곡선의 의식의 흐름1 2017 인하대

의예과 논술

[문제 1] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 양의 실수 a에 대하여 $a+\frac{1}{a} \geq 2$이다.

(나) 어떤 명제 $p(n)$이 모든 자연수 $n \geq 2$에 대하여 성립함을 증명할 때, 수학적 귀납법을 이용하려면 다음 두 가지를 보여야 한다.

(i) $n=2$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k \geq 2$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

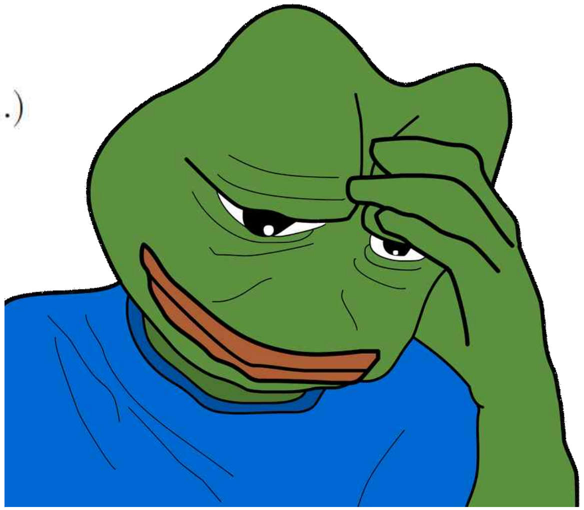
(※) 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 부등식을 만족한다.

$$a_{n+1} \geq \frac{na_n}{{a_n}^2+n-1} \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

음... 제시문을 해석해보자.

산술기하평균과 수학적 귀납법이 나왔다.

수열이 양수라는 점도 기억해보자



(1-1) 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (6점)

$$\frac{n}{a_{n+1}} - \frac{n-1}{a_n} \le a_n$$

1-1) 보자.

일단

a_{n+1}항이 분모로 가야한다는 사실을 알 수 있다.

그렇다면

조건으로 주어진 부등식을 역수 취해보면 어떨까?

$$\frac{1}{a_{n+1}} \le \frac{{a_n}^2+n-1}{na_n}$$

양변에 n을 곱하고 정리하면 나올 **Feel**을 받았다.

$$\frac{n}{a_{n+1}} \le a_n + \frac{n-1}{a_n}, \quad \frac{n}{a_{n+1}} - \frac{n-1}{a_n} \le a_n$$

(1-2) 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (7점)

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \frac{n}{a_{n+1}}$$

1−2)을 보자. ~~저걸 어떻게보여~~

1−1)을 괜히 주진 안했을 것이라는 생각이 든다.

그래서 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 부분을 관찰해보면

1−1)의 식에

1부터 n까지 넣은 식을 관찰해보면

좋을 것 같은 생각이 든다.

$\frac{n}{a_{n+1}} - \frac{n-1}{a_n} \leq a_n$, 즉 $a_n \geq \frac{n}{a_{n+1}} - \frac{n-1}{a_n}$

위 식에 1부터 n까지 넣고 더해보자.

$a_1+a_2+\cdots+a_n \geq \frac{1}{a_2} - \frac{0}{a_1} + \frac{2}{a_3} - \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{n}{a_{n+1}} - \frac{n-1}{a_n}$

Feel이 왔다.

위 부등식의 우항을 잘 정리하면

$a_1+a_2+\cdots+a_n \geq \frac{n}{a_{n+1}}$

(1-3) 수학적 귀납법을 이용하여, 모든 자연수 $n \geq 2$에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (12점)

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$$

흠 대놓고

수학적 귀납법을 쓰라고 했으니 써야할 것인데,

쌔하다... 여태껏 산술기하평균을 쓴 적이 없다.

~~눈치 챘겠지만~~

여기서 산술기하평균 써야할 것 같은 Feel이 온다.

