패턴11

함수+기하 통합편

편집:우에노리에

1. **2008** **평가원(3점)**

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P_n}(\mathrm{n},\ 2^{\mathrm{n}})$에서 x축,

y축에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{Q_n}$, $\mathrm{R_n}$이라 하자. 원점 O와 점 A$(0,\ 1)$에 대하여 사각형 $\mathrm{AOQ_nP_n}$의 넓이를 S_n, 삼각형

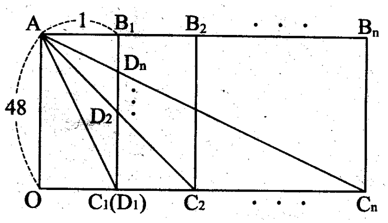
$\mathrm{AP_nR_n}$의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 0

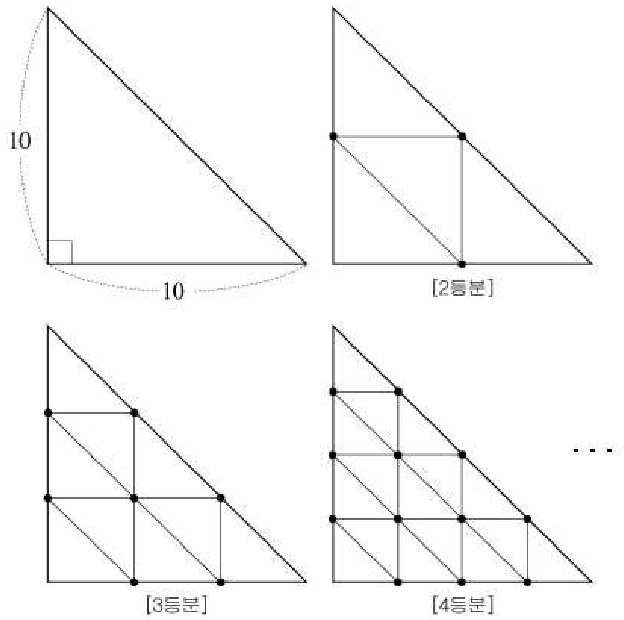
2. **2005** **교육청(3점)**

그림과 같이 자연수 n에 대하여 가로의 길이가 n, 세로의 길이가 48인 직사각형 OAB_nC_n이 있다. 대각선 AC_n과 선분 B_1C_1의 교점을 D_n이라한다. 이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{AC_n}-\overline{OC_n}}{\overline{B_1D_1}}$의 값을 구하시오.



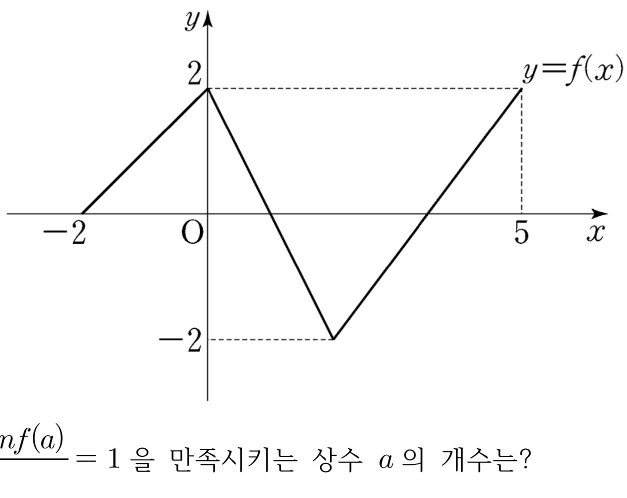
3. **2006** **교육청(3점)**

그림은 두 변의 길이가 10인 직각이등변삼각형이다. 세 변을 n등분하는 점에서 각 변에 평행한 선분을 그어 만들어지는 가장 작은 직각이등변삼각형 한 개의 넓이를 a_n, 선분들의 교점의 총 개수를 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$의 값을 구하시오.



