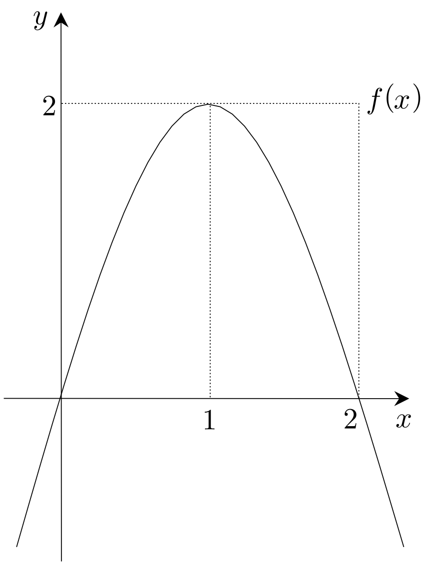
최대, 최소에 의한 정의

먼저 간단한 예를 들어 공부해보자.

> $f(x)=2x(2-x)$일 때, $t \leqq x \leqq t+1$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 한다.
> $g(t)$를 함수로 표현하시오.

여기서 새로운 함수 $g(t)$를 정의 했는데 일단 $f(x)$의 그래프를 그려보면 아래와 같다.



이제 $g(t)$를 해석해야 하는데 바로 직관으로 해석해내지 못할 경우 t에 숫자를 하나하나 대입해보는 것이 가장 현명한 방법이다. 그렇게 하나하나 대입하다보면 문제에서 묻는 것이 무엇인지 파악할 수 있다.

먼저 $g(-2)$를 구해보자. $g(-2)$는 $-2 \leqq x \leqq -1$에서 $f(x)$의 최댓값이므로 $f(-1)$과 같음을 그래프에서 확인할 수 있다.

마찬가지로 $g(-1)$은 $-1 \leqq x \leqq 0$에서 $f(x)$의 최댓값이므로 $f(0)$

… 이와 같이 $g(t)$에서 $t \leqq 0$일 때는 항상 $f(t+1)$과 같음을 알 수 있다.

또한 t에 0과 1사이의 값을 대입해보면 $g(0)=g\left(\frac{1}{3}\right)=g\left(\frac{2}{3}\right)=g(1)=2$

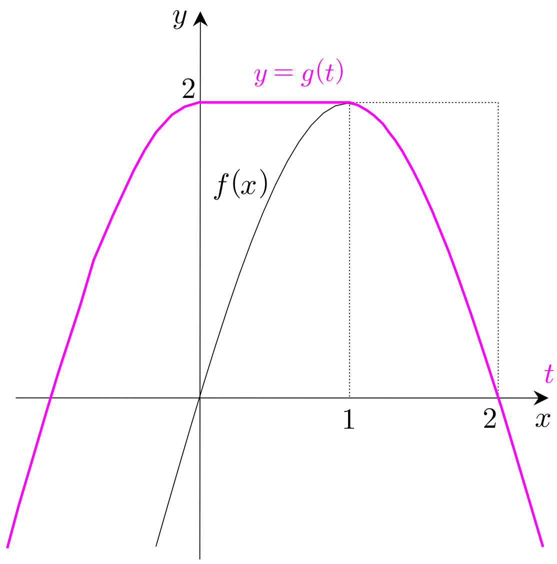
이 되고 $0 \leqq t \leqq 1$에서는 $g(t)=2$임을 알 수 있고

$t>1$에서는 $g(t)=f(t)$이므로 최종적으로 $g(t)$를 아래와 같이 정리할 수 있다.[1)]

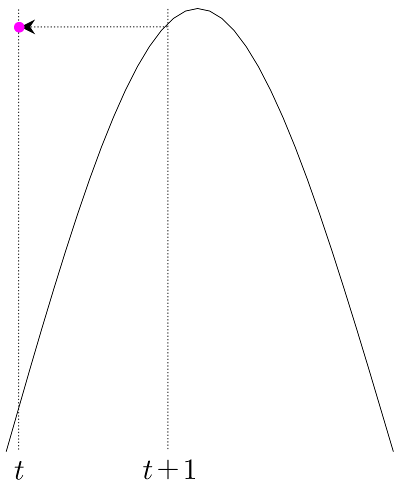
1) 이처럼 생소한 함수를 새롭게 정의할 때, 숫자를 하나하나 대입해보면 함수를 이해하기에 훨씬 수월하다.

$$g(t)=\begin{cases} f(t+1) & (t<0) \\ 2 & (0 \leq t < 1) \\ f(t) & (t \geq 1) \end{cases}$$

따라서 $y=f(x)$의 그래프 위에 겹쳐서 그려보면 아래와 같이 그릴 수 있다.[1)]



이처럼 생소한 함수가 정의 되었을 때 바로 이해하기가 어려우면 정의역을 하나씩 직접 대입해서 확인해보면 슬슬 함수에 대한 이해가 될 뿐 아니라 그래프의 개형도 완성할 수 있다. 사실 위와 같은 정의에 의한 함수는 아래와 같은 이해를 바탕으로 그리는 것이 가장 이상적인 방법이긴 하다.



