

[나승민/한성은 모의고사]

| 3월 모의고사 연습 |

| 나승민 (성균관대 수학과)

이투스 네오, 미래탐구목동
올해는 유튜브 열심히 할게요.
수학에 감각을 더하다.
instagram @cremath_david

| 한성은 (POSTECH 수학과)

5A ACADEMY, 일산종로학원
반가워요. 행복한 수험생활 되세요.
hansungeun.com/texta.html - 공개 모의고사 페이지
써밋 N제 미적분(2021년) 출간 - 책 사주세요.

| CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt{2} \times 2^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

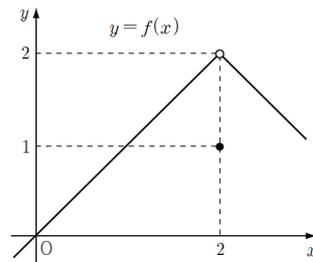
2. $\cos \frac{3}{2}\pi$ 의 값은? [2점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

3. 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 그래프가 점 $(4, 1)$ 를 지날 때, 상수 m 의 값은? [3점]

- ① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 2} (x+2)f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

5. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax + a & (x < 2) \\ 10x + b & (2 \leq x) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, ab 의 값은?

[3점]

- ① 20 ② 24 ③ 28
 ④ 32 ⑤ 36

6. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 방정식

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

의 두 근이 a_3 , a_7 이고 $a_9 < 0$ 일 때, a_4 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

7. 함수 $y = 4\cos\frac{\pi}{8}x (0 \leq x \leq 16)$ 의 그래프 위의세 점 A, B, C에 대하여 두 점 B, C의 y 좌표는 모두 2이다. 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은? [3점]

- ① 32 ② 36 ③ 40
 ④ 44 ⑤ 48

8. 직선 $x=k$ 와 두 곡선 $y=2^x$, $y=4 \times 2^x$ 이 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 점 Q를 지나고 y 축에 수직인 직선이 곡선 $y=2^x$ 과 만나는 점을 R라 할 때, $\overline{PQ}=\overline{QR}$ 이 되도록 하는 k 의 값은? [3점]
- ① $1-\log_2 3$ ② $2-\log_2 3$ ③ $3-\log_2 3$
 ④ $4-\log_2 3$ ⑤ $5-\log_2 3$

9. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ 과 실수 t 에 대하여 방정식

$$f(x) = \frac{f(t)}{t}x$$

의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 t 의 값의 합은? [4점]

- ① $\frac{9}{4}$ ② 3 ③ $\frac{15}{4}$
 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{21}{4}$

10. 넓이가 10π 인 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여

$$\overline{BC} = 2\sqrt{5},$$

$$\tan(\angle ABC) = 2$$

일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, $\angle BAC$ 는 예각이다.)
 [4점]

- ① 8 ② 10 ③ 12
 ④ 14 ⑤ 16

11. 원점을 출발하여 움직이는 점 P의 시간 $t(t > 0)$ 에서의 가속도 $a(t)$ 가

$$a(t) = 2t + k$$

이다. $t = 3$ 일 때, 점 P는 원점에서 운동 방향을 바꾼다.

점 P의 $t = 4$ 일 때의 속도는? [4점]

- ① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

12. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, 모든 자연수 n 과 상수 c 에 대하여

$$c + \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k} = (a_n)^2$$

가 성립한다. c 의 값은? [4점]

- ① $\frac{9}{8}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{9}{32}$
④ $\frac{9}{64}$ ⑤ $\frac{9}{128}$

13. $0 \leq x \leq \pi$ 일 때, 방정식

$$2 + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$$

의 서로 다른 두 근을 α, β 라 하자.

$\tan \alpha + \tan \beta$ 의 값은? [4점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

14. 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = xf(x) - \int_0^x f(t)dt$$

이다. 함수 $y = g(x)$ 가 구간 $(-\infty, a)$ 에서 증가하도록 하는 실수 a 의 최댓값이 3이고 $g(3) = 9$ 일 때, $f'(6)$ 의 값은? [4점]

- ① -24 ② -22 ③ -20
 ④ -18 ⑤ -16

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여
실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$ 가

$$g(x) = x^3 f\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0)$$

이다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,
 $f(4)$ 의 값은? [4점]

(가) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

(나) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ 이 존재하지 않는다.

