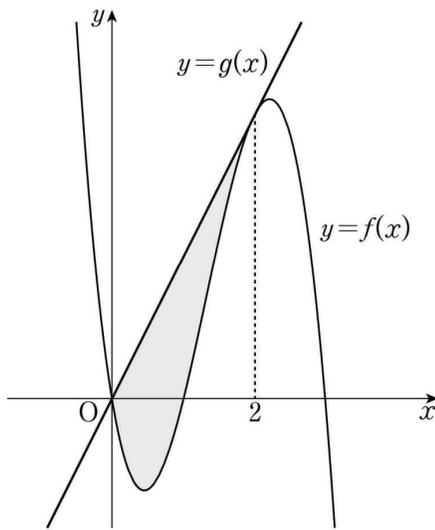


1. 최고차항의 계수가 -3 인 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선 $y=g(x)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 와 원점에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는? [2021년 3월 09]

- ① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$



1. 정답 ③ [2021년 3월 09]

1) 그림 있으면 그림 보면서, 함수 구하기 - 차함수

최고차항의 계수가 -3 인 삼차함수 $f(x)$ 와 일차함수 $g(x)$ 가 있는데 그림처럼 두 함수가 $x=0$ 에서 만나고 $x=2$ 에서 접한다고 합니다. 일단 차함수를 설정할 수 있을 것 같죠?

$f(x)-g(x)=h(x)$ 라 하면 $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 -3 이고 x 축과 $x=0$ 에서 만나고 $x=2$ 에서 접하는 삼차함수니까 $h(x)=-3x(x-2)^2$ 입니다.

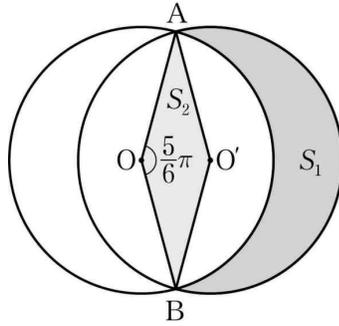
2) $f(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)$ 또는 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)^2$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이
 $\rightarrow \frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$

그리고 나서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하랍니다. 이건 사실상 $h(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같잖아요? 그래서 $h(x)=-3x(x-2)^2$ 와 x 축이 만나는 $x=0$ 과 $x=2$ 를 적분구간으로 해서 그냥 계산해도 됩니다. 그런데 조금만 더 편하게 갈 수 있어요.

위에 행동강령에도 있듯이 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)^2$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$ 입니다.

지금 보면 $a=-3$, $\alpha=0$, $\beta=2$ 잖아요? 그대로 넣어보면 $\frac{1}{4} \times 2^4 = 4$ 이네요. 답은 ③번입니다.

2. 그림과 같이 두 점 O, O' 을 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 두 원 O, O' 이 한 평면 위에 있다. 두 원 O, O' 이 만나는 점을 각각 A, B 라 할 때, $\angle AOB = \frac{5}{6}\pi$ 이다.



원 O 의 외부와 원 O' 의 내부의 공통부분의 넓이를 S_1 , 마름모 $AOBO'$ 의 넓이를 S_2 라 할 때, $S_1 - S_2$ 의 값은? [2021년 3월 11]

- ① $\frac{5}{4}\pi$ ② $\frac{4}{3}\pi$ ③ $\frac{17}{12}\pi$ ④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ $\frac{19}{12}\pi$

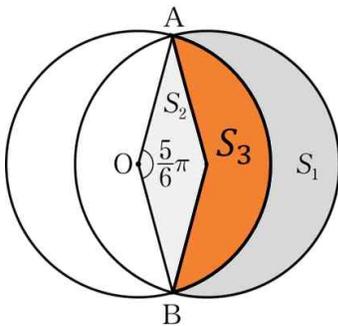
2. 정답 ④ [2021년 3월 11]

1) 그림 있으면 그림 보면서

그림과 같이 반지름의 길이가 3인 두 원 O, O' 가 있어요. 그림에 다 반지름 말고는 다 표시되어 있네요.

이때 원 O 의 외부와 원 O' 의 내부의 공통부분의 넓이를 S_1 , 마름모 $AOBO'$ 의 넓이를 S_2 라 할 때, $S_1 - S_2$ 의 값을 구하랍니다. 음...

일단 S_1 은 그냥은 못 구할 것 같고 빼서 구해야 할 것 같아요. 지금 그림에



이렇게 S_3 를 추가하면 $S_1 + S_3$ 은 원 O' 의 부채꼴이죠. 중심각의 크기는

$\frac{7}{6}\pi$ 이구요.

S_3 는.... 이것도 그냥은 못 구할 것 같고 빼서 구해야 할 것 같습니다. S_2 와 S_3 를 합치면 $S_2 + S_3$ 은 원 O 의 부채꼴입니다. 중심각의 크기는 $\frac{5}{6}\pi$ 이구요.

어? 그런데 둘 다 반지름의 크기가 3이잖아요? 거기에 우리가 구해야 하는 건 $S_1 - S_2$ 인데 이걸 사실상 $S_1 + S_3 - (S_2 + S_3)$ 아닌가요? 그럼 두 부채꼴의 넓이를 빼버리면 되겠네요.

$S_1 + S_3$ 은 $\frac{7}{12} \times \pi \times 3^2$ 이고 $S_2 + S_3 = \frac{5}{12} \times \pi \times 3^2$ 입니다. 이 둘을 빼면 결국 구하는 건 $S_1 - S_2 = \frac{3}{2}\pi$ 이네요.

답은 ④번입니다.

3. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - g(x)}{x - 1} = 5$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + g(x) - 2f(1)}{x - 1} = 7$$

두 실수 a , b 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - a}{x - 1} = b \times g(1)$ 일 때, ab 의

값은? [2021년 3월 12]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

3. 정답 ③ [2021년 3월 12]

1) 조건해석, 함수극한은 논리다

두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가 있는데 (가)조건에서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-g(x)}{x-1} = 5$ 입니다. 일단 분모가 0으로 가는데

극한값이 존재하니까 분자도 0이 되어야겠죠? 따라서 $f(1)=g(1)$ 입니다.

그리고 나서는 $f(x), g(x)$ 가 다항함수니까 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-g(x)}{x-1} = 5$ 를

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)-(g(x)-g(1))}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = f'(1)-g'(1) = 5 \text{로 변형할 수 있죠?}$$

(나)조건에서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1} = 7$ 입니다. 이것도 마찬가지로 해보면 되겠네요. 일단 분모가 0으로

가는데 극한값이 존재하니까 분자도 0이 되어야 합니다. 따라서 $f(1)+g(1)=2f(1)$ 입니다. 이진 당연한데요?

