2021학년도 수능 (가) 미적분 + 수학Ⅱ 해설.

2021.03.03

심상범.

7. 함수 $f(x)=(x^2-2x-7)e^x$ 의 극댓값과 극솟값을 각각 a, b라 할 때, $a\times b$의 값은? [3점]

도함수가 (+)→(−), (−)→(+) 가 되는 지점

① -32 ② -30 ③ -28 ④ -26 ⑤ -24

극대와 극소에 대해 물어보기에 극대와 극소를 구하기 위해 필요한 도함수를 구해서 살펴보자.

$$f'(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x-7)e^x$$
$$=(x^2-9)e^x=(x+3)(x-3)e^x$$

$x=-3$, $x=3$ 에서 $f'(x)=0$ 이다.

도함수의 부호가 바뀌기 위해서는 0을 거쳐야 하기에 도함수가 0이 되는 지점들 중에 근처의 부호 변화를 살펴보자.

∘ $x=-3$

$x=-3^-$ 에서 $f'(-3^-)>0$ 이고

−3보다 조금 작다

$x=-3^+$ 에서 $f'(-3^+)<0$ 이므로 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이다.

−3보다 조금 크다

$f(-3)=(9+6-7)e^{-3}$

$=8e^{-3}=a$

∘ $x=3$

$x=3^-$ 에서 $f'(3^-)<0$ 이고

3보다 조금 크다.

$x=3^+$ 에서 $f'(3^+)>0$ 이므로 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이다.

$f(3)=(9-6-7)e^3$

$=-4e^3=b$

$a\times b=8\cancel{e^{-3}}\times -4\cancel{e^3}=-32$

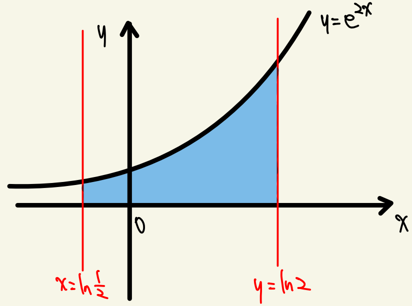
답: ①

8. 곡선 $y=e^{2x}$ 과 x축 및 두 직선 $x=\ln\frac{1}{2}$, $x=\ln 2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

부호 주의!

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{15}{8}$ ③ $\frac{15}{7}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

그래프와 직선들 간의 넓이를 구하기 전에 그래프를 그려서 상황을 먼저 체크하는 것이 좋다.



파랗게 칠한 넓이를 구하기 위해서는 적분을 해주면 된다.

e^{2x}를 $\ln\frac{1}{2}$에서 $\ln 2$까지

$$\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2} e^{2x}\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2}=\frac{1}{2}e^{2\ln 2}-\frac{1}{2}e^{2\ln\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 4^{\ln e}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}^{\ln e}$$

$=\frac{1}{2}e^{\ln 4}=\frac{1}{2}\cdot 4^{\ln e}$

$$=2-\frac{1}{8}=\frac{15}{8}$$

답: ②

11. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3n}{3n+k}}$ 의 값은? [3점]

여기서 $\frac{k}{n}$ 형태를...

① $4\sqrt{3}-6$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $5\sqrt{3}-8$
④ $2\sqrt{3}-3$ ⑤ $3\sqrt{3}-5$

이러한 문제는 급수를 정적분으로 전환하는 문제이다.
정적분으로 전환하기 위해서는 x로 치환할 수 있는 $\frac{k}{n}$ 형태를 찾아줘야 한다.

