제 2 교시

수학 영역

심상범 in Orbi

5지선다형

1. $\log_8 16$ 의 값은? [2점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

$\log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3}\log_2 2 = \boxed{\frac{4}{3}}$

2. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4 = 100$일 때, a_1의 값은? [2점]

① 91 ② 93 ③ 95 ④ 97 ⑤ 99

$a_4 = 100$이고 $d = 3$이므로

$a_n = 88 + 3n$

$a_1 = 88 + 3 = \boxed{91}$

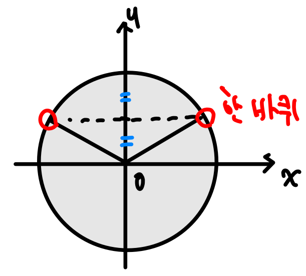
3. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $\sin 4x = \frac{1}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$\sin 4x = \frac{1}{2}$

$0 \le 4x < 8\pi$

4바퀴



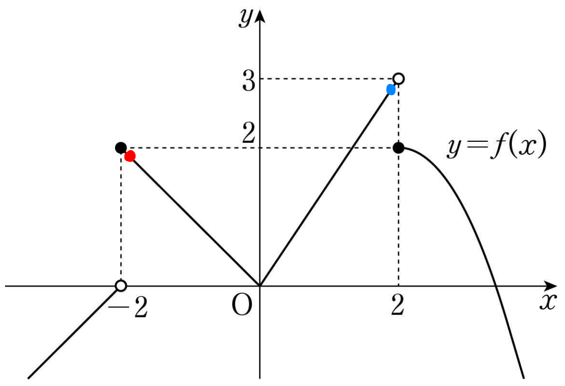
4. $\int_{2}^{-2} (x^3 + 3x^2)\,dx$의 값은? [3점]

범위를 보니 기함수는 0으로 처리 가능

① -16 ② -8 ③ 0 ④ 8 ⑤ 16

$\int_{2}^{-2}(x^3+3x^2)dx = \underbrace{\int_{2}^{-2} x^3 dx}_{\text{기함수이므로 } 0} + \int_{2}^{-2} 3x^2 dx = 0 + [x^3]_{2}^{-2} = -8 - 8 = \boxed{-16}$

5. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to -2+} f(x)+\lim\limits_{x\to 2-} f(x)$의 값은? [3점]

2　3

① 6　② 5　③ 4　④ 3　⑤ 2

$2+3=\boxed{5}$

6. 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax+b}{x-3} & (x<3) \\ \dfrac{2x+1}{x-2} & (x\ge 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점] $x=3$에서만 체크하면 된다.

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

① 좌극한=우극한

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2+ax+b}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2x+1}{x-2}=\dfrac{7}{1}=7$　그렇다면 좌극한도 7로 수렴해야한다.

$\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=7$

분모가 0으로 수렴하므로
분자도 0으로 수렴해야한다 → 분자가 $x-3$을 인수로 가져야한다.

$\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{(x-3)(x-\alpha)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x-\alpha}{1}=3-\alpha=7$

$\alpha=-4$

$x^2+ax+b=(x-3)(x+4)$

$=x^2+x-12$

$\boxed{a=1,\ b=-12 \quad a-b=1-(-12)=13}$

7. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n=\begin{cases} \dfrac{(n+1)^2}{2} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{n^2}{2}+n+1 & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

일 때, $\sum\limits_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [3점]

우리가 알 수 있는 것이 아니니
대입해서 규칙성을 찾아보자.

① 235　② 240　③ 245　④ 250　⑤ 255

$a_1=\dfrac{(1+1)^2}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

+3

$a_2=\dfrac{2^2}{2}+2+1=5$

+3

$a_3=\dfrac{(3+1)^2}{2}=\dfrac{16}{2}=8$

+5

$a_4=\dfrac{4^2}{2}+4+1=13$

+5

$a_5=\dfrac{(5+1)^2}{2}=18$

다음은 +7이겠네.

$a_6=25$

+7

$a_7=32$

+9

$a_8=41$

+9

$a_9=50$

+11

$a_{10}=61$

$\boxed{\sum\limits_{n=1}^{10} a_n=255}$

3차식에서의 판별식은 모르니 그래프로

8. 곡선 $y=x^3-3x^2-9x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 정수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은? [3점]

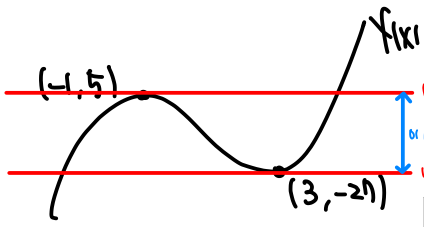
① 27 ② 28 ③ 29 ④ 30 ⑤ 31

두 그래프를 그려보자.

