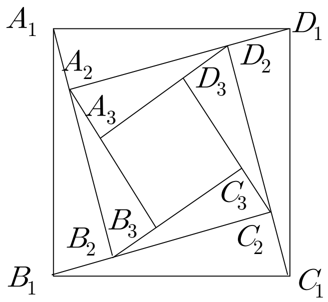
패턴12

무한등비급수+도형

편집:우에노리에

1. **2005 교육청(3점)**

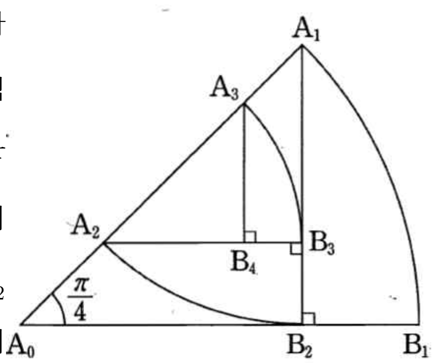
그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 내부에 합동인 4 개의 직각삼각형의 넓이의 합과 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 넓이가 같도록 만들고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 내부에 같은 방법으로 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$ 을 만든다. 이와 같은 과정을 한없이 반복하여 만들어진 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 의 넓이를 S_n 이라 할 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 합은?



① 2　　② $\frac{9}{4}$　　③ $\frac{5}{2}$　　④ $\frac{11}{4}$　　⑤ 3

2. **2010 평가원(3점)**

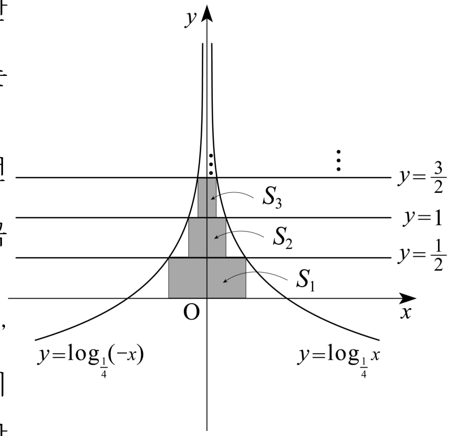
그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 인 부채꼴 $A_0A_1B_1$이 있다. 점 A_1에서 선분 A_0B_1에 내린 수선의 발을 B_2라 하고, 선분 A_0A_1위의 $\overline{A_1B_2}=\overline{A_1A_2}$인 점 A_2에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_1A_2B_2$를 그린다. 점 A_2에서 선분 A_1B_2에 내린 수선의 발을 B_3이라 하고, 선분 A_1A_2위의 $\overline{A_2B_3}=\overline{A_2A_3}$인 점 A_3에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_2A_3B_3$을 그린다. 이와 같은 과정을 계속하여 점 A_n에서 선분 $A_{n-1}B_n$에 내린 수선의 발을 B_{n+1}이라 하고, 선분 $A_{n-1}A_n$위의 $\overline{A_nB_{n+1}}=\overline{A_nA_{n+1}}$인 점 A_{n+1}에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_nA_{n+1}B_{n+1}$을 그린다. 부채꼴 $A_{n-1}A_nB_n$의 호 A_nB_n의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?



① $(4-\sqrt{2})\pi$　　② $(2+\sqrt{2})\pi$　　③ $(2+2\sqrt{2})\pi$
④ $(4+\sqrt{2})\pi$　　⑤ $(4+2\sqrt{2})\pi$

3. **2007** **평가원(3점)**

두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{4}}(-x)$, $y=\log_{\frac{1}{4}}x$ 가 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나는 두 점을 꼭지점으로 하고, 한 변이 x축 위에 있는 직사각형의 넓이를 S_1이라 하자. 두 곡선이 직선 $y=1$과 만나는 두 점을 꼭짓점으로 하고, 한 변이 직선 $y=\frac{1}{2}$ 위에 있는 직사각형의 넓이를 S_2라 하자. 두 곡선이 직선 $y=\frac{3}{2}$ 과 만나는 두 점을 꼭짓점으로 하고, 한 변이 직선 $y=1$ 위에 있는 직사각형의 넓이를 S_3이라 하자. 위와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 직사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은?



① $\frac{5}{8}$　② $\frac{3}{4}$　③ $\frac{7}{8}$

④ 1　⑤ $\frac{9}{8}$

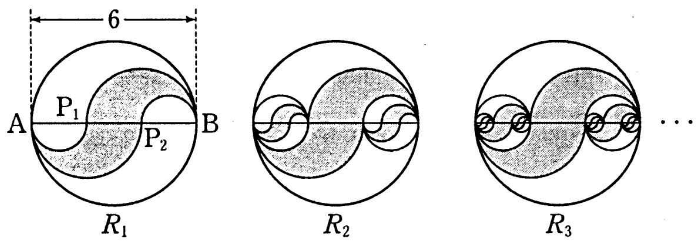
4. **2009** **평가원(3점)**

그림과 같이 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 원을 그리고, 선분 AB의 3등분점을 각각 P_1, P_2라 하고 선분 AP_1을 지름으로 하는 원의 아래쪽 반원, 선분 AP_2를 지름으로 한는 원의 아래쪽 반원, 선분 P_2B를 지름으로 하는 원의 위쪽 반원, 선분 P_1B를 지름으로 하는 원의 위쪽 반원을 경계로 하여 만든 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 P_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 AB 위의 색칠되지 않은 두 선분 AP_1, P_2B를 각각 지름으로 하는 두 원을 그리고, 이 두 원 안에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 두 선분 AP_1, P_2B 위의 색칠되지 않은 네 선분을 각각 지름으로 하는 네 원을 그리고, 이 네 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 네 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 모양의 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\dfrac{25}{7}\pi$　　② $\dfrac{27}{7}\pi$　　③ $\dfrac{29}{7}\pi$

④ $\dfrac{31}{7}\pi$　　⑤ $\dfrac{33}{7}\pi$

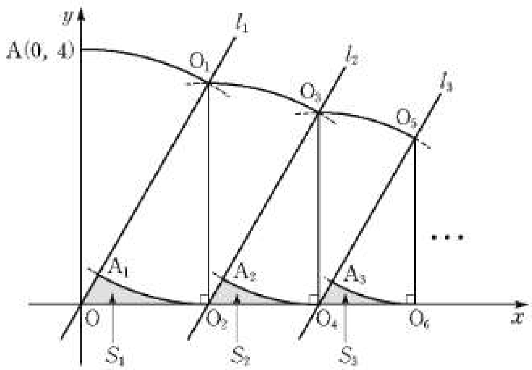
5. 2009 평가원(3점)

그림과 같이 원점 O를 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선 l_1과 점 $A(0, 4)$가 있다.