(다) 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 가 존재한다.

- ① 26 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

단답형

16. 함수 $f(x) = x(x-2)(x-4)$ 에 대하여
 $f'(4)$ 의 값을 구하여라. [3점]

17. 두 양의 실수 a , b 에 대하여 $a^2 b^3 = 1$ 일 때,

$\frac{2\log a + 6\log b}{\log a + 2\log b}$ 의 값을 구하여라. [3점]

18. 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n b_{n+1} = a_{n+1} b_n$$

를 만족시킨다. $a_6 b_2 = 20$ 일 때, $a_4 b_4$ 의 값을 구하여라.

[3점]

19. 함수 $f(x) = -x^2 + 2|x| + 3$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라. [3점]

20. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$\sum_{k=1}^6 a_k$ 의 최솟값을 구하여라. [4점]

(가) $a_1 = 5$

(나) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 2 & (a_n \geq 0) \\ 6 - a_n & (a_n < 0) \end{cases}$$

이다.

21. 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$$\log_2 k \leq n - k$$

를 만족시키는 자연수 k 의 개수를 a_n 이라 하자.

$\sum_{n=1}^{20} a_n$ 의 값을 구하여라. [4점]

22. $f(0) = 0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 와 양수 a 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < a) \\ f(2a-x) & (x \geq a) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \{g'(0)\}^2 + \lim_{x \rightarrow a^+} g'(x) \times \lim_{x \rightarrow a^-} g'(x) = 0$$

(나) 함수 $g(x)$ 가 $x = a_1$, $x = a_2$, $x = a_3$ 에서
동일한 극댓값 8을 갖는다. ($a_1 < a_2 < a_3$)

$\int_0^{2a} g(x) dx = 64$ 일 때, $f(10)$ 의 값을 구하여라. [4점]

5지선다형

23. ${}_2\Pi_2 + {}_3H_2$ 의 값은? [2점]

- ① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

24. 문자 A, A, B, B, C, D, E를 모두 사용하여 만든 7자리 문자열 중에서 C와 D가 이웃하는 문자열의 개수는? [3점]

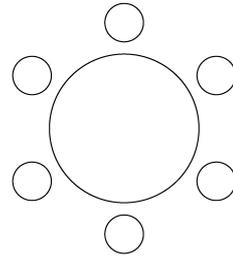
- ① 330 ② 360 ③ 390
④ 420 ⑤ 450

25. $(x^3 + ax)^5$ 의 전개식에서 x^9 의 계수가 80일 때, a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
 ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

26. 세 학생 A, B, C를 포함한 6명의 학생이 있다. 이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

(가) A와 B는 이웃한다.
 (나) B와 C는 서로 마주보게 앉는다.



- ① 4 ② 6 ③ 8
 ④ 10 ⑤ 12

27. A, B, C, D의 문자가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드와 1, 2, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 3장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, D가 적힌 카드는 문자가 적혀 있는 카드들 중에서 가장 오른쪽에, 3이 적힌 카드는 숫자가 적혀 있는 카드들 중에서 가장 오른쪽에 나오게 나열되는 경우의 수는? [3점]

- ① 315 ② 350 ③ 385
 ④ 420 ⑤ 455

28. 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드를 세 명의 학생에게 나눠줄 때, 어느 학생도 카드에 적힌 수의 합이 5가 되지 않는 경우의 수는? (단, 카드를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

- ① 51 ② 54 ③ 57
 ④ 60 ⑤ 63

단답형

29. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 구하여라. [4점]

(가) $a+b+c+d=16$

(나) $(a-2)(b-2)(c-2)(d-2) < 0$

30. 집합 $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하여라. [4점]

(가) $i=1, 2, \dots, 5$ 일 때, $f(i-1) \leq f(i)$ 이다.

(나) 함수 f 의 치역의 모든 원소의 합은 6이다.