$f(x)=x^3-3x^2-9x$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x+1)(x-3)$

$x=-1, 3$에서 $f'(x)=0$



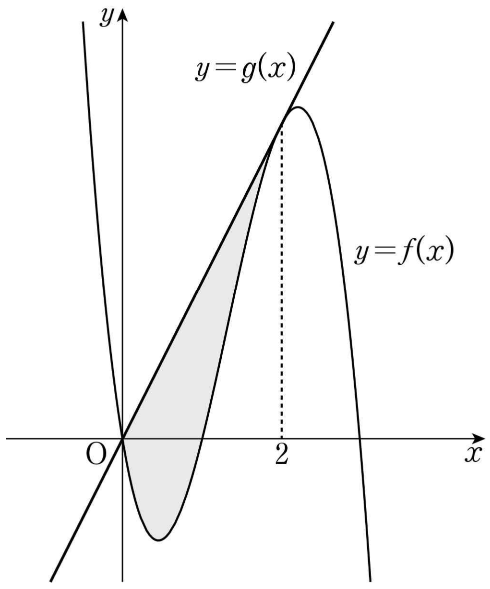
이 사이에 $y=k$가 있어야 서로 다른 세 점 가능

$-26 \sim 4$까지

$\boxed{M=4 \quad m=-26 \quad M-m=30}$

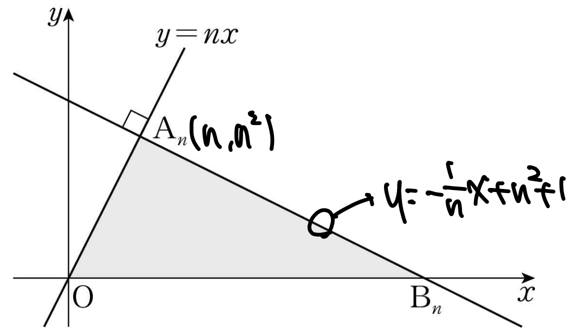
9. 최고차항의 계수가 -3인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$와 원점에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$



$S=\frac{|-3|}{12}(2-0)^4=\frac{3}{12}\cdot 16=\boxed{4}$

10. 자연수 n에 대하여 점 $A_n(n, n^2)$을 지나고 직선 $y=nx$에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B_n이라 하자.



다음은 삼각형 A_nOB_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{n^3}$의 값을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)

점 $A_n(n, n^2)$을 지나고 직선 $y=nx$에 수직인

이 직선의 기울기는 $-\frac{1}{n}$이다.

직선의 방정식은

$y=\boxed{-(\frac{1}{n})}\times x+n^2+1$

이므로 두 점 A_n, B_n의 좌표를 이용하여 S_n을 구하면

$S_n=\boxed{(나)}$ $\frac{1}{2}n^2(n^3+n)$

$\overline{OB_n}=n^3+n$, 높이$=n^2$

$S=\frac{1}{2}n^2(n^3+n)$

따라서

$\sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{n^3}=\boxed{(다)}$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 r라 할 때, $f(1)+g(2)+r$의 값은? [4점]

① 105 ② 110 ③ 115 ④ 120 ⑤ 125

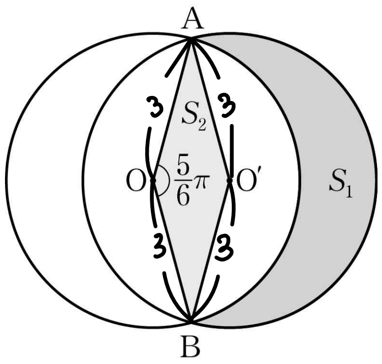
(다) $\sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{n^3}=\sum_{n=1}^{8}\frac{1}{2}n^2(n^3+n)\cdot\frac{1}{n^3}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8}(n^2+1)=\frac{1}{2}\left(\frac{8\cdot 9\cdot 17}{6}+8\right)$

$=\frac{1}{2}(12\cdot 17+8)=6\cdot 17+4=106$

$f(n)=-\frac{1}{n}$, $g(n)=\frac{1}{2}n^2(n^3+n)$, $r=106$

$f(1)+g(2)+r=-1+20+106=\boxed{125}$

11. 그림과 같이 두 점 O, O′을 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 두 원 O, O'이 한 평면 위에 있다. 두 원 O, O'이 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, $\angle AOB = \frac{5}{6}\pi$이다.

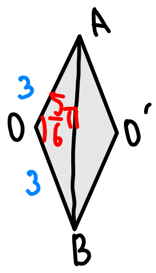


원 O의 외부와 원 O'의 내부의 공통부분의 넓이를 S_1, 마름모 AOBO′의 넓이를 S_2라 할 때, $S_1 - S_2$의 값은? [4점]

삼각형 2개를 합하자.

① $\frac{5}{4}\pi$ ② $\frac{4}{3}\pi$ ③ $\frac{17}{12}\pi$ ④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ $\frac{19}{12}\pi$

S_2 :

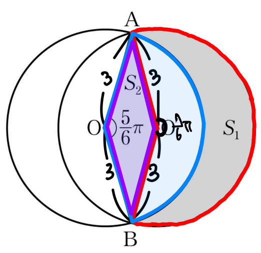


$\triangle AOB = \triangle AO'B$이므로 한 개를 구해서 2배하자.

$S_2 = 2 \times \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin\frac{5}{6}\pi$

$= 9 \cdot \sin\frac{5}{6}\pi = \frac{9}{2}$

S_1 :



$S_1 =$ 빨간색 부채꼴 $-$ (파란색 부채꼴 $-$ 보라색 S_2)

$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{7}{6}\pi - \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{5}{6}\pi - S_2\right)$

어차피 S_2를 빼니 그대로 두자.