바로는 형태를 볼 수 없으나 루트 안의 식의 분자, 분모를 n으로 나눠주면 아래와 같다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3n}{3n+k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3}{3+\underbrace{\frac{k}{n}}_{\frac{k}{n}\text{ 발견}}}}$$

$x=3+\frac{k}{n}$ 라고 하자. (치환)

$$\left.\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right)x=3+\frac{k}{n}\left(\begin{matrix}n\\1\end{matrix}\right.\qquad dx=\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{1}{n}}_{dx}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3}{\underbrace{3+\frac{k}{n}}_{x}}}=\int_3^4\sqrt{\frac{3}{x}}\,dx=\sqrt{3}\int_3^4 x^{-\frac{1}{2}}dx=\sqrt{3}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_3^4$$

$$=\sqrt{3}\,(4-2\sqrt{3})$$

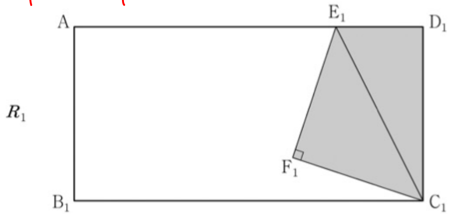
$$=\underline{4\sqrt{3}-6}$$

$\boxed{\text{답: ①}}$

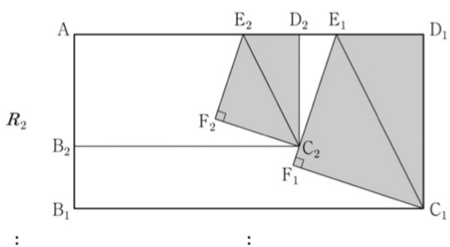
14. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AD_1}=4$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. 선분 AD_1을 $3:1$로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 직사각형 $AB_1C_1D_1$의 내부에 점 F_1을 $\overline{F_1E_1}=\overline{F_1C_1}$, $\angle E_1F_1C_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고 삼각형 $E_1F_1C_1$을 그린다. 이등변삼각형
사각형 $E_1F_1C_1D_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1F_1 위의 점 C_2, 선분 AE_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{AD_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 삼각형 $E_2F_2C_2$를 그리고 사각형 $E_2F_2C_2D_2$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 시행 반복
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

색칠된 것은 누적

R_1



R_2



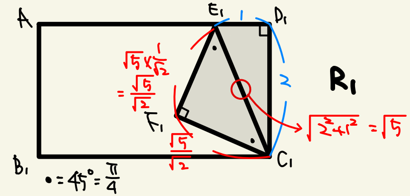
⋮　　　　⋮

① $\frac{441}{103}$　② $\frac{441}{109}$　③ $\frac{441}{115}$　④ $\frac{441}{121}$　⑤ $\frac{441}{127}$

14번 문제는 전형적인 무한등비급수 문제이다.

무한등비급수에서 알아야 하는 값은 첫번째 항에서의 값과 항이 넘어가면서 넓이가 어떤 변화를 가져가는지이다.

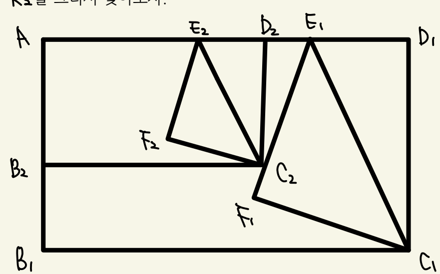
넓이의 변화를 먼저 알아보기보다는 첫 항의 넓이를 구해보는 것이 쉬워보이므로 넓이부터 접근하자.



여기서 구해야하는 것은 $\triangle F_1C_1E_1+\triangle E_1D_1C_1$의 넓이이므로 구해보자.

$$\triangle F_1C_1E_1+\triangle E_1D_1C_1=\frac12\cdot\frac{\sqrt5}{\sqrt2}\cdot\frac{\sqrt5}{\sqrt2}+\frac12\cdot1\cdot2=\frac12\cdot\frac52+1=\frac54+1=\frac94$$

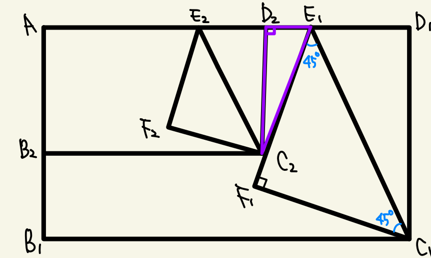
구해야하는 두 가지 요소 중 첫 항은 구했으므로 항이 넘어가면서 넓이에 어떤 변화가 생기는지 R_2를 그려서 찾아보자.