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 2 \cdot 3^{2n}}{2^n + 9^{n-1}}$ 의 값은? [2점]

- ① 4 ② 9 ③ 10
④ 16 ⑤ 18

24. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$4n - 2 < a_n < 4n + 2$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n a_k$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

25. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \left(a_k - \frac{4^{k+1}}{2^k + 2^{2k+1}} \right) = 1 + \frac{1}{n}$$

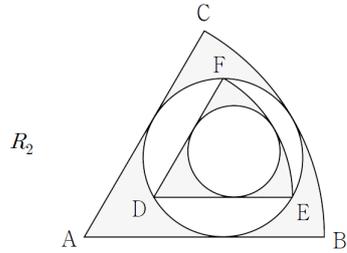
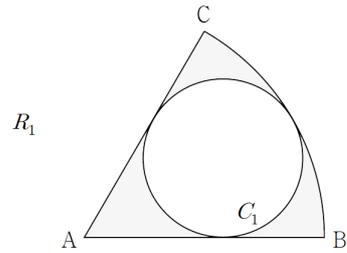
일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{8}{5}$ ② $\frac{9}{5}$ ③ 2
- ④ $\frac{11}{5}$ ⑤ $\frac{12}{5}$

26. 그림과 같이 중심이 A이고 반지름의 길이가 1, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 ABC가 있다. 두 선분 AB, AC와 호 BC에 모두 접하는 원 C_1 을 그리고 부채꼴 ABC의 내부와 원 C_1 의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 원 C_2 위의 세 점 D, E, F에 대하여 중심이 D인 부채꼴 DEF의 중심각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$ 이다. 그리고 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 부채꼴 DEF에 내접하는 원을 그리고 부채꼴 DEF의 내부와 원의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [3점]



- ① $\frac{\pi}{18}$ ② $\frac{\pi}{16}$ ③ $\frac{\pi}{12}$
- ④ $\frac{\pi}{8}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

27. 원 $x^2 + y^2 = n^2$ 과 직선 $y = nx$ 의 교점을 P, 점 P에서 원 $x^2 + y^2 = n^2$ 에 그은 접선의 x절편을 Q라 하자. 점 Q를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원 위의 점 R에 대하여 \overline{OR} 의 최솟값을 d_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ 의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
 ④ 2 ⑤ 4

28. 1이 아닌 양의 실수 a 와 함수

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^{2n+1} - ax}{x^{2n} + 1}$$

에 대하여 방정식 $f(x) = 1$ 의 실근을 $g(a)$ 라 하자.

$g\left(\frac{1}{2}\right) + g(2)$ 의 값은? [4점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
 ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

단답형

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2+(-1)^n}{4} \right\}^n = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.
 (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 수열 $\{a_n\}$ 과 모든 자연수 n 에 대하여 두 점 $P_n(n, n^2), Q_n(a_n, a_n^2)$ 은 $\overline{P_n Q_n} = 1$ 을 만족시킨다.
 선분 PQ와 곡선 $y = x^2$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 A_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} A_n$ 의 값을 구하여라. (단, 모든 자연수 n 에 대하여 $n < a_n$ 이다.) [4점]

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 8$ 의 두 초점 사이의 거리는? [2점]

- ① 14 ② 12 ③ 10
④ 8 ⑤ 6

24. 타원 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 두 직선의

y 절편의 곱은? [3점]

- ① -16 ② -12 ③ -9
④ -6 ⑤ -4

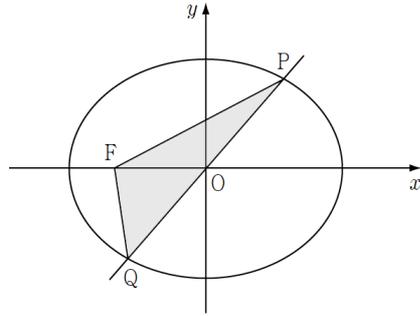
25. 초점이 F인 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 P에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{PH} = \overline{FH} = 8$ 일 때, p 의 값은? [3점]

- ① 2 ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$
- ④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

26. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 과 원점을 지나는

한 직선이 두 점 P, Q에서 서로 만난다. 타원의 한 초점 F에 대하여 $\overline{FP} = 2\overline{FQ}$ 일 때, 삼각형 FPQ의 넓이는? [3점]