$= \frac{21}{4}\pi - \frac{15}{4}\pi + S_2 = \frac{3}{2}\pi + S_2$

$S_1 - S_2 = \frac{3}{2}\pi + S_2 - S_2 = \boxed{\frac{3}{2}\pi}$

12. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=5$
(나) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1}=7$

$f(1)-g(1)=0$

$f'(1)-g'(1)=5$

$f(1)+g(1)-2f(1)=0$

$f'(1)+g'(1)=7$

값이 정해지지 X

$f'(1)=6$, $g'(1)=1$

두 실수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-a}{x-1}=b\times g(1)$일 때, ab의 값은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$a=f(1)=g(1)$

$\underbrace{\lim_{x\to1}\frac{f(x)-a}{x-1}}_{=f'(1)} = b \cdot g(1)$

$f'(1) = b \cdot g(1)$

$\boxed{6 = b \cdot a}$

$g(1)=a$이므로

13. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x} & (x<3) \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8 & (x\geq 3) \end{cases}$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 23일 때, 정수 a의 값은? [4점]

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

x의 구간을 나눠서 생각해보자.

i) $x<3$

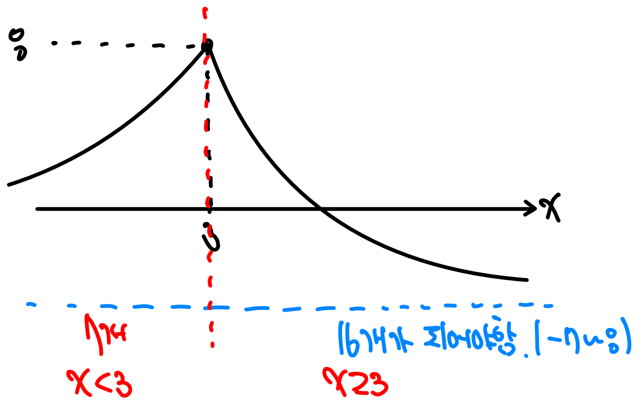
$f(x)=2^{x}$

여기서 y좌표가 정수인 점의 수는 $\underbrace{7}_{1\sim 7}$개이다.

ii) $x\geq 3$

$f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$ 감소함수다.

$f(3)=8$이므로 $f(x)$의 개형을 대략 보면



$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8=8-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}$$

$$\underbrace{-8\leq}_{\infty\text{로 보낸 극한이므로 등호 가능}} 8-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}<-7$$

$$15<\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}\leq 16$$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}=2^{-2(a+3)}$, $16=2^{4}$

$\boxed{a=-5}$

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\underset{3\text{차}}{f(x)}+|\underset{2\text{차 이하}}{f'(x)}|$$

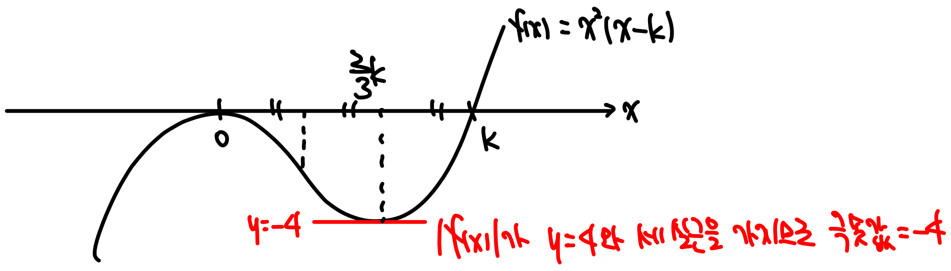
라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=g(0)=0$ $f(x)$와 $g(x)$는 x를 인수로 가진다. $+\underbrace{f'(0)=0}_{g(x)\text{에 }x=0\text{ 대입}}$ $f(x)$는 $x=0$에서 접, $f(x)=x^2(x-k)$
(나) 방정식 $f(x)=0$은 양의 실근을 갖는다. k가 양수군요.
(다) 방정식 $|f(x)|=4$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$g(3)$의 값은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

$f(x)$를 대략 그려보자. ((가)와 (나)를 이용)



$|f(x)|$가 $y=4$와 세 실근을 가지므로 극솟값 $=-4$

$$f\left(\frac{2}{3}k\right)=\frac{4}{9}k^2\left(-\frac{k}{3}\right)$$

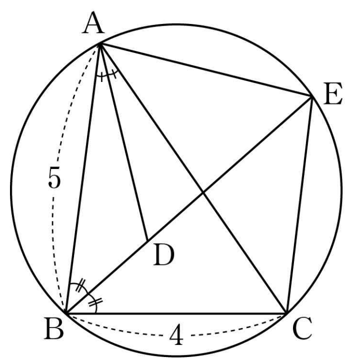
$$=-\frac{4}{27}k^3=-4$$

$\underline{k=3} \rightarrow f(x)=x^2(x-3)$, $f'(x)=3x^2-6x$

$$\boxed{g(3)=f(3)+|f'(3)|=0+9=9}$$

15. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC$의 이등분선과 $\angle CAB$의 이등분선이 만나는 점을 D, 선분 BD의 연장선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 E라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

$\overline{AC}$ 구할 수 있다.(코사인법칙 활용)



< 보 기 >

ㄱ. $\overline{AC}=6$ (O)

ㄴ. $\overline{EA}=\overline{EC}$ (O)

ㄷ. $\overline{ED}=\frac{31}{8}$ (X)

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

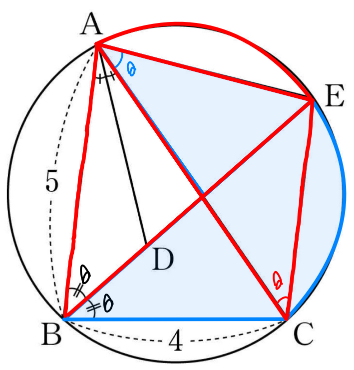
ㄱ. $\triangle ABC$를 보면 코사인법칙을 사용하여 $\overline{AC}$를 구할 수 있다.