점 O를 중심으로 하고 선분 OA를 반지름으로 하는 원이 직선 l_1과 제1사분면에서 만나는 점을 O_1이라 하자. 점 O_1에서 x축에 내린 수선의 발을 O_2라 하자. 점 O_2을 중심으로 하고 선분 O_1O_2를 반지름으로 하는 원이 선분 OO_1과 만나는 점을 A_1이라 하자. 선분 A_1O, 선분 OO_2, 호 O_2A_1로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하자.

점 O_2를 중심으로 하고 선분 O_1O_2를 반지름으로 하는 원이 점 O_2를 지나고 직선 l_1에 평행한 직선 l_2와 제1사분면에서 만나는 점을 O_3이라 하자. 점 O_3에서 x축에 내린 수선의 발을 O_4라 하자. 점 O_3을 중심으로 하고 선분 O_3O_4를 반지름으로 하는 원이 선분 O_2O_3과 만나는 점을 A_2이라 하자. 선분 A_2O_2, 선분 O_2O_4, 호 O_4A_2로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $4\sqrt{3}-2\pi$ ② $8\sqrt{3}-4\pi$ ③ $4\sqrt{3}-\pi$
④ $8\sqrt{3}-2\pi$ ⑤ $16\sqrt{3}-4\pi$

6. **2008** **평가원(4점)**

그림과 같이 길이가 8인 선분 AB가 있다.

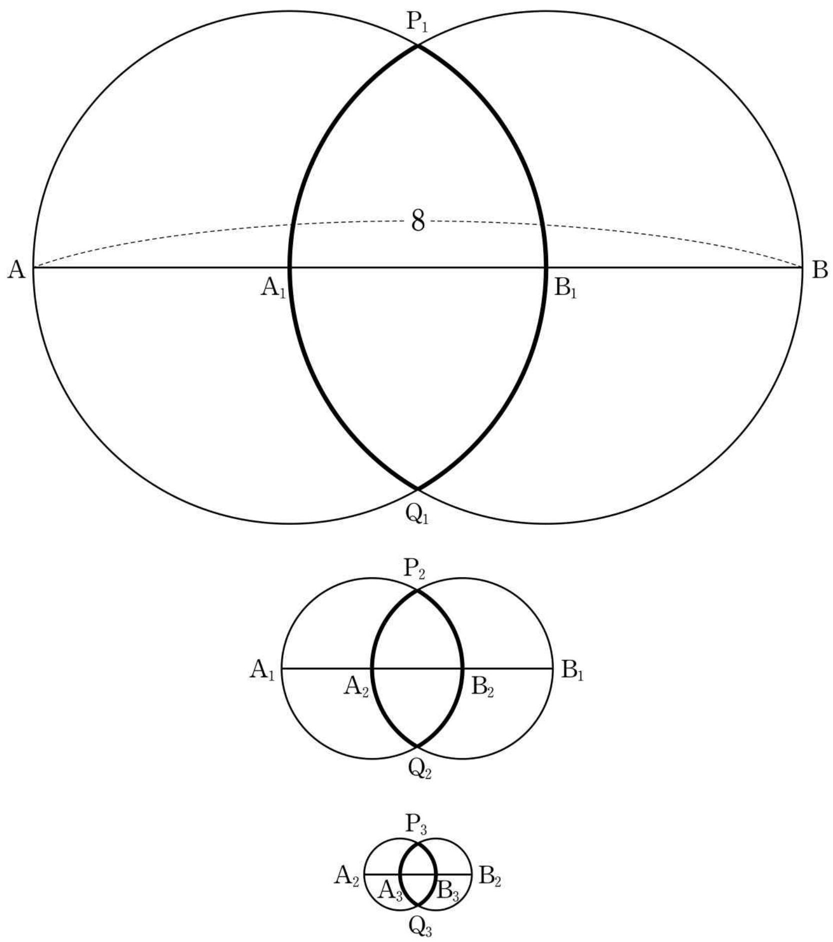
선분 AB의 삼등분점 A_1, B_1을 중심으로 하고 선분 A_1B_1을 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_1, Q_1 이라고 하자.

선분 A_1B_1의 삼등분점 A_2, B_2를 중심으로 하고 선분 A_2B_2를 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_2, Q_2

라고 하자.

선분 A_2B_2의 삼등분점 A_3, B_3을 중심으로 하고 선분 A_3B_3을 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_3, Q_3 이라고 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 호 $\mathrm{P_nA_nQ_n}$, $\mathrm{P_nB_nQ_n}$의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?



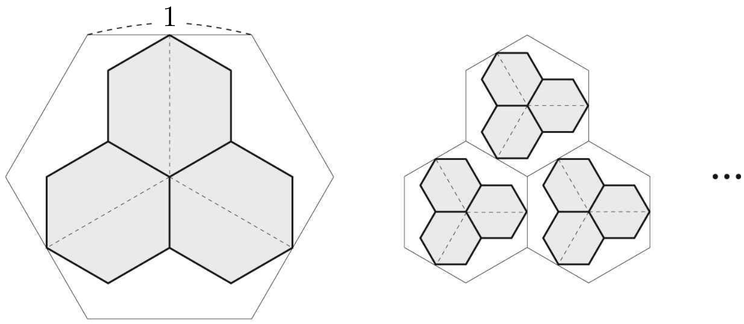
① $\frac{10}{3}\pi$ ② 4π ③ $\frac{14}{3}\pi$ ④ $\frac{16}{3}\pi$ ⑤ 6π

7. **2005** | **교육청(4점)**

한 변의 길이가 1인 정육각형에서 서로 이웃하지 않는 세 변의 중점과 이 정육각형에 외접하는 원의 중심을 각각 연결하여 세 선분을 얻는다. 이 세 선분을 각각 가장 긴 대각선으로 하는 3개의 정육각형을 그려서 얻은 모양의 그림을 H_1이라 하고, 그림 H_1의 넓이를 S_1이라 하자.

