패턴8

증명과정의 빈칸넣기

편집:우에노리에

1. **2009** **교육청(3점)**

다음은 등식 $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$ 가 성립함을 증명한 것이다.

[증명]

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)$

$=\sum_{k=1}^{n} \boxed{\text{(가)}}$

$=4!\left\{\frac{4!}{4!0!}+\frac{5!}{4!1!}+\cdots+\frac{(n+3)!}{4!(n-1)!}\right\}$

$=4!\cdot\sum_{k=1}^{n} \boxed{\text{(나)}}$

$=4!\cdot \boxed{\text{(다)}}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{(k+2)!}{(k-1)!}$	${}_{k+2}C_3$	${}_{n+3}C_4$
②	$\frac{(k+2)!}{(k-1)!}$	${}_{k+2}C_3$	${}_{n+4}C_5$
③	$\frac{(k+3)!}{(k-1)!}$	${}_{k+2}C_3$	${}_{n+3}C_4$
④	$\frac{(k+3)!}{(k-1)!}$	${}_{k+3}C_4$	${}_{n+3}C_4$
⑤	$\frac{(k+3)!}{(k-1)!}$	${}_{k+3}C_4$	${}_{n+4}C_5$

2. **2007** **교육청(3점)**

다음은 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$일 때, A^n을 구하는 과정이다.

< 다 음 >

모든 자연수 n에 대하여 $A^n=\begin{pmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{pmatrix}$이라 하자.

행렬의 곱셈에 대한 결합법칙이 성립하여

$A^{n+1}=A\cdot A^n=A^n\cdot A$이므로

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}&b_{n+1}\\c_{n+1}&d_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n+c_n&b_n+d_n\\2c_n&2d_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n&a_n+2b_n\\c_n&c_n+2d_n\end{pmatrix}\text{이다.}$$

따라서 $\begin{cases}a_{n+1}=a_n+c_n=a_n\\b_{n+1}=b_n+d_n=a_n+2b_n\\c_{n+1}=2c_n=c_n\\d_{n+1}=2d_n=c_n+2d_n\end{cases}$ 이므로

$b_{n+1}=2b_n+\boxed{\text{(가)}}$ 이고, $d_{n+1}=\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

$\therefore A^n=\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)		(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{2}$	2^n	$\begin{pmatrix}1&2^n-1\\0&2^{n+1}\end{pmatrix}$	②	$\frac{1}{2}$	2^{n+1}	$\begin{pmatrix}1&2^{n+1}\\0&2^n-1\end{pmatrix}$
③	1	2^n	$\begin{pmatrix}1&2^n-1\\0&2^{n+1}\end{pmatrix}$	④	1	2^{n+1}	$\begin{pmatrix}1&2^n-1\\0&2^n\end{pmatrix}$
⑤	1	2^{n+1}	$\begin{pmatrix}1&2^n\\0&2^n-1\end{pmatrix}$				

2.

3. **2009** **교육청(3점)**

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)=(우변)= $\boxed{\text{(가)}}$ 이므로 주어진 등식은 성립한다.

ⅱ) $n=k(k\geq 1)$일 때, 성립한다고 가정하면

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}$$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}\text{이다.}$$

$n=k+1$일 때,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\boxed{\text{(나)}}$$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\boxed{\text{(나)}}$$

$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+1}+\boxed{\text{(다)}}$$

$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}\text{이다.}$$

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 ⅰ), ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

이 증명에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	1	$\frac{1}{2k+2}$	$\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}$
②	1	$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$	$\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}$
③	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2k+2}$	$\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}$
④	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$	$\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}$
⑤	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$	$\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}$

4. **2005** **교육청(3점)**

2 이상의 자연수 n 에 대하여 부등식 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$ 가 성립함이 알려져 있다.

다음은 이 사실을 이용하여 n 이 6 이상의 자연수일 때, 부등식 $\left(\frac{n}{2}\right)^n > n!$ 이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다. (단, $n! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n$)

< 증 명 >

(ⅰ) $n = 6$ 일 때,

$3^6 = 729$, $6! = 720$ 이므로 성립한다.

(ⅱ) $n = k\,(k \geqq 6)$일 때 성립한다고 가정하면

$\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} = \frac{k+1}{2^{k+1}}\cdot\frac{(k+1)^k}{k^k}\cdot(\quad)$

$= \frac{k+1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\cdot(\text{ 가 })$

$> \frac{k+1}{2}\cdot(\text{ 나 }) = (\quad)$ 이므로 $n = k+1$ 일 때도 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 부등식은 6 이상의 모든 자연수에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① k^k, $(k+1)!$

② k^k, $2k!$

③ k^k, $k!$

④ $\left(\frac{k}{2}\right)^k$, $(k+1)!$

⑤ $\left(\frac{k}{2}\right)^k$, $2k!$

5. **2006** **평가원(3점)**

다음은 모든 자연수 n에 대하여 $2^{n+1} > n(n+1)+1$이 성립함을 증명한 것이다.