이 상황에서 대응되는 변의 길이의 비율을 알아내야 한다.

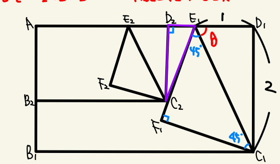
직관적으로 보았을 때는 직사각형의 변 중 하나를 알아내는 것이 좋아보인다.

직사각형의 길이를 알고 있으니



직사각형의 한 변을 생각하고 있으므로 **보라색**으로 칠한 삼각형을 보겠다.

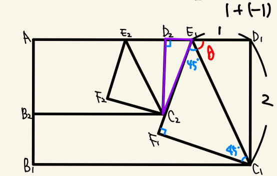
→ $\triangle AB_1C_1D_1$의 모든 변의 길이는 알기에 $\triangle AB_2C_2D_2$와 관련짓기



각 $C_1E_1D_1$을 θ라고 하자. → $\angle C_2E_1D_2=\pi-\frac{\pi}{4}-\theta=\frac34\pi-\theta$

$\tan\theta=2$

$$\tan(\angle C_2E_1D_2)=\tan\left(\tfrac34\pi-\theta\right)=\frac{\tan\frac34\pi-\tan\theta}{1+\tan\frac34\pi\cdot\tan\theta}=\frac{-1-2}{1+(-1)\cdot2}=3$$



$\overline{D_2C_2}=k$라고 하면 닮음에 의해 $\overline{AD_2}=2k$이고 $\overline{D_2E_1}=3-2k$이다.

$\tan(\angle C_2E_1D_2)=3$이므로 $\frac{k}{3-2k}=3$

$k=9-6k$

$7k=9$　$k=\frac97$

직사각형 간의 길이의 비율이 $2:\frac97$이므로 넓이의 비율은 제곱인 $1:\left(\frac{9}{14}\right)^2$이다. 공비

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac94}{1-\left(\frac{9}{14}\right)^2}=\boxed{\frac{441}{115}}$$

답:③

15. $x>0$ 에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여

제한이 걸려있네

$$f'(x)=2-\frac{3}{x^2}, \quad f(1)=5$$

$f'(x)$ 적분하고 적분 상수 구하기 가능 = $f(x)$ 찾기 가능

이다. $x<0$ 에서 미분가능한 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(-3)$ 의 값은? [4점] $x<0$ 에서만 정의

> (가) $x<0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g'(x)=f'(-x)$ 이다. $= 2-\frac{3}{(-x)^2}$
>
> (나) $f(2)+g(-2)=9$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

(가) 조건에서 $g'(x)$ 에 대한 조건을 주었기에 이 식을 적분하여 $g(x)$를 구해보자.

$$g'(x)=f'(-x)=2-\frac{3}{(-x)^2}=2-\frac{3}{x^2}$$

$$\int g'(x)\,dx=\int 2-\frac{3}{x^2}\,dx=2x+\frac{3}{x}+C$$

$g(x)$ 를 구하기 위해서는 함숫값 하나가 필요한데 이 조건이 (나)에 있으므로 $f(x)$ 도 구해보자.

조건 (나)에서 $f(x)$와 $g(x)$ 모두 필요하므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 2-\frac{3}{x^2}\,dx=2x+\frac{3}{x}+\underbrace{C}_{=0}=2x+\frac{3}{x}$$

$f(1)=5$ 이므로

$f(1)=2+3+C=5$

$C=0$

$f(x)$를 구했으므로 조건 (나)를 이용하여 $g(x)$를 구해주자.