그림과 같이 구간 $t \leq x \leq t+1$에서 $f(x)$의 최댓값을 정의역 t위에 찍고 t를 움직여가면서 그래프를 완성해나가면 $g(t)$의 개형을 금방 완성할 수 있을 것이다.[2)]

1) 여기까지의 과정은 고등학교 1학년 수준정도의 수학이다.
이 문제가 만약 수능에 출제 된다면

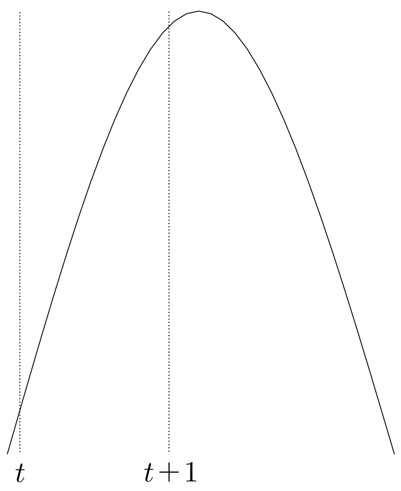
$f(x)=2x(2-x)$일 때,
$t \leq x \leq t+1$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 한다.
$\int_{-1}^{2} g(t)dt$의 값을 구하시오.

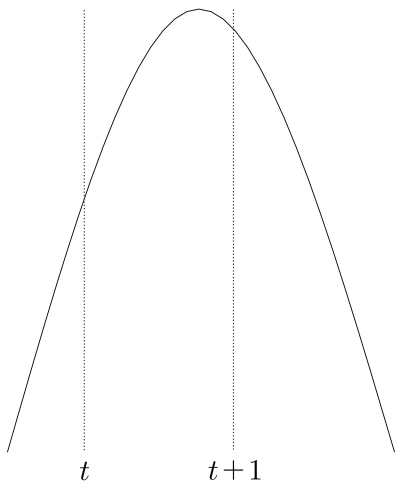
정도로 출제가 될 수 있다.

2) 이상적인 방법인데, 바로 이렇게 되지 않는다면 역시 숫자를 하나하나 대입하면서 새롭게 정의된 함수를 이해하는 것이 최우선이다.

하나의 예만 더 들어보자.

$f(x)=2x(2-x)$일 때, $t \leqq x \leqq t+1$에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차를 $g(t)$라 한다. $g(t)$를 함수로 표현하시오.





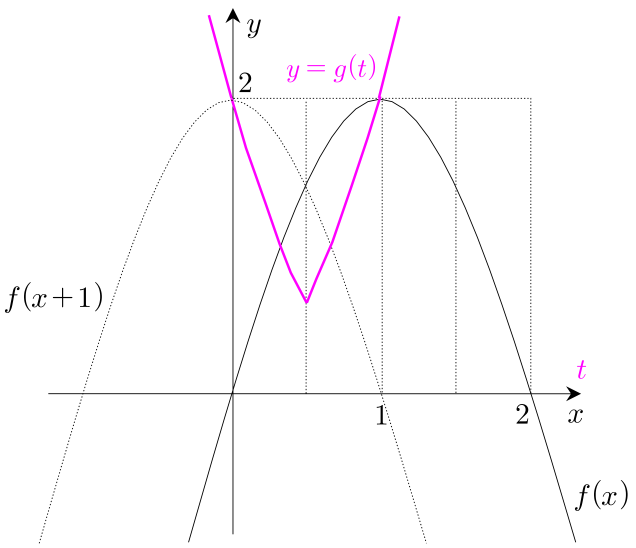
왼쪽 그림과 같이 $t \leqq 0$일 때는 $g(t)=f(t+1)-f(t)$

오른쪽 그림과 같이 $0 < t \leqq \frac{1}{2}$일 때는 $g(t)=2-f(t)$

마찬가지로 $\frac{1}{2} < t \leqq 1$일 때는 $g(t)=2-f(t+1)$

$t > 1$일 때는 $g(t)=f(t)-f(t+1)$

임을 알 수 있고 $f(t+1)-f(t)=2-4t$이므로 $g(t)$의 그래프를 그리면 아래와 같다.[1)]



1) 이처럼 수능에서 어떠한 개형 $y=f(x)$를 출제할 때, 단순히 미분해서 개형을 완성하는 것이 아니라 최대, 최소를 이용해서 $y=f(x)$에 의하여 종속적인 새로운 함수를 정의해서 문제를 좀 더 어렵게 출제하기도 한다.