아까 $f(1)=g(1)$ 라고 했었잖아요.

$f(1)+g(1)=2f(1)$ 을 이용하면 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1} = 7$ 을 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+g(x)-f(1)-g(1)}{x-1} = 7$ 로 변형할 수

있어요. $f(x), g(x)$ 는 다항함수니까 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = f'(1)+g'(1) = 7$ 가 됩니다. 아까

$f'(1)-g'(1) = 5$ 랑 연립하면 $f'(1) = 6, g'(1) = 1$ 가 되네요.

마지막으로 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-a}{x-1} = b \times g(1)$ 일 때 ab 의 값을 구하합니다. 이것도 분모가 0으로 가는데 극한값이

존재하네요. 따라서 분자도 0으로 가야 하니까 $f(1)=a$ 입니다. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 6 = b \times g(1) \text{이 되네요. 방금 } f(1)=a \text{이라고 했었는데 } f(1)=g(1) \text{이죠? 따라서}$$

$ab = 6$ 입니다. 답은 ③번이네요.

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & (x < 3) \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{x+a} - \left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} + 8 & (x \geq 3) \end{cases}$$

에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 중에서 y 좌표가 정수인 점의 개수가 23일 때, 정수 a 의 값은? [2021년 3월 13]

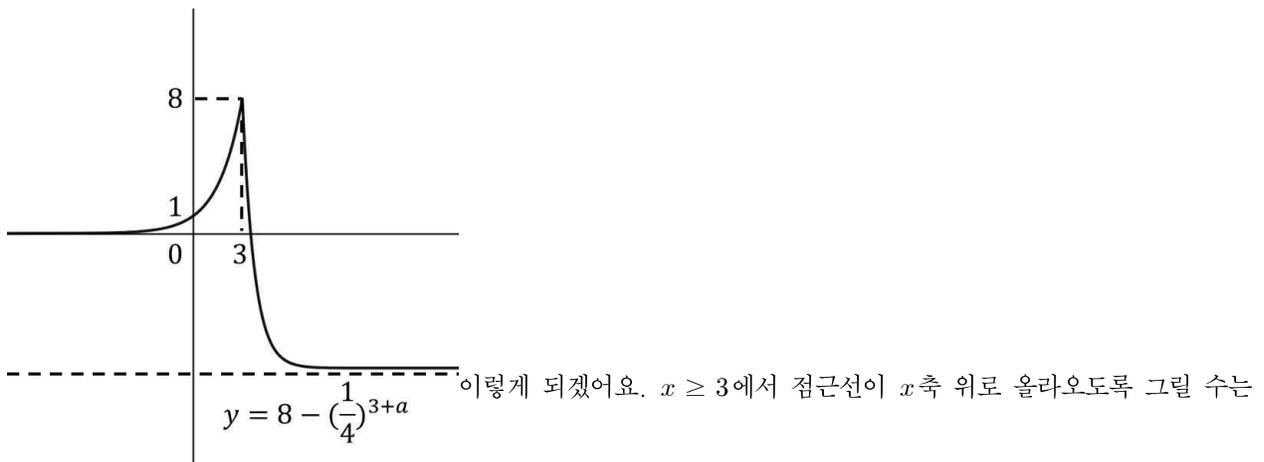
- ① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

4. 정답 ③ [2021년 3월 13]

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 정수 보이면 숫자 넣을 준비

$$\text{함수 } f(x) = \begin{cases} 2^x & (x < 3) \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{x+a} - \left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} + 8 & (x \geq 3) \end{cases} \text{가 있는데 이 위의 점 중에서 } y \text{좌표가 정수인 점의 개수가}$$

23입니다. 이걸 일단 그래프를 그려봐야 할 것 같아요. 대충만 그려봅시다.



없어요. y 좌표가 정수인 점의 개수가 절대로 23개가 나올 수가 없습니다. 1부터 7까지 $x < 3$ 와 $x \geq 3$ 에서 각각 하나씩 있고 8은 하나만 있죠. 총 15개인데 점근선이 더 위로 올라가면 이거보다도 더 작아질 수도 있어요.

그럼 결국 x 축 아래로, 그것도 한참 아래로 내려가야 한다는 말이에요. 일단 지금 현재는 1부터 7까지 $x < 3$ 와 $x \geq 3$ 에서 각각 하나씩 있고 8은 하나만 있는데 0까지 추가되었으니까 지금은 16개예요. 23개가 나오려면? 지금 그래프를 보면 y 값이 음수일 때는 한 점에서만 만나잖아요. 그러니까 -7 까지는 만나야 한다는 이야기죠.

그런데 -8 은 만나면 안 돼요. 따라서 점근선이 -7 과 -8 사이에 있어야 합니다. 그런데 -7 에는 등호가 붙으면 안 돼요. -7 이 점근선이라는 건 $y = -7$ 과 $y = f(x)$ 가 만나지 않는다는 말이잖아요? -8 에는 등호가 들어가도 됩니다. 따라서 $-8 \leq 8 - \left(\frac{1}{4}\right)^{a+3} < -7$ 이고 정리하면 $15 < \left(\frac{1}{4}\right)^{a+3} \leq 16$ 입니다.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{a+3} = 4^{-a-3} \text{이잖아요? 따라서 } 15 < 4^{-a-3} \leq 16 \text{이네요.}$$

2) 정수 보이면 숫자 넣기

a 가 정수잖아요? 4^{-a-3} 에서 지수에 있는 $-a-3$ 가 음수가 된다면 4^{-a-3} 는 분수가 돼요. 말이 안 되죠?

따라서 양수여야 합니다. $-a-3$ 가 양수라면 4^{-a-3} 는 무조건 자연수가 되죠. a 가 정수니까요. $4^1, 4^2, \dots$ 뭐

이런 식으로 되잖아요. 자연수인데 $15 < 4^{-a-3} \leq 16$ 에 있는 건? 16만 가능하죠. $16 = 4^2$ 이니까 $-a-3 = 2$ 이고 $a = -5$ 입니다. 답은 ③번이네요.

5. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = f(x) + |f'(x)|$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0) = g(0) = 0$

(나) 방정식 $f(x) = 0$ 은 양의 실근을 갖는다.