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\,\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\cos(\angle ABC)$

$=25+16-2\cdot 20\cdot\frac{1}{8}$

$=25+16-5=36$ $\boxed{\overline{AC}=6}$

ㄴ.



① $\angle ABE=\theta$라고 하자

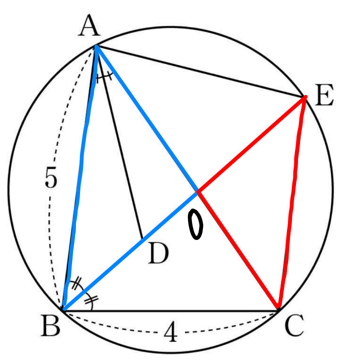
② 호 EC에 대한 원주각으로 $\angle EAC=\theta$이다.

③ 호 AE에 대한 원주각으로 $\angle ECA=\theta$이다.

④ $\triangle ACE$를 보면 $\angle EAC=\angle ECA$이므로

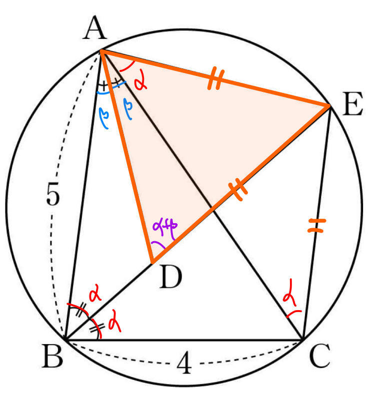
$\boxed{\overline{EA}=\overline{EC}}$

ㄷ.



원에 접하는 사각형의 성질로 $\triangle ABO$와 $\triangle COE$는 닮음이다. 때마침 $\triangle ABC$에 의해 $\overline{AO}:\overline{OC}=5:4$이므로 닮음비가 $5:4$이다.

그렇다면 $\overline{EC}=4$이다.



왼쪽 그림의 설명으로 인해 $\overline{ED}=\overline{EC}=\overline{EA}$이다.

위에서 $\overline{EC}=4$였으므로 $\boxed{\overline{ED}=4}$이다.

단답형

16. 두 함수 $f(x)=2x^2+5x+3$, $g(x)=x^3+2$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수를 구하시오. [3점]

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$x=0$ 대입

$f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$

$f(0)=3$, $g(0)=2$

$f'(0)=5$, $g'(0)=0$

$f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=5\times 2+0=\boxed{10}$

17. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$$3x^2-2(\log_2 n)x+\log_2 n>0$$

그래프가 x축 위에 떠있으면 가능 (D<0)

이 성립하도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오. [3점]

$D=(-2\log_2 n)^2-4\cdot 3\cdot\log_2 n$

$=4(\log_2 n)^2-12\log_2 n<0$

$4\log_2 n(\log_2 n-3)<0$

$0<\log_2 n<3$

$2^0<n<2^3$

$1<n<8$

2부터 7까지이므로 $\boxed{6개}$

18. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $F(x)$의 도함수 $f(x)$가

$f(x)$는 연속

$$f(x)=\begin{cases} -2x & (x<0) \\ k(2x-x^2) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이다. $F(2)-F(-3)=21$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

적분된 거끼리 뺄셈? → 정적분이다.

$\int_{-3}^{2} f(x)dx$로 정리 가능

$F(2)-F(-3)=\int_{-3}^{2} f(x)dx$ 이므로 이를 구하자.

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx = \int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx$$

$$=\int_{-3}^{0} -2x\,dx + \int_{0}^{2} k(2x-x^2)dx$$

$$=\left[-x^2\right]_{-3}^{0} + \left[-\frac{1}{3}kx^3+kx^2\right]_{0}^{2}$$

$$=9+\left(-\frac{8}{3}k+4k\right)=9+\frac{4}{3}k=21$$

$$\frac{4}{3}k=12$$

$$\boxed{k=9}$$

19. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1=2,\ a_2=4$이고 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}S_n = a_nS_{n+1}$$ 우리가 아는 식은 X

이 성립할 때, S_5의 값을 구하시오. [3점]

$a_{n+1}S_n = a_nS_{n+1}$ 우리가 아는 식이 아니다.
이를 약간 변형해보자.

$$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\ (n\geq 2)$$

수열의 합과 일반항의 비율이 같다.