그래프의 교점의 개수, 실근의 개수에 의한 정의

마찬가지로 먼저 간단한 예를 들어 공부해보자.

$f(x)=2x(2-x)$일 때, 방정식 $f(x)=t$의 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. $g(t)$를 함수로 표현하시오.

위 문제에서

$$g(t)=\begin{cases} 2 & (t<2) \\ 1 & (t=2) \\ 0 & (t>2) \end{cases}$$

임을 쉽게 알 수 있다.[1)]

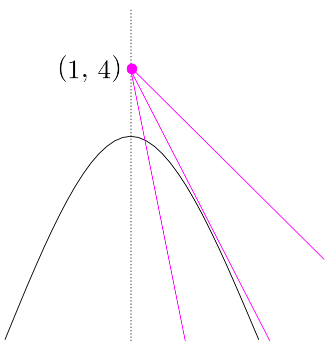
하나의 예를 더 들어보자.

$f(x)=2x(2-x)$일 때, 방정식 $f(x)=t(x-1)+4$의 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. $g(t)$를 함수로 표현하시오.

위 문제는 그래프를 그려보면 결국 $(1,\ 4)$에서 함수 $f(x)$에 그은 접선과 관련이 있음을 알 수 있다.[2)]

따라서 곡선 밖의 점 $(1,\ 4)$에서 그은 접선을 찾아보자.
$y=f'(p)(x-p)+f(p)=(4-4p)(x-p)+2p(2-p)$에 $(1,\ 4)$을 대입하면
$1=p^2-2p+1+4p-2p^2$에서 $p(p-2)=0$이므로 $p=0,\ 2$임을 알 수 있다.
즉 $(1,\ 4)$에서 그은 접선의 기울기는 $f'(0)=4,\ f'(2)=-4$이다.

따라서 아래의 그림과 같이 $t<-4$일 때는 $g(t)=2,\ t=-4$일 때 $g(t)=1$, $-4<t<4$일 때 $g(t)=0,\ t=4$일 때 $g(t)=1,\ t>4$일 때 $g(t)=2$임을 알 수 있다.



1) 이해가 어렵다면 역시 $t=0,\ t=1,\ t=2,\ t=3\ \cdots$을 대입해보는 것이 최선의 함수 추론 방법이다.

2) $f(x)=t(x-1)+4$를

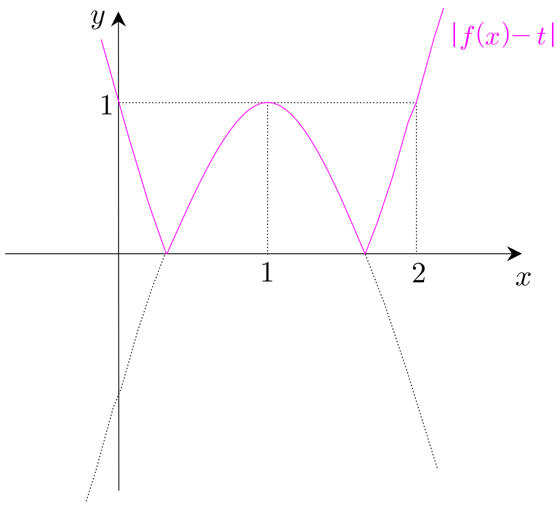
$$\frac{f(x)-4}{x-1}=t$$

으로 변형해서 $\dfrac{f(x)-4}{x-1}$의 그래프를 그리면 처음에 든 예시처럼 해결할 수도 있다.

미분 불가능 점의 개수에 의한 정의

$f(x)=2x(2-x)$일 때, 함수 $|f(x)-t|$이 미분 불가능이 되는 x값의 개수를 $g(t)$라 하자. $g(t)$를 함수로 표현하시오.

마찬가지로 $t=1$을 대입해보면 그림과 같이 미분 불가능 점이 2개임을 알 수 있다.



이와 같이 t의 값을 점점 크게 하면서 대입을 계속해보면
$t<2$일 때 $g(t)=2$, $t \geq 2$일 때 $g(t)=0$임을 알 수 있다.

