[21008-0011]

1 $\sqrt[12]{\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{2}$의 값은?

① $\sqrt[12]{2}$ ② $\sqrt[10]{2}$ ③ $\sqrt[8]{2}$ ④ $\sqrt[6]{2}$ ⑤ $\sqrt[4]{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{12}} \times 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{12}}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{1}{12}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{12}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$

$\frac{1}{2^{\frac{1}{12}}} = 2^{-\frac{1}{12}}$

[21008-0012]

2 $9^{\frac{1}{3}} \times 81^{-\frac{1}{6}}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ ③ 1 ④ $\sqrt[3]{3}$ ⑤ 3

$(3^2)^{\frac{1}{3}} \times (3^4)^{-\frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{-\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}} = 3^0 = 1$

[21008-0013]

3 세 양수 a, b, c에 대하여 $a^{-\frac{1}{4}}=3$, $b^{-\frac{1}{2}}=4$, $c^{-\frac{1}{3}}=18$일 때, $\frac{c}{ab}$의 값은?

a^1, b^1, c^1의 형태로 만들자.

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

$a^{-\frac{1}{4}} = 3$ ↓ 양변을 4제곱
$a^{-1} = 3^4$
$a = \frac{1}{3^4}$

$b^{-\frac{1}{2}} = 4$ ↓ 양변을 제곱
$b^{-1} = 4^2$
$b = \frac{1}{4^2}$

$c^{-\frac{1}{3}} = 18$ ↓ 양변을 세제곱
$c^{-1} = 18^3$
$c = \frac{1}{18^3}$

$\frac{c}{ab} = \frac{\frac{1}{18^3}}{\frac{1}{3^4} \times \frac{1}{4^2}} = \frac{3^4 \times 4^2}{18^3} = \frac{3^4 \times 2^4}{(2 \times 3^2)^3} = \frac{\cancel{2^4} \times \cancel{3^4}}{\cancel{2^3} \times \cancel{3^6}} = \frac{2}{9}$

[21008-0014]

4 두 실수 x, y에 대하여 $2^x=3^y=25$일 때, $5^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$의 값은?

지수의 형태를 봤을 때 $\frac{1}{x}$과 $\frac{1}{y}$이 필요

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ③ 1 ④ $\sqrt{6}$ ⑤ 6

구해야하는 값에 $\frac{1}{x}$과 $\frac{1}{y}$이 필요하므로 만들어보자.

$2^x = 25 \rightarrow 2 = 25^{\frac{1}{x}}$
$3^y = 25 \rightarrow 3 = 25^{\frac{1}{y}}$
) 두 수를 곱해서 보자

왜? ㄴ 구해야하는 값의 지수에서 덧셈의 형태로 있으므로

$\underbrace{25^{\frac{1}{x}}}_{2} \cdot \underbrace{25^{\frac{1}{y}}}_{3} = 25^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = 5^{2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})} = 6$

이렇다면 $5^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \sqrt{6}$

[21008-0015]

5 자연수 n에 대하여 $\left(\frac{96}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오.

최대한 단순하게 + 생각도 단순하게

$\left(\frac{96}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{96}{n}}$

이게 자연수가 되려면 $\frac{96}{n}$이 자연수의 제곱 형태이어야 한다.

그래야 $\sqrt{\ }$ 해서 자연수가 된다.

$\frac{96}{n} = \underbrace{1}_{n=96}$ or $\underbrace{4}_{n=24}$ or 9 or $\underbrace{16}_{n=6}$ or 25 or 36 ····

이렇게 3개만 가능

$\boxed{96+24+6=126}$

[21008-0016]

6 $2\log_2 \sqrt[4]{6}+\dfrac{1}{2}\log_2 \dfrac{8}{3}$의 값은?