< 증 명 >

(ⅰ) $n=1$일 때, $4>2+1$

$n=2$일 때, $8>6+1$이므로 성립한다.

(ⅱ) $n=k\,(k \geqq 2)$일 때, $2^{k+1} > \boxed{(가)} + 1$ ⋯ ㉠ 이 성립한다고 가정하자.

㉠의 양변에 2를 곱하면

$2^{k+2} > 2(k^2+k+1)$

이때, $2(k^2+k+1) - \boxed{(나)} = k^2-k-1$

$k \geqq 2$일 때, $k^2-k-1 \boxed{(다)} 0$이므로

$2^{k+2} > 2(k^2+k+1) > \boxed{(나)}$

$\therefore\ 2^{k+2} > \boxed{(나)}$

따라서 $n=k+1$일 때도 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $2^{n+1} > n(n+1)+1$이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$k(k-1)$	$(k+1)(k+2)$	$<$
②	$k(k+1)$	$(k+1)(k+2)$	$>$
③	$k(k-1)$	$\{(k+1)(k+2)+1\}$	$>$
④	$k(k-1)$	$\{(k+1)(k+2)+1\}$	$<$
⑤	$k(k+1)$	$\{(k+1)(k+2)+1\}$	$>$

6. **2008** **교육청(3점)**

자연수 n에 대하여 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 로 정의한다.

다음은 2 이상인 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = n(a_n - 1)$$

이 성립함을 증명한 것이다.

< 증 명 >

(1) $n=2$ 일 때, (좌변)=(우변)= $\boxed{\text{(가)}}$ 이므로 주어진 등식은 성립한다.

(2) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{k-1} = k(a_k - 1)$$

양변에 a_k 를 더하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = \boxed{\text{(나)}}$$

그런데 $a_k = a_{k+1} - \boxed{\text{(다)}}$ 이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = (k+1)(a_{k+1} - 1)$$

그러므로 $n=k+1$ 일 때도 성립한다.

따라서 2 이상인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	1	$ka_{k+1} - k$	$\frac{1}{k}$
②	1	$(k+1)a_k - k$	$\frac{1}{k+1}$
③	1	$(k+1)a_k - k$	$\frac{1}{k}$
④	$\frac{3}{2}$	$ka_{k+1} - k$	$\frac{1}{k+1}$
⑤	$\frac{3}{2}$	$(k+1)a_k - k$	$\frac{1}{k+1}$

7. **2009** **교육청(3점)**

다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \quad \cdots\cdots \ (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

< 증 명 >

$S_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ 이라 하자.

(1) $n=1$일 때, $S_1=\boxed{(가)}=T_1$이므로 $(*)$이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$S_{m+1}=S_m+\boxed{(나)}$$

$$\begin{aligned} T_{m+1}&=\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\frac{1}{m+4}+\cdots+\frac{1}{2m+2}\\ &=T_m-\boxed{(다)}+\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{2m+2}\\ &=T_m+\boxed{(나)} \end{aligned}$$

이므로 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 것으로 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	1	$\frac{1}{2m+1}$	$\frac{1}{m}$
②	1	$\frac{1}{2m+1}$	$\frac{1}{m+1}$
③	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}$	$\frac{1}{m+1}$
④	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}$	$\frac{1}{m}$
⑤	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2m+1}$	$\frac{1}{m+1}$

8. **2011** **평가원(3점)**

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=1$ 이고

$$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}a_k \quad (n\geqq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

> 주어진 식으로부터 $a_2=$ $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.
>
> 자연수 n 에 대하여
>
> $$\begin{aligned} a_{n+2}&=\sum_{k=1}^{n+1}2^{n+1-k}a_k \\ &=\sum_{k=1}^{n}2^{n+1-k}a_k+a_{n+1} \\ &=\boxed{\text{(나)}}\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}a_k+a_{n+1} \\ &=\boxed{\text{(다)}}\,a_{n+1} \end{aligned}$$
>
> 이다.
>
> 따라서 $a_1=1$ 이고, $n\geqq 2$ 일 때
>
> $$a_n=\left(\boxed{\text{(다)}}\right)^{n-2} \text{ 이다.}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 라 할 때, $p+q+r$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

9. **2010** **평가원(3점)**

다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$(n!)^2 \cdot 4^n > (2n)!$ ⋯⋯㉠

이 성립함을 증명한 것이다.