$f(2)=4+\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$ $f(2)+g(-2)=9$ 이므로 $g(-2)=\frac{7}{2}$

$g(-2)=-4-\frac{3}{2}+C=\frac{7}{2}$

$C=9$

$g(x)=2x+\frac{3}{x}+9$

구해야하는 $g(-3)=-6-1+9=2$

답: ②

18. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)\underline{x}^{2n+1}+2x}{3\underline{x}^{2n}+1}$$

x의 값에 의해 어느항을 볼지 결정

라 하자. $(f\circ f)(1)=\frac{5}{4}$가 되도록 하는 모든 a의 값의 합은? [4점]

$=f(f(1))$

① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

주어진 식이 합성함수이므로 한 단계 한 단계 천천히 진행해보자.

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)\cdot 1^{2n+1}+2\cdot 1}{3\cdot 1^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a-2+2}{3+1}=\frac{a}{4}$$

$$f(f(1))=\underbrace{f\left(\frac{a}{4}\right)}$$

$f(x)$는 x의 절댓값에 따라 함숫값이 달라지므로 경우의수를 나눠서 살펴보자.

i) $\left|\frac{a}{4}\right|<1 \rightarrow \underline{-4<a<4}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{4}\right)^n=0$

$$f\left(\frac{a}{4}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{4}\right)^{2n+1}+2\cdot\frac{a}{4}}{3\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}+1}=\frac{2\cdot\frac{a}{4}}{1}=\frac{a}{2}=\frac{5}{4}$$

$\boxed{a=\frac{5}{2}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{4}\right)^{2n+1}=0$

ii) $\left|\frac{a}{4}\right|>1 \rightarrow x>4$ or $x<-4$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{4}\right)^n=\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{4}\right)^{2n+1}+2\cdot\frac{a}{4}}{3\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{4}\right)+2\cdot\frac{a}{4}\cdot\left(\frac{4}{a}\right)^{2n+1}}{3+\frac{1}{\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}}}=\frac{\frac{a}{4}(1\cancel{+2})}{\cancel{3}}=\frac{a}{4}=\frac{5}{4}$$

$\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}$로 약분

$\boxed{a=5}$

iii) $\left|\frac{a}{4}\right|=1 \rightarrow a=4$, or $a=-4$

$a=4$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{4}\right)^{2n+1}+2\cdot\frac{a}{4}}{\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}+1}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}\neq\frac{5}{4}$

$a=-4$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{4}\right)^{2n+1}+2\cdot\frac{a}{4}}{\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}+1}=\frac{-1+(-2)}{1+1}=\frac{-3}{2}\neq\frac{5}{4}$

$f(f(1))=\frac{5}{4}$를 만족시키는 a는 5와 $\frac{5}{2}$이므로 $\underline{5+\frac{5}{2}=\frac{15}{2}}$

답: ③

20. 함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0,1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은? [4점]

우리가 그래프를 그릴 수 있는 형태

치역에 제한이 걸린다.

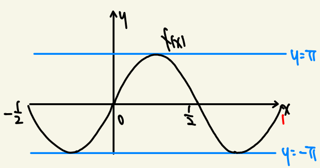
> 함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
>
> $$\int_{-1}^{1}h(x)\,dx=\underset{\text{곱셈}}{2},\quad \int_{-1}^{1}xh(x)\,dx=-\frac{1}{32}$$
>
> 이다.
>
> ① 좌극한 = 우극한
> ② 극한값 = 함숫값

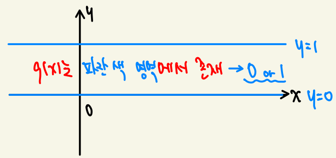
① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

충분히 어려운 문제이고 한 눈에 들어오지 않으니 천천히 할 수 있는만큼 정리해보자.

주어진 함수 $f(x)$의 그래프는 그릴 수 있고 함수 $g(x)$는 치역 이외에는 아무 것도 아는 것이 없다.

그려보자.