4. **2012** **평가원(4점)**

닫힌 구간 $[-2,\ 5]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



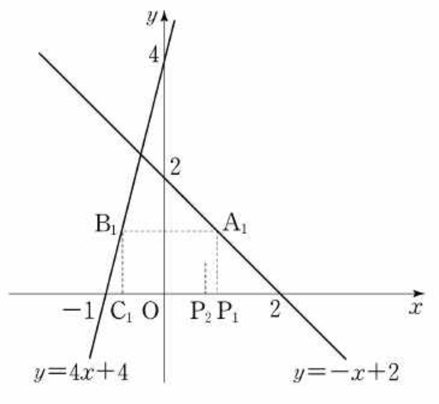
$\lim_{n\to\infty} \frac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}=1$을 만족시키는 상수 a의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

5. 2010 **평가원(4점)**

자연수 n에 대하여 점 P_n이 x축 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $\left(a_1, 0\right)$ $(0 < a_1 < 2)$이다.
(나) (1) 점 P_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y = -x+2$와 만나는 점을 A_n이라 한다.
(2) 점 A_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=4x+4$와 만나는 점을 B_n이라 한다.
(3) 점 B_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 C_n이라 한다.
(4) 점 C_n을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 P_{n+1}이라 한다.



점 P_n의 x좌표를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

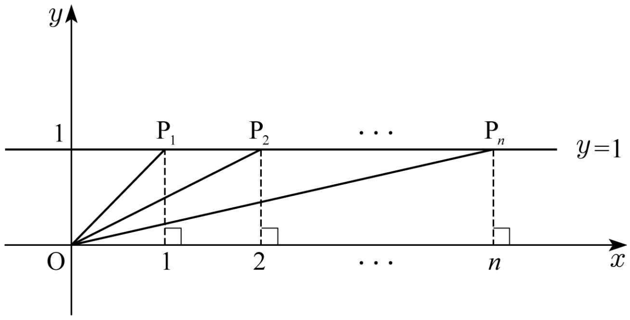
① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$

④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

6. **2010** **교육청(4점)**

좌표평면에서 직선 $y=1$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(n,\ 1)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

a_n =(선분 OP_n의 길이) $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$



$\lim_{n\to\infty}\frac{[a_1]+[a_2]+[a_3]+\ \cdots\ +[a_n]}{n^2}$의 값은?

(단, O는 원점이고, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

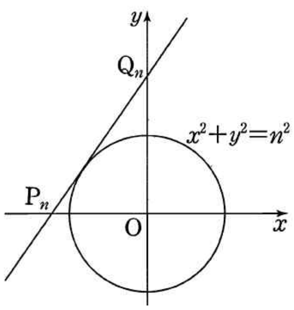
① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

7. **2010** **평가원(4점)**

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 기울기가 n이고 y절편이 양수인 직선이 원 $x^2+y^2=n^2$에 접할 때, 이 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. $l_n=\overline{P_nQ_n}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{2n^2}$의 값은?

[4점][2010년 9월 평가원]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

8. 2011 **평가원(4점)**

첫째항이 12 이고 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) $b_1 = 1$

(나) $n \geq 1$ 일 때, b_{n+1} 은 점 $P_n(-b_n, {b_n}^2)$ 을 지나고 기울기가 a_n 인 직선과 곡선 $y = x^2$ 의 교점 중에서 P_n 이 아닌 점의 x 좌표이다.

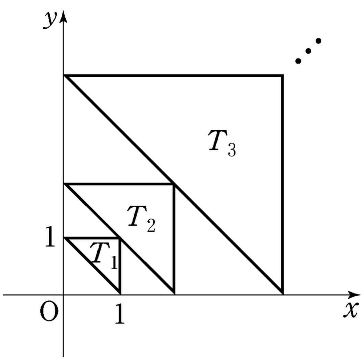
$\lim_{n\to\infty} b_n$ 의 값을 구하시오.

9. 2008 **평가원(4점)**

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A_n}(x_n, 0)$, $\mathrm{B_n}(0, x_n)$, $\mathrm{C_n}(x_n, x_n)$을 꼭짓점으로 하는 직각이등변삼각형 T_n 을 다음 조건에 따라 그린다.

(가) $x_1 = 1$이다.

(나) 변 $\mathrm{A_{n+1}B_{n+1}}$의 중점이 $\mathrm{C_n}$이다. $(n = 1, 2, 3, \cdots)$



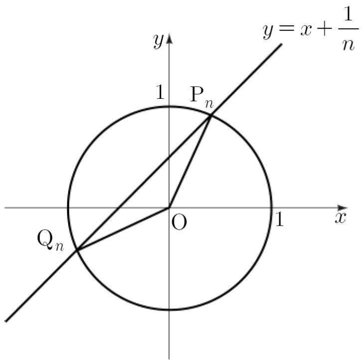
삼각형 T_n의 넓이를 a_n, 삼각형 T_n의 세 변 위에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n b_n}{a_n + 2^n}$의 값을 구하시오.