< 증 명 >

(1) $n=1$일 때, (좌변)$=4$, (우변)$=$ $\boxed{(가)}$

이므로 ㉠이 성립한다.

(2) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$(k!)^2 \cdot 4^k > (2k)!$ ⋯⋯㉡

이다. $n=k+1$일 때 ㉠이 성립함을 보이자.

㉡의 양변에 $\boxed{(나)}$ 를 곱하면

$$\{(k+1)!\}^2 \cdot 4^{k+1} > \left(\boxed{(나)}\right)(2k)!$$
$$> (2k+2)\left(\boxed{(다)}\right)(2k)!$$
$$= (2k+2)!$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.

그러므로 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	1	$4(k+1)^2$	$2k$
②	1	$2(k+1)^2$	$2k$
③	2	$4(k+1)^2$	$2k+1$
④	2	$2(k+1)^2$	$2k+1$
⑤	2	$4(k+1)^2$	$2k$

10. **2011** **교육청(3점)**

다음은 자연수 n 에 대하여 부등식

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

이 성립함을 $a^{n}-b^{n}=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}\right)$ 을 이용하여 증명하는 과정이다.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$=\boxed{\text{(가)}}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2}+\cdots+\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\right\}$$

$$<\boxed{\text{(가)}}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$$

$$=\boxed{\text{(나)}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

즉, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<\boxed{\text{(나)}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ 이다.

$\vdots$

따라서, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때, $\dfrac{g(5)}{f(10)}$ 의 값은?

① 10 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 22

11. **2011** **교육청(3점)**

다음은 자연수 n 에 대하여 등식

$\displaystyle\sum_{i=1}^{2n-1}\left\{i+(n-1)^2\right\}=(n-1)^3+n^3$ ……($*$) 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

(1) $n=1$일 때, $1+0^2=0^3+1^3$ 이므로 ($*$)이 성립한다.
(2) $n=k$일 때, ($*$)이 성립한다고 가정하고,
$n=k+1$일 때 ($*$)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{i=1}^{2k+1}\left(i+k^2\right)=\sum_{i=1}^{2k-1}\left\{i+(k-1)^2\right\}+\sum_{i=1}^{2k-1}(2k-1)+\boxed{(가)}$$
$$=\boxed{(나)}$$

그러므로 $n=k+1$일 때도 ($*$)이 성립한다.
따라서 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ($*$)이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$, (나)에 알맞은 식을 $g(k)$라 할 때, $\dfrac{g(4)}{f(4)}$의 값은?

① $\dfrac{23}{7}$ ② $\dfrac{24}{7}$ ③ $\dfrac{25}{7}$ ④ $\dfrac{26}{7}$ ⑤ $\dfrac{27}{7}$

12. **2010** **평가원(4점)**

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, $a_n=n^2+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)a_k$ $(n\geq 2)$를 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정의 일부이다.

주어진 식으로부터 $a_2=7$이다.
자연수 n $(n\geq 3)$에 대하여

$$a_n=n^2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)a_k=n^2+\sum_{k=1}^{n-2}(2k+1)a_k+(2n-1)a_{n-1}$$
$$=n^2+a_{n-1}-\boxed{(가)}+(2n-1)a_{n-1}$$이므로,

$a_n+1=2n\left(a_{n-1}+1\right)$이 성립한다. 따라서

$$a_n+1=n\times(n-1)\times\cdots\times 3\times\boxed{(나)}\times\left(a_2+1\right)$$
$$=4\times n!\times\boxed{(나)}$$이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$이라 할 때, $f(9)\times g(9)$의 값은?

① 2^{13} ② 2^{14} ③ 2^{15} ④ 2^{16} ⑤ 2^{17}

13. **2006** **교육청(4점)**

다음은 임의의 자연수 n에 대하여 $a_n > 0$ 이고 $\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$ 이면 $a_n =$ $\boxed{(가)}$ 임을 증명하는 과정이다.

< 증 명 >

임의의 자연수 n에 대하여 $a_n > 0$ 이고 $\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$ 이므로

$$\begin{aligned} a_{k+1}^3 &= \sum_{i=1}^{k+1} a_i^3 - \sum_{i=1}^{k} a_i^3 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i - \sum_{i=1}^{k} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i + \sum_{i=1}^{k} a_i\right) \\ &= \boxed{(나)}\left(\boxed{(나)} + 2\sum_{i=1}^{k} a_i\right) \end{aligned}$$