그림 H_1에서 새로 그려진 세 정육각형 내부에 각각 그림 H_1을 얻은 것과 같은 방법으로 그려서 얻은 3개의 모양의 그림을 H_2라 하고, 그림 H_2의 넓이를 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 그려서 얻은 3^{n-1}개의 모양의 그림을 H_n이라 하고, 그림 H_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



H_1　　　　H_2

① $\dfrac{27}{11}\sqrt{3}$　　② $\dfrac{9}{4}\sqrt{3}$　　③ $\dfrac{27}{13}\sqrt{3}$

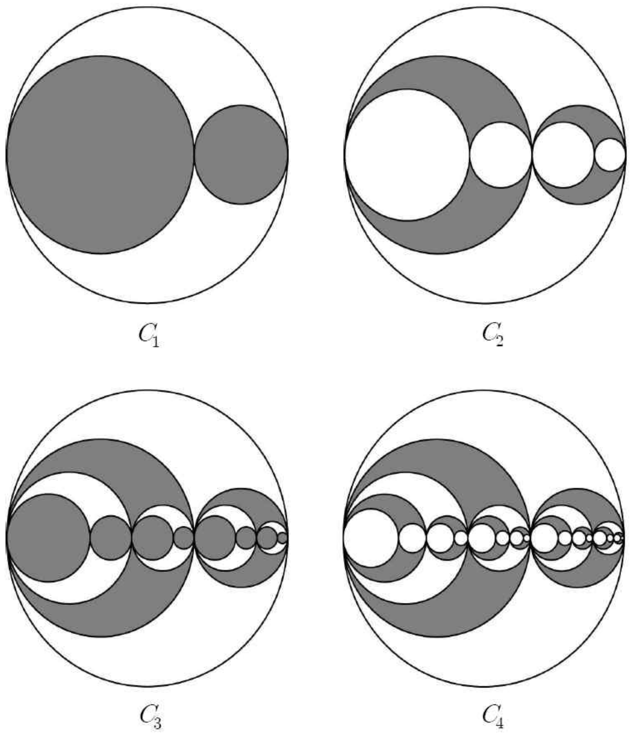
④ $\dfrac{27}{14}\sqrt{3}$　　⑤ $\dfrac{9}{5}\sqrt{3}$

8. | 2009 | 교육청(4점) |

원에 다음 과정을 실행한다.

> [과정]
> Ⅰ. 원의 지름을 2:1로 내분하는 점을 잡는다.
> Ⅱ. 이 원에 내접하면서 Ⅰ의 내분점에서 서로 외접하는 두 개의 원을 그린다.

지름의 길이가 6인 원이 있다. 이 원에 [과정]을 실행하여 그린 2개의 원의 내부를 색칠하여 얻어진 그림을 C_1이라 하자. 그림 C_1에서 새로 그려진 2개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 4개의 원의 내부를 제외하여 얻어진 그림을 C_2라 하자. 그림 C_2에서 새로 그려진 4개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 8개의 원의 내부를 색칠하여 얻어진 그림을 C_3이라 하자. 그림 C_3에서 새로 그려진 8개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 16개의 원의 내부를 제외하여 얻어진 그림을 C_4라 하자. 이와 같은 방법으로 n번째 얻어진 그림 C_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{p}\pi$($p$와 q는 서로소인 자연수)이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 모든 원의 중심은 처음 원의 한 지름 위에 있다.)

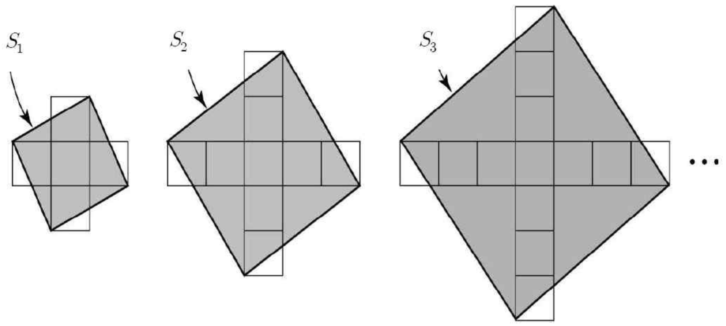


C_1 C_2 C_3 C_4

...

9. **2009** **교육청(4점)**

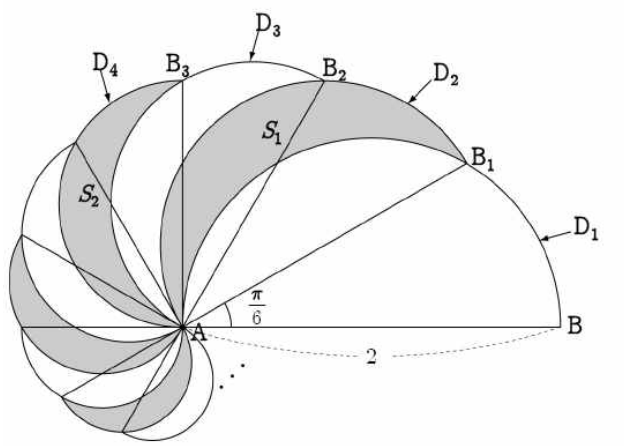
[그림 1]과 같이 한 개의 넓이가 1인 정사각형 5개로 이루어진 ✣ 모양의 도형에서 네 꼭짓점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_1이라 하자. [그림 2]와 같이 [그림 1]의 ✣ 모양의 도형에 한 개의 넓이가 1인 정사각형 4개를 붙여 만든 ✣ 모양의 도형에서 네 꼭짓점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_2라 하자. [그림 3]과 같이 [그림 2]의 ✣ 모양의 도형에 한 개의 넓이가 1인 정사각형 4개를 붙여 만든 ✣ 모양의 도형에서 네 꼭짓점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻어진 ✣ 모양의 도형에서 네 꼭짓점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{10S_n}{n^2}$의 값을 구하시오.