(1−2)의 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \frac{n}{a_{n+1}}$도

'풀이 과정에서 쓸 수 있다'라는

mind 탑재한 후 문제를 바라보는데

더 이상은 잘 모르겠으니

문제에서 시킨 대로 수학적 귀납법 써보자. ㅠㅠ

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$ ······ (*)

(i) $n=2$일 때, (좌변)$=a_1+a_2$이고 (우변)$=2$이다.

여기서부터 막힌다.

아니? a_n이 양수라고 했지만

(좌변)$=a_1+a_2$이 2 이상인지 어캐 아냐?

당황스럽지만 내가 쓸 수 있는 수단을 생각해본다.

(1) 아직 안 쓴 산술기하평균

(2) (1−1) $\frac{n}{a_{n+1}} - \frac{n-1}{a_n} \leq a_n$

(3) (1−2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \frac{n}{a_{n+1}}$

요거 3개인데, 찾아보자.

일단,

(1) 조건은 (좌변)$=a_1+a_2$을 보고

할 수 있는 방법이 떠오르지 않는다.

(2) 조건은 1을 대입했을 때, $\frac{1}{a_2} \leq a_1$이다.

이걸로 뭐할 수 있을지 보자. Feel이 온다.

(좌변)$=a_1+a_2 \geq \frac{1}{a_2}+a_2$ 이렇게 바꿀 수 있고

(드디어) 산술기하평균에 의해

(좌변)$=a_1+a_2 \geq \frac{1}{a_2}+a_2 \geq 2$라는 것까지도

완벽하게 보일 수 있다.

(3) 조건은 그럼 안 쓰는 건가?
일단 내가 구하는 것은 구했으니
굳이 해보지 않고 언젠가 쓰려니 생각하고
넘어가자.
(사실 (3) 조건에 1을 넣어도 (2) 조건하고 똑같이 나올 수밖에 없다. ㅋㅋㅋㅋ ~~나만 웃김~~)

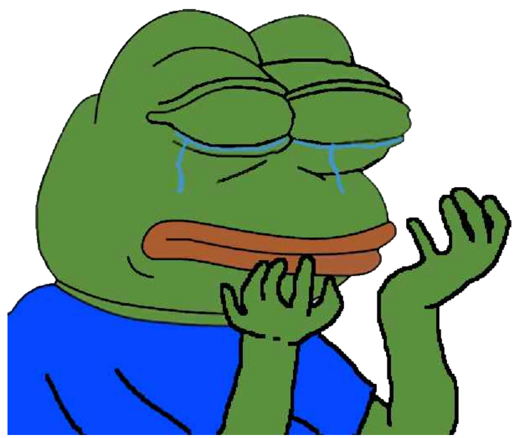
(i) $n=2$일 때, $(\text{좌변})=a_1+a_2$이고 $(\text{우변})=2$이므로
(*)는 성립한다.

(ii) $n=k(k>2)$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면
$a_1+a_2+\cdots+a_k \geq k$이므로
$a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} \geq k+a_{k+1}$

또 막혔다...
~~우변을 도대체 어떻게 처리해야 하는 거야.~~
늘 그렇듯 어려운 문제를 만나면
우리의 부족한 수학적 재능을
원망하지 말고 정신을 차려야 한다.

내가 가진 조건이 무엇인가?
(1) 이미 쓴 산술기하평균
(2) (1-1) $\frac{n}{a_{n+1}}-\frac{n-1}{a_n} \leq a_n$
(3) (1-2) $a_1+a_2+\cdots+a_n \geq \frac{n}{a_{n+1}}$
그리고
내가 보여야 하는 것은 $a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} \geq k+1$

~~더 모르겠다.~~ 그냥 봐서 모르겠다면
조건을 하나씩 사용해보자.
(1) 조건은 일단 $a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} \geq k+a_{k+1}$
여기에서 쓸 수 없고
(2), (3) 조건 모두 보았지만
뾰족한 수가 보이지 않는다. ㅠㅠ



그렇다면 $a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} \geq k+a_{k+1}$가

$a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} \geq k+1$로 될 수 있는 방법에 대해 생각하자.

가장 간단한 생각이 $a_{k+1} \geq 1$이면 된다.