최대한 지수의 형태로

① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

$\log_2 (6^{\frac{1}{4}})^2+\log_2 (\frac{8}{3})^{\frac{1}{2}}=\log_2 6^{\frac{1}{2}}+\log_2\sqrt{\frac{8}{3}}=\log_2\sqrt{6}\times\sqrt{\frac{8}{3}}=\log_2\sqrt{16}=\log_2 4=2$

[21008-0017]

7 $(\log_2 9-\log_4 9)(\log_9 4-\log_{27} 2)$의 값은?

밑과 진수를 최대한 단순하게

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 2

$(\log_2 3^2-\log_{2^2} 3^2)(\log_{3^2} 2^2-\log_{3^3} 2)=(2\log_2 3-\frac{2}{2}\log_2 3)(\frac{2}{2}\log_3 2-\frac{1}{3}\log_3 2)$

$=(\log_2 3)(\frac{2}{3}\log_3 2)=\frac{2}{3}\underbrace{\log_2 3\times\log_3 2}_{1}=\boxed{\frac{2}{3}}$

[21008-0018]

8 $\log_3 45-\dfrac{1}{\log_{25} 9}$의 값은?

이거를 어떻게 처리할까 → 역수는 밑과 진수를 바꿈

① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ 1 ④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ 2

$\log_3 45-\underbrace{\log_9 25}_{=\frac{1}{\log_{25} 9}}=\log_3 45-\underbrace{\log_3 5}_{\frac{2}{2}\log_3 5}=\log_3 9=\boxed{2}$

[21008-0019]

9 $a=\log 0.2$일 때, 다음 중 $\log 80$을 a로 나타낸 것은?

80=8×10을 생각해볼라.

① $a+3$ ② $2a+3$ ③ $2a+4$ ④ $3a+3$ ⑤ $3a+4$

구해야하는 log 80을 위해서는 log 8 + log 10 이 제일 쉬운 방법이다.

log 10 = 1 이기에

$\log 8=\log 2^3=3\underbrace{\log 2}_{\substack{\log 0.2+\log 10\\=a+1}}=3(a+1)$

$\log 80=\log 8+\log 10=3(a+1)+1$

$=\boxed{3a+4}$

[21008-0020]

10 1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여 $a^2=b^3=c^4$일 때, $\log_a \sqrt{b}+\log_b \dfrac{1}{c}+\log_c a=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

전제

서로간의 비율

$\log_a\sqrt{b}+\log_b\frac{1}{c}+\log_c a=\log_{2^6} 2^2+\log_{2^4}\frac{1}{2^3}+\log_{2^3} 2^6$

$=\frac{1}{3}+(-\frac{3}{4})+2=\frac{29}{12}$

$\boxed{p+q=31}$

개인적으로 로그는 분수와 비슷하다고 생각한다. (느낌이...)

(분수 : 누가 누구의 몇 배
로그 : 누가 누구의 몇 제곱

문제가 모두 로그로 이루어져 있으니 a, b, c 간의 비율관계로 수를 대입하여 정리해보자.

서로 간의 비율이 중요하므로

밑은 단순하게 2로 하자.

$2^{12}=a^2=b^3=c^4$

$a=2^6,\ b=2^4,\ c=2^3$

n이 짝수 < $x>0$: $f_n(x)=2$, $x<0$: $f_n(x)=0$

n이 홀수 — $f_n(x)=1$

$f_n(x)$는 0, 1, 2만 가능

[21008-0021]

1 2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 x의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f_n(x)$라 하자. 2의 제곱근 중 음수인 것을 a, -3의 세제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, $f_3(a)+f_4(b)+f_5(a+b)+f_6(ab)$의 값은?

$a=-\sqrt{2}$ $b=\sqrt[3]{-3}$

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

다시 정리해보면 $f_n(x)$의 값을 구하려면 두 가지만 알면 된다.

① n이 홀 or 짝

② x가 양 or 음

∘ $f_3(a)$ n: 홀 a: 음 $f_3(a)=1$

∘ $f_4(b)$ n: 짝 a: 음 $f_4(b)=0$

∘ $f_5(a+b)$ n: 홀 a: 음 $f_5(a+b)=1$

∘ $f_6(ab)$ n: 짝 a: 양 $f_6(ab)=2$

$$\boxed{f_3(a)+f_4(b)+f_5(a+b)+f_6(ab)=1+0+1+2=4}$$

[21008-0022]

2 $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$일 때, $\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}}{a+a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^2-a^{\frac{1}{2}}}$의 값은?

