문항 분석, 유사문항 풀어보기까지

3월 모의고사

완벽 분석!

★★★ 자료 사용 설명서 ★★★

1. 2021년 시행 3월 모의고사 문제지를 푼다!

2. 채점 후 오답 문항을 다시 풀어본다!

3. 오답 점검 후 이 자료를 보며, 왼쪽 페이지 (짝수 페이지)의 분석 내용을 읽는다!

   point : 놓친 개념이나 풀이의 비약은 없는지, 접근 방법이 제대로 되었는지 확인하기!

4. 분석 후 오른쪽 페이지 (홀수 페이지)의 유사 문항을 풀어 보며

   공부한 내용을 잘 습득했는지 점검한다!

001 $\log_8 16$ 의 값은? [2점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

로그의 연산 성질을 활용하는 문제야.

$\log_a b + \log_a c = \log_a bc$

$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$

* 로그의 기본 성질

$\log_a b = c$

- $a > 0,\ a \neq 1$ (밑 조건)
- $b > 0$ (진수 조건)
- $a^c = b$

$\log_8 16 = \log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3} \log_2 2 = \frac{4}{3}$

유사문항에도 로그의 기본 연산 문제를 수록해 뒀으니 풀어봐!

[1-2020년 시행 9월 모평 나형 24번]

$\log_5 40 + \log_5 \frac{5}{8}$의 값을 구하시오. [3점]

002 공차가 3 인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4 = 100$ 일 때, a_1 의 값은? [2점]

① 91　② 93　③ 95　④ 97　⑤ 99

등차수열의 일반항 문제야.

첫째항을 a_1, 공차를 d라 하면 $a_n = a_1 + (n-1)d$

등차수열 문제가 나오면, 첫째항과 공차를 찾아봐야겠지.

$a_n = a_1 + 3(n-1)$

$a_4 = a_1 + 3 \cdot 3 = 9 + a_1 = 100$

$\rightarrow a_1 = 91$

유사문항에는 등비수열의 일반항 문제를 수록해 두었어.

* 등비수열의 일반항

첫째항이 a_1, 공비가 r인 등비수열 a_n

$\rightarrow a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

[2-2020년 시행 대수능 나형 2번]

첫째항이 $\frac{1}{8}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\frac{a_3}{a_2}=2$일 때, a_5의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

003 $0 \le x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin 4x = \frac{1}{2}$ 의 서로 다른 실근의 개수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

삼각함수의 그래프와 기본 성질(주기, 대칭성, 최대·최소)을 활용하는 문제야.

* 삼각함수의 기본 성질 ($b \neq 0$)

$y = a\sin bx + c$ (또는 $y = a\cos bx + c$)

· 주기 : $\frac{2\pi}{|b|}$

· 최댓값 : $|a| + c$

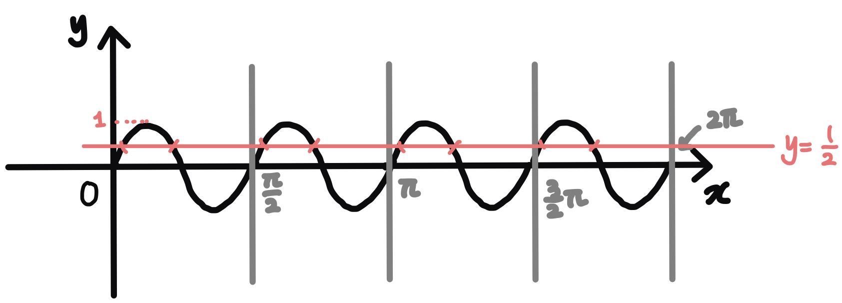
· 최솟값 : $-|a| + c$

$y = a\tan bx + c$

· 주기 : $\frac{\pi}{|b|}$

· 최댓값, 최솟값 : 없음

$y = \sin 4x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 임을 바탕으로 $0 \le x < 2\pi$ 에서의 그래프를 그려 볼게.



위의 그래프에서 볼 수 있듯이, $y = \frac{1}{2}$과 $y = \sin 4x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 8개야!

유사문항에도 이 문제와 비슷하게 그래프를 활용하는 문제를 수록해 뒀어!

[3-2022학년도 수능 예시문항 8번]

함수 $y=6\sin\frac{\pi}{12}x\ (0\le x\le 12)$의 그래프와 직선 $y=3$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

004 $\int_{2}^{-2}(x^3+3x^2)\,dx$ 의 값은? [3점]

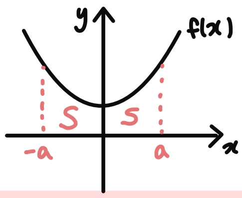
① -16　② -8　③ 0　④ 8　⑤ 16

정적분 문제인데, 우함수와 기함수의 성질을 활용하면 더 간단하게 풀 수 있어!

* 우함수와 기함수의 정적분 : 적분구간의 양 끝이 부호만 다르고 절댓값이 같은 경우

① 우함수 : y축 대칭 함수 $(f(-x)=f(x))$

→ 다항함수인 경우 : 짝수차항만 존재함

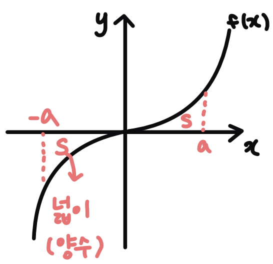


$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2S = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

② 기함수 : 원점 대칭인 함수 $(f(-x)=-f(x))$

→ 다항함수인 경우 : 홀수차항만 존재함



$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = (-S)+(S)=0$

$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

$\int_{2}^{-2}(x^3+3x^2)\,dx = -\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2)\,dx$

$= -2\int_{0}^{2} 3x^2\,dx = -2\left[x^3\right]_{0}^{2}$

$= -2\cdot 8 = -16$

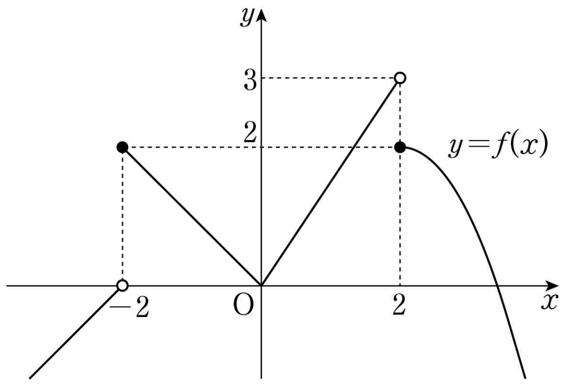
유사문항에도 마찬가지로 적분구간의 위끝과 아래끝을 바꾸어서 우함수, 기함수의 성질을 활용해 적분하는 문항을 수록해 뒀어!

[4-2019년 시행 10월 학평 나형 6번]

$\int_{-3}^{3}(x^3+4x^2)dx+\int_{3}^{-3}(x^3+x^2)dx$ 의 값은? [3점]

① 36　② 42　③ 48　④ 54　⑤ 60

005 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

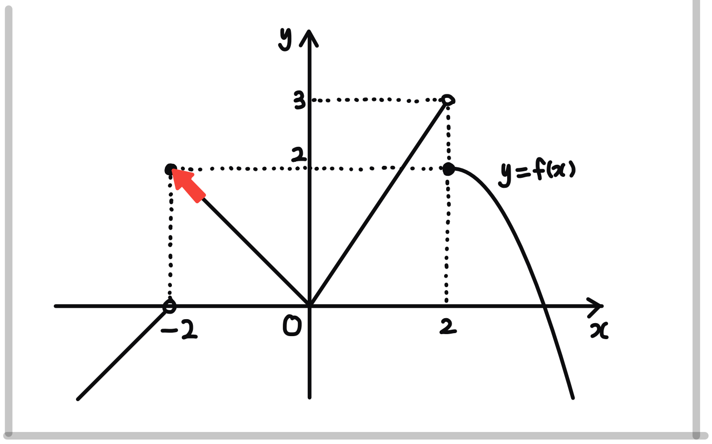


$\lim_{x\to-2+} f(x) + \lim_{x\to2-} f(x)$ 의 값은? [3점]

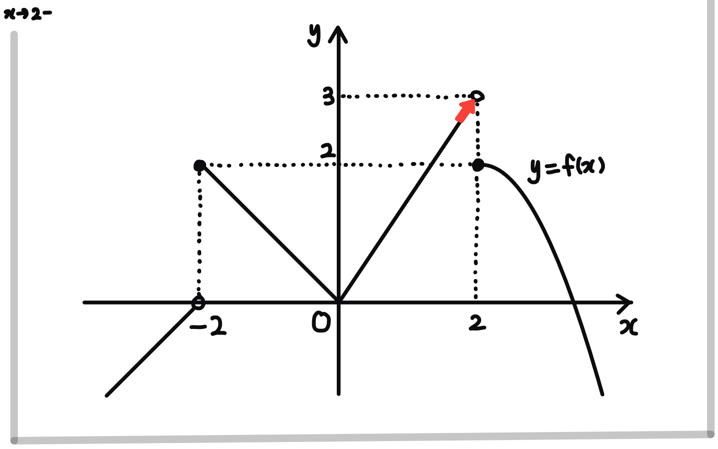
① 6　② 5　③ 4　④ 3　⑤ 2

함수의 극한 문제 중 그래프를 통해 함수의 좌극한, 우극한, 함숫값을 판단하는 기본 문제야.

$\lim_{x\to-2+} f(x) = 2$



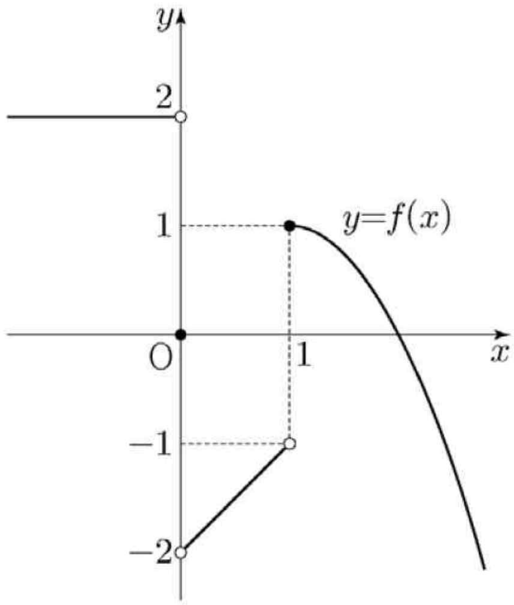
$\lim_{x\to2-} f(x) = 3$



유사문항에도 그래프에서 극한값을 찾는 문항을 수록해 뒀어!