좀 더 문제를 어렵게 해보면 아래와 같다.

$f(x)=2x(2-x)$일 때, 함수 $|f(x)-\{t(x-1)+4\}|$이 미분 불가능이 되는 x값의 개수를 $g(t)$라 하자. $g(t)$를 함수로 표현하시오.

이 문제도 마찬가지로 $(1,\ 4)$에서 곡선에 그은 접선이 중요하다는 것을 알 수 있고 접할 때 t의 값은 4, -4이므로 아래와 같은 결론을 내릴 수 있다.

$$g(t)=\begin{cases} 0 & (|t| \leq 4) \\ 2 & (|t|>4) \end{cases}$$

이처럼 함수를 정의하는 다양한 방법을 배웠는데, 결국 수능에 어떤 새로운 정의가 출제될지는 아무도 모르기 때문에 이 심화특강에 있는 예시를 외우는 것은 전혀 쓸모가 없음을 명심하고 이 단원에 주어진 대표적인 상황을 대입을 통해서 차근히 이해하고 추론해나가는 연습을 해야 한다.

정적분으로 정의된 함수[1]

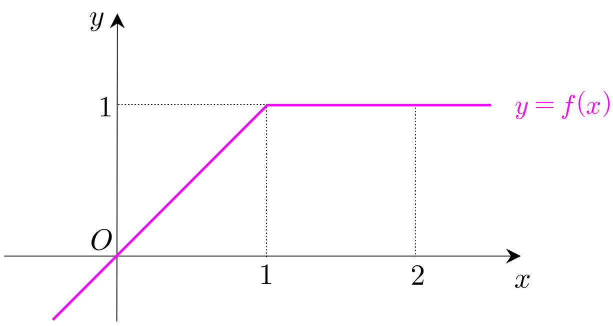
1. 정적분으로 정의된 함수에 대한 근본적인 이해

정적분으로 정의된 함수가 출제되면 아래와 같이 두 가지 식을 이끌어 내는 것이 가장 기본이다. 하지만 함수에 대한 근본적인 이해가 잘 안되어 있는 경우가 많다.

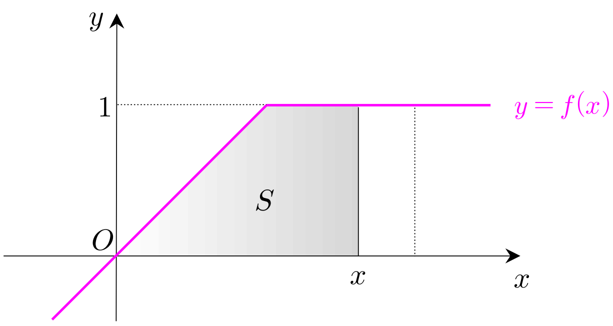
$$g(x)=\int_a^x f(t)dt \rightarrow g(a)=0,\ g'(x)=f(x)^{2)}$$

예를 들어

$g(x)=\int_0^x f(t)dt$일 때, $y=f(x)$의 그래프가 아래와 같이 그려진다고 하자.



여기서 $g(x)$의 그래프를 생각해보면 분명히 $x>0$에서 증가한다는 것을 바로 추측할 수 있어야 한다. 또한 $g(1)=\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{2}$, $g(2)=\int_0^2 f(t)dt=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ 임을 바로 바로 알 수 있다. 왜냐하면 함수 $g(x)$는 애초에 $y=f(x)$에서의 밑넓이를 의미하는 함수이기 때문이다.



즉 그림과 같이 넓이 S가 곧 $g(x)$ 되는 것이다. (즉, $g(x)=S$)[3]

이처럼 단순 수식 2개를 유도하는 암기가 아닌 근본적인 이해가 되어있어야 한다.

1) 앞서 CP05에서 배웠던 내용을 좀 더 심화적으로 공부한다고 생각하면 된다.

2) "변화율" 심화특강에서 $g'(x)=f(x)$에 대한 본질적인 이해를 해보자.

3) 즉, 넓이로 새롭게 정의된 함수라고 할 수 있고, 그 함수가 가지는 특징이 $g'(x)=f(x)$이 되는 것이다.

2. 정적분으로 정의된 함수의 응용

① $g(x)=\int_a^x (x-t)f(t)dt$일 때

과 같은 형태가 자주 출제되는데, 먼저 “함수 $g(x)$의 정의역(변수)”과 “적분변수”를 명백히 구분하는 것이 최우선이다.