(다) 방정식 $|f(x)| = 4$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$g(3)$ 의 값은? [2021년 3월 14]

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

5. 정답 ① [2021년 3월 14]

1) 조건해석, 함수 구하기 - 인수정리

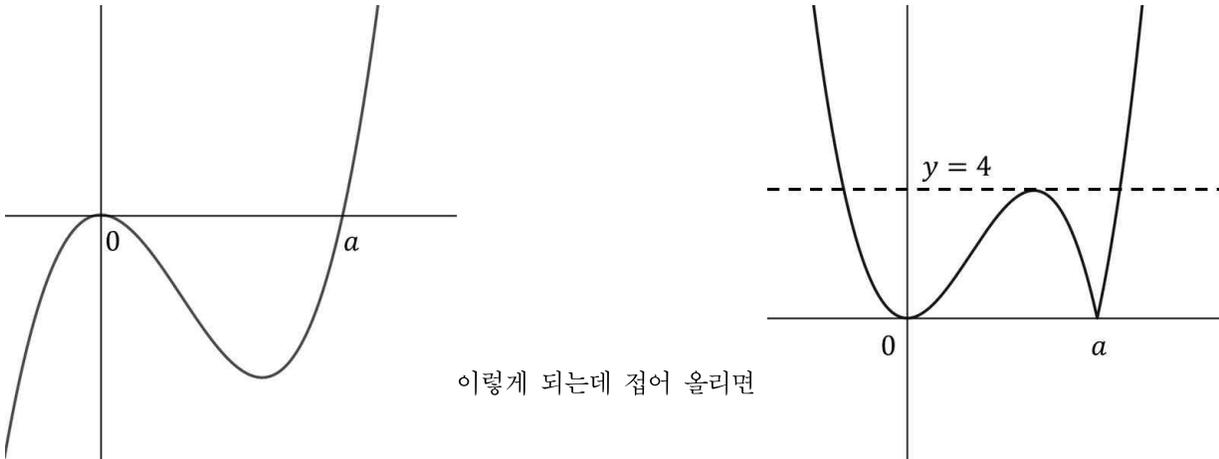
$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수인데 $g(x)=f(x)+|f'(x)|$ 랍니다. 음... 하나는 절댓값이 없고 하나는 절댓값이 씌워져 있네요.. 뭐 좀 더 봅시다.

(가)조건에서 $f(0)=g(0)=0$ 라고 합니다. 위의 식에 다 넣어보면 $f'(0)=0$ 이네요. 일단 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 x 축에 접해야 합니다. $f(0)=f'(0)=0$ 이니까요.

(나)조건에서 $f(x)=0$ 은 양의 실근을 갖는다고 하네요. 그러면 인수정리에 의해 $f(x)=x^2(x-a)$ 라고 할 수 있겠죠? $a > 0$ 이구요.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 절댓값 함수

(다)조건에서 $|f(x)|=4$ 가 서로 다른 3개의 실근을 갖는답니다. $y=|f(x)|$ 와 $y=4$ 가 3개의 점에서 만난다는 거겠죠? 그래프 그려봅시다. 일단 $f(x)$ 는 x 축과 $x=0$ 에서 접하고 $x=a$ 에서 그냥 만나니까



이렇게 되네요. $y=4$ 와 3개의 점에서 만나는 방법은 접어 올렸을 때 극댓값이 4가 되어야 합니다. 그 말은 원래 함수에서 극솟값은 -4 가 된다는 말이죠.

가봅시다. $f(x)=x^2(x-a)$ 를 미분하면 $f'(x)=3x^2-2ax=x(3x-2a)$ 가 됩니다. 극솟점의 x 좌표는

$x = \frac{2}{3}a$ 이네요. 따라서 $f\left(\frac{2}{3}a\right) = -\frac{4}{27}a^3 = -4$ 이고 $a=3$ 입니다. $f(x)=x^2(x-3)$ 이고

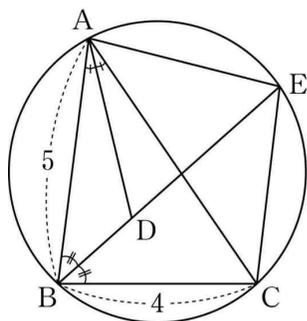
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$ 가 되네요.

이제 마지막으로 $g(3)$ 의 값을 구해봅시다. $g(3)=f(3)+|f'(3)|$ 이고 $f(3)=0$, $f'(3)=9$ 이니까

$g(3)=9$ 입니다. 답은 ①번입니다.

6. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{8}$ 인 삼각형

ABC가 있다. $\angle ABC$ 의 이등분선과 $\angle CAB$ 의 이등분선이
 만나는 점을 D, 선분 BD의 연장선과 삼각형 ABC의 외접원이
 만나는 점을 E라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로
 고른 것은? [2021년 3월 15]



<보 기>

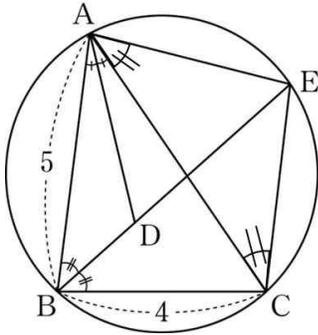
- ㄱ. $\overline{AC}=6$
- ㄴ. $\overline{EA}=\overline{EC}$
- ㄷ. $\overline{ED}=\frac{31}{8}$

- ① ㄱ
- ② ㄱ, ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 정답 ② [2021년 3월 15]

1) 그림 있으면 그림 보면서, 외부 확인

거의 다 표시되어 있는 것 같아요. 여기에 같은 호에 대한 원주각도 표시해줍시다.



이렇게 표시해줄 수 있죠? 삼각형 ACE가 이등변삼각형이라는 건 알 수 있겠네요.

또한 지금 보면 원에 사각형이 내접하고 있는 형태잖아요? $\angle ABE = a$ 라 하면 마주보고 있는 각의 합은 180° 이니까 $\angle AEC = \pi - 2a$ 이죠? 기억은 해두자구요.

2) 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각

지금 삼각형 ABC에서 두 변의 길이와 한 각이 나와 있죠? 시작할 때부터

$\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 4$, $\cos(\angle ABC) = \frac{1}{8}$ 이렇게 다 줬잖아요. 그럼 자연스럽게 나머지를 구할 수 있겠어요.

코사인법칙을 활용해서 나머지 한 변의 길이를 구해봅시다. $\cos(\angle ABC) = \frac{5^2 + 4^2 - \overline{AC}^2}{2 \times 5 \times 4} = \frac{1}{8}$ 이니까

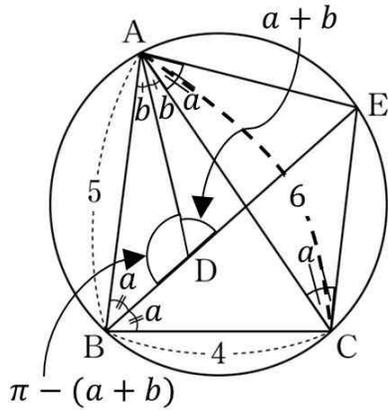
$\overline{AC}^2 = 36$ 이고 $\overline{AC} = 6$ 이네요. ㄱ은 맞네요?