[5-2022학년도 수능 예시문항 4번]

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) - \lim\limits_{x \to 1+} f(x)$ 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

006 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3} & (x<3)\\[2mm] \dfrac{2x+1}{x-2} & (x\geq 3)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

함수의 연속에 관한 문제야.

＊ 함수의 연속

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다

$\Leftrightarrow \lim_{x\to a-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a+} f(x)$

함수 $f(x)$는 $x<3$, $x\geq 3$ 에서 각각 연속이기 때문에,

$x=3$ 에서만 연속이면 모든 실수에서 연속이라고 할 수 있어.

따라서 $\lim_{x\to 3-} f(x) = \lim_{x\to 3+} f(x) = f(3)$ 을 만족해야 해.

$$\lim_{x\to 3-}\frac{x^2+ax+b}{x-3} = \lim_{x\to 3+}\frac{2x+1}{x-2} = 7$$

$\lim_{x\to 3-}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=7$ 에서 $x\to 3$ 일 때 분모 $\to 0$ 이므로 분자 $\to 0$ 이어야 해.

$\to 9+3a+b=0$

여기서 두가지 풀이방법이 있어.

i) 정석 풀이

$b=-3a-9$ 에서 $\lim_{x\to 3-}\dfrac{x^2+ax-3a-9}{x-3} = \lim_{x\to 3-}\dfrac{(x-3)(x+a+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3-}(x+a+3) = a+6=7$

$\to a=1,\ b=-12$

ii) 로피탈

$\lim_{x\to 3-}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3} = \lim_{x\to 3-}\dfrac{2x+a}{1} = 6+a$ …(이하 동일)

참고로 로피탈의 정리는 응꼴일 때 계산을 줄이는 용도로 사용할 수 있어.

교육과정 외의 내용이기는 하지만, 사용하면 계산이 훨씬 편해져.

$x\to a$ 일때 $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$ 인 경우 $\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a}\dfrac{g'(x)}{f'(x)}$

유사문항에도 함수의 연속성을 조사하는 비슷한 문제를 수록해 뒀어.

[6-2020년 시행 사관학교 나형 26번]

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-10 & (x \le a) \\ \dfrac{x^2+ax+4a}{x-a} & (x > a) \end{cases}$$

가 $x=a$에서 연속일 때, $f(2a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

007 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{(n+1)^2}{2} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{n^2}{2}+n+1 & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값은? [3점]

① 235　② 240　③ 245　④ 250　⑤ 255

수열의 귀납적 정의 문제야.

수열 문제에서는 등차수열, 등비수열이 아니라면 식을 세우려는 접근보다는,

n=1 부터 대입해가면서 규칙성을 파악하는 것이 좋아!

i) n이 홀수인 경우 (n=1, 3, 5, 7, 9)

$$\frac{2^2}{2}+\frac{4^2}{2}+\frac{6^2}{2}+\frac{8^2}{2}+\frac{10^2}{2}=\frac{1}{2}(2^2+4^2+6^2+8^2+10^2)$$

ii) n이 짝수인 경우 (n=2, 4, 6, 8, 10)

$$\frac{1}{2}(2^2+4^2+6^2+8^2+10^2)+(2+4+6+8+10)+1\times 5$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = 2\times\frac{1}{2}(2^2+4^2+6^2+8^2+10^2)+(2+4+6+8+10)+5$$

$$=220+30+5=255$$

참고로 이 부분은 식을 세워 계산해도 되고, 직접 계산해도 좋아.

식을 세우는 경우 $\sum_{n=1}^{5}(2n)^2=\sum_{n=1}^{5}4n^2=4\times\frac{5\cdot 6\cdot 11}{6}=220$

이렇게 계산할 수 있으니 참고해!

유사문항에도 비슷한 방법으로 경우를 나누어 푸는 문제를 수록해 놨어.

[7-2020년 시행 3월 학평 가형 9번]

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 7$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n + 3}{2} & (a_n \text{이 소수인 경우}) \\ a_n + n & (a_n \text{이 소수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. a_8 의 값은? [3점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

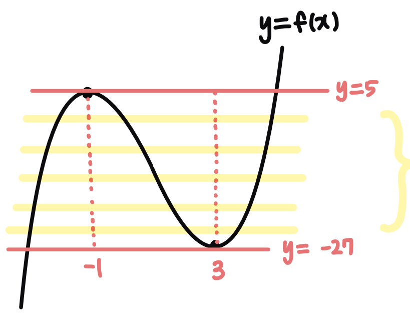
008 곡선 $y=x^3-3x^2-9x$ 와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 정수 k 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M-m$ 의 값은? [3점]

① 27　② 28　③ 29　④ 30　⑤ 31

삼차함수와 상수함수의 교점을 파악하는 문제야.

먼저 $f(x)=x^3-3x^2-9x$ 로 두고 $f(x)$ 의 개형을 파악해 볼게.

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$ 에서 $f(x)$는 $x=-1$, $x=3$ 에서 극값을 가짐을 알 수 있지.



이 부분에서 서로 다른 세 실근을 가져.

$M=4$, $m=-26$

$\rightarrow M-m=4-(-26)=30$

유사문항에도 비슷하게 삼차함수의 개형을 파악해서 교점을 찾는 문제를 수록해 뒀어

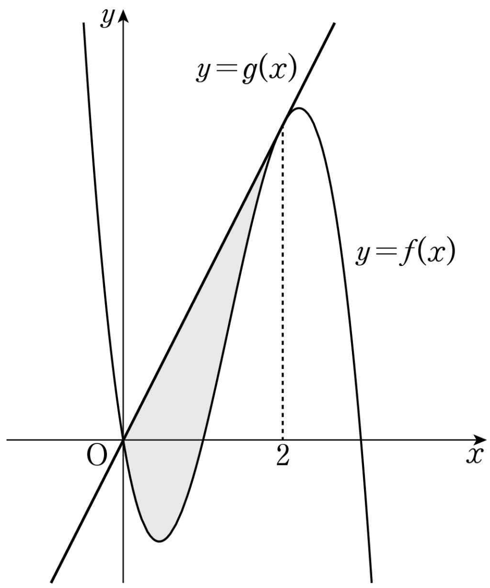
[8-2020년 시행 6월 모평 나형 19번]

방정식 $2x^3+6x^2+a=0$이 $-2 \le x \le 2$에서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 a의 개수는? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

009 최고차항의 계수가 -3 인 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(2,\ f(2))$ 에서의 접선 $y=g(x)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 와 원점에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$



곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 문제야. 이 문제는 꼭 잘 봐둬!

삼차함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 접하고 $x=0$ 에서 실근을 가지므로

$f(x)-g(x)=-3x(x-2)^2$ 라는 식을 쓸 수 있어.

$$\int_0^2 \{g(x)-f(x)\}dx = \int_0^2 3x(x-2)^2 dx$$

$$= \int_0^2 (3x^3-12x^2+12x)dx$$

$$= \left[\frac{3}{4}x^4-4x^3+6x^2\right]_0^2 = \frac{3}{4}\cdot 16-32+24=4$$

유사문항에 어려운거 넣어둬서 미안해.. ㅠㅠ 하지만 이 방식으로 식을 써내려가는 문제가 기출에 많지 않아서 어쩔 수 없었어..

꼭 풀어보길 바라!!

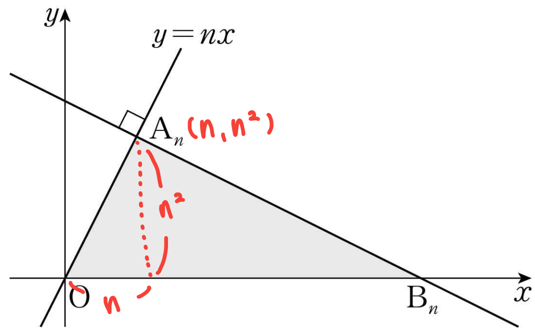
[9-2017년 시행 6월 모평 나형 30번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 α가 존재한다. (나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하시오. [4점]

010 자연수 n에 대하여 점 $A_n(n, n^2)$을 지나고 직선 $y=nx$에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B_n이라 하자.



다음은 삼각형 A_nOB_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{8} \frac{S_n}{n^3}$의 값을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)

점 $A_n(n, n^2)$을 지나고 직선 $y=nx$에 수직인 → 기울기 $-\frac{1}{n}$ = (가)
직선의 방정식은

$y = \boxed{(가)} \times x + n^2 + 1$ y=0 대입 → $x = (n+n^3)$ → $B_n(n+n^3, 0)$

이므로 두 점 A_n, B_n의 좌표를 이용하여 S_n을 구하면 $S_n = \frac{1}{2} \times (n+n^3) \times n^2$ = (나)

$S_n = \boxed{(나)}$

따라서

$\sum_{n=1}^{8} \frac{S_n}{n^3} = \boxed{(다)}$ $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8}(1+n^2) = \frac{1}{2}\left(8+\frac{8\cdot 9\cdot 17}{6}\right) = \frac{1}{2}(8+204) = 106$ = (다)

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 r라 할 때, $f(1)+g(2)+r$의 값은? [4점]

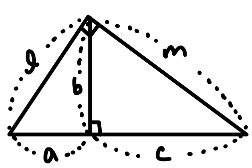
① 105 ② 110 ③ 115 ④ 120 ⑤ 125

일반적인 풀이 방법은 위에 자세히 적어 두었어.