10. 2011 **교육청(4점)**

그림과 같이 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 직선 $y=x+\frac{1}{n}$과 원 $x^2+y^2=1$이 만나는 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자.

삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 넓이를 A_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} n\cdot A_n$의 값은?

(단, O는 원점이다.)



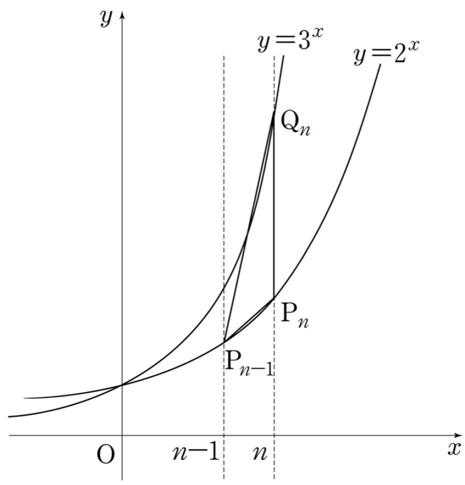
① $\frac{\sqrt{2}}{2}$　② $\frac{\sqrt{3}}{2}$　③ 1

④ $\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

11. **2011** **평가원(4점)**

자연수 n 에 대하여 직선 $x=n$ 이 두 곡선 $y=2^x$, $y=3^x$ 과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n 이라 하자. 삼각형 $P_nQ_nP_{n-1}$ 의 넓이를 S_n 이라 하고, $T_n=\sum_{k=1}^{n}S_k$ 라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{3^n}$ 의 값은?

(단, 점 P_0 의 좌표는 $(0,\ 1)$ 이다.)

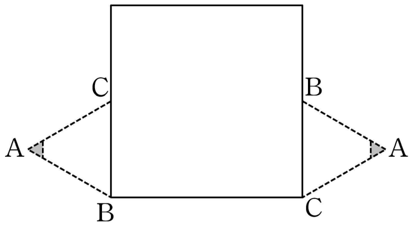


① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{11}{16}$ ③ $\frac{3}{4}$

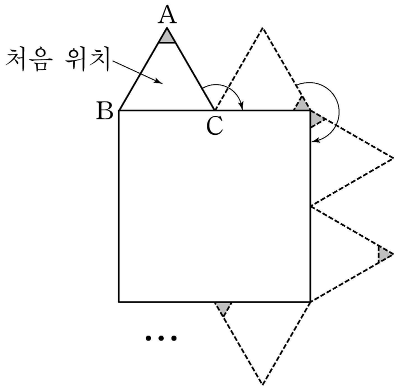
④ $\frac{13}{16}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

12. **2007** **평가원(4점)**

한 변의 길이가 2인 정사각형과 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. [그림 1]과 같이 정사각형 둘레를 따라 시계 방향으로 정삼각형 ABC를 회전시킨다. 정삼각형 ABC가 처음 위치에서 출발한 후 정사각형 둘레를 n바퀴 도는 동안, 변 BC가 정사각형의 변 위에 놓이는 횟수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $n=1$일 때, [그림 2]와 같이 변 BC가 2회 놓이므로 $a_1=2$이다. 이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n-2}}{n}$의 값은?



[그림 1]



[그림 2]

① 8　　② 10　　③ 12

④ 14　　⑤ 16

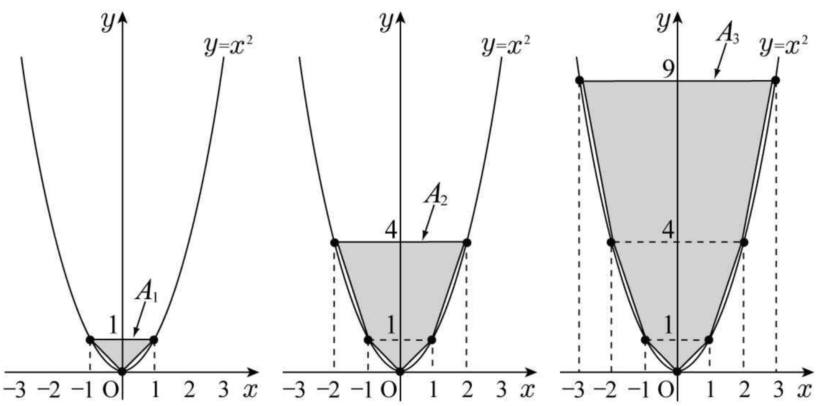
13. **2010** **평가원(4점)**

그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 A_1이라 하자.

곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-2,4)$, $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,4)$를 꼭짓점으로 하는 오각형을 A_2라 하자.

곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-3,9)$, $(-2,4)$, $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,4)$, $(3,9)$를 꼭짓점으로 하는 칠각형을 A_3이라 하자.

이와 같은 방법으로 n번째 얻은 다각형 A_n은 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-n,\, n^2)$, $(-n+1,\, (n-1)^2)$, $\cdots$, $(-1,\, 1)$, $(0,\, 0)$, $(1,\, 1)$, $\cdots$, $(n-1,\, (n-1)^2)$, $(n,\, n^2)$을 꼭짓점으로 하는 다각형이다. 다각형 A_n의 넓이를 a_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^3}$의 값은?



① 2　② $\dfrac{3}{2}$　③ $\dfrac{4}{3}$

④ $\dfrac{5}{4}$　⑤ $\dfrac{6}{5}$

14. **2008** **교육청(3점)**

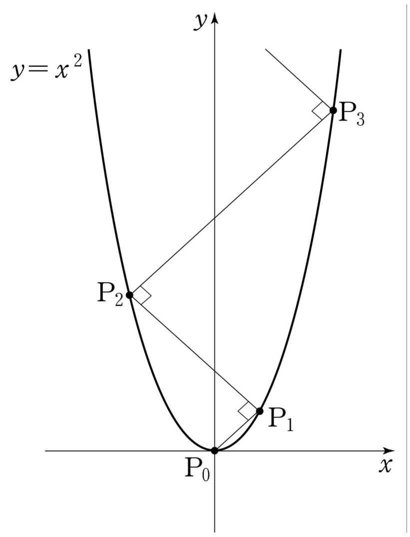
좌표평면에서 직선 $y=2x$ 위의 점들 중 제 1 사분면에 있는 격자점을 원점 O 에 가까운 쪽부터 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3,$ $\cdots$ 라 하고 $y=\dfrac{1}{2}x$ 위의 점들 중 제 1사분면에 있는 격자점을 O 에 가까운 쪽부터 $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3,$ $\cdots$ 이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OA}_k\mathrm{B}_k$ 의 넓이를 $S_k\,(k=1, 2, 3, \cdots\,)$라 하고, $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_1+S_2+S_3+\cdots S_n}{n^3}$ 일 때, 60α 의 값을 구하시오. (단, 격자점이란 x 좌표 y 좌표가 모두 정수인 점을 뜻한다.)

15. 2008 수능 (3점)

자연수 n에 대하여 두 점 P_{n-1}, P_{n}이 함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 두 점 P_0, P_1의 좌표는 각각 $(0, 0)$, $(1, 1)$이다.
> (나) 점 P_{n+1}은 점 P_n을 지나고 직선 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$에 수직인 직선과 함수 $y=x^2$의 그래프의 교점이다.
> (단, P_n과 P_{n+1}은 서로 다른 점이다.)

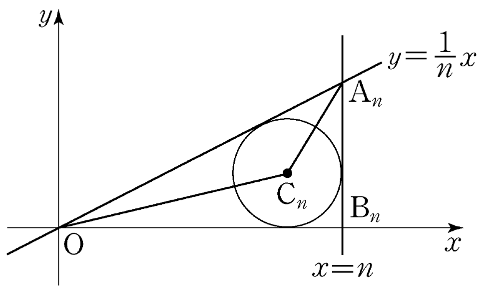
$l_n=\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{l_n}{n}$의 값은?



① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 2
④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

16. **2011** **수능 (4점)**

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 두 직선 $y=\frac{1}{n}x$와 $x=n$이 만나는 점을 A_n, 직선 $x=n$과 x축이 만나는 점을 B_n이라 하자. 삼각형 A_nOB_n에 내접하는 원의 중심을 C_n이라 하고, 삼각형 A_nOC_n의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$의 값은?



① $\frac{1}{12}$　　② $\frac{1}{6}$　　③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{3}$　　⑤ $\frac{5}{12}$

1) 정답 ①
2) 정답 24
3) 정답 25
4) 정답 ②
5) 정답 ⑤
6) 정답 ②
7) 정답 ④
8) 정답 19
9) 정답 12
10) 정답 ①
11) 정답 ③
12) 정답 ①
13) 정답 ③
14) 정답 30
15) 정답 ②
16) 정답 ③