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

10. 2009 **교육청(4점)**

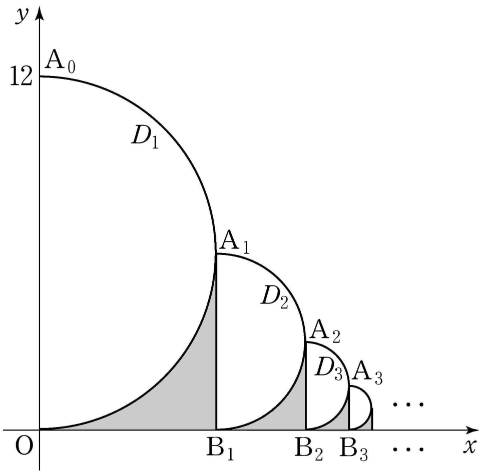
그림과 같이 $\overline{AB}=2$를 지름으로 하는 반원 D_1을 그리고, $\angle BAB_1 = \dfrac{\pi}{6}$가 되도록 반원 D_1위의 점B_1을 잡는다.$\overline{AB_1}$을 지름으로 하는 반원 D_2를 그렸을 때, 반원 D_2에서 반원D_1과의 공통부분을 뺀 나머지 도형의 넓이를 S_1이라 하자. $\angle B_1AB_2 = \dfrac{\pi}{6}$가 되도록 반원 D_2위의 점 B_2를 잡아 $\overline{AB_2}$를 지름으로 하는 반원 D_3를 그리고, $\angle B_2AB_3 = \dfrac{\pi}{6}$가 되도록 반원 D_3위의 점 B_3를 잡는다. $\overline{AB_3}$를 지름으로 하는 반원 D_4를 그렸을 때, 반원 D_4에서 반원 D_3와의 공통부분을 뺀 나머지 도형의 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속해서 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 하면, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \dfrac{b}{a}\left(\dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$이다. 이때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 서로소인 자연수이다.)



① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

11. **2005** **교육청(4점)**

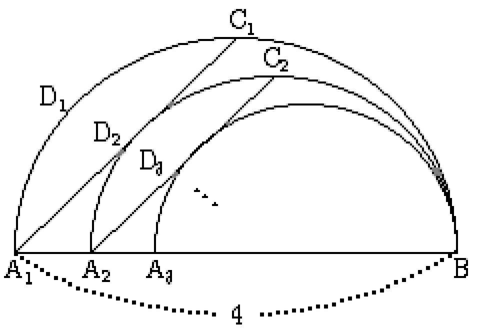
그림과 같이 원점과 점 $A_0(0, 12)$를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 오른쪽 반원을 D_1이라 하자. 원점을 지나고 기울기가 1인 직선이 D_1과 제 1사분면에서 만나는 점을 A_1, 점 A_1에서 x축에 내린 수선의 발을 B_1이라 하고, 반원 D_1, x축, 선분 A_1B_1으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하자. 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 원의 오른쪽 반원을 D_2라 하자. 점 B_1을 지나고 기울기가 1인 직선이 D_2와 제 1사분면에서 만나는 점을 A_2, 점 A_2에서 x축에 내린 수선의 발을 B_2라 하고, 반원 D_2, x축, 선분 A_2B_2로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $9(4-\pi)$ ② $12(4-\pi)$
③ $15(4-\pi)$ ④ $4(8-\pi)$
⑤ $6(8-\pi)$

12. | 2006 | 교육청(4점) |

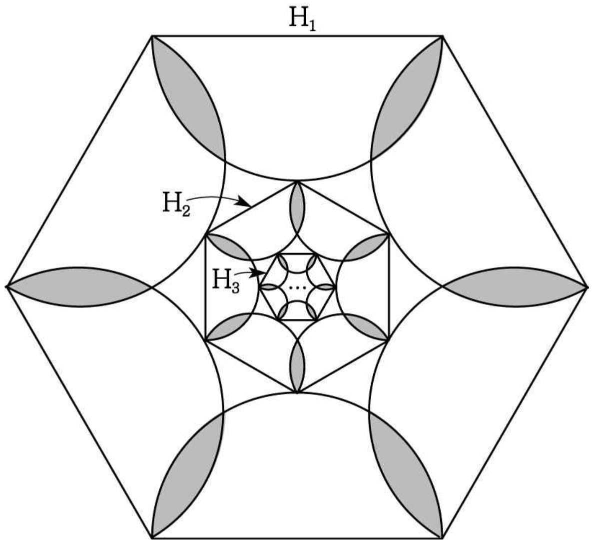
그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B를 지름으로 하는 반원 D_1이 있다. 호A_1B를 이등분하는 점을 C_1, 점 B를 지나면서 선분 A_1C_1과 접하고 중심이 선분 A_1B 위에 있는 반원을 D_2, 반원 D_2가 선분 A_1B와 만나는 점을 A_2라 하자. 호 A_2B를 이등분하는 점을 C_2, 점 B를 지나면서 선분 A_2C_2와 접하고 중심이 선분 A_1B 위에 있는 반원을 D_3, 반원 D_3이 선분 A_1B와 만나는 점을 A_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 반원 D_n의 호의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?



① $2(1+\sqrt{2})\pi$ ② $2(2+\sqrt{2})\pi$
③ $2(3+\sqrt{2})\pi$ ④ $2(2+2\sqrt{2})\pi$
⑤ $2(3+2\sqrt{2})\pi$

13. **2009** **교육청(4점)**

그림과 같이 정육각형 H_1 의 각 변을 지름으로 하는 반원을 정육각형 H_1 의 내부에 그리고, 반원이 겹쳐지는 어두운 부분의 넓이의 합을 S_1, 각 반원의 호의 길이를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_2 라 하자. 정육각형 H_2 의 각 변을 지름으로 하는 반원을 정육각형 H_2 의 내부에 그리고, 반원이 겹쳐지는 어두운 부분의 넓이의 합을 S_2, 각 반원의 호의 길이를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_3 이라 하자. 이와 같은 방법으로 정육각형 H_n 의 각 변을 지름으로 하는 반원을 정육각형 H_n 의 내부에 그리고, 반원이 겹쳐지는 어두운 부분의 넓이의 합을 S_n , 각 반원의 호의 길이를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_{n+1} 이라 하자.이때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값을 S_1 을 이용하여 나타낸 것은?

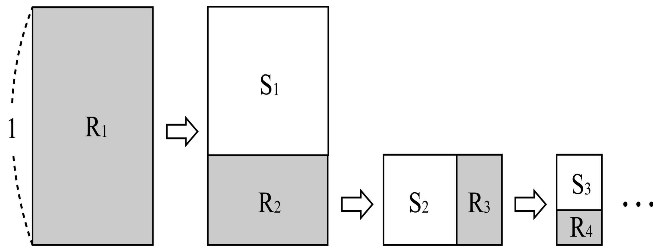


① $\frac{2\sqrt{3}}{3}S_1$　② $\frac{3-\sqrt{3}}{3}S_1$　③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}S_1$

④ $\frac{3+\sqrt{3}}{3}S_1$　⑤ $2\sqrt{3}\,S_1$

14. **2006** **평가원(4점)**

직사각형 중에서 짧은 변을 한 변으로 하는 정사각형을 잘라내고 남은 직사각형이 처음의 직사각형과 서로 닮음이 되는 것을 황금직사각형이라고 한다.그림과 같이 긴 변의 길이가 1인 황금직사각형 R_1에서 짧은 변을 한 변으로 하는 정사각형 S_1을 잘라내고 남은 직사각형을 R_2, 직사각형 R_2에서 정사각형 S_2를 잘라내고 남은 직사각형을 R_3이라고 하자. 이와 같은 방법으로 직사각형 R_4, R_5, R_6, $\cdots$ 을 한없이 만들어 간다. 직사각형 R_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 둘레의 길이 l_n에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n = k\,l_1$일 때, 상수 k의 값은?