이 방법으로는 두 직선이 수직일 조건 (기울기의 곱이 −1)을 이용해서 직접 좌표를 구했지만,

직각삼각형의 성질을 활용하면 더 쉽게 풀 수 있어. 꼭 잘 기억해 둬!

직각삼각형에서의 성질



① 넓이활용 → $l \times m = (a+c) \times b$

② a, b, c는 순서대로 등비수열 → $b^2 = a \times c$

③ $a : c = l^2 : m^2$

(ex) $l=1$, $m=2$ → $a:c = 1:4$

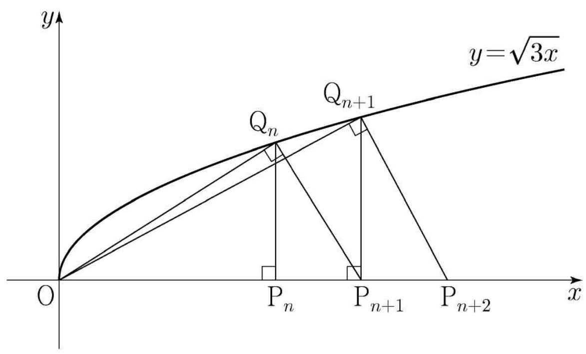
유사문항에도 이렇게 직각삼각형의 성질을 활용할 수 있는 문항을 수록해뒀으니 연습해봐!

[10-2020년 시행 9월 모평 나형 16번]

모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 P_n과 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 Q_n이 있다.

- 선분 OP_n과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$이 서로 수직이다.
- 선분 OQ_n과 선분 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 서로 수직이다.

다음은 점 P_1의 좌표가 $(1,\ 0)$일 때, 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n을 구하는 과정이다.
(단, O는 원점이다.)



모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n,\ 0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OP}_n}+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로

$a_{n+1}=a_n+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

이다. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$과 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 닮음이므로

$\overline{\mathrm{OP}_n}:\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}:\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

이고, 점 Q_n의 좌표는 $\left(a_n,\ \sqrt{3a_n}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\boxed{\text{(가)}}$

이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n은

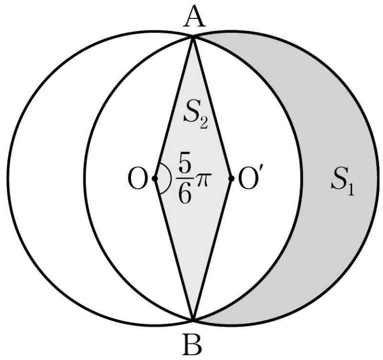
$$A_n=\frac{1}{2}\times\left(\boxed{\text{(나)}}\right)\times\sqrt{9n-6}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(8)$의 값은? [4점]

① 20　② 22　③ 24　④ 26　⑤ 28

011 그림과 같이 두 점 O, O′을 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 두 원 O, O'이 한 평면 위에 있다. 두 원 O, O'이 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, $\angle AOB = \frac{5}{6}\pi$이다.



원 O의 외부와 원 O'의 내부의 공통부분의 넓이를 S_1, 마름모 AOBO′의 넓이를 S_2라 할 때, $S_1 - S_2$의 값은? [4점]

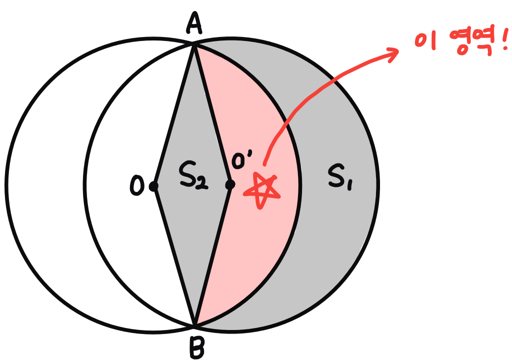
① $\frac{5}{4}\pi$　② $\frac{4}{3}\pi$　③ $\frac{17}{12}\pi$　④ $\frac{3}{2}\pi$　⑤ $\frac{19}{12}\pi$

삼각함수의 도형에서의 활용 문제야.

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각을 θ라 할 때,

- 호의 길이 $l = r\theta$
- 부채꼴의 넓이 $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$

이 문제는 굉장히 독특한데, S_1, S_2에 모두 포함되지 않은 가운데 영역을 포함해서 식을 쓰면 깔끔하게 풀 수 있다는 점이야. (~ 미적분 기출에 많이 있는 사고방식임~)



$S_1 - S_2 = (S_1 + ☆) - (S_2 + ☆)$

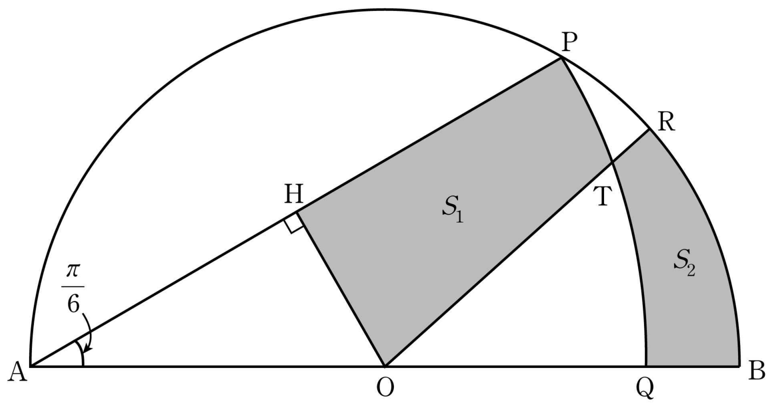
$= \frac{1}{2}\cdot 3^2 \cdot \frac{7}{6}\pi - \frac{1}{2}\cdot 3^2 \cdot \frac{5}{6}\pi = \frac{3}{2}\pi$

유사문항에는 이 사고가 활용된 미적분 기출 문항을 변형해서 수록해 뒀어.

미적분 선택 학생들은 저 문항의 원본 문항도 꼭 찾아서 풀어봐!

[11-2019년 시행 6월 모평 가형 28번 변형]

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 $\angle \mathrm{PAB} = \frac{\pi}{6}$가 되도록 점 P를 잡고, 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AP}}$인 원과 선분 AB의 교점을 Q라 하자.
호 PB 위에 점 R를 호 PR와 호 RB의 길이의 비가 $3:7$이 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 선분 OR와 호 PQ의 교점을 T, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하자.
세 선분 PH, HO, OT와 호 TP로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 선분 RT, QB와 두 호 TQ, BR로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. 이때 $S_1 - S_2$의 값은? [4점]



① $\frac{2}{15}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$　② $\frac{2}{15}\pi - \frac{\sqrt{3}}{8}$　③ $\frac{2}{15}\pi - \frac{\sqrt{3}}{16}$
④ $\frac{\pi}{30} - \frac{\sqrt{3}}{4}$　⑤ $\frac{\pi}{30} - \frac{\sqrt{3}}{8}$

012

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=5$

(나) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1}=7$

두 실수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-a}{x-1}=b\times g(1)$일 때, ab의 값은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

함수의 극한에 관한 문제야.

$x\to a$ 일 때,

분모 $\to 0$ 인데 극한값 존재 : 분자 $\to 0$

분자 $\to 0$ 인데 극한값 존재 : 분모 $\to 0$

"0이 아닌"

(분자 $\to 0$ 인데 극한값이 0이어도 분모가 0으로 갈 수는 있지만,

항상 그렇지는 않으니 조심해.)

(가) 조건에서 $x\to 1$ 일 때 극한값이 존재하므로 분자 $\to 0$ 이어야 해.

따라서 $f(1)=g(1)$ 이지.

그리고 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)-\{g(x)-g(1)\}}{x-1}=f'(1)-g'(1)=5$ 라는 것도 알 수 있어.

이제 (나) 조건을 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)+g(x)-g(1)}{x-1}$ 로 고칠 수 있어.

그럼 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=7 \longrightarrow f'(1)+g'(1)=7$

(물론 로피탈을 사용해도 같은 결과를 얻을 수 있어.)

두 식을 연립하면 $f'(1)=6$, $g'(1)=1$ 임을 알 수 있지!

이제 구하는 값인 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-a}{x-1}=b\times g(1)$ 에서, $x\to 1$ 일 때 분모 $\to 0$ 이므로 분자 $\to 0$ 이어야 해.

따라서 $f(1)=a$ 이고, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-a}{x-1}=f'(1)$ 이므로 $f'(1)=b\times g(1)$ 에서 $b\times g(1)=6$ 이지.

$ab=f(1)\times\frac{6}{g(1)}=6$ (사실 이 과정이 크게 의미있다고 생각하진 않지만,

이런 문제도 있다.. ~ 뭐 이런 의미로 한번 복습해줘!

유사문항에는 극한 식을 통해 다항함수의 식을 추론하는 문제를 수록해 놨어~

[12-2018년 시행 4월 학평 나형 17번]

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [4점]

(가) $\lim_{x \to \infty} \left\{ \frac{f(x)}{x^2} + 1 \right\} = 0$

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 3}{x^2} = -1$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

013 함수

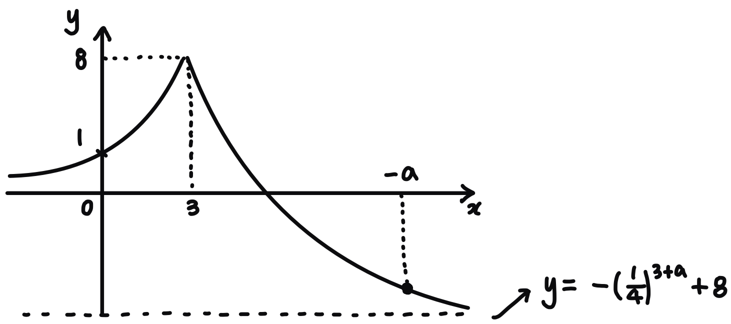
$$f(x)=\begin{cases} 2^{x} & (x<3) \\ \left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{3+a}+8 & (x\geq 3) \end{cases}$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 23 일 때, 정수 a의 값은? [4점]

① -7　② -6　③ -5　④ -4　⑤ -3

지수함수의 점근선을 활용하는 문제인데, 이 문제는 굉장히 독특하니 꼭 짚고 넘어가 줘!