- $f(x)=\pi\sin 2\pi x$

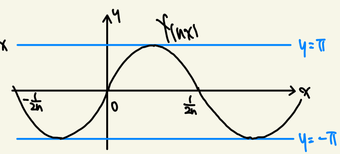
주기: $\dfrac{2\pi}{|2\pi|}=1$

최대·최소 (최대: π, 최소: $-\pi$)

- $f(nx)=\pi\sin 2n\pi x$

주기: $\dfrac{2\pi}{|2n\pi|}=\dfrac{1}{n}$

최대·최소 (최대: π, 최소: $-\pi$)



박스 위의 조건들이 지금까지 정리한 내용이고 이제 박스 안의 내용을 정리해보자.

$h(x)=f(nx)\cdot g(x)$가 실수 전체 집합에서 연속이다.

연속

→ 여기서 n은 주기에 영향을 끼친다.

① 좌극한 = 우극한
② 극한값 = 함숫값
⟶ 우리가 $g(x)$의 정체를 모르니 이거는 못하겠다.

정의를 그대로 사용할 수는 없지만 조금 활용한 아이디어를 사용해보겠다.

→ 함수 $h(x)$는 두 함수 $f(nx)$와 $g(x)$의 곱으로 이루어져있다.

곱셈의 특이점: 한 친구가 0이면 다른 친구와 상관없이 결과는 0

→ $g(x)$가 '어느 지점'에서 불연속이더라도 '그 지점'에서 함수 $f(nx)$의 함숫값이 0이라면 $h(x)$는 실수 전체에서 연속이 가능하다.

함수 $h(x)$를 다시 생각해보면 $f(nx)$의 개형을 기반으로 하고 $g(x)$의 구간에서의 함숫값이 0이면 그 구간에서의 함수 h의 함숫값이 0이 되고 $g(x)$의 구간에서의 함숫값이 1이면 그 구간에서의 함수 h의 그래프가 함수 $f(nx)$의 그래프 개형을 따라간다.

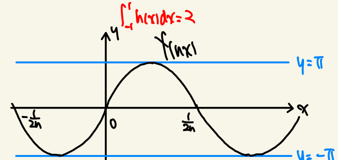
→ $g(x)$의 함숫값이 $h(x)$의 그래프를 결정짓는다. + $g(x)$가 불연속이어도 되는 점은 $f(nx)=0$인 점들

문제 배경에 대한 어느 정도의 해석이 끝났으니 풀어야하는 식들을 살펴보자.

- $\int_{-1}^{1}h(x)\,dx=2$

$h(x)$의 적분을 보려면 그래프가 필요하지만 $g(x)$를 모르므로 $f(nx)$를 그려놓고 필요에 맞게 $g(x)$를 설정하자.

$\int_{-1}^{1}h(x)\,dx=2$



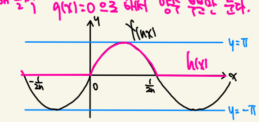
$\int_{-1}^{1}h(x)\,dx=\int_{-1}^{0}h(x)\,dx+\int_{0}^{1}h(x)\,dx$이다. $h(x)$가 위의 $f(nx)$와 같다면 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=1$

$\int_{-1}^{0}h(x)\,dx=\int_{0}^{1}h(x)\,dx=0$이다.

$h(x)$는 $\frac{1}{n}$ 주기로 적분하면 0이므로

→ $f(nx)$에서 함숫값이 음수가 되는 구간은 $g(x)=0$으로 해서 양수 부분만 둔다.

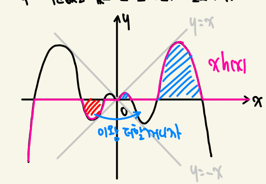
해결책



- $\int_{-1}^{1}xh(x)\,dx=-\frac{1}{32}$

역시 적분값을 줬으므로 그래프가 필요하다.