(*)에 의하면 $a_{k+1} \geq \dfrac{ka_k}{a_k^2+k-1}$인데,

ka_k와 $a_k{}^2+k-1$의 대소관계를 따져보자.

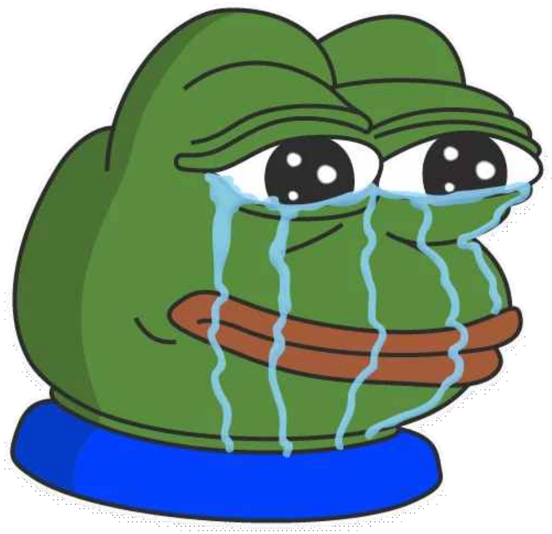
$a_k=t \ (t>0)$으로 치환하고

$t^2-kt+k-1=0$이라는 방정식의 판별식

$D=k^2-4(k-1)=(k-2)^2 \geq 0$

아쉽게도 $D<0$이 아니어서

$a_{k+1} \geq 1$가 항상 성립하는 것은 아니다. ㅠㅠ



그렇다고 포기할 것이냐

그러지 말고 여기서 알게 된 것을 다시 보자.

$a_{k+1} \geq 1$가 항상 성립하지 않는다는 것은

$a_{k+1} \geq 1$일 때도 있고 $0<a_{k+1}<1$ 있다는 것이다.

이 둘로 나누어서 다시 접근해보자.

(A) $a_{k+1} \geq 1$일 때,

$a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} \geq k+1$은 항상 성립한다.

(B) $0<a_{k+1}<1$일 때 $a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} \geq k+a_{k+1}$

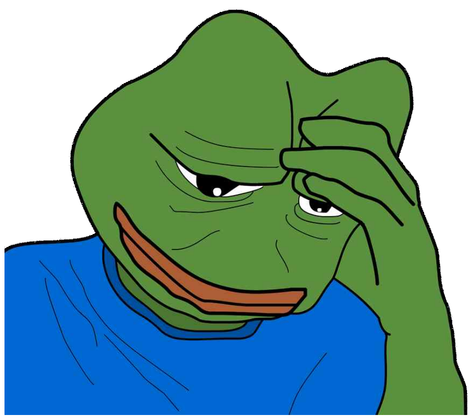
여기서 $a_1+a_2+\cdots+a_n \geq \dfrac{n}{a_{n+1}}$조건을 이용하여

(좌변)을 $(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1} \geq \dfrac{k}{a_{k+1}}+a_{k+1}$

이렇게 해석할 수 있는데

~~이걸로 뭐해야 할 지 모르겠다.~~

역시나 내가 가진 조건을 확인해보자.



$(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1} \geq \frac{k}{a_{k+1}}+a_{k+1}$ 이 부등식과

내가 가진 조건을 보니

(1) 이미 쓴 산술기하평균

(2) (1-1) $\frac{n}{a_{n+1}}-\frac{n-1}{a_n} \leq a_n$

(3) (1-2) $a_1+a_2+\cdots+a_n \geq \frac{n}{a_{n+1}}$

(1)은 어거지(?)로 쓰겠지만,

(2), (3)은 쓰기 어려울 것 같다.

(1)을 어거지(?)로 써보자

$(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1} \geq \frac{k-1}{a_{k+1}}+a_{k+1}+\frac{1}{a_{k+1}} \geq \frac{k-1}{a_{k+1}}+2$

$0<a_{k+1}<1$이므로 $\frac{k-1}{a_{k+1}}+2 \geq k-1+2$

따라서

$0<a_{k+1}<1$일 때도 $a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} \geq k+1$은 성립한다.