일단 주어진 함수 먼저 파악해보아야겠지?



함수를 그려 보면 개형은 이렇게 생겼어.

문제에서 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 23 이라고 했지.

그럼 $y=$(정수) 와 $y=f(x)$의 교점의 개수를 위에서부터 세어 볼게.

$y=8 \rightarrow$ 1개

$y=7 \sim 1 \rightarrow$ 2개 (14개)

$y=0 \sim ? \rightarrow$ 1개

여기서 23개가 존재하려면 여기서 8개 점이 나와야 하지. 따라서 $?=-7$ 이야.

즉, 점근선의 y값은 $-8 \leq$ (점근선 y값) <-7 이어야 해.

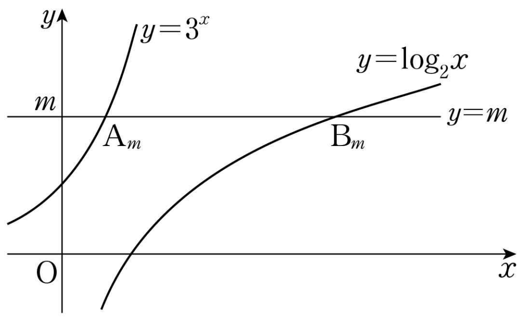
$-8 \leq 8-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}<-7 \rightarrow 15<\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} \leq 16$ 에서 $-3-a=2$, $a=-5$ 가 돼

기출이 많이 된 소재는 아니라서, 유사문항에는 값이 자연수가 나온다는 발상을 활용하는 문제를 수록했어.

두 문항 모두 확실하게 알아 둬!

[13-2020년 시행 3월 학평 나형 16번]

그림과 같이 자연수 m 에 대하여 두 함수 $y=3^x$, $y=\log_2 x$ 의 그래프와 직선 $y=m$ 이 만나는 점을 각각 A_m , B_m 이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m$ 의 길이 중 자연수인 것을 작은 수부터 크기순으로 나열하여 a_1 , a_2 , a_3 , $\cdots$ 이라 할 때, a_3 의 값은? [4점]



① 502 ② 504 ③ 506 ④ 508 ⑤ 510

014 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=f(x)+|f'(x)|$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=g(0)=0$
> (나) 방정식 $f(x)=0$ 은 양의 실근을 갖는다.
> (다) 방정식 $|f(x)|=4$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3 이다.

$g(3)$ 의 값은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

삼차함수의 개형을 추론하는 문제야.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수,

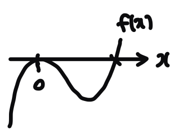
$$g(x)=\begin{cases} f(x)+f'(x) & (f'(x)\ge 0) \\ f(x)-f'(x) & (f'(x)<0) \end{cases}$$

이렇게 조건을 정리하고 (가)~(다)를 차근차근 살펴보자!

(가) $f(0)=g(0)=0$ 에서, $g(0)=f(0)+|f'(0)|$ 이므로 $f'(0)=0$ 임을 알 수 있어.

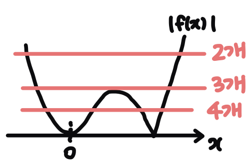
즉 함수 $f(x)$는 $x=0$ 에서 x축에 접하거나 삼중근을 가져.

(나) $f(x)=0$ 은 '양의 실근', 즉 $x=0$이 아닌 다른 실근을 가져.



이런 개형이겠지!

(다) 방정식 $|f(x)|=4$ 가 서로 다른 세 실근을 가져.



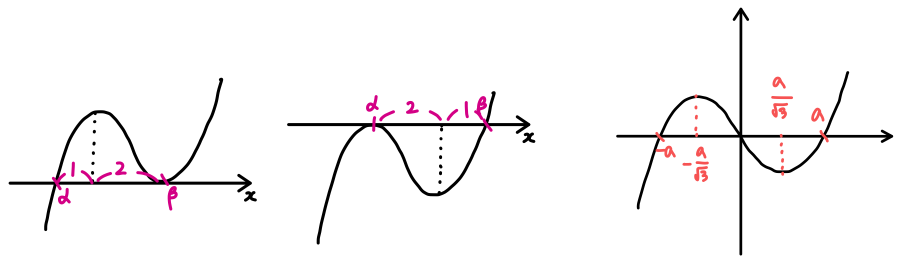
→ 이 때의 y의 값이 4인 거야.

즉 함수 $y=f(x)$의 극솟값이 -4인 것이지!

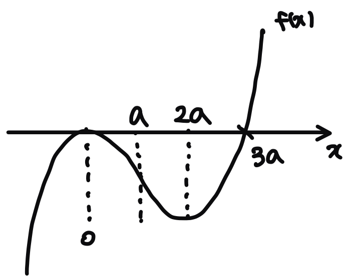
이제 삼차함수의 식만 파악하면 끝나.

꼭 암기하기 !!

*삼차함수 비율관계



삼차함수의 비율관계를 활용하면 좀 더 편하게 식을 쓸 수 있어.



$f(x) = x^2(x-3a)$

$f(2a) = -4 \rightarrow 4a^2 \cdot (-a) = -4 \rightarrow a = 1$

$\therefore f(x) = x^2(x-3)$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f'(3) = 27 - 18 = 9$

$\therefore g(3) = f(3) + f'(3) = 0 + 9 = 9$

복잡하긴 하지만, 이런 유형의 문제들 중에서는 그렇게 어렵지 않아.

꼭 판단을 내린 근거가 뭔지 꼼꼼히 짚어보고,

유사문항이 킬러 문항이지만 사고 과정이 거의 비슷하니 꼭 풀어보며 복습해봐.

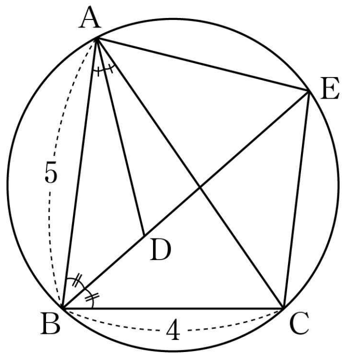
[14-2020년 시행 대수능 나형 30번]

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

015 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{8}$ 인 삼각형 ABC 가 있다. $\angle ABC$ 의 이등분선과 $\angle CAB$ 의 이등분선이 만나는 점을 D, 선분 BD 의 연장선과 삼각형 ABC 의 외접원이 만나는 점을 E 라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



〈 보 기 〉

ㄱ. $\overline{AC}=6$

ㄴ. $\overline{EA}=\overline{EC}$

ㄷ. $\overline{ED}=\frac{31}{8}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

삼각함수의 도형 문제야.

일단 사인법칙, 코사인법칙, 원주각에 대한 개념을 알고 있는지 한번 점검해보자!

* 사인법칙

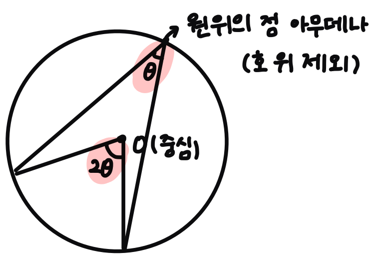
삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

* 코사인법칙

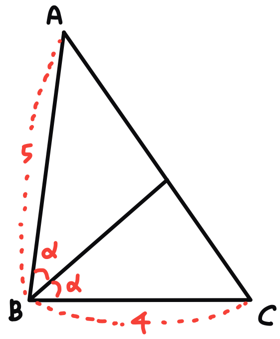
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

* 중심각과 원주각



이제 본격적으로 문제를 풀어 볼게.

ㄱ.



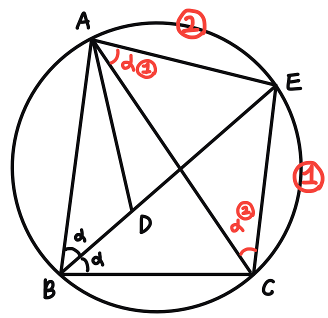
문제에서 $\cos 2\alpha = \frac{1}{8}$ 임을 알려줬어.

ㄱ 선지는 $\triangle ABC$ 에서 코사인 법칙만 쓰면 알 수 있어!

$\overline{AC}^2 = 5^2 + 4^2 - 2\cdot5\cdot4\cdot\frac{1}{8} = 36$

$\therefore\ \overline{AC} = 6$ (참)

ㄴ.



ㄱ에서와 같이 $\angle ABE$를 α라 해볼게.

그럼 호 CE (①) 의 원주각인 $\angle CAE = \alpha$ 라 할 수 있어.

호 AE (②) 의 원주각인 $\angle ACE = \alpha$ 도 성립하겠지?

즉 $\angle EAC = \angle ECA$ 이므로

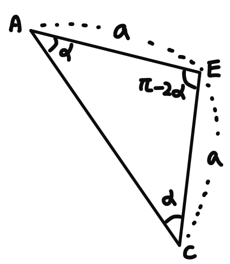
$\triangle ACE$는 $\overline{EA} = \overline{EC}$ 인 이등변삼각형이야. (참)

이제 문제의 (가) ㄷ을 풀어볼게. 길어도 차근차근 잘 따라와줘!

① 사각형 ABCD가 원에 내접하지? 이 경우 마주보는 두 각의 합은 항상 π로 일정해.

$\angle ABC = 2\alpha$ 이니, $\angle AEC = \pi - 2\alpha$ 인 것이지.

②



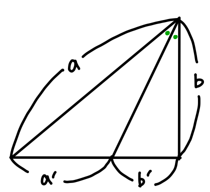
여기서 코사인법칙을 활용하면

$6^2 = a^2 + a^2 - 2\cdot a\cdot a\cdot\cos(\pi - 2\alpha)$

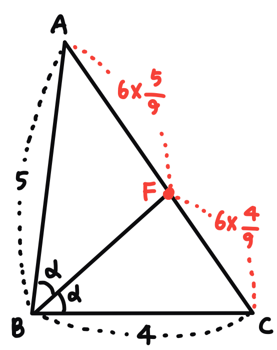
$36 = 2a^2 + 2a^2\cos 2\alpha = 2a^2 + \frac{1}{8}\cdot 2a^2$

$36 = \frac{9}{4}a^2,\ a = 4$

③ 각의 이등분선의 성질을 알고 있지?