$S_1=2 \qquad a_1=2$

$S_2=6 \qquad a_2=4$ 여기부터 규칙 시작

$S_3=6+k=18 \qquad a_3=k=12$

$\frac{6+k}{6}=\frac{k}{4}\rightarrow k=12$

$S_4=18+m=54 \qquad a_4=m=36$

$\frac{18+m}{18}=\frac{m}{12}\rightarrow m=36$

$S_5=54+l \qquad a_5=l$

$\frac{54+l}{54}=\frac{l}{36}\rightarrow l=108$

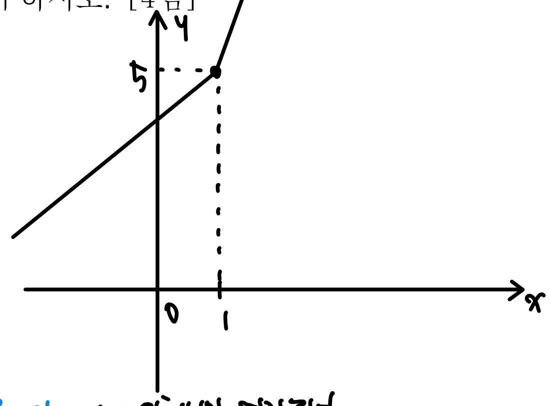
$$\boxed{S_5=162}$$

20. 실수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수

$$f(x)=2x+3+|x-1|$$

의 그래프의 교점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(5)$의 값을 구하시오. [4점]

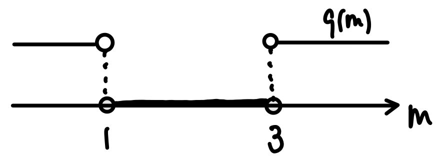
$$f(x)=\begin{cases} x+4 & (x<1) \\ 3x+2 & (x\geq 1) \end{cases}$$



$y=mx$는 $(0,0)$을 지나는 직선이므로 기울기인 m에 의해서만 결정된다.

$m<1$이라면 $x<0$에서 1개의 교점이 생긴다.

$m=1$이라면 교점이 없다.
$1<m<3$이라면 교점이 없다.
$m=3$이라면 교점이 없다.
$m>3$이라면 교점이 1개이다.

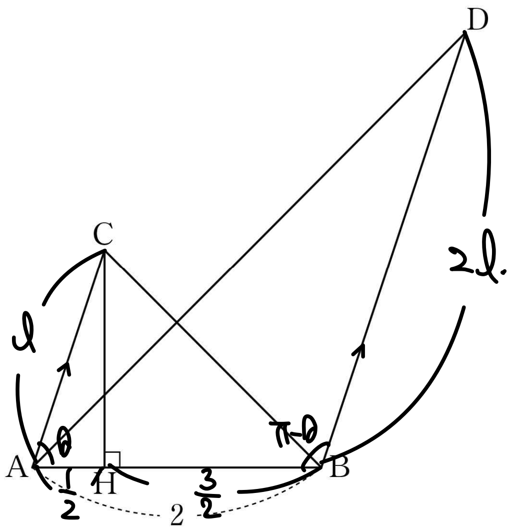


$h(x)$가 $g(x)h(x)$를 연속으로 만드려면 $h(1)=h(3)=0$이어야한다.
그래야 $g(x)h(x)$의 좌극한 = 우극한 = 함숫값 = 0이다.

$h(x)=(x-1)(x-3)$

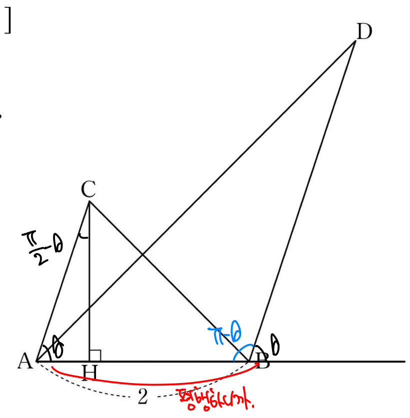
$$\boxed{h(5)=4\cdot 2=8}$$

21. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}\mathbin{/\mkern-6mu/}\overline{BD}$, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$인 두 삼각형 ABC, ABD가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다.



두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle CAB)=51$이다. $\overline{AC}^2$의 값을 구하시오. (단, $\angle CAB<\frac{\pi}{2}$) [4점]

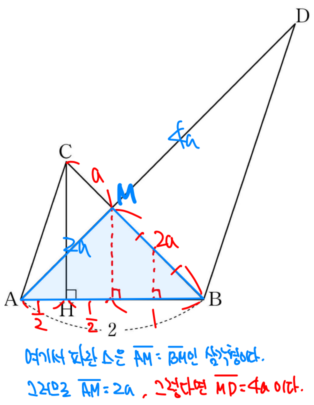
$\angle CAB$를 θ라고 하면 $\angle ABD=\pi-\theta$이다.



$\triangle ABC$에서 $\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2r$이다.

$\triangle ABD$에서 $\frac{\overline{AD}}{\underline{\sin(\pi-\theta)}}=2R$이다. $=\sin\theta$

$4(R^2-r^2)=4R^2-4r^2=\frac{\overline{AD}^2-\overline{BC}^2}{\cancel{\sin^2\theta}}\cdot\cancel{\sin^2\theta}=51$ 문제에서 줌.

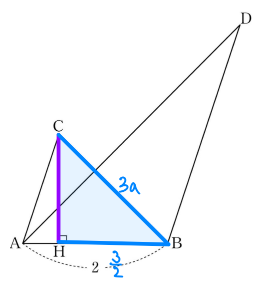


그러므로 $\overline{AD}=6a$, $\overline{BC}=3a$이다.

$36a^2-9a^2=27a^2=51$

우리가 구해야하는 l^2을 위해서는 $\overline{CH}$를 알아야한다.

$\triangle CHB$에서 $\overline{CH}$를 구할 수 있다.