$\int_a^x (x-t)f(t)dt$에서 적분변수는 t이므로 x는 상수취급을 해서 정적분의 성질을 적용하면

$\int_a^x (x-t)f(t)dt=\int_a^x \{xf(t)-tf(t)\}dt=\int_a^x xf(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$

$=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$이 된다.

이제 $g(x)=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$을 미분해야 하는데

x와 $\int_a^x f(t)dt$은 각각 “x에 대한 함수”이므로 $x\int_a^x f(t)dt$을 곱함수로 해석해서 곱의 미분법을 적용해야 한다.

즉 $g'(x)=\int_a^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_a^x f(t)dt$이 되고 $g''(x)=f(x)$임을 알 수 있다.

따라서 결론은 아래와 같다.

> $g(x)=\int_a^x (x-t)f(t)dt$
>
> $\rightarrow\ g(a)=0,\ g'(x)=\int_a^x f(t)dt,\ g'(a)=0,\ g''(x)=f(x)$

② $g(x)=\int_a^{2x^2} tf(t)dt$일 때

위와 같이 복잡하게 출제되면 헷갈리는 경우가 있는데,

$h(t)=tf(t)$와 같이 치환한 후 미적분의 기본정리 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$을 생각하는 것이 가장 좋은 방법이다.

즉 $g(x)=\int_a^{2x^2} tf(t)dt=\int_a^{2x^2} h(t)dt=H(2x^2)-H(a)$이므로

$g'(x)=4xh(2x^2)=4x\{2x^2f(2x^2)\}=8x^3f(2x^2)$임을 알 수 있다.

이처럼 치환과 미적분의 기본정리를 잘 활용하도록 하자.

③ $\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt = f(a)$**에 대한 이해**

이 극한 또한 0/0꼴 극한이므로 아래의 세 가지 방법이 대표적인 해법이 된다.[1)]

첫 번째로 로피탈로 해결하면 가장 빠른 해결이 가능하다.

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{1} = f(a)$$

두 번째로 기울기로 분석해보자.

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x-a} = F'(a) = f(a)$$

이렇게 두 가지 방법이 있는데 복잡한 형태가 출제되더라도 위의 방법만 잘 지키면 모두 해결할 수 있다. 또한 가장 빠른 풀이 방법은 로피탈의 정리임을 알 수 있다. 예를 들어

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x^2-a} \int_a^{x^2} t^2 f(t)dt = \lim_{x \to a} \frac{x^4 f(x^2) \times 2x}{2x} = \lim_{x \to a} x^4 f(x^2) = a^4 f(a^2)$$

이 됨을 알 수 있다.

1) 한완수 수학2(상)
함수의 극한 심화특강에서
세 가지 방법에 대해 자세히
배울 수 있다.

① 로피탈
② 기울기 분석
③ 식변형

의 방법이 있는데
여기서는 ①~②의 방법이
가능하다.

분석 및 해제에는 심화특강의 개념을 활용한 풀이만 있으므로 정석적인 풀이는 반드시 스스로 해봐야 한다. 정석 풀이를 아는 사람만이 심화풀이를 할 자격이 있음을 명심해라.

Actual Fight

01. 실수 a에 대하여 집합

$$\{x|ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0,\ x\text{는 실수}\}$$

의 원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2010]

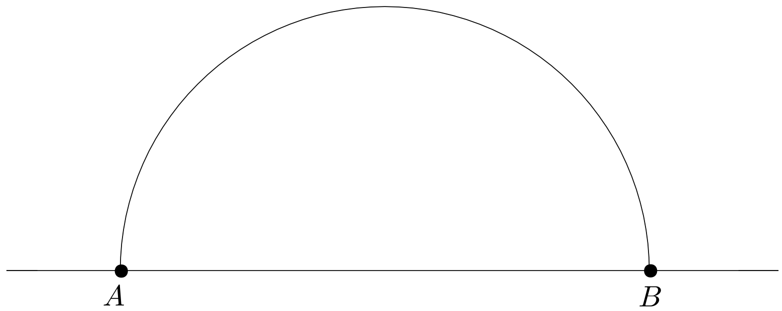
<보 기>

ㄱ. $\lim_{a\to 0} f(a)=f(0)$

ㄴ. $\lim_{a\to c+0} f(a) \neq \lim_{a\to c-0} f(a)$인 실수 c는 2개이다.