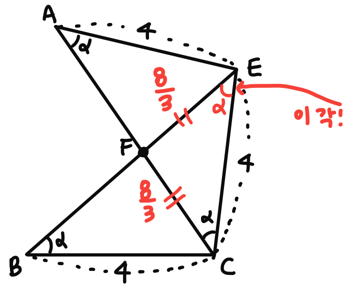
$a : b = a' : b'$



이걸 활용해서 구해보면

$\overline{AF} = \frac{10}{3}$, $\overline{CF} = \frac{8}{3}$ 이 돼.

④

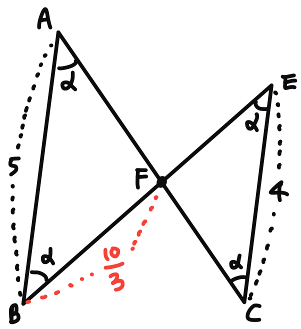


$\overline{BC} = \overline{AE} = 4$ 이므로

$\angle BEC = \angle ACE = \alpha$

따라서 $\triangle CFE$는 $\overline{CF} = \overline{EF} = \frac{8}{3}$ 인 이등변삼각형이야.

⑤

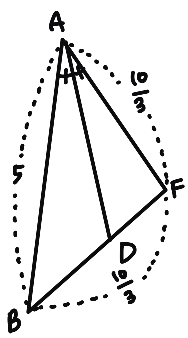


$\triangle FAB$와 $\triangle FCE$는 서로 닮음이야 (AA)

닮음비는 $5:4$ 이지.

$\overline{BF} = \frac{5}{4} \times \overline{EF} = \frac{5}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$

⑥



$\overline{AD}$는 $\angle BAF$의 이등분선이지?

③ 에서 사용한 성질을 한번 더 사용할거야.

$5 : \frac{10}{3} = \overline{BD} : \overline{DF} = 3:2$

$\overline{DF} = \frac{2}{5} \times \overline{BF} = \frac{2}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{4}{3}$

$\therefore \overline{ED} = \overline{EF} + \overline{FD} = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4$ (거짓)

ㄷ 선지가 까다로웠지만 의미있는 문제이니, 차근차근 복습해 봐.

유사문항에도 사인, 코사인 법칙을 활용하는 2022 수능 예시문항 문제를 수록했으니 꼭 풀어보고!

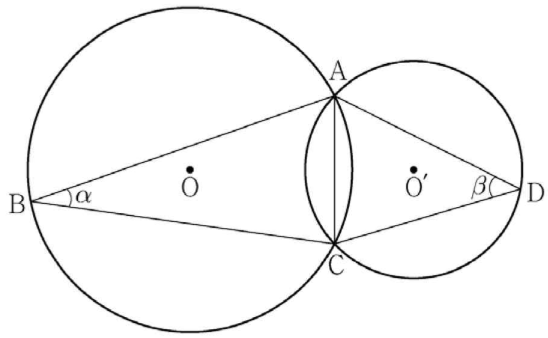
[15-2022학년도 수능 예시문항 21번]

그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD 의 외심을 각각 O, O′ 이라 하고 $\angle ABC = \alpha$, $\angle ADC = \beta$ 라 할 때,

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{3}{2},\ \cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{3},\ \overline{OO'} = 1$$

이 성립한다. 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



016 두 함수 $f(x)=2x^2+5x+3$, $g(x)=x^3+2$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수를 구하시오. [3점]

함수의 곱의 미분법에 대한 문제야.

$$\boxed{f(x)g(x) \xrightarrow{\text{미분}} f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$$

$f(x)=2x^2+5x+3 \rightarrow f'(x)=4x+5 \rightarrow f'(0)=5$

$g(x)=x^3+2 \rightarrow g'(x)=3x^2 \rightarrow g'(0)=0$

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 에서 $f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=10$

$5\cdot 2+3\cdot 0$

유사문항에도 비슷한 연산문제가 들어가있으니 연습해봐 ~

[16-2022학년도 수능 예시문항 17번]

미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=2$, $f'(1)=4$를 만족시킬 때, 함수 $g(x)=(x+1)f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하시오. [3점]

017 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$$3x^2-2(\log_2 n)x+\log_2 n>0$$

이 성립하도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오. [3점]

로그부등식을 풀이하는 문제야 !

모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$ 이 항상 성립하려면 $D<0$을 만족해야겠지.

따라서 이문제에서는 $D/4=(\log_2 n)^2-3\log_2 n<0$ 이 성립하면 돼.

$\log_2 n\{\log_2 n-3\}<0$, $0<\log_2 n<3$, $\log_2 1<\log_2 n<\log_2 8$

$\therefore$ $1<n<8$, 자연수 n은 6개.

유사문항에도 거의 비슷한 문항을 수록해두었으니 꼭 풀어봐!

[17-2017년 시행 4월 학평 가형 17번]

두 집합

$$A=\left\{x \,\middle|\, x^2-5x+4 \le 0\right\},$$

$$B=\left\{x \,\middle|\, (\log_2 x)^2-2k\log_2 x+k^2-1 \le 0\right\}$$

에 대하여 $A \cap B \neq \varnothing$ 을 만족시키는 정수 k의 개수는? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

018 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $F(x)$의 도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} -2x & (x<0) \\ k(2x-x^2) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이다. $F(2)-F(-3)=21$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

다항함수의 적분 문제야!

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수, n은 자연수)

많은 학생들이 이 문제를 부정적분으로 쉽게 풀었을 것 같아.

정적분을 활용하는 풀이도 보여줄테니 꼭 두 풀이 모두 익혀 둬!

유사문항도 두가지 풀이 모두 가능하니 둘 다 연습해 봐~

Sol 1. 부정적분

$$f(x)=\begin{cases} -2x & (x<0) \\ k(2x-x^2) & (x\geq 0) \end{cases} \rightarrow F(x)=\begin{cases} -x^2+C_1 & (x<0) \\ k(x^2-\frac{1}{3}x^3)+C_2 & (x\geq 0) \end{cases}$$

→ $F(x)$는 $x=0$에서 연속이어야 하므로 $C_1=C_2$

$$F(2)-F(-3)=\left\{k\left(4-\frac{8}{3}\right)+C_1\right\}-\left\{-9+C_1\right\}$$

$$=\frac{4}{3}k+9=21,\quad \frac{4}{3}k=12,\quad k=9$$

Sol 2 정적분

$$F(2)-F(-3)=\int_{-3}^{2}f(x)dx=\int_{-3}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx$$

$$=\int_{-3}^{0}(-2x)dx+\int_{0}^{2}k(2x-x^2)dx$$

$$=\left[-x^2\right]_{-3}^{0}+\left[k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\right]_{0}^{2}$$

$$=-(-9)+k\left(4-\frac{8}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{3}k+9=21,\quad k=9$$

유사문항에도 마찬가지로 두가지 풀이 모두 가능한 문항으로 수록해 뒀으니,

꼭 두가지 풀이 모두 시도해 봐!

[18-2022학년도 수능 예시문항 6번]

다항함수 $f(x)$가

$$f'(x) = 3x^2 - kx + 1, \ f(0) = f(2) = 1$$

을 만족시킬 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

019 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1=2$, $a_2=4$이고 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}S_n = a_nS_{n+1}$$

이 성립할 때, S_5의 값을 구하시오. [3점]

귀납적으로 정의된 수열 문제인데, 7번 문제에서 했던 말 기억나?

등차, 등비수열이 아니라면 $n=1$부터 대입해나가면서 접근하라고 했지!

이 문제도 마찬가지야. (주어진 식의 양 변을 a_na_{n+1}로 나누면 $\frac{S_n}{a_n}=\frac{S_{n+1}}{a_{n+1}}$으로 식이 예뻐지니 참고!)

$n=1$부터 $n=4$까지 대입해가면 돼~ 아래에 식을 적어둘테니 참고해 :)

$a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=12$, $a_4=36$, $a_5=108$

$S_1=2$, $S_2=6$, $S_3=18$, $S_4=54$, $S_5=162$

$a_3S_2 = a_2S_3 \rightarrow a_3\cdot 6 = 4(6+a_3)$

$a_3=12$

$a_4S_3 = a_3S_4 \rightarrow a_4\cdot 18 = 12(18+a_4)$

$a_4=36$

$a_5S_4 = a_4S_5 \rightarrow a_5\cdot 54 = 36(54+a_5)$

$a_5=108$

유사문항에도 귀납적으로 정의된 수열 문제를 수록해 두었으니 참고해.

[19-2019년 시행 7월 학평 나형 26번]

첫째항이 2 이고 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 이 있다. x 에 대한 이차방정식

$$a_n x^2 - a_{n+1} x + a_n = 0$$

이 모든 자연수 n 에 대하여 중근을 가질 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$ 의 값을 구하시오. [4점]

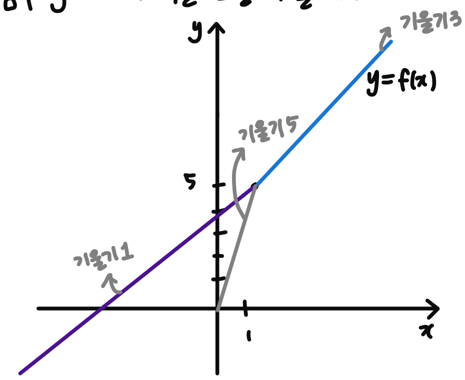
020 실수 m 에 대하여 직선 $y=mx$ 와 함수

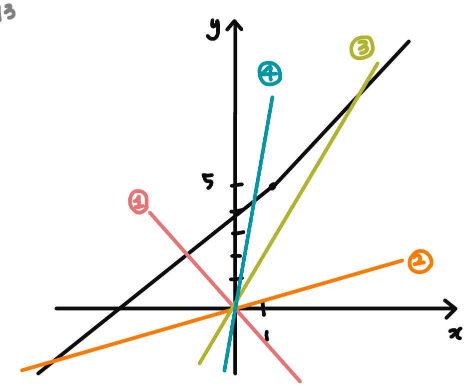
$$f(x)=2x+3+|x-1|$$

의 그래프의 교점의 개수를 $g(m)$ 이라 하자. 최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $h(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(5)$ 의 값을 구하시오. [4점]

주어진 조건을 통해 함수 g(m)의 식을 도출하고, 함수의 연속성도 활용해야 하는 문제야.

