2021학년도 9월 평가원 (나) 수학

해설 2.

2021.02.27

심상현

7. 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

수열의 종류 + 공차 ⇒ 대부분의 정보

$$a_3 a_7 = 64, \quad a_8 > 0$$

풀어야 하는 식 주의!

일 때, a_2의 값은? [3점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

주어진 수열이 등차수열이라고 하였고 등차수열에서 중요한 요소 중 하나인 공차까지 주었으므로 등차수열의 일반항을 빠르게 써보자.

ㄴ 물론 첫 항은 모르지만...

$a_n = -3n + \underset{\sim}{k}$ 첫 항을 모르기에 미지수 k라고 하자.

$a_3 = -3 \cdot 3 + k = k - 9$ $a_7 = -3 \cdot 7 + k = k - 21$

$a_3 \cdot a_7 = (k-9)(k-21) = 64$

색다른 해석 → 서로 간의 차이가 12인 두 수의 곱이 64?

⇒ 4×16 or -4×-16

$k^2 - 30k + 189 = 64$

$k^2 - 30k + 125 = 0$

-5

-25

$(k-5)(k-25) = 0$

$a_n = -3n + 5$ $k = 5$ or $k = 25$. $a_n = -3n + 25$

→ 주어진 조건에서 $a_8 > 0$

이게 맞구나.

$a_8 = -19$ $\boxed{a_8 = 1}$

$a_2 = -3 \cdot 2 + 25 = -6 + 25$

$= 19$

$\boxed{답: ③}$

9. $\overline{AB} = 8$이고 $\angle A = 45°$, $\angle B = 15°$인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 길이는? [3점]

삼각형은 각 2개를 주면 나머지 한 각도 알 수 있다.

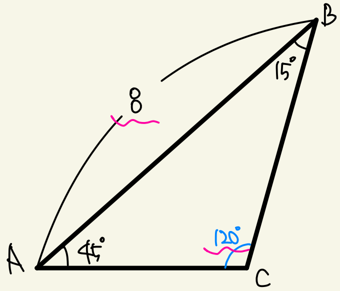
① $2\sqrt{6}$ ② $\frac{7\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ ④ $3\sqrt{6}$ ⑤ $\frac{10\sqrt{6}}{3}$

우선 길이나 각에 대한 정보가 주어져있으나 우리가 이 삼각형을 눈으로 볼 수는 없으므로 주어진 조건들을 따져서

안 그려줬으니까...

삼각형을 대략 그려보자.

대략이라도 그려야 뭐든하지



각과 그 각의 대변 한 쌍을 알고 있으므로 사인법칙에 의해 세 각이 모두 주어진 상황에서 나머지 두 변도 구할 수 있다.

$\overline{AB} = 8$ 와 $\angle C = 120°$

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle C)} = \frac{8}{\sin 120°} = \frac{\frac{8}{1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16}{3}\sqrt{3} = \frac{\overline{BC}}{\sin(\angle A)}$$

$$\overline{BC} = \frac{16}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{6}}{6} = \frac{8}{3}\sqrt{6}$$

$\boxed{답: ③}$

11. n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$$(n^2+6n+5)x^2-(n+5)x-1=0$$

의 두 근의 합을 a_n이라 하자. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}$의 값은? [3점]

직접 구하기 or 근과 계수의 관계

수열 a_k를 구하자.

① 65 ② 70 ③ 75 ④ 80 ⑤ 85

두 근의 합은 직접 구해서 더하거나 근과 계수를 쓰는데 아무리 봐도 직접 구하기는... 어려우니 근과 계수의 관계를 쓰자.

바로 보고 구하기는 어렵다.

된다면 직접 구해서 해도 O.K.

$(n^2+6n+5)x^2-(n+5)x-1=0$의 두 근을 m, n이라고 하자.

$$m+n=-\frac{-(n+5)}{n^2+6n+5}=\frac{\cancel{n+5}}{(n+1)\cancel{(n+5)}}=\frac{1}{n+1}=a_n$$

수열 a_n을 구했으므로 우리가 답으로 구해야 하는 수열에 대입하여 처리하자.

