^1 f(x)dx < \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. **2008** 평가원(4점)

다항함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(0)=0$ (나) $0<x<y<1$인 모든 x, y에 대하여 $0<xf(y)<yf(x)$

세 수 $A=f'(0)$, $B=f(1)$, $C=2\int_0^1 f(x)dx$ 의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$
④ $B<C<A$ ⑤ $C<A<B$

10. **2011** 교육청(4점)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

(가) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt=\{g(x)+a\}\sin x-2$ (나) $g(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt\cos x+3$

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

11. **2008** 수능 (3점)

함수 $f(x)=x^3+x$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$의 값을 구하시오.

12. **2008** 수능 (3점)

폐구간 $[0, 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f(1)=1$이며, 개구간 $(0, 1)$에서 이계도함수를 갖고 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$일 때, $\int_0^1 \{f^{-1}(x)-f(x)\}dx$의 값과 같은 것은?

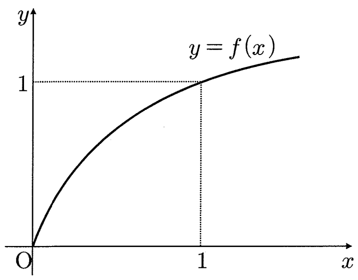
① $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{2n}$ ② $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}$

③ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$ ④ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{2n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

13. **2005** 수능 (4점)

다음은 연속함수 $y=f(x)$의 그래프이다.



구간 $[0, 1]$에서 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 연속일 때,

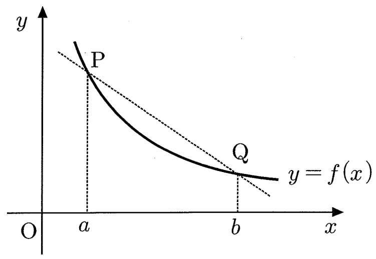
극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$와 같은 값을 갖는 것은?

① $\int_0^1 g(x)dx$ ② $\int_0^1 xg(x)dx$ ③ $\int_0^1 f(x)dx$

④ $\int_0^1 xf(x)dx$ ⑤ $\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}dx$

14. 2005 수능 (4점)

다음은 연속함수 $y=f(x)$의 그래프와 이 그래프 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$, $\mathrm{Q}(b, f(b))$를 나타낸 것이다.



함수 $\mathrm{F}(x)$가 $\mathrm{F}'(x)=f(x)$를 만족시킬 때, 다음 중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

ㄱ. 함수 $\mathrm{F}(x)$는 구간 $[a, b]$에서 증가한다.
ㄴ. $\dfrac{\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)}{b-a}$는 직선 PQ 의 기울기와 같다.
ㄷ. $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-f(b)\}dx \leqq \frac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. **2011** 수능 (4점)

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(0 \leqq t \leqq 5)$에서의 속도 $v(t)$가 다음과 같다.

$$v(t)=\begin{cases} 4t & (0 \leqq t < 1) \\ -2t+6 & (1 \leqq t < 3) \\ t-3 & (3 \leqq t \leqq 5) \end{cases}$$

$0 < x < 3$인 실수 x에 대하여 점 P가

시각 $t=0$에서 $t=x$까지 움직인 거리,

시각 $t=x$에서 $t=x+2$까지 움직인 거리,

시각 $t=x+2$에서 $t=5$까지 움직인 거리

중에서 최소인 값을 $f(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f(1)=2$

ㄴ. $f(2)-f(1)=\int_1^2 v(t)dt$

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

16. **2011** 수능 (4점)

실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^2 f(x)dx$의 최솟값은

(가) $f(0)=1,\ f'(0)=1$

(나) $0 < a < b < 2$이면 $f'(a) \leq f'(b)$이다.

(다) 구간 $(0,1)$에서 $f''(x)=e^x$이다.

① $\frac{1}{2}e-1$ ② $\frac{3}{2}e-1$ ③ $\frac{5}{2}e-1$

④ $\frac{7}{2}e-2$ ⑤ $\frac{9}{2}e-2$

1) 정답 25
2) 정답 ②
3) 정답 ⑤
4) 정답 ⑤
5) 정답 ⑤
6) 정답 ④
7) 정답 ⑤
8) 정답 ⑤
9) 정답 ④
10) 정답 ④
11) 정답 12
12) 정답 ②
13) 정답 ③
14) 정답 ③
15) 정답 ①
16) 정답 ③