ㄴ에서 $\overline{EA} = \overline{EC}$ 이냐고 물어보네요. 이거 방금 삼각형 ACE가 이등변삼각형이라고 하지 않았었나요? 그럼 당연히 $\overline{EA} = \overline{EC}$ 이죠. ㄴ도 맞습니다.

3) ㄱㄴㄷ 유기성, 각 변환, 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각

ㄷ에서 $\overline{ED} = \frac{31}{8}$ 이냐고 물어보네요. 갑자기 \overline{ED} 는 왜 물어보는 걸까요? 음...

일단 나머지 각부터 표시해봅시다. $\angle BAD = b$ 라 할게요. 그러면



이렇게 되죠? 삼각형 ADE도 이등변삼각형이네요? 그렇다는 건

$\overline{EA} = \overline{EC} = \overline{ED}$ 라는 거죠?

거기에 아까 $\cos(\angle ABC) = \frac{1}{8}$ 인데 $\angle ABC = 2a$ 이고 $\angle AEC = \pi - 2a$ 라고 했었잖아요? $\cos(2a) = \frac{1}{8}$ 이고 $\cos(\angle AEC) = \cos(\pi - 2a)$ 입니다.

\cos 안에 π 가 있죠? 그러면 축을 설정해봅시다. 원에서 $x < 0$ 부분에 있는 x 축이에요. 이 축에서부터 예각만큼 시계방향으로 움직여봅시다. \cos 은 x 값이니까 음수가 나오죠? 따라서

$$\cos(\angle AEC) = \cos(\pi - 2a) = -\frac{1}{8} \text{ 입니다.}$$

여기서도 코사인법칙을 사용하면 $\cos(\angle AEC) = \frac{2\overline{EA}^2 - 36}{2\overline{EA}^2} = -\frac{1}{8}$ 가 됩니다. 정리하면 $\overline{EA}^2 = 16$ 이고

$\overline{EA} = \overline{EC} = \overline{ED} = 4$ 가 되죠. 드은 아니네요. 따라서 맞는 건 ㄱ, ㄴ 이고 답은 ㉔번입니다.

7. 실수 m 에 대하여 직선 $y = mx$ 와 함수

$$f(x) = 2x + 3 + |x - 1|$$

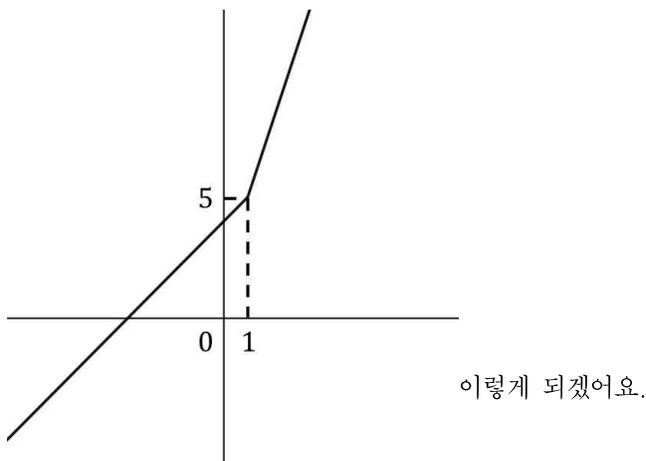
의 그래프의 교점의 개수를 $g(m)$ 이라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(5)$ 의 값을 구하시오. [2021년 3월 20]

7. 정답 8 [2021년 3월 20]

1) 절댓값은 범위 나누고 풀기, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$f(x) = 2x + 3 + |x - 1|$ 가 있는데 $y = mx$ 와의 교점의 개수를 $g(m)$ 이라고 합니다. 일단 범위 나누고 그래프를 그려봐야 알겠죠?

일단 $x = 1$ 을 기준으로 풀어봅시다. $f(x) = \begin{cases} x + 4 & (x < 1) \\ 3x + 2 & (x \geq 1) \end{cases}$ 가 되겠네요. 그래프를 그려볼까요?

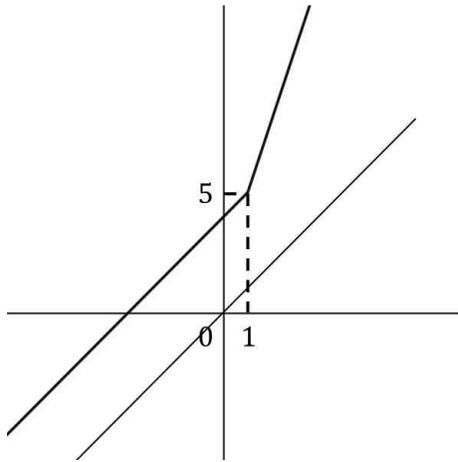


이 그래프가 원점을 지나고 기울기가 m 인 직선 $y = mx$ 와 만나는 점의 개수가 $g(m)$ 입니다. 그리고 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$ 가 있는데 $g(x)h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속입니다. 곱한 함수가 연속이 된다... 이걸 뭔가 $g(x)$ 가 불연속인 곳이 있다는 말 아닐까요?

2) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인

일단 그래프를 잘 관찰해봅시다. 먼저 $g(m)$ 은 $y = f(x)$ 과 $y = mx$ 가 만나는 점의 개수잖아요? 기울기를 천천히 증가시켜 보면서 불연속인 곳이 있는지 확인해보면 되겠네요.

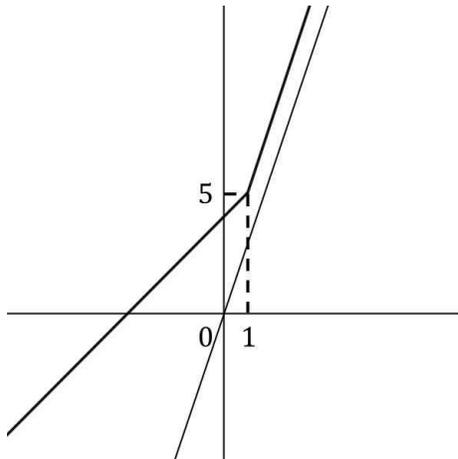
기울기가 어어어어어엄청 작을 때는 1개의 점에서 만나요. 그러다가...



이렇게 기울기가 1이 되면 만나는 점이 없게 되죠. 불연속이죠? 따라서

$g(m)$ 은 $m = 1$ 일 때 불연속입니다.