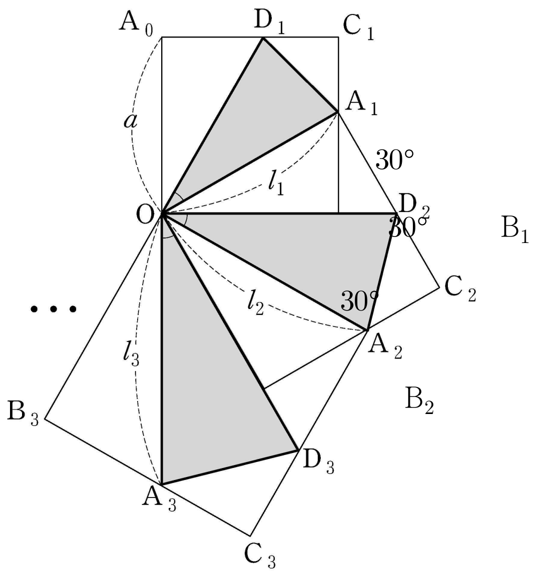


① $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$　　② $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$　　③ $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$

④ $3-\sqrt{5}$　　⑤ $3+\sqrt{5}$

15. 2006 **평가원(4점)**

그림과 같이 한 변의 길이가 a인 정사각형 $\mathrm{OB_1C_1A_0}$이 있다. 삼각형 $\mathrm{OA_1D_1}$이 $\angle \mathrm{D_1OA_1}=30°$인 이등변삼각형이 되도록 변 $\mathrm{B_1C_1}$, $\mathrm{A_0C_1}$ 위에 각각 점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{D_1}$을 잡고 변 $\mathrm{OA_1}$의 길이를 l_1이라 하자. 선분 $\mathrm{OA_1}$을 한 변으로 하는 정사각형 $\mathrm{OB_2C_2A_1}$에서 삼각형 $\mathrm{OA_2D_2}$가 $\angle \mathrm{D_2OA_2}=30°$인 이등변삼각형이 되도록 변 $\mathrm{B_2C_2}$, $\mathrm{A_1C_2}$ 위에 각각 점 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{D_2}$를 잡고 변 $\mathrm{OA_2}$의 길이를 l_2라 하자. 선분 $\mathrm{OA_2}$를 한 변으로 하는 정사각형 $\mathrm{OB_3C_3A_2}$에서 삼각형 $\mathrm{OA_3D_3}$이 $\angle \mathrm{D_3OA_3}=30°$인 이등변삼각형이 되도록 변 $\mathrm{B_3C_3}$, $\mathrm{A_2C_3}$ 위에 각각 점 $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{D_3}$을 잡고 변 $\mathrm{OA_3}$의 길이를 l_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 이등변삼각형 $\mathrm{OA_nD_n}$에서 변 $\mathrm{OA_n}$의 길이를 l_n이라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l_n}=\sqrt{3}$일 때, a의 값은?

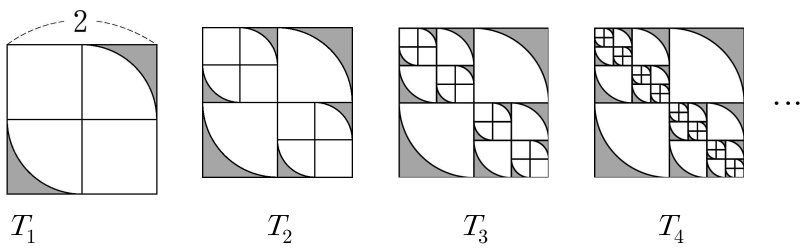


① $\sqrt{3}$ ② $1+\sqrt{3}$ ③ $2+\sqrt{3}$

④ $3+\sqrt{3}$ ⑤ $6+\sqrt{3}$

16. **2006** **평가원(4점)**

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형을 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 1인 사분원 2개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_1이라 하자. T_1에서 한 변의 길이가 1인 정사각형 2개를 각각 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 사분원 4개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_2라 하자. T_2에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정사각형 4개를 각각 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$인 사분원 8개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형을 T_n이라 하고 그 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

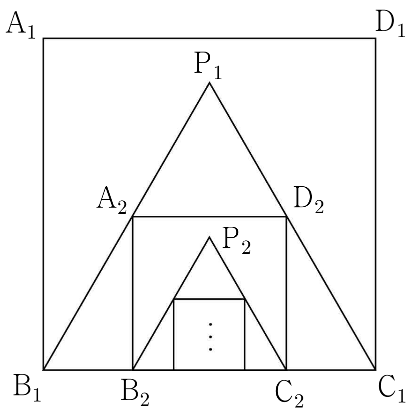


① $\frac{\pi}{2}$　　② $\frac{2}{3}\pi$　　③ $\frac{3}{4}\pi$

④ π　　⑤ $\frac{5}{4}\pi$

17. **2007** **교육청(4점)**

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에 선분 B_1C_1을 한 변으로 하는 정삼각형 $P_1B_1C_1$을 만든다. 다시 선분 B_1C_1 위에 정삼각형 $P_1B_1C_1$에 내접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 만든다. 이와 같은 방법으로 만들어지는 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

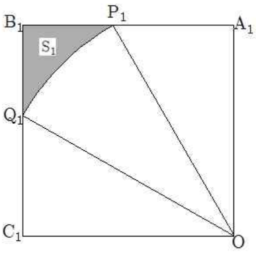


① $4\sqrt{3}+15$　　② $5\sqrt{3}+10$　　③ $5\sqrt{3}+25$

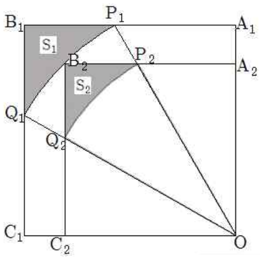
④ $6\sqrt{3}+5$　　⑤ $6\sqrt{3}+10$

18. 2007 | 교육청(4점)