$\therefore\ a_{k+1}^2 = a_{k+1} + 2\sum_{i=1}^{k} a_i$ .... ①

즉, $a_k^2 = a_k + 2\sum_{i=1}^{k-1} a_i$ .... ②

①과 ②에서 $a_{k+1}^2 - a_k^2 = \boxed{(다)}$

따라서 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

$\therefore\ a_n = \boxed{(가)}$

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$a_n = 2n$	a_{k+1}	$a_{k+1} + a_k$
②	$a_n = 2n$	a_k	$a_{k+1} - a_k$
③	$a_n = n$	a_{k+1}	$a_{k+1} - a_k$
④	$a_n = n$	a_k	$a_{k+1} + a_k$
⑤	$a_n = n$	a_{k+1}	$a_{k+1} + a_k$

14. **2011** **평가원 (4점)**

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$ 이고,

$$a_{n+1}=\frac{3a_n-1}{4a_n-1}\quad(n\geqq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정의 일부이다.

> 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$4a_{n+1}-1=4\times\frac{3a_n-1}{4a_n-1}-1=2-\frac{1}{4a_n-1}$$
>
> 이다. 수열 $\{b_n\}$을
>
> $b_1=1,\ b_{n+1}=(4a_n-1)b_n\ \ (n\geqq 1)\ \cdots\cdots\ (*)$
>
> 이라 하면,
>
> $\vdots$
>
> $b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n$ 이다.
>
> 즉, $\{b_n\}$은 등차수열이므로 $(*)$에 의하여
>
> $b_n=$ (가) 이고, $a_n=$ (나) 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(14)\times g(5)$의 값은?

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

15. **2011** **교육청 (4점)**

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=10$이고,

$$a_{n+1}=a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n}a_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> $n \ge 2$인 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1}-a_n=\left(a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n}a_n\right)$$
> $$-\left(a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n-1}a_{n-1}\right)$$ 이므로
>
> $a_{n+1}=\boxed{\text{(가)}}\times a_n$ 이다.
>
> $n=2, 3, 4, \cdots, n-1$을 차례로 대입하면
>
> $$a_3=\frac{3}{2}a_2$$
> $$a_4=\frac{4}{3}a_3$$
> $$\vdots$$
> $$a_n=\frac{n}{n-1}a_{n-1}$$ 이므로
>
> $a_n=\boxed{\text{(나)}}\,(n \ge 2)$
>
> 따라서 주어진 수열 $\{a_n\}$의 일반항은
>
> $a_1=10$이고, $a_n=\boxed{\text{(나)}}\,(n \ge 2)$

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$이라 할 때, $f(5)\times g(10)$의 값은?

① 60 ② 75 ③ 90
④ 105 ⑤ 120

16. 2012 교육청 (4점)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + n + 1$$

을 만족시킬 때, 다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

$n \ge 1$일 때,

$$a_{n+1} = 2a_n + n + 1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + \boxed{\text{(가)}} \quad \cdots\cdots ㉡$$

이고, ㉡에서 ㉠을 뺀 식으로부터

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) + 1$$

을 얻는다. $b_n = a_{n+1} - a_n$이라 하면

$$b_{n+1} = 2b_n + 1$$

이므로

$$b_n = 2^{n+1} - 1$$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(2^{k+1} - 1\right) \ (n \ge 2)$$

$$= 2^{n+1} + \boxed{\text{(나)}}$$

이다.

위의 (가), (나)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(5) - g(5)$의 값은?

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

17. **2012** **평가원 (4점)**

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = -\frac{4}{9}$이고,

$$2^n a_{n+1} - 2^{n+1} a_n = n \quad (n \ge 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

주어진 식 $2^n a_{n+1} - 2^{n+1} a_n = n$의 양변을 2^{2n+1}으로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{n}{2^{2n+1}} \quad (n \ge 1)$$

이므로 $n \ge 2$인 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k+1}} \quad \cdots\cdots \ (*)$$

이다. 한편

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k+1}} = \frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k}} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \cdots + \frac{n-1}{4^{n-1}}\right) - \left(\frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^3} + \cdots + \frac{n-1}{4^n}\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4^k} - \frac{\boxed{(가)}}{4^n}\right)$$

이므로 $(*)$에 의하여

$$a_n = \boxed{(나)} + \frac{2^{n+1}}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4^k} - \frac{\boxed{(가)}}{4^n}\right)$$

$$= -\frac{3n+1}{9 \cdot 2^{n-1}} \quad (n \ge 2)$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(10) \times g(5)$의 값은?

① -64 ② -56 ③ -48 ④ -40 ⑤ -32

18. **2012** **평가원(4점)**

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 2$ 이고, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 라 할 때,

$$a_{n+1} = \frac{S_n}{a_n} \ (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 S_n 을 구하는 과정이다.