당분간 기울기를 증가시키더라도 계속 만나지 않습니다. 언제까지일까요?



이렇게 기울기가 3이 될 때까지이죠. 기울기가 3보다 약간 커지면

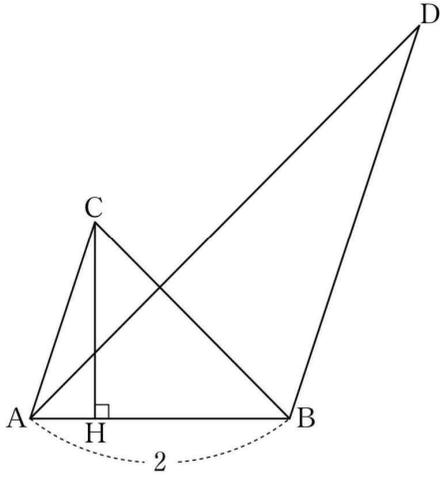
$x \geq 1$ 에서 $f(x)$ 와 언젠가는 만날 테니까요. 기울기가 더 큰 $y = mx$ 가 더 빠른 속도로 증가하잖아요. 따라서 $g(m)$ 은 $m = 3$ 일 때도 불연속입니다.

$h(x)$ 는 다항함수이죠? $x = 1$, $x = 3$ 에서 불연속인 $g(x)$ 와 곱해서 연속이 될 수 있는 방법은 함숫값이 0이 되는 방법뿐이죠. 따라서 $h(1) = h(3) = 0$ 입니다.

3) 함수 구하기 - 인수정리

$h(1) = h(3) = 0$ 이니까 인수정리에 의하여 $h(x) = (x-1)(x-3)$ 입니다. $h(5) = 8$ 이네요.

8. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}\parallel\overline{BD}$, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$ 인 두 삼각형 ABC , ABD 가 있다. 점 C 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발 H 는 선분 AB 를 $1:3$ 으로 내분한다.



두 삼각형 ABC , ABD 의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r , R 라 할 때, $4(R^2 - r^2) \times \sin^2(\angle CAB) = 51$ 이다. \overline{AC}^2 의 값을 구하시오. (단, $\angle CAB < \frac{\pi}{2}$) [2021년 3월 21]

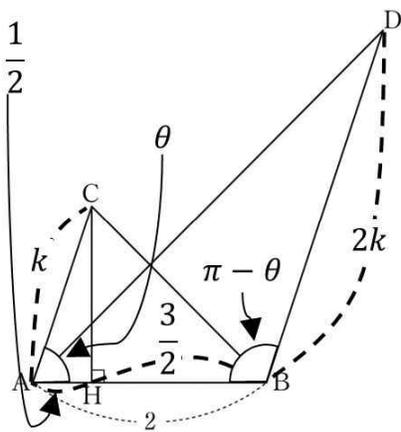
8. 정답 15 [2021년 3월 21]

1) 그림 있으면 그림 보면서,

그림이 있네요. 그리고 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$ 이라고 합니다. 거기에 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 1:3으로 내분한다고 합니다. 이거 다 표시좀 해볼까요?

일단 H가 선분 AB를 1:3으로 내분한다고 하니까 $\overline{AH}=\frac{1}{2}$, $\overline{HB}=\frac{3}{2}$ 입니다. 그리고 $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$ 이니까 $\overline{AC}=k$ 라 하면 $\overline{BD}=2k$ 입니다.

거기에 AC와 BD가 평행하잖아요? 그러면 $\angle CAB$ 와 $\angle ABD$ 을 합치면 π 가 되겠네요. $\angle CAB=\theta$ 라 하면 $\angle ABD=\pi-\theta$ 입니다.



이렇게 되겠네요.

2) 외부

그리고 두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r , R 라 할 때,

$4(R^2 - r^2) \times \sin^2(\angle CAB) = 51$ 이라고 합니다. 외접원의 반지름의 길이라고 하니까 사인법칙이 생각나죠?

그런데 우리가 알고 있는 작은 $\angle CAB$ 와 $\angle ABD$ 이예요. 이걸로 표현해야겠죠? 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \theta} = 2r, \quad \frac{\overline{AD}}{\sin(\pi - \theta)} = 2R \text{입니다. 각 변환을 할 수 있겠네요?}$$

$\sin(\pi - \theta)$ 에서 π 가 있으니까 축은 $x < 0$ 부분의 x 축을 설정하구요, 축으로부터 예각인 θ 만큼 시계방향으로 움직이면 사인값은 y 값인데 양수가 나오죠. 따라서 $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ 입니다.

$$R^2 = \frac{\overline{AD}^2}{4\sin^2 \theta}, \quad r^2 = \frac{\overline{BC}^2}{4\sin^2 \theta} \text{가 되겠네요. } 4(R^2 - r^2) \times \sin^2(\angle CAB) = 51 \text{에 다 넣어보면 } \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 = 51 \text{가}$$

됩니다.

사인값이 각 변환되는 것을 보니 코사인값도 각 변환이 될 것 같은데요? 가봅시다. $\cos(\pi - \theta)$ 에서 π 가 있으니 $x < 0$ 부분의 x 축을 설정하구요, 축으로부터 예각인 θ 만큼 시계방향으로 움직이면 코사인값은 x 값인데 음수가 나오네요. 따라서 $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ 입니다.

코사인값이 나왔으니 코사인법칙까지 사용하면 되겠네요.

$$\cos\theta = \frac{k^2 + 4 - \overline{BC}^2}{4k}, \quad \cos(\pi - \theta) = \frac{4k^2 + 4 - \overline{AD}^2}{8k} = -\cos\theta \text{입니다. 그런데 지금 그림을 보면}$$

$$\cos\theta = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2k} \text{이잖아요? 따라서 } \overline{BC}^2 = k^2 + 2, \quad \overline{AD}^2 = 4k^2 + 8 \text{입니다. } \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 = 51 \text{에 넣으면}$$

$$k^2 = 15 \text{가 나오네요. } \overline{AC} = k \text{라고 했잖아요? 따라서 } k^2 = \overline{AC}^2 = 15 \text{입니다.}$$

9. 양수 a 와 일차함수 $f(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x (t^2 - 4) \{|f(t)| - a\} dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.
(나) $g(2) = 5$

$g(0) - g(-4)$ 의 값을 구하시오. [2021년 3월 22]

9. 정답 16 [2021년 3월 22]

1) 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우,

a 가 양수이고 $f(x)$ 가 일차함수인데 $g(x) = \int_0^x (t^2 - 4)\{|f(t)| - a\}dt$ 라고 합니다. 일단 위끝과 아래끝이 같아지는 $x = 0$ 을 넣으면 $g(0) = 0$ 이네요.