$\overline{CH}^2=9a^2-\frac{9}{4}$

$$\boxed{l^2=\overline{CH}^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=9a^2-2=15 \quad =17}$$

22. 양수 a와 일차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x (t^2-4)\{|f(t)|-a\}\,dt$$

$g(0)=0$

$g'(x)=(x^2-4)\{|f(x)|-a\}$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다. 부호변화X 왜지..?
(나) $g(2)=5$

$g(0)-g(-4)$의 값을 구하시오. [4점]

조건 (가)에서 극점이 없다는 것은 도함수 $g'(x)$의 부호변화가 없다는 것이다.
$g'(x)$를 살펴보자.

$$g'(x)=(x^2-4)\{|f(x)|-a\}=(x+2)(x-2)\{|f(x)|-a\}$$

$x=\pm2$에서 부호변화 가능

(나)가 없애줘야함.

How? 인수로 곱해줌으로써.

$|f(x)|-a=\begin{cases}k(x-2) & (x\ge0)\\ -k(x+2) & (x<0)\end{cases}$

$f(x)$가 1차이므로

$g(2)=\int_0^2(t^2-4)\cdot k(t-2)\,dt=k\int_0^2(t-2)^2(t+2)\,dt$

$(t-2)^2$ 전개하기 싫으니 평행이동

$=k\int_{-2}^0 t^2(t+4)\,dt$

$=k\int_{-2}^0 t^3+4t^2\,dt=5 \rightarrow k=\frac{3}{4}$

$g(0)-g(-4)=0-\int_0^{-4}(t^2-4)\cdot\{-k(t+2)\}\,dt$

$=\int_{-4}^0(t^2-4)\cdot\{-\frac{3}{4}(t+2)\}\,dt=-\frac{3}{4}\int_{-4}^0(t+2)^2(t-2)\,dt$

그냥 계산해도 OK 그래도 기함수 날려보자.

$=-\frac{3}{4}\int_{-2}^2 t^2(t-4)\,dt$

$=-\frac{3}{4}\int_{-2}^2 t^3-4t^2\,dt=+\frac{3}{4}\int_{-2}^2 4t^2\,dt$

$=3\int_{-2}^2 t^2\,dt=6\int_0^2 t^2\,dt=6\cdot\frac{8}{3}=\boxed{16}$

$\int_{-2}^2 t^2dt=2\int_0^2 t^2dt$

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty} \frac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{n\to\infty} \frac{10n^3-1}{2n^3+4n^2+3n+6} = \frac{10}{2} = \boxed{5}$

24. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n = \left(\frac{x^2-4x}{5}\right)^n$$

이때 $-1<$ ≤ 1 이어야 한다.

일 때, 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수는? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

$-1 < \frac{x^2-4x}{5} \le 1$

$-5 < x^2-4x \le 5$

i)

$x^2-4x > -5$

$x^2-4x+5 > 0$

$D = 16-20 = -4 < 0$ 이므로 당연한 이야기

ii)

$x^2-4x \le 5$

$x^2-4x-5 \le 0$

$+1$
-5

$(x+1)(x-5) \le 0$

$-1 \le x \le 5$

-1~5는 $\boxed{7}$개이다.

25. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = a_1 a_n$$

을 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty} \frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1} = 12$ 일 때, a_1의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$a_{n+1} = a_1 \cdot a_n$ 이므로 $a_{n+3} = a_1^3 \cdot a_n$ 이다.

항이 1증가하면 a_1을 곱한다.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot a_1^3 \cdot a_n - 5}{2a_n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot a_1^3 \cdot \cancel{a_n}}{2\cancel{a_n}} = \frac{3a_1^3}{2} = 12$$

$$a_1^3 = 8$$

$$\boxed{a_1 = 2}$$

26. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2n^2 - 3 < a_n < 2n^2 + 4$$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^3}$ 의 값은? [3점]

$\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ 1 ⑤ $\frac{7}{6}$

S_n은 식으로 써야 하니 주어진 부등식을 모두 Σ 해보자.

$$\sum_{k=1}^{n} 2k^2 - 3 < \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_n}_{S_n} < \sum_{k=1}^{n} 2k^2 + 4$$

$$2\cdot\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} 3 = 2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 3n$$

$$2\cdot\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} 4 = 2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + 4n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2k^2 - 3 \cdot \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2k^2 + 4 \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{2}{3}$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2k^2 - 3 \cdot \frac{1}{n^3}}_{\frac{2}{3}} \le \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_n}_{S_n} \cdot \frac{1}{n^3} \le \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2k^2 + 4 \cdot \frac{1}{n^3}}_{\frac{2}{3}}$$

그렇다면 이 친구도 $\boxed{\frac{2}{3}}$

27. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$n=1$ 대입 $\rightarrow a_1 = \frac{3}{3!} = \frac{1}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(k-1)!} = \frac{3}{(n+2)!}$$

수열의 합 = 식 → $S_n - S_{n-1} = a_n$ 가능

을 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}(a_1 + n^2 a_n)$의 값은? [3점]

① $-\frac{7}{2}$ ② -3 ③ $-\frac{5}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{3}{2}$

$\frac{a_k}{(k-1)!} = b_k$라고 하자.