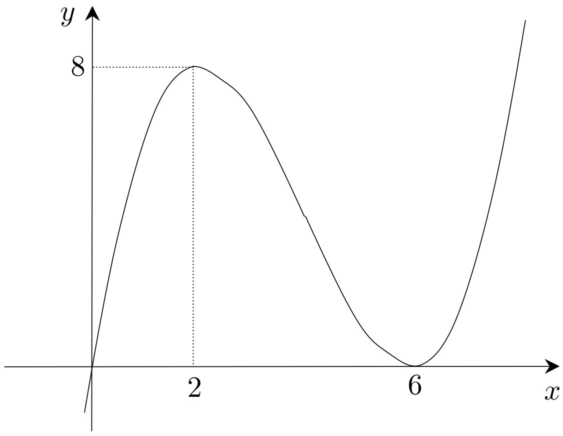
ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개이다.

02. 아래와 같이 반지름이 2인 반원과 직선 $\overleftrightarrow{AB}$가 있다. 양수 x에 대해 $f(x)$를 반지름의 길이가 x인 원 중에서, 반원의 호 $\overset{\frown}{AB}$ 에 접하고 동시에 직선 $\overleftrightarrow{AB}$에 접하는 원의 개수라 할 때, $f(x)=3(x-2)^2$의 실근의 개수는? (단, 양 끝점 A, B는 반원의 호에서 제외)



심화특강06 연습문제

03. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래와 같다.



(1) 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(2) 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(3) 방정식 $f(x)=tx$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

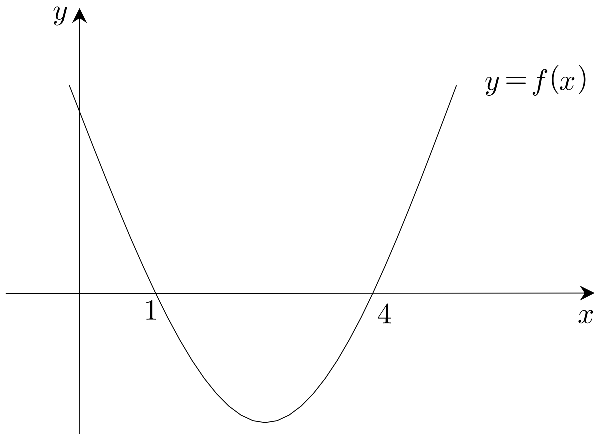
(4) 방정식 $f(x)=t(x-2)+10$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

04. 실수 m에 대하여 점 $(0, 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty, a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은? [2012]

05. x에 대한 방정식 $\sqrt{(x-1)(3-x)}=mx$의 서로 다른 실근의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $y=f(m)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

06. 실수 x에 대하여 $t^2=x^3-x$를 만족시키는 실수 t의 개수를 $f(x)$라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프 개형을 완성하시오. [1994]

07. 아래 그림은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프이다. 함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1} f(t)dt$라 할 때, $g(x)$가 최소가 되는 x의 값은? [1994]



08. 다항함수 $f(x)$가 $\int_{2}^{x} f(t)dt = x^2+ax+2$를 만족시킬 때, $f(10)$의 값을 구하시오. [2000]

09. 다음 식을 만족하는 다항식 $f(x)$의 계수들의 합은? [2002]

$$f(f(x))=\int_{0}^{x} f(t)dt-x^2+3x+3$$

10. 두 함수 $f(x) = ax + b$와 $g(x) = e^x$가

$$f(g(x)) = \int_0^x f(t)g(t)dt - xe^x + 3$$

을 만족할 때, $f(2)$의 값은? [2002]

11. 함수 $f(x)$는 연속함수이고 모든 실수 x에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$f(x) - 2\int_0^x e^t f(t)dt = 1$$

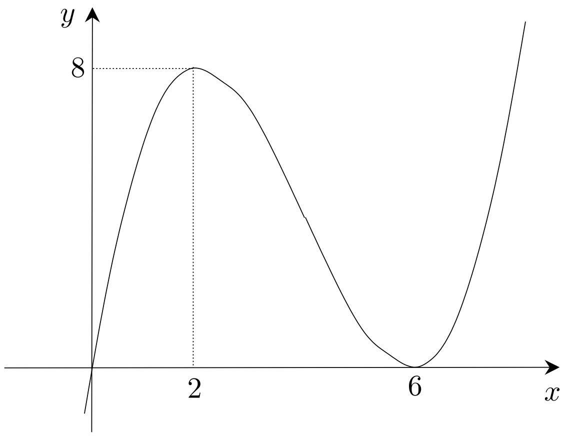
이때, $f''(0)$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이고, $f''(x)$는 $f(x)$의 이계도함수이다.) [2003]

12. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = x^3 - 2ax^2 + ax$$

를 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [2007]

13. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래와 같다.