그리고 미분하면 $g'(x) = (x+2)(x-2)(|f(x)| - a)$ 입니다.

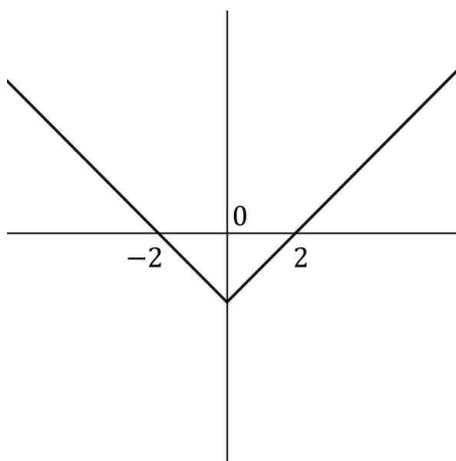
2) 조건해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

(가)조건에서 $g(x)$ 가 극값을 갖지 않는다고 합니다. 극값을 갖지 않는다는 건 도함수의 부호의 변화가 없다는 거죠? 일시적으로 접선의 기울기가 0이 될 수는 있지만(도함수가 x 축과 만날 수는 있지만) 도함수가 x 축을 가로지르는 건 안 된다는 말이에요. 도함수가 x 축에 있지 않다면 계속 양수이거나 계속 음수이면 되구요, x 축과 만났다면 반드시 접해야 합니다. 그래야 방향을 바꾸어 부호의 변화가 일어나지 않게 되죠. 이걸 다시 말해서 $g'(x)$ 의 인수는 없거나 짝수 개여야 한다는 말이죠.

그런데 방금 미분했었잖아요? $g'(x) = (x+2)(x-2)(|f(x)| - a)$ 였죠. 이미 $x = -2$, $x = 2$ 에서 값이 0이 되네요? 만약 인수가 하나만 있으면 그대로 x 축을 가로지르게 될 거예요. 이러면 부호의 변화가 생기죠.

$y = x - 2$, $y = x + 2$ 의 그래프를 생각해 보세요. 인수가 하나만 있다면 그 근방에서는 일차함수처럼 지나가잖아요.

따라서 $|f(2)| = |f(-2)| = a$ 여야 합니다. $f(x)$ 는 일차함수이죠? 거기에 절댓값을 씌운 함수가 $|f(x)|$ 이예요. V자 모양의 함수이죠. 이 함수가 $x = -2$, $x = 2$ 에서의 함숫값이 같다는 건?



이런 그래프가 나와야 한다는 거죠. 일단 $|f(x)|$ 는 $x = 0$ 을 중심으로

꺾여야 합니다. $f(0) = 0$ 입니다. 그런데 기울기는 아직 모르죠. k 라고 둡시다. $|f(x)| = |kx|$ 가 되는 거죠.

그리고 $|f(2)| = |f(-2)| = a$ 여야 하잖아요? 따라서 $|2k| = |-2k| = a$ 입니다. $k = \frac{a}{2}$ 이거나 $k = -\frac{a}{2}$ 입니다.

부호가 큰 의미는 없어요. 어차피 절댓값을 씌우면 $|f(x)| = \left| \frac{a}{2}x \right| - a$ 가 되는 건 같으니까요. $|x|$ 나 $|-x|$ 나 결국 같은 함수잖아요?

$g'(x) = (x+2)(x-2) \left(\left| \frac{a}{2}x \right| - a \right)$ 입니다. $x=0$ 을 기준으로 절댓값을 풀면

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{a}{2}(x+2)^2(x-2) & (x < 0) \\ \frac{a}{2}(x+2)(x-2)^2 & (x \geq 0) \end{cases} \text{가 되겠네요.}$$

(나)조건에서 $g(2) = 5$ 라고 합니다. 그리고 보니 아까 $g(0) = 0$ 이라고 했었죠? 그냥 $\int_0^2 g'(x) dx = 5$ 로 구하면

되겠어요. 따라서 $\int_0^2 g'(x) dx = \int_0^2 \frac{a}{2}(x+2)(x-2)^2 dx = \frac{a}{2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 8x \right]_0^2 = \frac{10}{3}a = 5$ 이고

$$a = \frac{3}{2} \text{입니다. } g'(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}(x+2)^2(x-2) & (x < 0) \\ \frac{3}{4}(x+2)(x-2)^2 & (x \geq 0) \end{cases} \text{이네요.}$$

마지막으로 $g(0) - g(-4)$ 를 구하랍니다. 이거도 마찬가지로 구해봅시다. $\int_{-4}^0 g'(x) dx$ 로 구하면 되겠죠?

$$\int_{-4}^0 g'(x) dx = \int_{-4}^0 -\frac{3}{4}(x+2)^2(x-2) dx = -\frac{3}{4} \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 8x \right]_{-4}^0 = 16 \text{이네요.}$$

10. 숫자 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드 사이에 두 장 이상의 카드가 있도록 나열하는 경우의 수는? [2021년 3월 확통 27]

- ① 180 ② 185 ③ 190 ④ 195 ⑤ 200



10. 정답 ⑤ [2021년 3월 확통 27]

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

1, 2, 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 7개의 카드가 있는데 이걸 일렬로 나열할 때, 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드 사이에 두 장 이상이 있도록 나열하는 경우의 수를 구하십시오.

2-1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

음... 일단 1과 2 사이에 카드를 두 장일 때, 세 장일 때, 네 장일 때...로 해도 될 것 같긴 하네요.

2-1-1) 두 장일 때

일단 두 장일 때는 1002에 00의 자리에 숫자를 집어넣고 이 1002를 마치 하나의 숫자처럼 취급하면 되겠어요. 일단 1과 2의 자리를 바꿀 수 있으니까 경우의 수는 2입니다. 지금은 1002로 정했다고 가정해볼게요. 그리고 00에 넣을 수 있는 경우는 33, 34, 44가 있어요.

33일 때는 00 안에서 자리는 바꿀 수 없습니다. 경우의 수는 1이구요. 그리고 난 후에는 1332과 4, 4, 4를 배열하면 되겠네요. 같은 것이 있는 순열에 의해 $\frac{4!}{3!} = 4$ 입니다.

34일 때는 자리를 바꿀 수 있네요. 경우의 수는 2입니다. 지금은 1342로 정했다고 해볼게요. 그러면 1342와 3, 4, 4를 배열해야 합니다. 따라서 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$ 이네요. 방금 2까지 곱하면 24입니다.