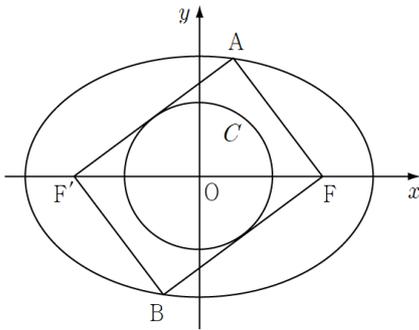


- ① $\sqrt{14}$ ② $\sqrt{15}$ ③ 4
- ④ $\sqrt{17}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

27. 그림과 같이 두 초점이 $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$ 인 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 두 점 A, B 와 원점을 중심으로 하는 원 C 가 다음을 만족시킨다.

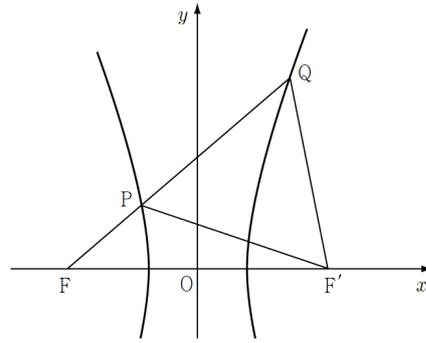
- (가) 두 직선 AF' , BF 는 모두 원 C 의 접선이다.
- (나) 두 선분 AF 와 BF' 의 길이는 모두 원 C 의 지름의 길이와 같다.

사각형 $AFBF'$ 의 넓이가 48일 때, 원 C 의 반지름의 길이는? (단, 점 A 는 제1사분면의 점이다.) [4점]



- ① $\frac{13}{3}$
- ② 4
- ③ $\frac{11}{3}$
- ④ $\frac{10}{3}$
- ⑤ 3

28. 그림과 같이 두 초점이 F, F' 인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 와 쌍곡선 위의 두 점 P, Q 에 대하여 점 P 는 선분 FQ 위의 점이며, 삼각형 PQF' 은 정삼각형이다. 쌍곡선의 점근선의 방정식은? (단, 점 F 의 x 좌표는 음수이다.) [3점]



- ① $y = \pm \sqrt{2}x$
- ② $y = \pm \sqrt{3}x$
- ③ $y = \pm 2x$
- ④ $y = \pm \sqrt{5}x$
- ⑤ $y = \pm \sqrt{6}x$

단답형

29. 점 $(2, -1)$ 에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 그은 접선의 개수가 1이고, 이 직선의 기울기가 $\frac{5}{6}$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라. [4점]

30. 원 $(x-4)^2 + y^2 = 1$ 에 외접하고 직선 $x=1$ 에 접하는 원의 중심 P 가 나타내는 곡선을 C 라 하자. 직선 $y=m(x-4)$ 가 곡선 C 와 만나는 두 점을 A, B 에 대하여 $\overline{AB}=9$ 일 때, m^2 의 값을 구하여라. [4점]

[나승민/한성은 모의고사 3월 연습 정답표]

〈공통〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	②	02	③	03	③	04	③	05	⑤
06	⑤	07	①	08	①	09	④	10	③
11	④	12	④	13	②	14	①	15	②
16	8	17	6	18	20	19	18	20	16
21	151	22	40						

〈확률과 통계〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	①	24	②	25	④	26	⑤	27	④
28	⑤	29	116	30	50				

〈미적분〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	⑤	24	④	25	①	26	③	27	②
28	⑤	29	268	30	48				

〈기하〉

문항	정답								
23	④	24	③	25	①	26	②	27	⑤
28	⑤	29	20	30	8				

COMMENT 09

원점에서 접선이 $(t, f(t))$ 를 지날 때, $t=3$ 이고,

점 $(t, f(t))$ 에서의 접선이 원점을 지날 때, $t=\frac{3}{2}$ 이다.

COMMENT 10

사인법칙에서 $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 에서 $b=4\sqrt{2}$ 이다.

$\angle B$ 에 대한 코사인법칙 돌리면 $c=6$ 이다.

COMMENT 12

$S_n = an^2 + bn$ 이라 두자. 알지? $a_n = 2an + b - a$ 이다.