> 주어진 식으로부터 $a_2 = \frac{S_1}{a_1} = 1$ 이다.
>
> $n \geq 3$ 일 때,
>
> $a_n = \frac{S_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{S_{n-2} + a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-2}a_{n-1} + a_{n-1}}{a_{n-1}}$
>
> 이므로
>
> $a_n = a_{n-2} + 1$
>
> 이다. 따라서 일반항 a_n 을 구하면, 자연수 k 에 대하여
>
> $n = 2k - 1$ 일 때, $a_{2k-1} = k + 1$
>
> $n = 2k$ 일 때, $a_{2k} = \boxed{\text{(가)}}$
>
> 이다. 한편, $S_n = a_n a_{n+1}$ 이므로
>
> $S_n = \begin{cases} (k+1) \times \boxed{\text{(가)}} & (n = 2k-1) \\ \boxed{\text{(나)}} & (n = 2k) \end{cases}$
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 $f(k)$, $g(k)$ 라 할 때, $f(6) + g(7)$ 의 값은?

① 65 ② 67 ③ 69
④ 71 ⑤ 73

19. **2012** **교육청(4점)**

일반항이 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}(n=1,2,3,\cdots)$인 수열 $\{a_n\}$에서 a_n의 값이 6의 배수인 항들을 작은 것부터 차례로 나열한 수열을 $\{b_n\}$이라 할 때, 다음은 $\sum_{k=1}^{4n} b_k$를 구하는 과정이다.

$a_{n+12}-a_n=$ (가) 이므로 $a_{n+12}-a_n$은 6의 배수이다. …… ㉠
$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{12}$ 중에서 6의 배수인 것은
$a_3=6,\ a_8=36,\ a_{11}=66,\ a_{12}=78$이므로
$b_1=a_3,\ b_2=a_8,\ b_3=a_{11},\ b_4=a_{12}$이다. …… ㉡
㉠, ㉡에서
$b_{4n-3}=a_{12n-9}=6(4n-3)(3n-2)$
$b_{4n-2}=a_{12n-4}=6(3n-1)(4n-1)$
$b_{4n-1}=$ (나)
$b_{4n}=6n(12n+1)$
따라서 $\sum_{k=1}^{4n} b_k=\sum_{k=1}^{n}($ (다) $)=\boxed{}$

위의 (가), (나), (다)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(k)$라 할 때, $f(1)+g(2)+h(1)$의 값은?

① 552　② 558　③ 564　④ 570　⑤ 576

20. **2010** **교육청(4점)**

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+5\cdot 6a_3+\cdots+(2n-1)\cdot 2na_n \geq n$$

을 만족시킬 때, 다음은 부등식

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \geq$ $\boxed{\text{(가)}}$ 이 성립함을 증명한 것이다.

[증 명]

$$\begin{aligned}
&a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\\
&=\left(1-\frac{1}{2}\right)(1\cdot 2a_1)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)(3\cdot 4a_2)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)(5\cdot 6a_3)\\
&\quad+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\{(2n-1)\cdot 2na_n\}\\
&=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(1\cdot 2a_1)\\
&\quad+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2)\\
&\quad+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)(1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+5\cdot 6a_3)+\cdots\\
&\quad+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\{1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+\cdots+(2n-1)\cdot 2na_n\}\\
&\geq\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+3\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)\\
&\quad+\cdots+\boxed{\text{(나)}}\\
&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\\
&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\boxed{\text{(다)}}
\end{aligned}$$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$	$\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$
②	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$	$n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$
③	$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$	$n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$
④	$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$	$n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$
⑤	$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$	$\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

21. **2004** **평가원(4점)**

다음은 수열 $\{a_n\}$에서 일반항 a_n 이 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 일 때, $n\geqq 2$ 인 모든 자연수에 n 에 대하여 $n+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=na_n$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

[증 명]

i) $n=2$ 일 때,

(좌변)$=2+\frac{1}{1}=3$, (우변)$=2\left(1+\frac{1}{2}\right)=3$ 이므로,

주어진 식이 성립한다.

ii) $n=k\ (k\geqq 2)$일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면

$k+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}=ka_k$ …… ㉠

이 때, 식 ㉠의 좌변에 $1+a_k$ 를 더하면

$k+1+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_k$

$$=\boxed{\text{(가)}}+1+a_k$$

$$=(k+1)\ a_k+1$$

$$=(k+1)\left(\boxed{\text{(나)}}\right)+1$$

$$=(k+1)\ a_{k+1}$$

따라서, $n=k+1$ 일 때도 주어진 식이 성립한다.

그러므로 i), ii)에 의하여

$n+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=na_n$

은 $n\geqq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나) 에 알맞은 것은?