44일 때 자리는 바꿀 수 없습니다. 경우의 수는 1이고 그 다음에는 1442와 3, 3, 4를 배열해야 하니까 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$ 이네요. 따라서 총 경우의 수는 $2 \times (4 + 24 + 12) = 80$ 입니다.

2-1-2) 세 장일 때

세 장일 때는 334, 344, 444가 있습니다. 두 장일 때와 마찬가지로 해보면 되겠죠? 10002에 000의 자리에 숫자를 넣으면 됩니다. 일단 1과 2의 자리를 바꿀 수 있으니까 경우의 수는 2이구요. 10002로 정할게요.

334일 때는 자리를 바꿀 수 있죠. 경우의 수는 3입니다. 지금은 13342로 정했다고 해볼게요. 그리고 난 후에는 13342와 4, 4를 배열해야 하니까 경우의 수는 3이네요. 방금 3까지 곱하면 9입니다.

344일 때도 자리를 바꿀 수 있습니다. 경우의 수는 3이구요. 13442로 정했다고 해봅시다. 13442와 3, 4를 배열하면 경우의 수는 $3! = 6$ 입니다. 3까지 곱하면 18입니다.

444일 때는 자리를 바꿀 수 없네요. 14442로 정했다고 하면 14442와 3, 3을 배열해야 하니까 경우의 수는 3입니다. 따라서 총 경우의 수는 $2 \times (9 + 18 + 3) = 60$ 입니다.

2-1-3) 네 장일 때

네 장일 때는 3344, 3444가 있습니다. 가봅시다. 100002의 0000의 자리에 넣으면 됩니다. 일단 1와 2를 바꿀 수 있으니까 경우의 수는 2이구요. 100002로 정했다고 해볼게요.

3344일 때는 자리를 바꿀 수 있어요. $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$ 입니다. 133442로 정했다고 해보면 133442와 4를 배열해야 하네요. 경우의 수는 2입니다. 방금 6을 곱하면 12입니다.

3444일 때도 자리를 바꿀 수 있겠어요. $\frac{4!}{3!} = 4$ 입니다. 134442로 정했다고 해보면 134442와 3을 배열해야 하니까 경우의 수는 2입니다. 4를 곱하면 8입니다. 따라서 총 경우의 수는 $2 \times (12 + 8) = 40$ 입니다.

2-1-4) 다섯 장일 때

다섯 장일 때는 33444가 있네요. 1000002에서 1과 2도 배열 가능하고, 33444도 배열 가능합니다. 따라서

$$2 \times \frac{5!}{3! \times 2!} = 20 \text{이네요.}$$

구하는 경우의 수는 $80 + 60 + 40 + 20 = 200$ 입니다. 답은 ⑤번이네요.

2-2) 여사건

그런데 이거 결국에는 1과 2 사이에는 적어도 2장이 있어야 하는 것 아닌가요? 그러면 여사건으로 해도 될 것 같은데요?

그러면 1장만 있거나 없는 경우를 전체 경우에서 빼면 되겠네요. 일단 전체 경우부터 구해봅시다.

1, 2, 3, 3, 4, 4, 4를 배열하는 거니까 같은 것이 있는 순열에 의해 $\frac{7!}{3! \times 2!} = 420$ 입니다.

1과 2 사이에 한 장만 있는 경우를 해봅시다. 102에서 0에 숫자가 들어가야 하죠? 1과 2의 자리를 바꿀 수 있으니까 일단 경우의 수는 2입니다. 그리고 0에 들어가는 것이 가능한 숫자는 3 아니면 4죠.

3이라면 132와 3, 4, 4, 4를 배열해야 합니다. 따라서 경우의 수는 $\frac{5!}{3!} = 20$ 입니다.

4라면 142와 3, 3, 4, 4를 배열해야 합니다. 따라서 경우의 수는 $\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$ 입니다.

따라서 총 경우의 수는 $2 \times (20 + 30) = 100$ 입니다.

없는 경우로 가봅시다. 그럼 그냥 12만 하나로 묶고 나머지는 배열해버리면 됩니다. 12의 자리를 바꿀 수 있으니까 경우의 수는 2이구요. 12로 정했다고 하면 12와 3, 3, 4, 4, 4를 배열하면 됩니다.

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = 120 \text{이네요.}$$

따라서 구하는 경우의 수는 $420 - (100 + 120) = 200$ 입니다. 답은 ⑤번이네요.

11. 두 집합

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, Y = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는? [2021년 3월 확통 28]

(가) $f(2) < f(3) < f(4)$

(나) $f(1) > f(3) > f(5)$

- ① 100 ② 102 ③ 104 ④ 106 ⑤ 108

11. 정답 ③ [2021년 3월 확통 28]

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ 가 있고 f 는 $X \rightarrow Y$ 의 함수인데 $f(2) < f(3) < f(4)$ 이고 $f(1) > f(3) > f(5)$ 인 함수의 개수를 구하합니다.

$f(2) < f(3) < f(4)$ 이런 것들을 대처하는 방법은 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 가 가질 수 있는 함숫값인 2, 4, 6, 8, 10, 12 중에서 아무거나 3개를 고르고 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 에 배열해버리면 됩니다. 그러면 자동으로 작은 순서대로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 가 될 거예요. $f(1) > f(3) > f(5)$ 도 마찬가지로이죠.

그런데 문제는 두 조건 모두에 $f(3)$ 이 걸려 있다는 거예요. $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 를 배열했을 때 동시에 $f(1) > f(3) > f(5)$ 를 배열할 수가 없습니다. $f(3)$ 은 같아야 하는데 동시에 배열하는 과정에서 값이 달라질 수가 있잖아요? 따라서 $f(3)$ 을 기준으로 잡고 분류해야 할 것 같아요.

일단 $f(3) = 2$ 는 불가능할 것 같아요. 가장 작은 함숫값인데 그러면 $f(3)$ 보다 작을 수가 없죠. $f(3) = 12$ 도 가장 큰 함숫값이니까 불가능할 것 같구요. 이거보다 클 수는 없잖아요.

$f(3) = 4$ 라면 $f(2) < f(3) < f(4)$ 이기 위해서 $f(2) = 2$ 이어야 합니다. $f(4)$ 는 6, 8, 10, 12 중에서 하나를 고르면 되겠네요. 경우의 수는 4입니다. 동시에 $f(1) > f(3) > f(5)$ 이기 위해서 $f(5) = 2$ 이어야 하구요, $f(1)$ 은 $f(4)$ 와 마찬가지로 6, 8, 10, 12 중에서 하나를 골라야 합니다. 따라서 총 경우의 수는 $4 \times 4 = 16$ 입니다.