준 식의 좌변은 $a\frac{n(n+1)}{2} + bn + c$ 이고 우변은 $4a^2n^2 + 4a(b-a)n + (b-a)^2$ 이다. 계수비교.

COMMENT 14

$g'(x) = xf'(x)$ 이므로 $g'(0)=0$ 이다. 함수 $y=g(x)$ 가 구간 $(-\infty, 3)$ 에서 증가하므로

$x \leq 3$ 에서 $g'(x) \geq 0$ 이다. 따라서 $g'(x)$ 는 x^2 을 인수로 가져야 하고 $f'(0)=0$ 이다.

$x=3$ 에서 $g'(x)$ 의 부호변화가 일어나므로 $g'(3)=0$ 에서 $f'(3)=0$ 이다.

$g'(x) = kx^2(x-3)$ 이고 $g(3) = \int_0^3 g'(x)dx = 9$ 에서 $k = -\frac{4}{3}$ 이다. 따라서 $f'(x) = -\frac{4}{3}x(x-3)$ 이다.

COMMENT 15

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 이면 $g(x) = cx^3 + bx^2 + ax + 1$ 이다. 조건 (가)에서 $c=0$ 이고

$f(a)=0$ 이면 $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 이므로 조건 (다)에서 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 이다. 따라서 $f(x) = x(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 이다.

COMMENT 21

$k=1, k=2, k=4, k=8, \dots$ 인 순간을 췌려면 각각 $n=1, n=3, n=6, n=11, \dots$ 일 때이다.

대충 노가다 뛰어보면 $a_{n+1} - a_n$ 은 $n=1, n=3, n=6, n=11, \dots$ 일 때 0이고 나머지는 1이다.

다시 말해, $\{a_n\}$ 은,

1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, ...

이다. 시그마 대충.

COMMENT 22

(가)에서 점 $\left(\frac{a}{2}, f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 의 꼭짓점이다.

(나)에서 $y=f(x)$ 의 극댓값과 $f(a)$ 의 값이 서로 같다.

비율관계 쳐보면 $y=f(x)$ 는 $x=\frac{a}{4}$ 에서 극대이고, $x=\frac{3a}{4}$ 에서 극소이다.

$f\left(\frac{3a}{4}\right) = f(0) = 0$ 이므로 $f(x) = kx\left(x-\frac{3a}{4}\right)^2$ 이고 극댓값 $\frac{1}{16}ka^3 = 8$ 이다.

$\int_0^{2a} g(x)dx$ 은 대충 대칭성 췌려보면 $8a$ 이다. $\int_0^{2a} g(x)dx = 64$ 에서 $a=8$ 이다.

COMMENT 확률과 통계 28

한 명이 1이 적힌 카드와 4가 적힌 카드만을 가지는 경우의 수는 3×2^2 ,
한 명이 2이 적힌 카드와 3이 적힌 카드만을 가지는 경우의 수는 3×2^2 ,
위의 두 사건이 모두 일어나는 경우의 수는 3×2 이다. 답은 $3^4 - (3 \times 2^2) \times 2 - 3 \times 2$ 이다.

COMMENT 확률과 통계 29

Case1) 음양양양 : ${}_4C_1 \times {}_3H_6$
Case2) 음음음양 : ${}_4C_3$

COMMENT 확률과 통계 30

Case1) 치역이 $\{2, 4\}$: ${}_2H_4 = 5$ 가지.
Case1) 치역이 $\{1, 5\}$: ${}_2H_4 = 5$ 가지.
Case3) 치역이 $\{0, 2, 4\}$: ${}_3H_3 = 10$ 가지.
Case4) 치역이 $\{0, 1, 5\}$: ${}_3H_3 = 10$ 가지.
Case5) 치역이 $\{1, 2, 3\}$: ${}_3H_3 = 10$ 가지.
Case6) 치역이 $\{0, 1, 2, 3\}$: ${}_4H_2 = 10$ 가지.