양변 세제곱? $a^{\frac{3}{2}}$을 만든다. 분자·분모 $a^{\frac{1}{2}}$ 곱 분자·분모 $a^{\frac{1}{2}}$ 나누기

① $-\sqrt{2}$ ② -1 ③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 1

$$\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}+1}+\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}+2}{-2}=\boxed{-1}$$

$a^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2}-1$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}-2}=\dfrac{\sqrt{2}+2}{2-4}$

[21008-0023]

3 양수 x에 대하여 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=4$일 때, $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}$의 값은?

전제 곱셈 공식?

① $\dfrac{3}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

곱셈 공식의 기본 형태인 x^1+x^{-1}를 먼저 구하자.

$(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})^3-3x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})=\underbrace{x^1+x^{-1}=18}_{\text{앞에서 구함}}$

이거 숫자로 처리된다.

$x^1+x^{-1}=\underbrace{(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2}_{4^2}=x^1-2+x^{-1}=16$

$x^1+x^{-1}=18$

$x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}$을 치환 $(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})^3-3(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})=18$

$\boxed{x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=3}$

[21008-0024]

4 두 실수 a, b에 대하여 $15^a=2$, $15^b=3$일 때, $25^{\frac{a}{1-b}}$의 값은?

지수가 익숙한 형태는 아니다...

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

구해야하는 값이 익숙한 형태가 아니므로 a, b를 각각 구해보자.

지수가 $\dfrac{a}{1-b}$?

$15^a=2$ $15^b=3$

$a=\log_{15}2$ $b=\log_{15}3$

$\dfrac{a}{1-b}=\dfrac{\log_{15}2}{1-\log_{15}3}=\dfrac{\log_{15}2}{\log_{15}5}=\log_5 2$

밑변환의 역순

$25^{\frac{a}{1-b}}=25^{\log_5 2}=2^{\log_5 25}=2^2=\boxed{4}$

$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

[21008-0025]

5 $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a^3}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 2 이상의 두 자연수 n, a에 대하여 $n+a$의 최솟값을 구하시오.

$\sqrt[n]{a^{\frac{3}{n}}}=a^{\frac{3}{n^2}}$ n이 3의 배수인가 아닌가로 나누자.

i) $n=3k$ (3의 배수)

$a^{\frac{3}{9k^2}}=a^{\frac{1}{3k^2}}$

이게 자연수이려면 a가 자연수의 세제곱 형태이어야함

ii) $n=k$ (3의 배수 X)

$a^{\frac{3}{k^2}}$ k가 커질수록 필요한 a는 기하급수적으로 증가하므로 가장 작게 → $k=n=2$

가장 작은 a : $2^3=8$

가장 작은 k : 1 → $n=3$

$\boxed{n+a=3+8=11}$

$a^{\frac{3}{4}}$이 자연수 + 가장 작은 a : $a=2^4=16$

$n+a=2+16=18$

i)의 경우가 더 작으므로 답은 11

[21008-0026]

6 1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여

$$\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt[3]{a},\ \log_b ac=\log_a b$$

일 때, $\log_a c=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

$b^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}$

$b^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{6}}$

$b=a^{\frac{5}{3}}$

$\log_{a^{\frac{5}{3}}} ac=\frac{5}{3}$ $\log_a a^{\frac{5}{3}}$

$ac=a^{\frac{25}{9}}$ $c=a^{\frac{16}{9}}$

$\log_a c=\log_a a^{\frac{16}{9}}=\frac{16}{9}$

$p=9,\ q=16$ $\boxed{p+q=25}$

[21008-0027]

7 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여

$$\log x^a=b\log y=\log\frac{y}{x}$$

를 만족시키는 1이 아닌 서로 다른 두 양수 x, y가 존재한다. $\frac{a^2+b^2}{a-b}=5$일 때, ab의 값은?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ✓ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

$a\log x=b\log y=\log y-\log x$

① $(a+1)\log x=\log y$

② $(b-1)\log y=-\log x$

→ ①을 ②에 대입

$(b-1)\{(a+1)\log x\}=-\log x$

양변을 $\log x$로 나눔

$(b-1)(a+1)=-1$

$ab-a+b\cancel{-1}=\cancel{-1}$

$ab=a-b$ 이제 주어진 식을 풀자.