$xh(x)$ → $h(x)$를 x배한다 — $y=x$를 그려서 끼워넣는다.



$$\int_{-1}^{1}xh(x)\,dx=\int_{-1}^{0}xh(x)\,dx+\int_{0}^{1}xh(x)\,dx=\int_{0}^{1}h(x)\,dx=-\frac{1}{32}$$

그래프에서 보니

$$=\int_{0}^{1}\pi x\sin 2n\pi x\,dx$$

$$\pi\int_{0}^{1}\underset{f}{x}\,\underset{g'}{\sin 2\pi nx}\,dx=\pi\left(\left[-\frac{x}{2n\pi}\cos 2n\pi x\right]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}\sin 2n\pi x\,dx\right)$$

$f'=1$　$g=-\frac{1}{2n\pi}\cos 2\pi nx$

$$=\pi\left(\left[-\frac{x}{2n\pi}\cos 2n\pi x+\frac{1}{2n\pi}\cos 2n\pi x\right]_{0}^{1}\right)$$

$$=\pi\left(-\frac{1}{2n\pi}+\frac{1}{2n\pi}-\frac{1}{2n\pi}\right)$$

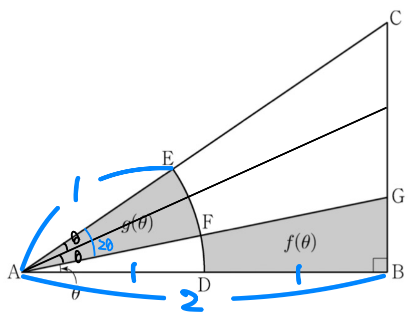
$$=\cancel{\pi}\times\left(-\frac{1}{2n\cancel{\pi}}\right)=-\frac{1}{2n}=-\frac{1}{32}$$

$\boxed{n=16}$

$\boxed{\text{답: ⑤}}$

24. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 중심이 A, 반지름의 길이가 1인 원이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자.
호 DE의 삼등분점 중 점 D에 가까운 점을 F라 하고, 직선 AF가 선분 BC와 만나는 점을 G라 하자.
$\angle BAG=\theta$라 할 때, 삼각형 ABG의 내부와 부채꼴 ADF의 외부의 공통부분의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 AFE의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $40\times\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$) [3점]

60



글에서 주어진 조건을 모두 읽은 후 주어진 그림에 빠짐없이 표현해주자.

표현을 한 뒤에 우리가 구해야 하는 것을 파악해보자.

답을 구하기 위해서는 $f(\theta)$와 $g(\theta)$를 θ에 대한 식을 나타내줘야한다.
그래야 극한 처리 가능

구해야 하는 친구들의 형태를 알아보자.

$f(\theta)$: 삼각형 − 부채꼴
△AGB △AFD

$g(\theta)$: 부채꼴
△AFE

$f(\theta)$와 $g(\theta)$를 만들기 위해 필요한 요소들을 구해보자.

$$f(\theta)=\underbrace{\triangle AGB}_{\overline{AB}\times\overline{BG}\times\frac{1}{2}}-\underbrace{\triangle AFD}_{\text{반지름, 각}}=2\times2\tan\theta\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\theta=2\tan\theta-\frac{\theta}{2}$$

2 2tanθ

$$g(\theta)=\underbrace{\triangle AEF}_{\text{부채꼴 넓이는}}=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot2\theta=\theta$$

반지름, 각 필요

답을 구하기 위한 친구들을 모두 θ에 대해 나타냈으므로 극한처리를 해보자.

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1$$

$$\lim_{\theta\to0}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to0}\frac{2\tan\theta-\frac{\theta}{2}}{\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{\frac{2\tan\theta}{\theta}-\frac{\frac{1}{2}\theta}{\theta}}{\frac{\theta}{\theta}}=\frac{2\cdot\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}-\frac{1}{2}}{1}=\frac{2-\frac{1}{2}}{1}=\frac{3}{2}$$

$$40\times\lim_{\theta\to0}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\cancel{40}^{20}\times\frac{3}{\cancel{2}}=60$$

답: 60

28. 두 상수 a, $b\ (a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x-a)(x-b)^2$$

이라 하자. 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점] 72

(가) 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $h'(3)=2$

연속 + (좌미분계수 = 우미분계수)

문제를 읽어본 후에 문제 자체도 어렵지만 $g^{-1}(x)$를 처리해야 한다는 부담감이 있으므로 이를 치환하여 계산하자. $g^{-1}(x)=t$

치환한 사실을 대입하여 문제 조건을 다시 써보자.