$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{3}{(n+2)!} = S_n$ (수열 b_n의 합)

$b_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3}{(n+2)!} - \frac{3}{(n+1)!} = \frac{3-3(n+2)}{(n+2)!} = \frac{-3n-3}{(n+2)!}$

$\frac{a_n}{(n-1)!} = \frac{-3n-3}{(n+2)!}$

$a_n(n+2)! = -3(n+1)(n-1)!$

$a_n = -3 \cdot \frac{1}{n(n+2)}$

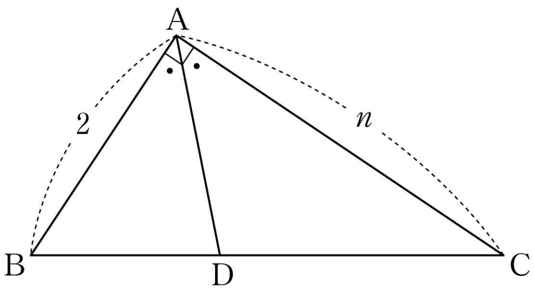
$\lim_{n\to\infty}(a_1 + n^2 \cdot a_n) = \frac{1}{2} - 3 = \boxed{-\frac{5}{2}}$

28. 자연수 n에 대하여 $\angle A = 90°$, $\overline{AB} = 2$, $\overline{CA} = n$인 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. 선분 CD의 길이를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(n - a_n)$의 값은?

$\overline{BD} : \overline{DC} = 2 : n$

[4점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4



$\overline{BD} = \sqrt{2^2 + n^2}$ (피타고라스)

각 이등분선의 성질에 의해 $\overline{BD} : \overline{DC} = 2 : n$이다.

$\overline{CD} = \sqrt{n^2+4} \cdot \frac{n}{n+2} = \frac{n\sqrt{n^2+4}}{n+2}$

$\lim_{n\to\infty}(n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(n - \frac{n\sqrt{n^2+4}}{n+2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2) - n\sqrt{n^2+4}}{n+2}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+2)^2 - n^2(n^2+4)}{(n+2)\{n(n+2) + n\sqrt{n^2+4}\}}$

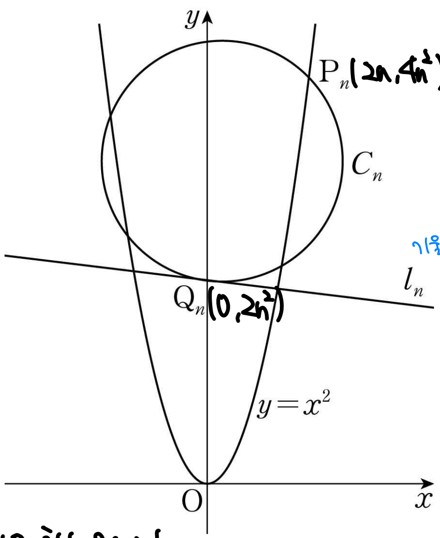
$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(4n)}{(n+2)\cdot 2n^2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$

단답형

29. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(2n,\ 4n^2)$에서의 접선과 수직이고 점 $\mathrm{Q}_n(0,\ 2n^2)$을 지나는 직선을 l_n이라 하자. 점 P_n을 지나고 점 Q_n에서 직선 l_n과 접하는 원을 C_n이라 할 때, 원점을 지나고 원 C_n의 넓이를 이등분하는 직선의 기울기를 a_n이라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$의 값을 구하시오. [4점]

$f'(2n)=4n$

원의 중심을 지난다.

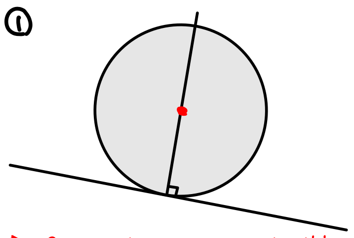


기울기가 $-\frac{1}{4n}$이고 $(0,2n^2)$을 지난다.

$y=-\frac{1}{4n}x+2n^2$

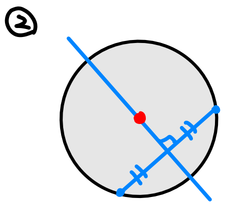
핵심은 원 C_n의 중심을 찾는 것이다.

①



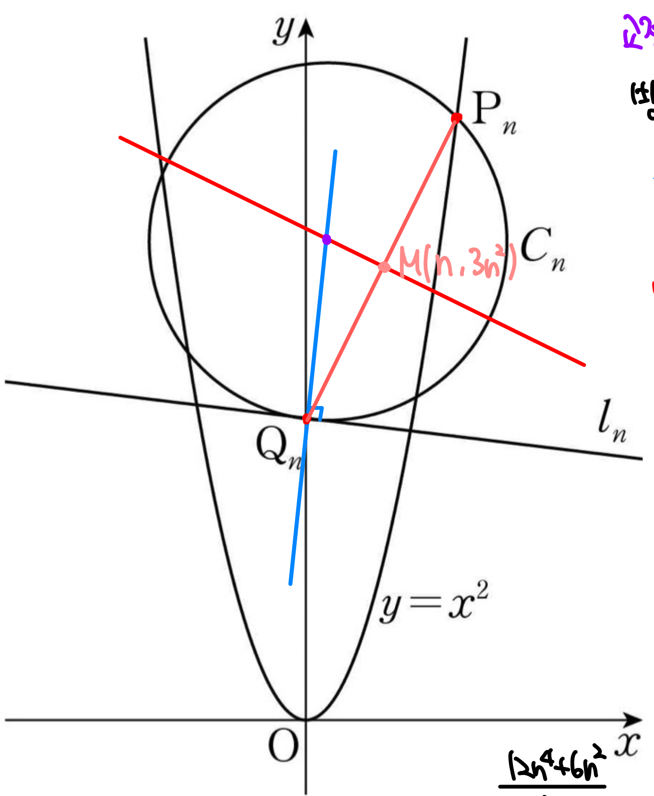
원의 중심의 접선과의 접점에서 연직 어딘가에 있다.