	(가)	(나)
①	ka_k	$a_k+\frac{1}{k+1}$
②	ka_k	$a_{k+1}-\frac{1}{k+1}$
③	ka_k	$a_{k+1}+\frac{1}{k+1}$
④	$(k+1)a_k$	$a_k+\frac{1}{k+1}$
⑤	$(k+1)a_k$	$a_{k+1}-\frac{1}{k+1}$

22. **2010** **교육청(4점)**

다음은 3이상의 자연수 n에 대하여 부등식

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\frac{n}{(n-i)2^{i-1}}<4$가 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

자연수 $n(n\geq 3)$에 대하여 $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\frac{n}{(n-i)2^{i-1}}$이라 하자.

(1) $n=3$일 때, $S_3=3<4$이므로 성립한다.

(2) $n=k(k\geq 3)$일 때, $S_k<4$가 성립한다고 가정하자.

$n=k+1$일 때,

$$\begin{aligned}S_{k+1}&=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{k+1}{k+1-i}\times\frac{1}{2^{i-1}}\right)\\&=\frac{k+1}{k}+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{k-1}+\frac{k}{k-2}\times\frac{1}{2}+\cdots+\frac{k}{2^{k-2}}\right)\\&\quad+\boxed{(가)}\times\left(\frac{k}{k-1}+\frac{k}{k-2}\times\frac{1}{2}+\cdots+\frac{k}{2^{k-2}}\right)\\&=1+\frac{1}{k}+\boxed{(나)}\times S_k\end{aligned}$$

그런데, $k\geq 3$, $S_k<4$이므로

$S_{k+1}=1+\dfrac{1}{k}+\boxed{(나)}\times S_k<4$이다.

그러므로 (1), (2)에 의하여 3이상의 자연수 n에 대하여
주어진 부등식이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식의 합을 $f(k)$라 할 때,$f(3)$의 값은?

① $\dfrac{2}{3}$ ② $\dfrac{3}{4}$ ③ $\dfrac{4}{5}$ ④ $\dfrac{5}{6}$ ⑤ $\dfrac{6}{7}$

23. | 2006 | 교육청(4점) |

음의 자연수 n에 대하여

$1 = 1^3$

$3+5 = 2^3$

$7+9+11 = 3^3$

$13+15+17+19 = 4^3$

$\vdots$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i+n^2-n-1)=n^3$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

i) $n=1$일 때, $2\cdot1+1^2-1-1=1^3$ 이므로 성립한다.

ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면

$$\sum_{i=1}^{k}(2i+k^2-k-1)=k^3 \text{ 이다.}$$

$n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

$$\sum_{i=1}^{k+1}\boxed{\quad(\text{가})\quad}$$
$$=\sum_{i=1}^{k}(2i+k^2-k-1)+\sum_{i=1}^{k}2k+\boxed{\quad(\text{나})\quad}$$
$$=k^3+3k^2+3k+1$$
$$=(k+1)^3$$

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

i), ii)에 의해서 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

이 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)
①	$2i+k^2+k-1$	k^2+3k+1
②	$2i+k^2+k-1$	k^2-3k+1
③	$2i+k^2+k+1$	k^2+3k+1
④	$2i+k^2-k+1$	k^2-3k+1
⑤	$2i+k^2-k+1$	k^2+3k+1

24. **2006** **교육청(4점)**

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{6S_k}{a_k+3}=S_n \quad (n\geq 1)$$

이 성립한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

> 주어진 식에 $n=1$을 대입하면
>
> $S_1>0$이므로 $a_1=$ $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.
>
> $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{6S_k}{a_k+3}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{6S_k}{a_k+3}=\frac{6S_n}{a_n+3}$ $(n\geq 2)$이고
>
> $a_1=\frac{6S_1}{a_1+3}$이므로
>
> $\boxed{\text{(나)}}\cdot S_n=a_n^2+\boxed{\text{(가)}}\cdot a_n$ $(n\geq 1)$이다.
>
> 한편, $6(S_{n+1}-S_n)=a_{n+1}^2+3a_{n+1}-(a_n^2+3a_n)$이므로
>
> $$6a_{n+1}=a_{n+1}^2-a_n^2+3a_{n+1}-3a_n$$
>
> $\vdots$
>
> 따라서 $a_n=$ $\boxed{\text{(다)}}$

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (다)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+q+f(10)$의 값은?

① 36 ② 39 ③ 42
④ 45 ⑤ 48

25. **2006** **교육청(4점)**

다음은 n 부터 $2n-1$ 개의 연속한 자연수의 합에 대하여

$$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-2)=(2n-1)^2$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

ⅰ) $n=1$ 일때, (좌변)$=1$, 우변$=1^2$ 이므로 성립한다.