먼저 함수 g(m)의 식을 도출해 볼게!





y=f(x)의 그래프를 그려보면 위와 같아.

이제 기울기 m을 기준으로 분류해야 하는데, 위의 '1, 3, 5' 기울기가 나올때 조심해야겠지? (평행하면 안만나니까)

그렇게 나눠서 교점의 개수를 구해 보면 이렇게 돼.

$m<0$ (1)	1
$m=0$	1
$0<m<1$ (2)	1
$m=1$	0
$1<m<3$	0
$m=3$	0
$3<m<5$ (3)	1
$m=5$	1
$m>5$ (4)	1

따라서 함수 g(m)은 $m=1$, $m=3$ 일 때에 불연속이야.

함수 $g(x)h(x)$ 가 모든 실수 x에서 연속이기 위해서는

$h(1)$과 $h(3)$이 0이 되어야 해!

$\rightarrow h(x)=(x-1)(x-3)$

$h(5)=4\cdot 2=8$

함수 식 작성과 연속성을 동시에 쓰는 문제가 없어서, 유사문항에는 연속성을 쓰는 문제를 넣어 두었어.

함수의 식을 작성해가는 방법도 꼭 익혀둬!

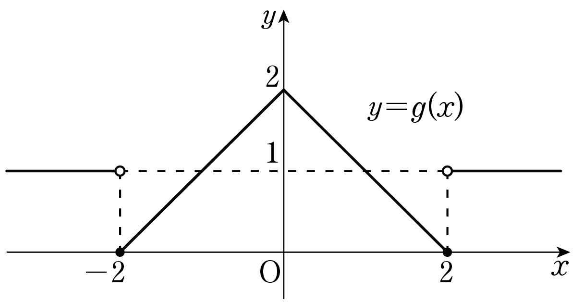
[20-2019년 시행 10월 학평 나형 14번]

최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $f(x)$ 와 함수

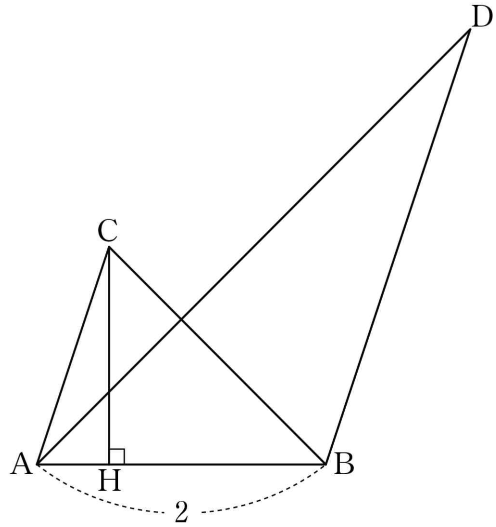
$$g(x)=\begin{cases} -|x|+2 & (|x|\leq 2) \\ 1 & (|x|>2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 함수 $y=f(x-a)g(x)$ 의 그래프가 한 점에서만 불연속이 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 곱은? [4점]

① -16 ② -12 ③ -8 ④ -4 ⑤ -1



021 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC} /\!/ \overline{BD}$, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$ 인 두 삼각형 ABC, ABD 가 있다. 점 C 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발 H 는 선분 AB 를 1 : 3 으로 내분한다.



두 삼각형 ABC, ABD 의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R 라 할 때, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle CAB)=51$ 이다. $\overline{AC}^2$ 의 값을 구하시오. (단, $\angle CAB<\frac{\pi}{2}$) [4점]

15번 문제와 마찬가지로 사인, 코사인 법칙을 활용할 것 같은 느낌이 오지?

* 사인법칙

삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

* 코사인법칙

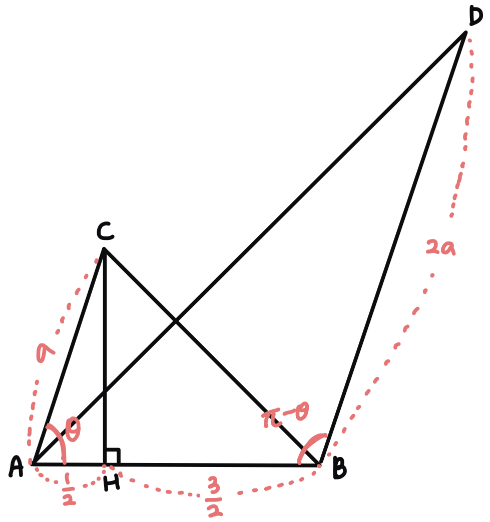
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

또 이 문제에서 중요한 점은 평행선과 길이의 비가 주어졌다는 점이야.

따라서 닮음을 이용할 것이라는 생각을 하고 있어야 해!

(사실 이 문제에서는 안쓰지만, 항상 생각은 하고 있어야 해.)

이제 문제에서 준 정보를 그림에 표시해 보고, 미지수도 설정해 볼게.



문제에서 각각 삼각형의 외접원의 반지름의 길이와 사인 값을 통해서

제발 사인법칙좀 써달라고 외치고 있네! $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ 를 포함하게 한번 써 볼게

$$\frac{\overline{AD}}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{\overline{AD}}{\sin\theta}=2R\ ,\qquad \frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2r$$

$\rightarrow$ $\overline{AD}=2R\sin\theta$, $\overline{BC}=2r\sin\theta$

$\rightarrow$ $4(R^2-r^2)\sin^2(\angle CAB)=51 \xrightarrow{\text{대입}} \overline{AD}^2-\overline{BC}^2=51$

이제 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ 에 대한 식이 더 필요한데, 저 변들을 제외하면 각각 삼각형에서 나머지 변, 각 하나가

주어져 있으니 코사인 법칙을 써볼게!

$\overline{AD}^2=4a^2+4+2\cdot2\cdot2a\cos\theta$

$\overline{BC}^2=a^2+4-4a\cos\theta$

이 식을 아까 $\overline{AD}^2-\overline{BC}^2=51$ 에 넣어서 정리하면

$3a^2+12a\cos\theta=51$ 임을 알 수 있어.

그런데 $\triangle ACH$ 에서 $\cos\theta=\frac{1}{2a}$ 임을 알 수 있지?

$\therefore\ 3a^2+6=51,\ a^2=15$

삼각함수의 사인, 코사인법칙 문제들은 기출문제가 충분하지는 않아서 공부하기 힘들 수 있어.

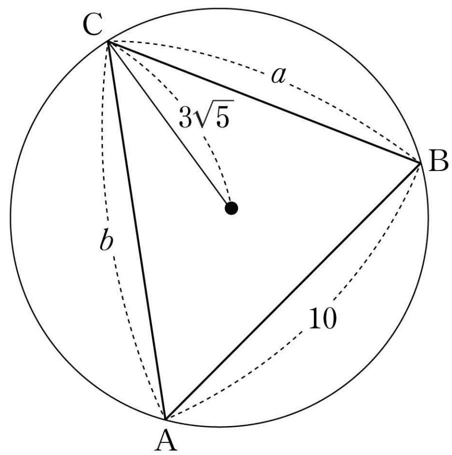
그래서 학생들이 자작 문항에만 집중하는 경향이 있는데 절대로 안 돼!

기출 문항들 먼저 완벽하게 학습한 후에 자작 문항 풀기~~

[21-2020년 시행 3월 학평 나형 19번]

길이가 각각 10, a, b 인 세 선분 AB, BC, CA 를 각 변으로 하는 예각삼각형 ABC 가 있다. 삼각형 ABC 의 세 꼭짓점을 지나는 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$ 이고 $\dfrac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\dfrac{4}{3}$ 일 때, ab 의 값은? [4점]

① 140 ② 150 ③ 160 ④ 170 ⑤ 180



022 양수 a와 일차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x (t^2-4)\{|f(t)|-a\}\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
> (나) $g(2)=5$

$g(0)-g(-4)$의 값을 구하시오. [4점]

함수 g(x)를 추론하는 문제야.

정적분으로 정의된 함수의 형태로 g(x)가 주어졌어.

*** 정적분으로 정의된 함수**

$g(x)=\int_a^x f(t)dt$ 일 때,

$\boxed{1}$ 대입 : 아래끝 = 위끝 $(x=a)$

$\boxed{2}$ 미분 : $g'(x)=f(x)$

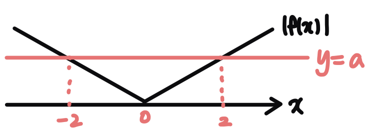
$\boxed{1}$ $g(0)=0$

$\boxed{2}$ $g'(x)=(x^2-4)\{|f(x)|-a\}$

$g'(x)$는 $x=2$, $x=-2$ 에서 실근을 하나씩 가지는 함수야.

그런데 (가) 조건에서 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다고 했지?

그 말의 뜻은, $\{|f(x)|-a\}$가 $x=2$, $x=-2$ 에서 실근을 가져야 한다는 거야.



이런 상황이 되는 거지.

여기서 $|f(x)|=\left|\frac{a}{2}x\right|$ 라는 식을 쓸 수 있어.