$f(x)=(x-a)(x-b)^2$ $g(x)=x^3+x+1$	$g^{-1}(x)=t$
$h(x)=f(g^{-1}(x))=f(t)=(t-a)(t-b)^2$	↓ 양변에 함수 g를 합성 $x=g(t)=t^3+t+1$

문제 박스 안의 조건들을 순서대로 살펴보자.

(가): $(x-1)|h(x)|$가 미분가능해야 한다.

① 연속 + (좌=우 미분계수) : 계산하기에는... (X)

② 그래프를 그렸을 때 $(x-1)|h(x)|$가 x축과 접해야한다.
꺾이는 지점이 없어야 하므로

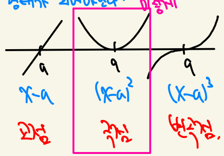
→ 식을 최대한 곱셈의 형태로 만들었을때 모두 짝수 제곱의 형태가 되어야한다. 미분가능

$$(x-1)|h(x)|=(t^3+t+1-1)|(t-a)(t-b)^2|$$
$$=(t^3+t)|(t-a)(t-b)^2|$$
$$=t(t^2+1)|(t-a)(t-b)^2|$$

이 2개가 같아야 미분가능 $a=0$

이 친구는 x축과 만나지 않기에 가능   짝수제곱이네

→ $f(x)=x(x-b)^2$



(나): $h'(3)=2$이다 → $h'(x)$를 잡아보자.

$$h(x)=f(g^{-1}(x))=f(t)=t(t-b)^2$$

$g^{-1}(3)=t$
$g(t)=3$ → $t=1$

$$h'(x)=(3t^2-4bt+b^2)\cdot\frac{dt}{dx}$$ 어떻게 구하지?

$$=(3t^2-4bt+b^2)\cdot\frac{1}{3t^2+1}$$

↳ x와 t만 있는 식 $(x=t^3+t+1)$을 t에 대해 미분 $\frac{dx}{dt}=3t^2+1$

$t=1$ 대입

$$(3-4b+b^2)\cdot\frac{1}{4}=2$$ $h'(3)=2$이므로

$$b^2-4b+3=8$$
$$b^2-4b-5=0$$

+1
−5

$$(b+1)(b-5)=0$$

$b=-1$ or $b=5$

$a<b$이므로 $\boxed{b=5}$

$a=0$

$$f(x)=x(x-b)^2=x(x-5)^2$$

$$f(8)=8\cdot3^2=72$$

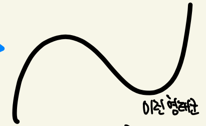
30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)=f(\sin^2\pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

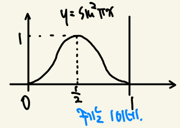
익숙한 다항함수다!

$\sin^2\pi x$의 정체는?

> (가) $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.
>
> 극소가 되는 점도 2개 이상
>
> 특이하네?
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2)=a+b\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점] **29**





감사하게도 무자비하게 모두 초월함수로 준 것이 아니라 하나는 다항함수로 줬다. 다행인 부분이다.

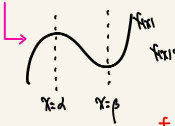
전체를 읽어보면서 잡을 수 있는 시작점은 함수 $g(x)$의 극대에 대해 따지는 조건이 있으므로 도함수를 구해보자.