$\frac{a^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2+2ab}{a-b}=\frac{(ab)^2+2ab}{ab}=ab+2=5$

$a-b=ab$

$\boxed{ab=3}$

[21008-0028]

8 1이 아닌 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 두 집합 A, B를

$$A=\{1,\ \log_a b\},\ B=\{2,\ 3,\ 2\log_2 a-\log_2 b\}$$

라 하자. $A\cap B=A$일 때, $\frac{a}{b}$의 값은?

집합 B에 1이 있어야 함

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ 4 ✓ ⑤ 8

집합 B에 1이 있어야 하므로

$2\log_2 a-\log_2 b=1$

$\log_2 a^2-\log_2 b=\log_2\frac{a^2}{b}=1$

$\frac{a^2}{b}=2$ $a^2=2b$

$2\log_2 a-\log_2 b$가 1 이므로 $\log_a b$는 2 또는 3 이어야 한다.

그래야 $A\cap B=A$

i) $\log_a b=2$

$a^2=b$

$a^2=2b$라서 X

ii) $\log_a b=3$

$a^3=b$

$a^2=2b$ 이니까

$a^3=a^2\cdot a=2b\cdot a=b$

$a=\frac{1}{2}$ a는 양수이므로 → $b=\frac{1}{8}$

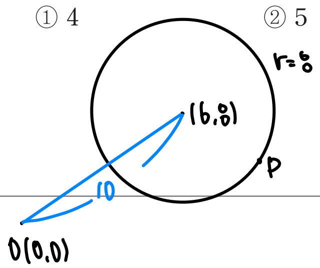
$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}}=\frac{8}{2}=4}$

[21008-0029]

9 좌표평면에서 원 $(x-6)^2+(y-8)^2=64$ 위의 점 P와 원점 O 사이의 거리를 D_P라 하자. $\log_2 D_P$의 값이 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수는? 중심이 (6, 8), 반지름 8

D_P가 2의 거듭제곱 형태이어야 한다.

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ✓ ⑤ 8



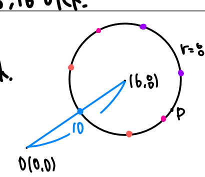
그림으로 보아 $\overline{OP}$의 길이는 최대 10+8, 최소 10−8 이다.

18 2

$2\le\overline{OP}\le 18$

D_P의 길이가 2의 거듭제곱인 경우는 2, 4, 8, 16 이다.

이 중에서 2를 제외하고는 교점이 2개씩이다.



그렇다면 $\boxed{1+2+2+2=7\text{개}}$이다.

[21008-0030]

1 $2\le m\le 9$, $2\le n\le 9$인 두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt[3]{(mn)^{\frac{n}{m}}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는?

쉽게 정리! → $(mn)^{\frac{n}{3m}}$

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

i) mn이 자연수의 세제곱 → 후보 (8, 27, 64)

① mn=8
~~(4,2)~~, (2,4)
$8^{\frac{2}{12}}=8^{\frac{1}{6}}$

② mn=27
~~(9,3)~~, (3,9)
$27^{\frac{3}{27}}=27^{\frac{1}{9}}$

③ mn=64
(8,8)

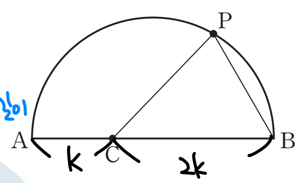
ii) 지수인 $\frac{n}{3m}$이 자연수
n이 m의 3배
(2,6), (3,9) i)과 중복