COMMENT 미적분 25

$n=1$ 을 대입하면 $a_1 - \frac{8}{5} = 2$ 에서 $a_1 = \frac{18}{5}$ 이다. $n \rightarrow \infty$ 를 취하면 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{4^{n+1}}{2^n + 2^{2n+1}} \right)$ 가 수렴하므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{4^{n+1}}{2^n + 2^{2n+1}} \right) = 0$ 에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ 이다. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 - a_{n+1}) = \frac{18}{5} - 2 = \frac{8}{5}$

COMMENT 미적분 26

원 C_1 의 반지름의 길이는 $\frac{1}{3}$, 부채꼴 DEF의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 이다. 급수의 첫항은 $\frac{\pi}{18}$ 이다.
넓음비는 $1 : \frac{\sqrt{3}}{3}$, 넓이버는 $3 : 1$, 공비는 $\frac{1}{3}$ 이다.

COMMENT 미적분 27

$\overline{OQ} = n\sqrt{n^2+1}$, $\overline{PQ} = n^2$ 이므로 $d_n = n\sqrt{n^2+1} - n^2$ 이다.

COMMENT 미적분 28

함수 $f(x)$ 의 그래프를 그려놓고 살펴보자.
 $a > 1$ 이면 $f(x) = 1$ 의 근은 $-ax = 1$ 에서 $x = -\frac{1}{a}$ 이므로 $g(2) = -\frac{1}{2}$ 이고,
 $-1 < a < 1$ 이면 $f(x) = 1$ 의 근은 $ax = 1$ 에서 $x = \frac{1}{a}$ 이므로 $g\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ 이다.

COMMENT 미적분 29

$$\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \dots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{16}} + \frac{\frac{9}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{163}{105}$$

COMMENT 미적분 30

$(a_n - n)^2 + (a_n^2 - n^2)^2 = 1$ 에서 $(a_n - n) = \frac{1}{\sqrt{1 + (a_n + n)^2}}$ 이다.

$$A_n = \frac{1}{6}(a_n - n)^3 = \frac{1}{6}\{1 + (a_n + n)^2\}^{-\frac{3}{2}}$$

이고 대충 $1 + (a_n + n)^2$ 은 $4n^2$ 이므로 답은 48이다.

※ 대충 : $n < a_n < n+1$ 이므로 대충.

COMMENT 기하 28

$\overline{QF'} = l$ 이라 하자. 점 Q가 쌍곡선 위의 점이므로 $\overline{PF} = 2a$ 이고

점 P가 쌍곡선 위의 점이므로 $\overline{PF} = l - 2a$ 이다. 따라서 $l = 4a$ 이다.

삼각형 QFF'에서 코사인 돌리면 $\overline{FF'} = \sqrt{7}a$ 이다.

쌍곡선 그거에서 $c^2 = a^2 + b^2$ 치면 $b = \sqrt{6}a$ 이다. 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 이다.

COMMENT 기하 29

쌍곡선에 하나의 접선을 그을 수 있는 점은 쌍곡선 위 또는 쌍곡선의 점근선 위의 점이다.

쌍곡선 위의 점이라면 기울기가 음수가 되어야 한다. 따라서 점 $(2, -1)$ 은 쌍곡선의 점근선 위의 점이다.

$\left|\frac{b}{a}\right| = \frac{1}{2}$ 이므로 $a^2 = 4b^2$ 이다. $\frac{x^2}{4b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 그은 기울기 $\frac{5}{6}$ 인 접선의 방정식은 $y = \frac{5}{6}x \pm \sqrt{\frac{25}{36}(4b^2) - b^2}$ 이고,

얘가 점 $(2, -1)$ 을 지나므로 $b^2 = 4$ 이다. $a^2 = 16$, 답은 20이다.

COMMENT 기하 30

원의 반지름의 길이를 r 이라 하면 점 P에서 점 F(4, 0)까지의 거리와 점 P에서 y 축까지의 거리는 모두 $r+1$ 이다.

따라서 곡선 C는 점 F를 초점으로 하고 y 축을 준선으로 하는 포물선 $y^2 = 8(x-2)$ 이다.

$\overline{FA} = a$, $\overline{FB} = b$ 라 하면, $a+b=9$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$ 이므로 $\{a, b\} = \{3, 9\}$ 이다. $m = \pm 2\sqrt{2}$ 이다.