$f(3) = 6$ 이라면 $f(2) < f(3) < f(4)$ 이기 위해서 $f(2)$ 는 2, 4 중에 하나를 고르고 $f(4)$ 는 8, 10, 12 중에서 하나를 골라야 합니다. 동시에 $f(1) > f(3) > f(5)$ 이기 위해서 $f(5)$ 는 2, 4 중에 하나를 고르고 $f(1)$ 은 8, 10, 12 중에서 하나를 골라야 합니다. 따라서 총 경우의 수는 $2 \times 3 \times 3 \times 2 = 36$ 입니다.

$f(3) = 8$ 이라면 $f(2) < f(3) < f(4)$ 이기 위해서 $f(2)$ 는 2, 4, 6 중에 하나를 고르고 $f(4)$ 는 10, 12 중에서 하나를 골라야 합니다. 동시에 $f(1) > f(3) > f(5)$ 이기 위해서 $f(5)$ 는 2, 4, 6 중에 하나를 고르고 $f(1)$ 은 10, 12 중에서 하나를 골라야 합니다. 따라서 총 경우의 수는 $2 \times 3 \times 3 \times 2 = 36$ 입니다.

$f(3) = 10$ 이라면 $f(2) < f(3) < f(4)$ 이기 위해서 $f(2)$ 는 2, 4, 6, 8 중에 하나를 고르고 $f(4) = 12$ 이어야 합니다. $f(1) > f(3) > f(5)$ 이기 위해서 $f(5)$ 는 2, 4, 6, 8 중에 하나를 고르고 $f(1) = 12$ 이어야 하네요. 따라서 총 경우의 수는 $4 \times 4 = 16$ 입니다.

구하는 경우의 수는 $16 + 36 + 36 + 16 = 104$ 입니다. 답은 ③번이네요.

12. 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. [2021년 3월 확통 30]

- | |
|---|
| <p>(가) 숫자 1은 한 번 이상 나온다.
(나) 이웃한 두 수의 차는 모두 2 이하이다.</p> |
|---|

12. 정답 97 [2021년 3월 확통 30]

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후 일렬로 나열할 때 1은 한 번 이상 나오고 이웃한 두 수의 차는 모두 2 이하여야 합니다. 음..

일단 중복을 허락하여 네 개를 선택하여 일렬로 나열한다는 건 알겠어요. 그러니까 사실상 4자리의 자연수 만들기랑 같은 거죠.

숫자 1은 한 번 이상 나와야 한다는 것도 알겠어요. 이웃한 두 수의 차는 모두 2 이하여야 한다는 걸 좀 볼게요. 이웃한 두 수의 차가 2 이하가 아닌 경우는 뭘까요? 1과 4가 붙어 있는 경우겠네요. 그거 말고는 다 차이가 2 이하잖아요. 그러니까 사실상 (나)조건은 1과 4는 붙어 있으면 안 된다는 걸 말하고 있는 거네요.

그러면 숫자 1의 개수를 기준으로 잡고 분류해볼까요? 여사건을 사용할 수도 있겠지만... 그건 너무 복잡해 보여요.

2) 케이스 분류

2-1) 1이 1개일 때

1을 제외하고 나머지 숫자들은 222, 223, 224, 233, 234, 244, 333, 334, 344, 444가 가능합니다.

222의 경우 1222를 나열하면 경우의 수는 $\frac{4!}{3!} = 4$ 입니다.

223의 경우 1223을 나열하면 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$ 입니다.

224의 경우는 조심해야 합니다. 1과 4가 붙으면 안 되니까요. 이게 가능하려면 1과 4 사이에 적어도 하나의 숫자가 끼 있어야 합니다. 그냥 붙은 경우를 전체에서 빼주죠. 전체 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$ 인데 1과 4가 붙는다면 일단 1과 4의 자리를 바꿀 수 있으니까 경우의 수 2, 14의 순서로 고정하면 14와 2, 2를 나열하는 거니까 경우의 수는 3입니다. 총 $12 - 2 \times 3 = 6$ 이네요.

233의 경우 1233을 나열하면 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$ 입니다.

234의 경우 역시 224의 경우와 마찬가지로 전체에서 빼줍니다. 전체 경우의 수는 $4! = 24$ 인데 1과 4가 붙는다면 일단 1과 4의 자리를 바꿀 수 있으니까 경우의 수 2, 14의 순서로 고정하면 14와 2, 3를 나열하는 거니까 경우의 수는 $3! = 6$ 입니다. 총 $24 - 2 \times 6 = 12$ 이네요.

244도 조심해야 하는데 애는 약간 다르네요. 4랑 1이 붙게 하지 않으려면 완전히 양 옆으로 떨어져

있어야겠어요. 가능한 건 1244, 4421 두 가지네요.

333의 경우 1333을 나열하면 경우의 수는 $\frac{4!}{3!} = 4$ 입니다.

334의 경우 224랑 경우가 같겠죠? 경우의 수는 6입니다.

344의 경우 244와 마찬가지로 조심해야 해요. 이게 가능한 경우는 1344, 4431 두 가지네요.

444는 불가능합니다. 뭘 해도 불게 되니까요.

따라서 총 경우의 수는 $4 + 12 + 6 + 12 + 12 + 2 + 4 + 6 + 2 = 60$ 입니다.

2-2) 1이 2개일 때

1을 제외하고 나머지 숫자를 정하는 경우는 22, 23, 24, 33, 34, 44가 가능하네요.

22인 경우 1122를 나열하면 경우의 수는 $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$ 입니다.

23의 경우 1123을 나열하면 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$ 입니다.

24의 경우는 조심해야 해요. 1과 4가 붙으면 안 되잖아요. 1124, 4211 두 가지만 가능하네요.

33의 경우 1133을 나열하면 경우의 수는 $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$ 입니다.

34의 경우 역시 24와 같습니다. 2가 3으로 바뀔 뿐이니까요. 2입니다.

44의 경우는 불가능합니다. 무조건 이웃하게 되잖아요.

따라서 총 $6 + 12 + 2 + 6 + 2 = 28$ 입니다.

2-3) 1이 3개일 때

나머지 숫자는 2 또는 3이어야 하겠어요. 4가 존재하면 무조건 이웃하게 되니까요. 경우의 수는 2입니다.

2라고 가정하면 1112를 배열하는 거니까 $\frac{4!}{3!} = 4$ 이네요. 총 경우의 수는 8입니다.

2-4) 1이 4개일 때

이러면 경우의 수는 1개죠.

따라서 구하는 경우의 수는 $60 + 28 + 8 + 1 = 97$ 입니다.