이제 (나) 조건으로 마무리를 해 볼게.

$$g(2)=\int_0^2 (t^2-4)\left(\left|\frac{a}{2}t\right|-a\right)dt=\int_0^2 (t^2-4)\left(\frac{a}{2}t-a\right)dt$$

$$=\int_0^2 \frac{a}{2}(t+2)(t-2)^2\,dt=5$$

$$\rightarrow \int_0^2 (t^3-2t^2-4t+8)\,dt=\frac{10}{a} \quad \rightarrow \text{(열심히 적분 ㅎㅎ)}\ a=\frac{3}{2}$$

이제 $g(-4)$의 값만 구하면 되는데, 단순 연산이니 직접 해 봐! (22번 정답은 16)

[22-2020년 시행 대수능 나형 20번]

실수 $a(a>1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값은? [4점]

① $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

선택과목

미적분

023 $\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

수열의 극한 문제야.

분모, 분자가 최고차항의 차수가 같은 경우에는 이 둘의 계수만 비교하면 돼.

즉, 이 문제에서 n^3의 계수를 비교하면 $\frac{10}{2}=5$

유사문항도 비슷한 연산 문제이니 연습해 봐~

[23-2020년 시행 9월 모평 가형 2번]

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{2n+5}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

024 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이

$$a_n = \left(\frac{x^2-4x}{5}\right)^n$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하도록 하는 모든 정수 x 의 개수는? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

등비수열의 수렴 조건에 대해 알고 있다면 쉽게 풀 수 있는 문제야!

* 등비수열의 수렴 조건

등비수열 $a_n = ar^{n-1}$ 이 수렴하기위한 조건

i) $a=0$ 또는,

ii) $-1 < r \le 1$

⊕ 등비수열 $a_n = ar^{n-1}$ 의 합 S_n이 수렴하기 위한 조건

i) $a=0$ 또는,

ii) $-1 < r < 1$

수열 $\{a_n\}$이 수렴하려면 $-1 < \frac{x^2-4x}{5} \le 1$ 를 만족하면 돼.

$-5 < x^2-4x \le 5$

i) $x^2-4x+5 > 0$

$\rightarrow (x-2)^2+1 > 0$ (항상 성립)

ii) $x^2-4x-5 \le 0$

$\rightarrow (x-5)(x+1) \le 0$

$-1 \le x \le 5$

즉 $-1 \le x \le 5$: 정수 x는 7개

유사문항에 2022 수능예시문항에 나온 비슷한 문항을 수록해 뒀으니 복습해 봐!

[24-2022학년도 수능 예시문항 미적분 24번]

정수 k에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을

$$a_n = \left(\frac{|k|}{3} - 2\right)^n$$

이라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 k의 개수는? [3점]

① 4　　② 8　　③ 12　　④ 16　　⑤ 20

025 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = a_1 a_n$$

을 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1}=12$ 일 때, a_1의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

주어진 식을 보고 수열을 추론하는 문제야.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_1$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이야.

a_n의 첫째항이 a_1, 공비가 a_1 이므로

$a_n = (a_1)^n$ 으로 일반항을 구할 수 있어.

* 등비수열의 수렴, 발산 조사

첫째항을 a_1, 공비를 r라 하면

$a_1 = 0$ 인 경우 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$a_1 \neq 0$ 인 경우

$-1 < r < 1$: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$r = -1$: $\lim_{n\to\infty} a_n$ 발산(진동)

$r = 1$: $\lim_{n\to\infty} a_n = a_1$

$r < -1$: $\lim_{n\to\infty} a_n$ 발산

$r > 1$: $\lim_{n\to\infty} a_n$ 발산

$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_1^3\cdot(a_1)^n-5}{2(a_1)^n+1} = 12$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ 이지.

$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot a_1^3\cdot(a_1)^n-5}{2(a_1)^n+1} = \frac{3}{2}a_1^3 = 12 \rightarrow a_1 = 2$

유사문항에는 등비수열의 극한 문제를 수록해 두었으니 풀어봐~

[25-2020년 시행 9월 모평 가형 8번]

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} \frac{3^n}{a_n + 2^n} = 6$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

026 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$2n^2-3<a_n<2n^2+4$$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ 1 ⑤ $\frac{7}{6}$

이 문제는 독특하니 꼭 잘 기억해둬!

곧 개강 예정인 김성은T EBS 수특 변형 교재에 수록된 문제와 너무 유사해서 수록해 뒀으니 꼭 풀어봐!

일반적으로 수열 a_n이 부등식으로 표현되어 있으면 샌드위치 정리가 떠오를 거야.

하지만 이 문제는 부등식의 성질 자체를 활용해야 해.

n=1부터 대입해 볼게!

$$2\cdot1^2-3<a_1<2\cdot1^2+4$$
$$2\cdot2^2-3<a_2<2\cdot2^2+4$$
$$\vdots$$
$$+\quad 2\cdot n^2-3<a_n<2\cdot n^2+4$$

$$2(1^2+2^2+\cdots+n^2)-3\times n<a_1+a_2+\cdots+a_n<2(1^2+2^2+\cdots+n^2)+4\times n$$

$$2\times\sum_{k=1}^{n}k^2-3n<S_n<2\times\sum_{k=1}^{n}k^2+4n$$

$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이므로

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}-3n<S_n<\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}+4n$$

부등식의 세 변을 n^3으로 나누면

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{3n^3}-\frac{3}{n^2}<\frac{S_n}{n^3}<\frac{n(n+1)(2n+1)}{3n^3}+\frac{4}{n^2}$$

부등식의 세 변에 극한을 취하면

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3n^3}-\frac{3}{n^2}\right)}_{=\frac{2}{3}}\le\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}}_{\downarrow\ \frac{2}{3}}\le\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3n^3}+\frac{4}{n^2}\right)}_{=\frac{2}{3}}$$

(샌드위치 정리)

[26-2022학년도 김성은T EBS 수능특강 변형 문제 (교재 수록 예정 문항)]

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = \dfrac{4}{3}$이고 모든 자연수 n에 대하여 $a_n + 4^n < a_{n+1} < a_n + 4^n + 3^n$을 만족시킨다.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6a_n}{k^n} = \alpha$을 만족시키는 실수 α의 값이 존재하도록 하는 2 이상의 정수 k의 최솟값을 p라 하고, 그때의 α의 값을 q라 하자. $p+q$의 값은? [4점]

① 4 ② $\dfrac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\dfrac{11}{2}$ ⑤ 6

027 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}=\frac{3}{(n+2)!}$$

을 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}(a_1+n^2a_n)$의 값은? [3점]

① $-\frac{7}{2}$ ② -3 ③ $-\frac{5}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{3}{2}$

수열의 극한 문제인데, S_n과 a_n의 관계를 잘 파악해야 하는 문제야.

$\frac{a_k}{(k-1)!}=b_k$ 라 두면, $\sum_{k=1}^{n} b_k=\frac{3}{(n+2)!}$ 이지

$\sum_{k=1}^{n} b_k = S_n$ 으로 둘게!

그럼 $b_1=\frac{1}{2}$ 이고 ($\rightarrow a_1=\frac{1}{2}$) $S_n-S_{n-1}=b_n$ 에서

$b_n=\frac{3}{(n+2)!}-\frac{3}{(n+1)!}$ 이야.

이걸 정리하면 $\frac{3}{(n+2)!}\{1-(n+2)\}=\frac{3}{(n+2)!}\times(-n-1)=b_n$ 이 돼.

$\frac{a_n}{(n-1)!}=b_n=\frac{3}{(n+2)!}(-n-1)$ 이므로

$a_n=\frac{-3(n+1)}{n(n+1)(n+2)}=\frac{-3}{n(n+2)}$ 이렇게 돼.

$\lim_{n\to\infty}(a_1+n^2a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{3n^2}{n(n+2)}\right)=\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{2}$

사실 이 문제는 극한 자체가 어렵지는 않았는데, 팩토리얼 식을 정리하는 것이 관건이었을 거야.

그래서 유사문항에는 극한은 없지만 식 정리 과정이 비슷한 문제를 수록했으니 풀어봐 :)

[27-2022 수능 예시문항 13번]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

이 성립할 때, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ 을 구하는 과정이다.

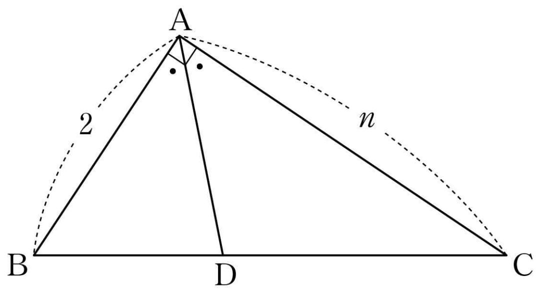
> $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{1}{a_1} = 2$ 이다.
>
> $n=2$ 일 때, $a_2 = S_2 - S_1 = -\frac{7}{6}$ 이므로 $\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{a_k} = \frac{8}{7}$ 이다.
>
> $n \geq 3$ 인 모든 자연수 n 에 대하여
>
> $$\frac{S_n}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k!} = -\frac{\boxed{(가)}}{(n+1)!}$$
>
> 즉, $S_n = -\frac{\boxed{(가)}}{n+1}$ 이므로
>
> $$a_n = S_n - S_{n-1} = -\left(\boxed{(나)}\right)$$
>
> 이다. 한편 $\sum_{k=3}^{n} k(k+1) = -8 + \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ 이므로
>
> $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} &= \frac{8}{7} - \sum_{k=3}^{n} k(k+1) \\ &= \frac{64}{7} - \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n} \boxed{(다)} \\ &= -\frac{1}{3}n^3 - n^2 - \frac{2}{3}n + \frac{64}{7} \end{aligned}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(k)$ 라 할 때, $f(5) \times g(3) \times h(6)$ 의 값은? [4점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

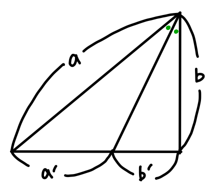
028 자연수 n에 대하여 $\angle A = 90°$, $\overline{AB} = 2$, $\overline{CA} = n$인 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. 선분 CD의 길이를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(n-a_n)$의 값은? [4점]

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 4



각의 이등분선에 대한 성질을 활용하는 문제야.

15번 문제에서 사용한 성질인데 기억 나려나?