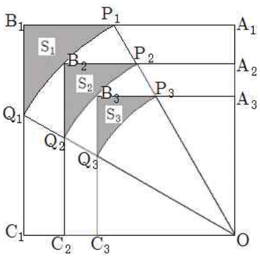
그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $OA_1B_1C_1$에서 $\angle O$의 3등분선이 $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$과 만나는 점을 각각 P_1, Q_1이라 하자. 점 O가 중심이고 $\overline{OP_1}$을 반지름으로 하는 부채꼴 OP_1Q_1을 그린다. [그림1]에서 도형 $B_1Q_1P_1$의 넓이를 S_1이라 하자. 호 P_1Q_1의 중점 B_2, $\overline{OA_1} /\!/ \overline{C_2B_2}$인 $\overline{OC_1}$ 위의 점 C_2, $\overline{OC_1} /\!/ \overline{A_2B_2}$인 $\overline{OA_1}$ 위의 점 A_2, 점 O를 꼭지점으로 하는 정사각형 $OA_2B_2C_2$를 그린다. $\overline{OP_1}$과 $\overline{A_2B_2}$가 만나는 점을 P_2, $\overline{OQ_1}$과 $\overline{B_2C_2}$가 만나는 점을 Q_2라 하자. 점 O가 중심이고 $\overline{OP_2}$를 반지름으로 하는 부채꼴 OP_2Q_2를 그린다. [그림2]에서 도형 $B_2Q_2P_2$의 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 합은?



[그림1]



[그림2]



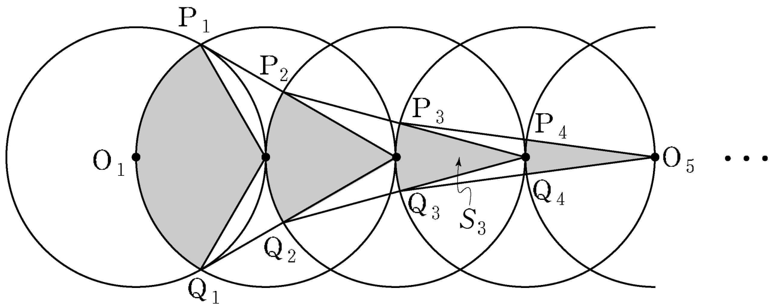
[그림3] ⋯

① $-3+\pi$ ② $4-\pi$ ③ $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

④ $3-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ ⑤ $4-\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

19. **2007** **평가원(4점)**

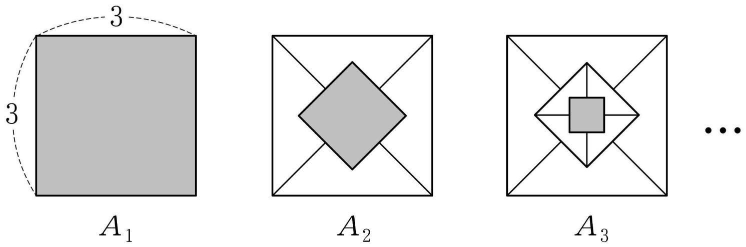
그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심이 $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2, \mathrm{O}_3, \cdots$인 원들이 있다. 모든 원들의 중심은 한 직선 위에 있고, $\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}}=1(n=1, 2, 3, \cdots)$이다. 두 원 O_1, O_2가 만나는 두 점을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 부채꼴 $\mathrm{O}_2\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$의 넓이를 S_1이라 하자. 두 점 P_1, Q_1에서 원 O_3의 중심과 연결한 선분이 원 O_3과 만나는 두 점을 각각 P_2, Q_2라 하고, 부채꼴 $\mathrm{O}_3\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$의 넓이를 S_2라 하자. 두 점 P_2, Q_2에서 원 O_4의 중심과 연결한 선분이 원 O_4와 만나는 두 점을 각각 P_3, Q_3이라 하고, 부채꼴 $\mathrm{O}_4\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3$의 넓이를 S_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부채꼴 $\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{\pi}{2}$　　② $\frac{2}{3}\pi$　　③ $\frac{5}{6}\pi$　　④ π　⑤ $\frac{7}{6}\pi$

20. 2007 **평가원(4점)**

그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형을 A_1, 그 넓이를 S_1이라 하자. 정사각형 A_1에 대각선을 그어 만들어진 4개의 삼각형의 무게중심을 연결한 정사각형을 A_2, 그 넓이를 S_2라 하자. 같은 방법으로 정사각형 A_2에 대각선을 그어 만들어진 4개의 삼각형의 무게중심을 연결한 정사각형을 A_3, 그 넓이를 S_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 $(n-1)$ 번째 얻은 정사각형을 A_n, 그 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

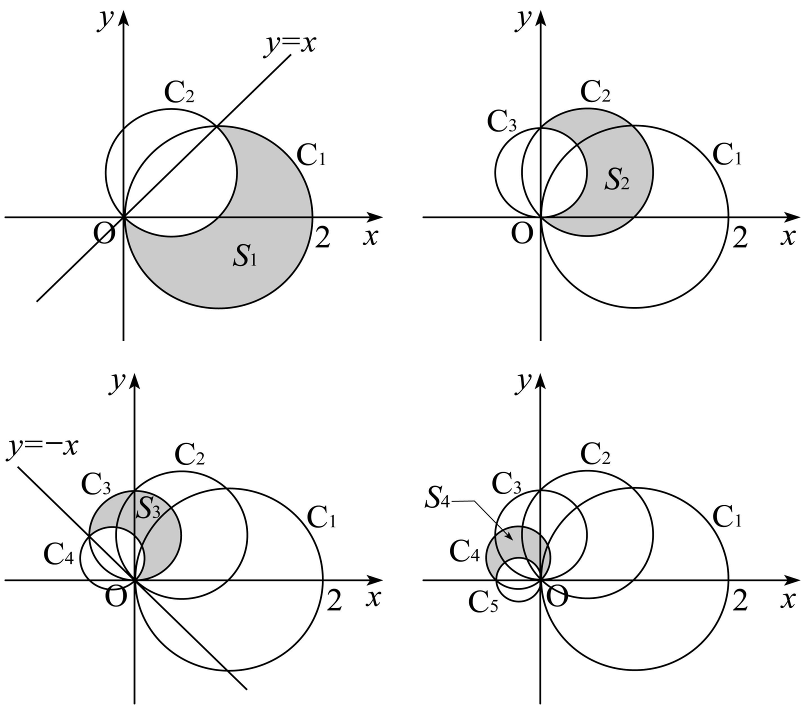


① $\frac{64}{7}$ ② $\frac{21}{2}$ ③ $\frac{72}{7}$

④ $\frac{27}{2}$ ⑤ $\frac{81}{7}$

21. 2008 **교육청(4점)**

그림과 같이 원점 O와 점 $(2,\ 0)$을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_1이라 하자. 또, 원 C_1과 직선 $y=x$가 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_2, 원 C_2와 y축이 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_3이라 하자. 또, 원 C_3과 직선 $y=-x$가 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_4, 원 C_4와 x축이 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_5라 하자.