$\boxed{(2,6), (3,9), (2,4), (8,8)\text{이므로 4개 ③번}}$

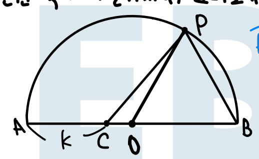
[21008-0031]

2 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB 위의 점 C와 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{AC}:\overline{CB}=1:2$, $\overset{\frown}{AP}:\overset{\frown}{PB}=2:1$이고 $\overline{AC}=\sqrt[4]{32}$이다. 삼각형 PCB의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오.

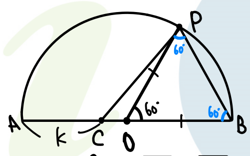
아세요?! $=2^{\frac{5}{4}}$ 실제 길이
수가 복잡하니 일단 k라고 두자



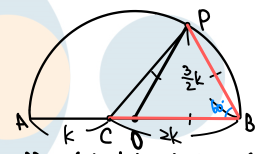
원을 다룰 때는 중심과 이어보는 것이 당연하다.
반원 역시 마찬가지다. 그려보자.



$\overset{\frown}{AP}:\overset{\frown}{PB}=2:1$
↳ 중심각의 비율이 2:1
∠AOP : ∠POB = 2 : 1
120° 60°



∠POB가 60°이고 $\overline{OP}=\overline{OB}$이므로 △POB는 정삼각형이다. 둘 다 원의 반지름이니까



구해야 하는 값인 △PCB의 넓이를 구하기 위해서는 두 변의 길이와 끼인 각의 sin값이 필요하다.

$S=\frac{1}{2}\cdot 2k\cdot\frac{3}{2}k\cdot\sin 60°$

$=\frac{3}{2}k^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot(2^{\frac{5}{4}})^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot 2^{\frac{5}{2}}$

$=3\sqrt{6}=S$ $\boxed{S^2=54}$

[21008-0032]

3 자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m=\{(a,\ b)\mid m=a\log_2 b\text{이고 } a,\ b\text{는 자연수}\}$$

라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $A_2=\{(1,\ 4),\ (2,\ 2)\}$

ㄴ. 두 자연수 p, q에 대하여 $n(A_{pq})=n(A_p)\times n(A_q)$이다.

ㄷ. $n(A_m)=4$를 만족시키는 30 이하의 모든 자연수 m의 개수는 9이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $A_2=\{(1,4),(2,2)\}$

$A_2=\{(a,b)\mid 2=a\log_2 b$ 이고 a, b는 자연수$\}$

$2=1\times\log_2 4$ or $2=2\times\log_2 2$ 이므로 O.K.

ㄴ. $n(A_{pq})=n(A_p)\times n(A_q)$

얼핏 보면 맞아보인다. 그런데 p=q일 때 변수가 생긴다.

ex) p=q=2

$n(A_4)=3$ $\{(1,16),(2,4),(4,2)\}$

$n(A_2)=2$ $\{(2,2),(1,4)\}$

$\underbrace{n(A_4)}_{3}\neq\underbrace{n(A_2)}_{2}\cdot\underbrace{n(A_2)}_{2}$

반례가 있으므로 거짓

ㄷ. $n(A_m)=4$를 만족시키는 30 이하의 m의 개수는 9개이다.

$m=a\log_2 b$
$=\log_2 b^a$
$b^a=2^m$
$b=2^{\frac{m}{a}}$ b가 자연수이려면 $\frac{m}{a}$도 자연수이어야하네
$\frac{m}{a}=k$ (자연수)
$m=k\cdot a$ → 순서쌍 (k, a)가 4개이려면 m의 약수가 4개. → 약수의 개수는 소인수분해 후 지수 1씩 더해서 곱
$m: 2^3, 3^3, 2\times3, 2\times5, 2\times7, 2\times11, 2\times13, 3\times5, 3\times7$ → $\boxed{9개}$