$a:b = a':b'$

$\overline{BC}$의 길이는 피타고라스의 정리에 의해 $\sqrt{4+n^2}$ 이고,

$2:n = \overline{BD}:\overline{CD}$ 에서 $\overline{CD} = \sqrt{4+n^2} \times \frac{n}{n+2}$ 이지.

이게 a_n이니, 이제 식 정리만 하면 돼!

$$\lim_{n\to\infty}(n-a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(n - \frac{n\sqrt{4+n^2}}{n+2}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+2-\sqrt{n^2+4}}{n+2}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{4n}{(n+2)(n+2+\sqrt{n^2+4})}$$
$$= 2$$

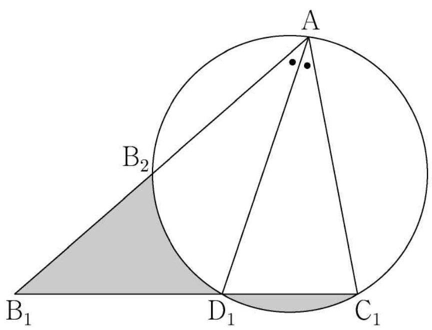
[28-2020년 시행 6월 모평 가형 20번]

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB_1}}=3$, $\overline{\mathrm{AC_1}}=2$이고 $\angle \mathrm{B_1AC_1}=\dfrac{\pi}{3}$인 삼각형 $\mathrm{AB_1C_1}$이 있다. $\angle \mathrm{B_1AC_1}$의 이등분선이 선분 $\mathrm{B_1C_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{D_1}$, 세 점 A, $\mathrm{D_1}$, $\mathrm{C_1}$을 지나는 원이 선분 $\mathrm{AB_1}$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 $\mathrm{B_2}$라 할 때, 두 선분 $\mathrm{B_1B_2}$, $\mathrm{B_1D_1}$과 호 $\mathrm{B_2D_1}$로 둘러싸인 부분과 선분 $\mathrm{C_1D_1}$과 호 $\mathrm{C_1D_1}$로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

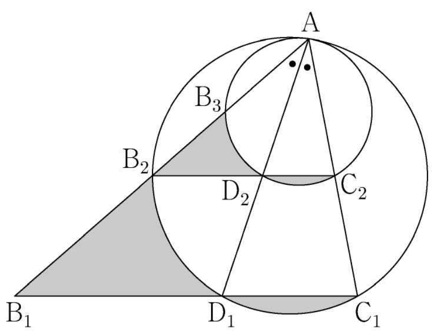
그림 R_1에서 점 $\mathrm{B_2}$를 지나고 직선 $\mathrm{B_1C_1}$에 평행한 직선이 두 선분 $\mathrm{AD_1}$, $\mathrm{AC_1}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{D_2}$, $\mathrm{C_2}$라 하자. 세 점 A, $\mathrm{D_2}$, $\mathrm{C_2}$를 지나는 원이 선분 $\mathrm{AB_2}$와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 $\mathrm{B_3}$이라 할 때, 두 선분 $\mathrm{B_2B_3}$, $\mathrm{B_2D_2}$와 호 $\mathrm{B_3D_2}$로 둘러싸인 부분과 선분 $\mathrm{C_2D_2}$와 호 $\mathrm{C_2D_2}$로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



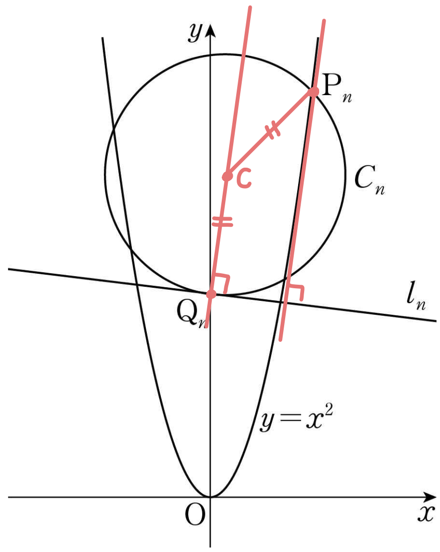
R_2



⋮ ⋮

① $\dfrac{27\sqrt{3}}{46}$ ② $\dfrac{15\sqrt{3}}{23}$ ③ $\dfrac{33\sqrt{3}}{46}$ ④ $\dfrac{18\sqrt{3}}{23}$ ⑤ $\dfrac{39\sqrt{3}}{46}$

029 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(2n, 4n^2)$에서의 접선과 수직이고 점 $\mathrm{Q}_n(0, 2n^2)$을 지나는 직선을 l_n이라 하자. 점 P_n을 지나고 점 Q_n에서 직선 l_n과 접하는 원을 C_n이라 할 때, 원점을 지나고 원 C_n의 넓이를 이등분하는 직선의 기울기를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하시오. [4점]



수열의 극한에서 접점, 수직 조건 등을 이용하는 문제야.

접근하는 방식만 소개해 줄테니, 계산은 스스로 해 봐!

일단 점 $P_n(2n, 4n^2)$에서의 접선의 기울기를 구해 보면 $4n$이지.

따라서 직선 l_n의 기울기는 $-\frac{1}{4n}$이고,

원의 중심을 C라 하면 직선 CQ_n의 기울기는 l_n과 수직이니 $4n$이 돼.

(위 그림에서 이 색 참고!)

이제 점 C의 좌표를 (α, β)라 두면,

① $Q_n \sim C$ 기울기는 $4n$

② $C \sim P_n$ 거리 $=$ $C \sim Q_n$ 거리 (반지름)

이렇게 두 개의 식을 쓸 수 있어서 C_n의 좌표를 n에 대해 표현할 수 있어.

구하는 a_n은 $\frac{\beta}{\alpha}$이니, 구하고자 하는 값을 바로 얻을 수 있겠지!

사실 계산 과정이 크게 의미있다고 생각하지는 않아.

그리고 풀이 방법이 다양해! 그 중 3월모의고사 해설지 (EBS)처럼 수직이등분으로 풀 수도 있으니

해설지도 꼭 찾아보길 바라!

[29-2021학년도 김성은T EBS 수능특강 변형 교재]

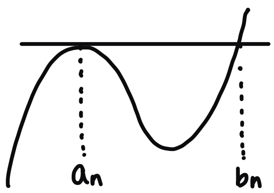
자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^3+2n^3$ 위의 점 $\mathrm{P}(n,\ 3n^3)$와 원점 O를 지나는 원 C_n가 있다. 곡선 $y=x^3+2n^3$ 위의 점 P에서의 접선 l과 원 C_n 위의 점 O에서의 접선 m이 서로 수직일 때, 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{n^3}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

030 자연수 n에 대하여 삼차함수 $f(x)=x(x-n)(x-3n^2)$이 극대가 되는 x를 a_n이라 하자. x에 대한 방정식 $f(x)=f(a_n)$의 근 중에서 a_n이 아닌 근을 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^3}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

삼차함수에 관한 일반적인(?) 자주 나오는(?) 유형이야. (쉽다는 뜻은 절대아님!)

함수 $f(x)$가 $x=a_n$에서 극대라고 했고, $f(x)=f(a_n)$ 중 a_n이 아닌 근을 b_n이라고 했어.



이런 상황이야!

그럼 $f'(x)=0$의 두 근 중에서 작은 것이 a_n이겠지? 한번 구해 볼게.

$$f(x)=x(x-n)(x-3n^2)$$

$$f'(x)=(x-n)(x-3n^2)+x(x-3n^2)+x(x-n)$$

$$=3x^2-2(n+3n^2)x+3n^3$$

$f'(x)=0$에서

$$x=\frac{2n(1+3n)\pm\sqrt{4n^2(1+3n)^2-4\cdot3\cdot3n^3}}{6}$$

$$=\frac{2n(1+3n)\pm\sqrt{36n^4-12n^3+4n^2}}{6}$$

$$=\frac{n\{(1+3n)\pm\sqrt{9n^2-3n+1}\}}{3}$$

$$\therefore a_n=\frac{n\{(1+3n)-\sqrt{9n^2-3n+1}\}}{3}=\frac{n\times9n}{3\{(1+3n)+\sqrt{9n^2-3n+1}\}}$$

이제 a_nb_n을 구해볼게!

$$f(x)-f(a_n)=(x-a_n)^2(x-b_n)$$

여기서 $x=0$을 대입하면

$$f(0)-f(a_n)=(-a_n)^2(-b_n)$$

$$-a_n(a_n-n)(a_n-3n^2)=-a_n^2b_n$$

$$\therefore a_nb_n=(a_n-n)(a_n-3n^2)$$

이제 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^3}$ 을 계산해 볼게.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n-n)(a_n-3n^2)}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-(n+3n^2)a_n+3n^3}{n^3}$$

앞의 $a_n=\frac{n\times 9n}{3\{(1+3n)+\sqrt{9n^2-3n+1}\}}$ 의 분모, 분자의 최고차항만 비교해보면

$\frac{9n^2}{18n}\to\frac{n}{2}$ 임을 알 수 있지?

↓ 정석대로 풀려면

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ 의 값을 구하고,

마지막 극한식의 값을 구하면 돼!

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{n^3}-\lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2+n)a_n}{n^3}+\lim_{n\to\infty}3$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{n^2}{n^3}=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{2n^2}=\frac{3}{2}$

$\therefore -\frac{3}{2}+3=\frac{3}{2}$, $\boxed{5}$

이 문제는 뭔가 발상이 독특하다기보다는 계산이 많은 문제라서 적어줄 개념도 크게 없네.

마지막 극한 계산할 때 최고차항만 보는 이유는 $n\to\infty$ 이기 때문이니 참고해~

[30-2018년 시행 7월 학평 나형 17번]

최고차항의 계수가 1 이고 $f(0)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)=f(5)$
(나) 방정식 $f(x)-p=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2 가 되게 하는 실수 p 의 최댓값은 $f(2)$ 이다.

$\int_0^2 f(x)dx$ 의 값은? [4점]

① 25 ② 28 ③ 31 ④ 34 ⑤ 37

불꽃수학

김성은