이와 같은 방법으로 중심이 차례로 직선 $y=x$, y축, 직선 $y=-x$, x축, $\cdots$ 위에 있는 원 C_6, C_7, C_8, C_9, $\cdots$를 한없이 만들어 갈 때, 원 C_n의 내부와 원 C_{n+1}의 외부의 공통부분(어두운 부분)의 넓이를 $S_n\,(n=1,2,3,\ \cdots\ )$이라 하자.

이때 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

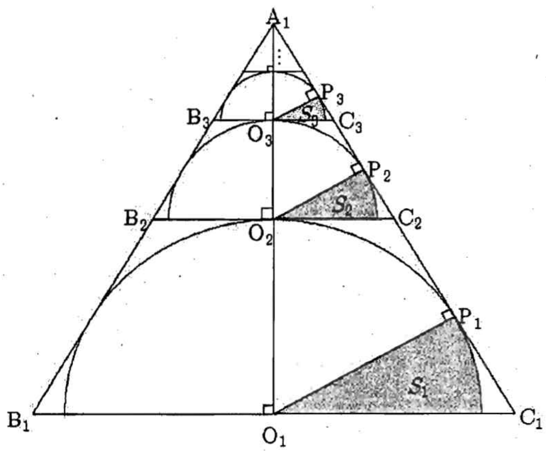
① $\pi+1$ ② $\dfrac{3}{2}\pi$ ③ $\dfrac{5}{4}(\pi+1)$

④ $\dfrac{3}{2}(\pi+1)$ ⑤ 2π

22. **2008** **교육청(4점)**

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 선분 B_1C_1의 중점 O_1을 중심으로 삼각형 $A_1B_1C_1$에 접하는 반원과 선분 A_1C_1의 교점이 P_1일 때, 선분 O_1P_1은 반원의 내부를 부채꼴 두 개로 나눈다. 그 중 작은 부채꼴(어두운 부분)의 넓이를 S_1이라 한다.

선분 A_1O_1과 반원의 교점을 O_2라 두고 점 O_2를 접점으로 하는 접선과 선분 A_1B_1, 선분 A_1C_1과 만나는 점은 각각 B_2, C_2이다. 정삼각형 $A_1B_2C_2$에서 점 O_2를 중심으로 삼각형 $A_1B_2C_2$에 접하는 새로운 반원과 선분 A_1C_2의 교점이 P_2일 때, 선분 O_2P_2는 반원의 내부를 부채꼴 두 개로 나눈다. 그 중 작은 부채꼴(어두운 부분)의 넓이를 S_2라 한다.



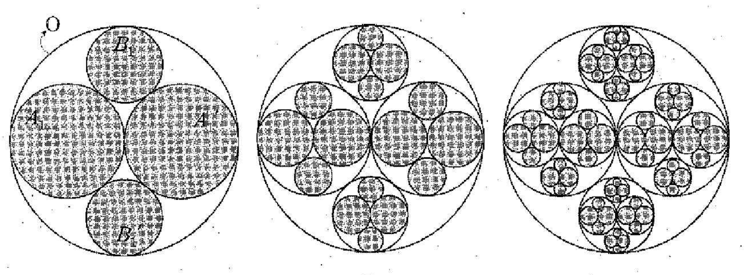
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻어진 부채꼴의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{4}$

④ $\frac{\pi}{6}$ ⑤ $\frac{\pi}{12}$

23. **2009** **교육청(4점)**

반지름의 길이가 1인 원 O가 있다.
원 O의 중심에서 서로 외접하고 원 O에 내접하는 두 원 A_1, A_1'을 그린 후 두 원 A_1과 A_1'에 외접하며 원 O에 내접하는 두 원 B_1, B_1'을 그려서 얻은 그림을 R_1이라 하자. 새로 그려진 네 원 A_1, A_1', B_1, B_1'의 내부에 그림 R_1의 제작과정을 반복하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻어진 그림을 R_n이라 하자.
또한, 그림 R_1, R_2, $\cdots$, R_n, $\cdots$각각에 아래와 같이 어둡게 색칠을 하자. 그림 R_n의 어두운 부분의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



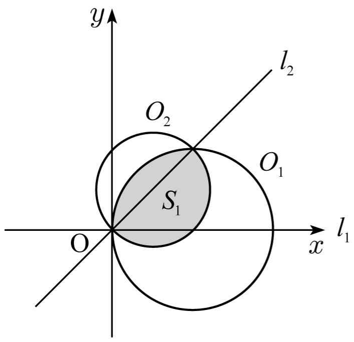
R_1 R_2 R_3

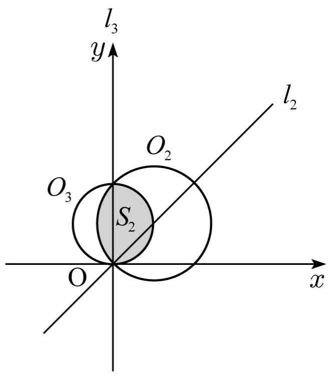
① π ② $\frac{9}{5}\pi$ ③ $\frac{13}{5}\pi$

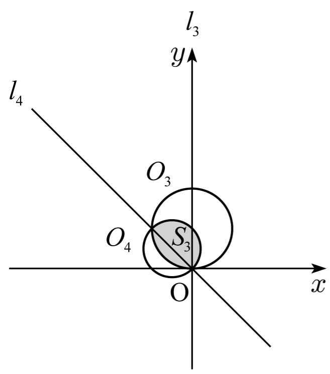
④ $\frac{17}{5}\pi$ ⑤ $\frac{21}{5}\pi$

24. 2010 교육청(4점)

좌표평면에서 점 (3, 0)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원을 O_1이라 하고, x축을 직선 l_1이라 하자. 직선 l_1을 원점을 중심으로 45°만큼 회전시킨 직선을 l_2라 하고, 직선 l_2와 원 O_1의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_2라 할 때, 두 원 O_1, O_2의 공통부분의 넓이를 S_1이라 하자. 직선 l_2를 원점을 중심으로 하여 45°만큼 회전시킨 직선을 l_3이라 하고, 직선 l_3과 원 O_2의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_3이라 할 때, 두 원 O_2, O_3의 공통부분의 넓이를 S_2라 하자. 직선 l_3을 원점을 중심으로 하여 45°만큼 회전시킨 직선을 l_4라 하고, 직선 l_4와 원 O_3의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_4라 할 때, 두 원 O_3, O_4의 공통부분의 넓이를 S_3이라 하자.