(1) $x \leqq t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(2) $t \leqq x \leqq t+2$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(3) $t-3 \leqq x \leqq t+3$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

14. 함수 $f(x)=x(x-3)^2$과 실수 t에 대하여 $t \leqq x \leqq t+p$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=a$에서 미분 불가능하다고 한다. $g(a) \geqq 4$일 때, p의 최솟값을 구하시오.

15. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x-1$이 있다. 실수 $t(t \geqq -1)$에 대하여 $-1 \leqq x \leqq t$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 $g(t)$라고 하자. $\int_{-1}^{1} g(t)dt=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [2010]

16. 함수 $f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2(a>0)$과 실수 t에 대하여, $x \leqq t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 a의 최댓값은? [2010.9]

17. 함수 $f(x)=\begin{cases} -1 & (x<1) \\ -x+2 & (x \geqq 1) \end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{-1}^{x}(t-1)f(t)dt$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [2008.9]

<보 기>

ㄱ. $g(x)$는 구간 $(1, 2)$에서 증가한다.
ㄴ. $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
ㄷ. 방정식 $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k가 존재 한다.

18. 실수전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$가

$$f(x)=e^{x}-1+\int_{0}^{x}f(t)\,dt$$

를 만족할 때, <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, e 는 자연로그의 밑) [2005.10]

<보 기>

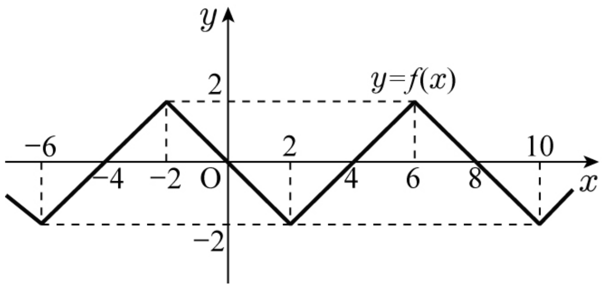
ㄱ. $f(0)=0$이다.
ㄴ. $f'(0)=0$이다.
ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>f(x)$이다.

19. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 x에 대하여
(가) $f(x)g(x)=x^3+3x^2-x-3$
(나) $f'(x)=1$
(다) $g(x)=2\int_1^x f(t)\,dt$

$\int_0^3 3g(x)\,dx$의 값을 구하시오. [2008.10]

20. 실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $y=f(x)$의 그래프의 일부가 그림과 같다.



실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_x^{x+2} f(t)\,dt$ 라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2010.10]

<보 기>
ㄱ. $g(-1)=0$
ㄴ. 함수 $g(x)$는 개구간 $(-2,\ 2)$에서 감소한다.
ㄷ. $-4\leq x\leq 6$에서 방정식 $g(x)=2$의 모든 실근의 합은 4이다.

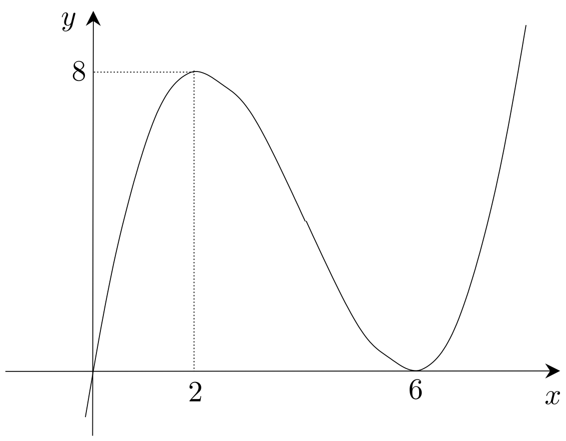
21. x에 대한 방정식 $\int_0^x |t-1|dt = x$의 양수인 실근이 $m+n\sqrt{2}$일 때, m^3+n^3의 값을 구하시오. (단, m, n은 유리수이다.) [2011.4]

22. 곡선 $y=6x^2+1$과 x축 및 두 직선 $x=1-h$, $x=1+h(h>0)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(h)$라 할 때, $\lim_{h \to +0} \frac{S(h)}{h}$의 값을 구하시오. [2007.9]

23. $f(x)=2x(2-x)$일 때, $t \leqq x \leqq t+1$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 한다. $\int_{-1}^{2} g(t)dt$의 값을 구하시오.