ⅱ) $n=k$일때, 성립한다고 가정하면

$k+(k+1)(+(k+2)+\cdots+(3k-2)=(2k-1)^2$

$n=k+1$ 일때 성립함을 보이자.

$(k+1)(k+2)+\cdots+\boxed{(\quad 가 \quad)}$

$=k+(k+1)+(k+2)+\cdots+(3k-2)+\boxed{(\quad 나 \quad)}$

$=(2k-1)^2+\boxed{(\quad 나 \quad)}$

$=\boxed{(\quad 다 \quad)}$

그러므로 $n=k+1$ 일 때도 성립한다.

ⅰ), ⅱ)에 의해서 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

이 증명에서 (가) ~ (다)를 바르게 짝지은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$3k+1$	$8k$	$(2k+1)^2$
②	$3k+1$	$8k$	$4k^2$
③	$3k+2$	$8k$	$(2k+1)^2$
④	$3k+2$	$4k-1$	$(2k+1)^2$
⑤	$3k+2$	$4k-1$	$4k^2$

26. | 2010 | 평가원(4점) |

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=\alpha(\alpha\neq 0)$이고, 모든 $n(n\geq 2)$에 대하여

$(n-1)a_n+\sum_{m=1}^{n-1} ma_m=0$을 만족시킨다. 다음은

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\alpha \ (n\geq 1)$$

임을 수학적귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

[증 명]

(1) $n=1$일 때, $a_1=\alpha=\frac{(-1)^{1-1}}{(1-1)!}\alpha$이다.

(2) ⅰ) $n=2$일 때, $a_2+a_1=0$이므로

$a_2=-a_1=\frac{(-1)^{2-1}}{(2-1)!}\alpha$이다.

따라서 주어진 식이 성립한다.

ⅱ) $n=k\ (k\geq 2)$일 때 성립한다고 가정하고,

$n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

$$0=ka_{k+1}+\sum_{m=1}^{k} ma_m$$

$$=ka_{k+1}+\sum_{m=1}^{k-1} ma_m+ka_k$$

$$=ka_{k+1}+(\boxed{(가)})\times a_k+ka_k$$ 이므로

$$a_{k+1}=\boxed{(나)}\times a_k=\frac{(-1)^k}{k!}\alpha$$ 이다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\alpha$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식의 곱을 $f(k)$라 할 때, $f(10)$의 값은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

27. **2007** 수능 (3점)

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$(1^2+1)\cdot 1!+(2^2+1)\cdot 2!+\cdots+(n^2+1)\cdot n!=n\cdot(n+1)!$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

< 증 명 >

(1) $n=1$일 때, (좌변)$=2$, (우변)$=2$이므로
주어진 등식은 성립한다.

(2) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면

$$(1^2+1)\cdot 1!+(2^2+1)\cdot 2!+\cdots+(k^2+1)\cdot k!=k\cdot(k+1)!$$

이다. $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

$$(1^2+1)\cdot 1!+(2^2+1)\cdot 2!+\cdots+(k^2+1)\cdot k!+\{(k+1)^2+1\}\cdot(k+1)!$$

$$=\boxed{\text{(가)}}+\{(k+1)^2+1\}\cdot(k+1)!$$

$$=\left(\boxed{\text{(나)}}\right)\cdot(k+1)!$$

$$=(k+1)\cdot\boxed{\text{(다)}}$$

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$k\cdot(k+1)!$	k^2+2k+1	$(k+1)!$
②	$k\cdot(k+1)!$	k^2+3k+2	$(k+2)!$
③	$k\cdot(k+1)!$	k^2+3k+2	$(k+1)!$
④	$(k+1)\cdot(k+1)!$	k^2+3k+2	$(k+2)!$
⑤	$(k+1)\cdot(k+1)!$	k^2+2k+1	$(k+1)!$

28. **2006** **수능 (4점)**

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\frac{n(5n+3)}{4}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

< 증 명 >

(1) $n=1$일 때, (좌변)$=2$, (우변)$=2$이므로

주어진 등식은 성립한다.

(2) $n=m$일 때 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{m}\right)$$

$$=\frac{m(5m+3)}{4}$$

이다. $n=m+1$일 때 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{m+1}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{m+1}\right)+\frac{(\text{가})}{m+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{(\text{나})}\right)$$

$$+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}(5k-3)+\frac{(\text{가})}{m+1}$$

$$=\frac{m(5m+3)}{4}+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}\left(\quad(\text{다})\quad\right)$$

$$=\frac{(m+1)(5m+8)}{4}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$5m-3$	m	$5k+2$
②	$5m-3$	$m+1$	$5k+2$
③	$5m+2$	m	$5k-3$
④	$5m+2$	m	$5k+2$
⑤	$5m+2$	$m+1$	$5k-3$

29. **2004** **수능 (3점)**

다음은 모든 자연수 n에 대하여

부등식 $\sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

< 증 명 >

자연수 n에 대하여 $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}$ 이라 할 때,

$a_n > 1$임을 보이면 된다.