극점에 대한 이야기이므로 도함수가 0인 지점들을 후보로 뽑자. (구간 $0<x<1$)

+ 극대가 3개면 극소는 2개이상

$$g'(x)=2\pi\underbrace{\sin(\pi x)}_{0\text{개}}\cdot\underbrace{\cos(\pi x)}_{1\text{개}}\cdot\underbrace{f'(\sin^2\pi x)}_{\text{여기서 더 뽑아야....}}$$

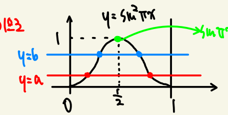
($x=\frac{1}{2}$에서)



$f(x)$가 왼쪽처럼 생겼으니 $\sin^2\pi x=\alpha$, $\sin^2\pi x=\beta$인 점도 가능

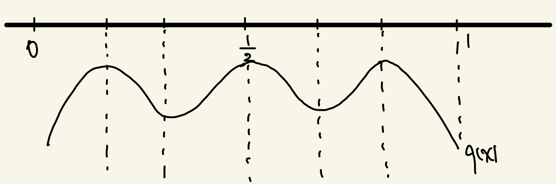
그래프를 안다.

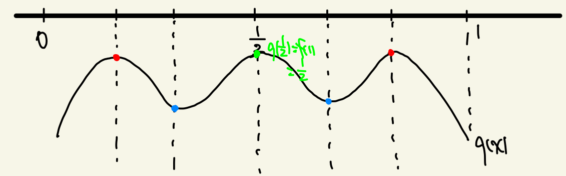
+ $\alpha<\beta<1$이므로



이렇게 보니 극점이 될 수 있는 점이 5개가 나왔다. (극대 3개 +극소 2개)

$g(x)$의 개형을 대략 그려보자.





주기가 1인 이 함수는 극댓값이 모두 같고 최댓값이 $\frac{1}{2}$이므로 $g(\frac{1}{2})=f(1)=\frac{1}{2}$이다.

초록색 점 이외에도 빨간색 점들도 극대이자 최댓값을 가진다.

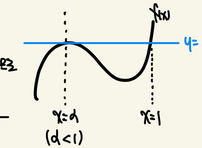
$\sin^2\pi x=\alpha$를 만족시키는 점

$g(x)=\frac{1}{2}=f(\alpha)$

$f(x)$는 $x=1$과 $x=\alpha$에서 $f(x)=\frac{1}{2}$이므로

이를 식으로 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-1)+\frac{1}{2}$

$(0<\alpha<1)$



문제로 다시 돌아가서 아직 사용하지 않은 문제 조건을 찾아보자.

삼차함수의 성질 이용, 조건 (가) 모두 이용, 조건 (나)에서 최댓값 이용

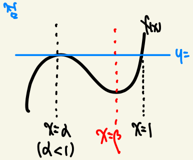
최솟값=0 써야한다.

맨 위에서 그린 그래프에서 파란 점들의 함숫값이 0일 수도 있고, 양단 끝의 함숫값이 0일 수도 있으니 모두 해보자.

1) 파란 점에서 함숫값이 0

$\sin^2\pi x=\beta$인 점

$g(x)=f(\beta)$



삼차함수의 비율관계에 의해 $\beta=\frac{\alpha+2}{3}$

β는 α와 1을 2:1로 내분하므로

$$f(\beta)=f\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)=\left(\frac{\alpha+2}{3}-\alpha\right)^2\left(\frac{\alpha+2}{3}-1\right)+\frac{1}{2}=0$$

$$\alpha=-\frac{1}{2}$$

$0<\alpha<1$ 이라는 조건 위반

2) 양 끝 점에서 함숫값이 0

$x=0$ or $x=1$

$$f(\sin^2\pi\cdot 0)=f(\sin^2\pi\cdot 1)=f(0)=(0-\alpha)^2(0-1)+\frac{1}{2}$$

$$=-\alpha^2+\frac{1}{2}=0$$

함숫값=0이니까.

$$\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(x)=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(x-1)+\frac{1}{2}$$

$$f(2)=\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

$$=4-2\sqrt{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=5-2\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}$$

$a=5$, $b=-2$

$$\boxed{a^2+b^2=25+4=29}$$