24. $f(x)=2x(2-x)$일 때, $t \leqq x \leqq t+1$에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차를 $g(t)$라 한다. $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} g(t)dt$의 값을 구하시오.

25. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래와 같다.



(1) 함수 $|f(x)-t|$이 미분불가능이 되는 x의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(2) 함수 $|f(x)-f(t)|$이 미분불가능이 되는 x의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(3) 함수 $|f(x)-tx|$이 미분불가능이 되는 x의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(4) 함수 $|f(x)-\{t(x-2)+10\}|$이 미분불가능이 되는 x의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

26. 삼차함수 $f(x)=\frac{1}{4}x(x-6)^2$에 대하여 함수 $p(x)=\left|f(x)-\left\{\left(\frac{f(t)-10}{t-2}\right)(x-2)+10\right\}\right|$이 미분불가능이 되는 x의 개수를 $g(t)$라 하자. $y=g(t)\,(t\neq 2)$에 대한 설명 중 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고르시오.

〈보 기〉

ㄱ. $g(1)=\lim_{t\to 1}g(t)$

ㄴ. $g(4)=\lim_{t\to 4}g(t)$

ㄷ. $a<t$에서 $g(t)$가 연속함수라 할 때, a의 최솟값은 10이다.

27. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\frac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오. [2009.6]

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.

(나) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a\,(a>2)$에서만 미분가능하지 않다.

28. 최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$$S=\{a\,|\,\text{함수 } |f(x)-t|\text{가 } x=a\text{에서 }\underline{\text{미분가능하지 않다.}}\}$$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [2011]

29. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

가. 직선 $g(x)=x+10$과 $x=0$, $x=6$에서 접한다. 나. 함수 $h(x)=\|f(x)-g(x)-g(0)\|$는 $x=a$, $x=b$ $(a<0,\ b>6)$를 제외한 모든 구간에서 미분가능하다.

두 조건을 만족할 때, 최고차항 계수의 최댓값은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수)

30. 최고차항의 계수가 1인 함수 $f(x)$는 $(x-3)^2(x+3)^2$으로 나누어 떨어지고 그 때의 몫은 이차식인 $P(x)$이다. 함수 $y=|f(x)|$가 모든 실수에서 미분가능하다고 할 때, $g(x)=|f(x)+a|$에 대하여 함수 $g(x)$가 모든 실수에서 미분가능하기 위한 양의 실수 a의 최솟값을 구하시오. (단, 방정식 $P(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.)

31. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$와 함수 $g(x) = \left| \int_0^x f(x)dx \right|$이 아래의 조건들을 만족시킨다.

가. $0 < a < b$인 두 상수 a, b에 대하여 $f(a) = f(b) = 0$이고, $\int_0^b f(x)dx \leqq 0$이다.
나. 함수 $y = g(x)$은 $x = 1$에서 극댓값을 갖는다.
다. 함수 $y = g(x)$은 $x = 0$이 아닌 모든 점에서 미분가능하다.

이 때, $\frac{g'(5)}{g(1)}$의 값을 구하시오.

32. 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$$S = \{a \mid \text{함수 } |f(x) - f(t)|\text{가 } x = a\text{에서 미분가능하지 않다.}\}$$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t = 0$, $t = p$, $t = 4$에서만 불연속일 때, $\frac{f'(6)}{f'(3)}$의 값을 구하시오. (단, $0 < p < 3$)

33. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? (단, a는 상수이다.)
[2012.10]

(가) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt = \{g(x) + a\}\sin x - 2$
(나) $g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt \cos x + 3$

이 특강의 목표

1. 새로운 함수가 나왔을 때, 정의역을 하나씩 대입해가며 추론할 수 있다.
2. 정적분으로 정의된 함수를 근본적으로 이해할 수 있다.

저자의 특강 *Tip*

수능에 새로운 함수가 자주 출제되는데
어떠한 함수가 나오더라도 정의역을 하나씩 대입해보면
그 함수를 이해하고 문제를 해결해나갈 수 있음을 명심해.

심화특강06 빠른 정답

01	ㄴ,ㄷ	13	해설 참조	25	해설 참조
02	4	14	3	26	ㄷ
03	해설 참조	15	17	27	12
04	$\frac{15}{4}$	16	1	28	147
05	해설 참조	17	ㄱ,ㄴ	29	91
06	해설 참조	18	ㄱ,ㄷ	30	729
07	2	19	27	31	6
08	17	20	ㄱ,ㄷ	32	10
09	3	21	9	33	4
10	4	22	14		
11	6	23	$\frac{14}{3}$		
12	16	24	$\frac{5}{2}$		