(1) $n=1$일 때 $a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$이다.

(2) $n=k$일 때 $a_k > 1$이라고 가정하면

$n=k+1$일 때

$$a_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+4}$$

$$= a_k + \left(\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}\right) - \boxed{(가)}$$

한편, $(3k+2)(3k+4) \boxed{(나)} (3k+3)^2$이므로

$\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} > \boxed{(다)}$, 그런데 $a_k > 1$이므로

$$a_{k+1} > a_k + \left(\frac{1}{3k+3} + \boxed{(다)}\right) - \boxed{(가)} > 1$$

그러므로 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 1$이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{k+1}$	$>$	$\frac{2}{3k+3}$
②	$\frac{1}{k+1}$	$<$	$\frac{2}{3k+3}$
③	$\frac{1}{k+1}$	$<$	$\frac{4}{3k+3}$
④	$\frac{2}{k+1}$	$>$	$\frac{4}{3k+3}$
⑤	$\frac{2}{k+1}$	$<$	$\frac{1}{k+1}$

30. **2011** **수능 (4점)**

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고,

$$a_{n+1} = n+1+\frac{(n-1)!}{a_1 a_2 \cdots a_n} \ (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정의 일부이다.

> 모든 자연수 n에 대하여
>
> $a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n \times (n+1) + (n-1)!$
>
> 이다. $b_n = \dfrac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n!}$ 이라 하면, $b_1 = 1$이고
>
> $$b_{n+1} = b_n + \boxed{(가)}$$
>
> 이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면
>
> $b_n = \boxed{(나)}$ 이므로 $\dfrac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n!} = \boxed{(나)}$ 이다.
>
> $\vdots$
>
> 따라서 $a_1 = 1$이고, $a_n = \dfrac{(n-1)(2n-1)}{2n-3} \ (n \geq 2)$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$이라 할 때, $f(13) \times g(7)$의 값은?

① $\dfrac{1}{70}$　② $\dfrac{1}{77}$　③ $\dfrac{1}{84}$

④ $\dfrac{1}{91}$　⑤ $\dfrac{1}{98}$

31. **2012** 수능 (4점)

첫째항이 1 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 라 할 때

$nS_{n+1} = (n+2)S_n + (n+1)^3 \ (n \geq 1)$

이 성립한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

> 자연수 n 에 대하여 $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ 이므로
>
> $$na_{n+1} = 2S_n + (n+1)^3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
>
> 이다. 2 이상의 자연수 n 에 대하여
>
> $$(n-1)a_n = 2S_{n-1} + n^3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$
>
> 이고, ㉠에서 ㉡을 뺀 식으로부터
>
> $na_{n+1} = (n+1)a_n + \boxed{\text{(가)}}$
>
> 를 얻는다. 양변을 $n(n+1)$ 로 나누면
>
> $\dfrac{a_{n+1}}{n+1} = \dfrac{a_n}{n} + \dfrac{\boxed{\text{(가)}}}{n(n+1)}$
>
> 이다. $b_n = \dfrac{a_n}{n}$ 이라 하면,
>
> $$b_{n+1} = b_n + 3 + \boxed{\text{(나)}} \ (n \geq 2)$$
>
> 이므로
>
> $$b_n = b_2 + \boxed{\text{(다)}} \ (n \geq 3)$$
>
> 이다.
>
> ⋮

위의 (가), (나), (다)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ 이라 할 때, $\dfrac{f(3)}{g(3)h(6)}$ 의 값은?

① 30 ② 36 ③ 42 ④ 48 ⑤ 54

1) 정답 ⑤
2) 정답 ④
3) 정답 ④
4) 정답 ⑤
5) 정답 ⑤
6) 정답②
7) 정답 ③
8) 정답 ④
9) 정답 ③
10) 정답 ⑤
11) 정답 ⑤
12) 정답 ①
13) 정답 ⑤
14) 정답 ①
15) 정답 ①
16) 정답 ①
17) 정답 ①
18) 정답 ③
19) 정답 ①
20) 정답 ②
21) 정답 ②
22) 정답 ④
23) 정답 ①
24) 정답 ②
25) 정답 ①
26) 정답 ⑤
27) 정답 ②
28) 정답 ③
29) 정답 ②
30) 정답 ⑤
31) 정답 ②