②



교점 2개를 안다면 그들을 이은 선을 수직이등분하는 선 위 어딘가에 중심이 존재한다.

이러한 두 개의 요소로 중심을 찾아보자.



교점의 좌표를 구하기 위해서는 두 개의 직선의 방정식이 필요하다.

파란색 : 기울기 : $4n$, $\mathrm{Q}_n(0,2n^2)$을 지난다.

$y=4nx+2n^2$

빨간색 : 기울기 : $-\frac{1}{n}$, $\mathrm{M}(n,3n^2)$을 지난다.

$y=-\frac{1}{n}(x-n)+3n^2=-\frac{1}{n}x+3n^2+1$

$4nx+2n^2=-\frac{1}{n}x+3n^2+1$ 풀면

$x=\dfrac{n^3+n}{4n^2+1}$ (원의 중심의 x좌표)

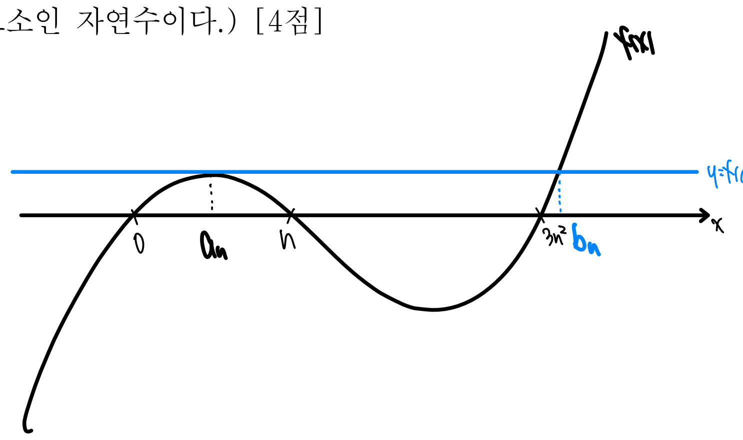
$y=\dfrac{12n^4+6n^2}{4n^2+1}$ (원의 중심의 y좌표)

원점과 원의 중심과의 기울기 $=\dfrac{\frac{12n^4+6n^2}{4n^2+1}}{\frac{n^3+n}{4n^2+1}}=\dfrac{12n^3+6n}{n^2+1}=a_n$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{12n^3+6n}{n^3+n}=\boxed{12}$

30. 자연수 n에 대하여 삼차함수 $f(x)=x(x-n)(x-3n^2)$이 극대가 되는 x를 a_n이라 하자. x에 대한 방정식 $f(x)=f(a_n)$의 근 중에서 a_n이 아닌 근을 b_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_nb_n}{n^3}=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$x=0,\ n,\ 3n^2$에서 x축과 만난다.



답을 구하기 위해서는 a_n과 b_n을 구해야한다.

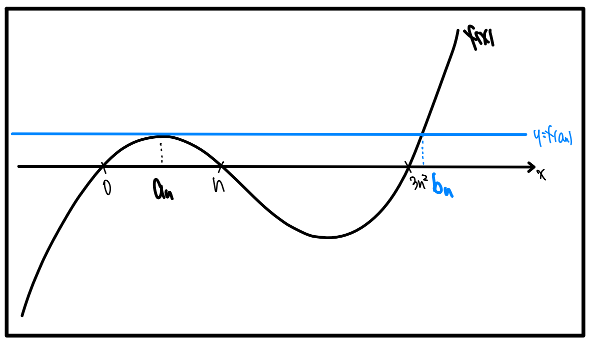
a_n을 구하기 위해 $f(x)$의 도함수를 구해서 찾아보자.

$$f'(x)=(x-n)(x-3n^2)+x(x-n)+x(x-3n^2)$$
$$=x^2-(n+3n^2)x+3n^3+x^2-nx+x^2-3n^2x$$
$$=3x^2-2(3n^2+n)x+3n^3$$

$f'(x)=0$이 되는 x는 근의 공식에 의해 $\dfrac{3n^2+n\pm\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$이다.

a_n은 작은 값이므로

$a_n=\dfrac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$이네.



옆의 그래프를 보면 함수 $f(x)$는 $y=f(a_n)$과 $x=a_n$에서 접하고 $x=b_n$을 관통하므로 $f(x)-f(a_n)=(x-a_n)^2(x-b_n)$이라고 할 수 있다.

$f(0)=0$이므로 대입해보자.

$$f(0)-f(a_n)=a_n^2\cdot(-b_n)$$

$f(x)=x(x-n)(x-3n^2)$이므로

$$f(a_n)=a_n^2b_n$$
$$a_n(a_n-n)(a_n-3n^2)=a_n^2b_n$$

양변을 $a_n\cdot n^3$으로 나누면 문제에서 구하는거네?

$$\frac{a_n^2-(3n^2+n)a_n+3n^2}{n^3}=\frac{a_nb_n}{n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-(3n^2+n)a_n+3n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{a_n}{n}\right)^2-\frac{3n^2+n}{n^2}\cdot\frac{a_n}{n}+3\right\}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2}$

$$=0-3\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{3}{2}$$

$\boxed{p=2,\ q=3\text{이므로 } p+q=5}$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.