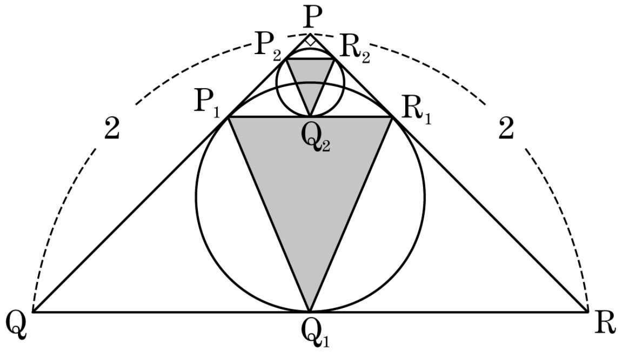
$\cdots$

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

① $6(\pi-1)$ ② $7(\pi-1)$ ③ $8(\pi-1)$
④ $9(\pi-1)$ ⑤ $10(\pi-1)$

25. **2011** **교육청(4점)**

그림과 같이 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}=2$이고 $\angle\mathrm{QPR}=90°$인 삼각형 PQR의 내접원과 세 변 PQ, QR, RP의 접점을 각각 P_1, Q_1, R_1이라 하자. 또, 삼각형 $\mathrm{PP}_1\mathrm{R}_1$의 내접원과 세 변 PP_1, $\mathrm{P}_1\mathrm{R}_1$, $\mathrm{R}_1\mathrm{P}$의 접점을 각각 P_2, Q_2, R_2라 하자.



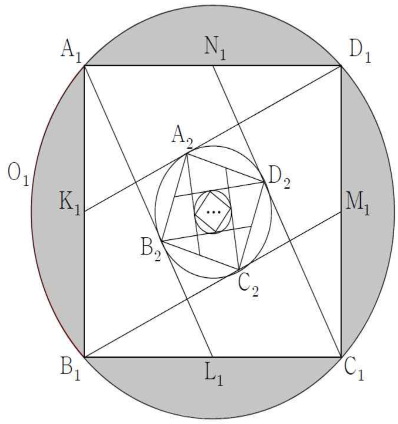
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 세 점 P_n, Q_n, R_n을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = p+q\sqrt{2}$를 만족시키는 두 유리수 p, q의 합 $p+q$의 값은?

① $\frac{1}{7}$　② $\frac{2}{7}$　③ $\frac{3}{7}$

④ $\frac{4}{7}$　⑤ $\frac{5}{7}$

26. 2011 | 교육청(4점)

반지름의 길이가 1 인 원 O_1 이 있다. 그림과 같이 원 O_1 과 원 O_2 에 내접하는 정사각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 이라 하자. 그림과 같이 선분 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$, $\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$, $\mathrm{D}_1\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ 의 각각의 중점 L_1, M_1, N_1, K_1 에 대하여, 네 개의 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{L}_1$, $\mathrm{B}_1\mathrm{M}_1$, $\mathrm{C}_1\mathrm{N}_1$, $\mathrm{D}_1\mathrm{K}_1$ 의 교점을 꼭짓점으로 하는 사각형에 내접하는 원을 O_2 라 하자. 원 O_2 와 원 O_2 에 내접하는 정사각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 S_n 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은?

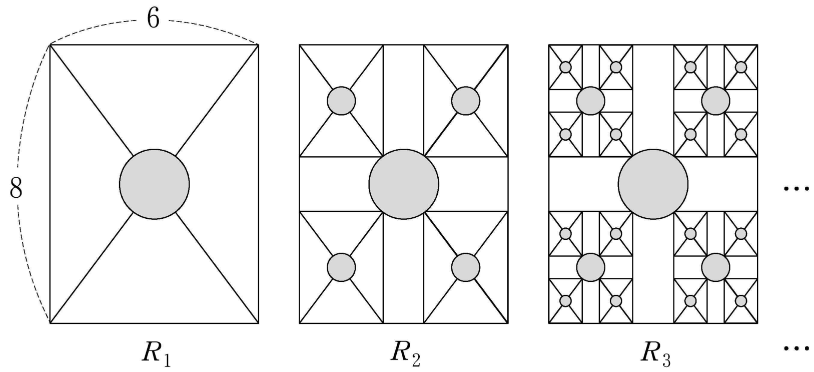


① $\dfrac{3(\pi-2)}{2}$ ② $\dfrac{4(\pi-2)}{3}$ ③ $\dfrac{5(\pi-2)}{4}$

④ $\dfrac{7(\pi-2)}{6}$ ⑤ $\dfrac{10(\pi-2)}{9}$

27. **2007** **수능 (4점)**

아래와 같이 가로의 길이가 6이고 세로의 길이가 8인 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 직사각형의 각 꼭지점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에 있는 합동인 4개의 직사각형 각각에서 각 꼭지점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?(단, 모든 직사각형의 가로와 세로는 각각 서로 평행하다.)



① $\frac{37}{9}\pi$ ② $\frac{34}{9}\pi$ ③ $\frac{31}{9}\pi$

④ $\frac{28}{9}\pi$ ⑤ $\frac{25}{9}\pi$

1) 정답 ①
2) 정답 ②
3) 정답 ④
4) 정답 ②
5) 정답 ②
6) 정답 ④
7) 정답 ④
8) 정답 59
9) 정답 20
10) 정답 ⑤
11) 정답 ②
12) 정답 ⑤
13) 정답 ①
14) 정답 ②
15) 정답 ③
16) 정답 ④
17) 정답 ⑤
18) 정답 ④
19) 정답 ②
20) 정답 ⑤
21) 정답 ①
22) 정답 ⑤
23) 정답 ③
24) 정답 ④
25) 정답 ④
26) 정답 ⑤
27) 정답 ⑤