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{10}n+1=\sum_{k=1}^{10}n+\sum_{k=1}^{10}1=\frac{10\cdot 11}{2}+10=55+10=65$$

$$=\sum_{k=1}^{10}n+1=2+3+\cdots+11=\underbrace{\frac{2+11}{2}}_{\text{첫항과 끝항의 평균}}\cdot\underbrace{10}_{\text{항의 개수}}=65$$

둘 중 아무거나

↳ 등차수열이네?
공차가 1인

답: ①

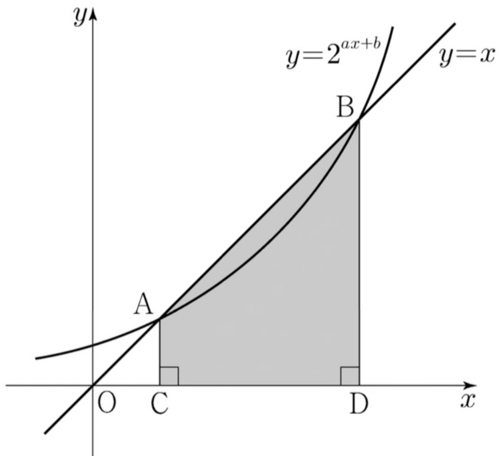
15. 곡선 $y=2^{ax+b}$과 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=6\sqrt{2}$이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

교점을 바로 구하기는 어렵다.

삼각함수... 루2, 기울기 1?

계산할 때 쓰이겠다.

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$



지수함수와 일차함수의 교점에 대한 정보를 알아야하는데 지수함수의 지수를 완벽히 아는 것이 아니므로 바로 구하기는 어렵다. 이럴 때 문제 조건 중 $\overline{AB}=6\sqrt{2}$라는 것이 있는데 점 A와 점 B는 모두 $y=x$위에 있으므로 선분 AB의 기울기는 1이다.

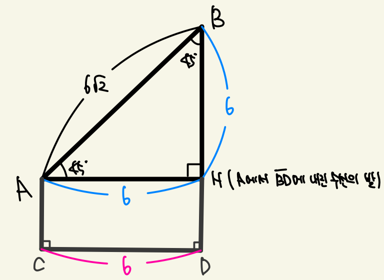
때마침 삼각함수에서 기울기가 $\frac{\pi}{4}$, 1인 것과 숫자 $\sqrt{2}$는 밀접한 관련이 있다.

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\frac{\pi}{4}=1$

선분 AB의 기울기가 1이고 길이가 $6\sqrt{2}$이므로 그림으로 단순히 그려보자.



사다리꼴인 사각형 ACBD의 넓이가 30이라고 하였으므로 $\overline{AC}=x$라고 하고 선분 AC를 구해보자.

사다리꼴의 넓이를 위해서는 밑변($\overline{BD}$)과 윗변($\overline{AC}$)의 길이가 필요 + 높이인 $\overline{AH}=6$

$$30=\frac{x+(x+6)}{2}\cdot 6=6(x+3)=30 \longrightarrow x=2=\overline{AC}$$

점 A와 점 B는 모두 $y=x$ 위에 있으므로 각각의 좌표는. $A(2,2)$, $B(8,8)$이다.

주어진 지수함수는 점 A와 점 B를 지나므로 대입하여 답을 구하자.

$$8=2^{8a+b} \longrightarrow 8a+b=3$$
$$2=2^{2a+b} \longrightarrow 2a+b=1$$
$$\longrightarrow a=\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{3} \qquad a+b=\frac{2}{3}$$

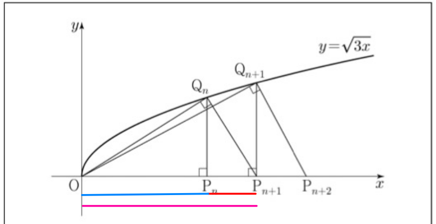
답: ④

16. 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 P_n과 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 Q_n이 있다.

- 선분 OP_n과 선분 P_nQ_n이 서로 수직이다.
- 선분 OQ_n과 선분 Q_nP_{n+1}이 서로 수직이다.

그림에 대한 설명

다음은 점 P_1의 좌표가 $(1, 0)$일 때, 삼각형 $OP_{n+1}Q_n$의 넓이 A_n을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)



모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n, 0)$이라 하자.

$\overline{OP_{n+1}} = \overline{OP_n} + \overline{P_nP_{n+1}}$이므로

$$a_{n+1} = a_n + \overline{P_nP_{n+1}}$$

→ 문제 해설의 IDEA

이다. 삼각형 OP_nQ_n과 삼각형 $Q_nP_nP_{n+1}$이 닮음이므로

$$\overline{OP_n} : \overline{P_nQ_n} = \overline{P_nQ_n} : \overline{P_nP_{n+1}}$$

이고, 점 Q_n의 좌표는 $(a_n, \sqrt{3a_n})$이므로

$$\overline{P_nP_{n+1}} = \boxed{(가)}$$

→ 만들어낸 수열에 대한 해석

이다. 따라서 삼각형 $OP_{n+1}Q_n$의 넓이 A_n은

$$A_n = \frac{1}{2} \times \left(\boxed{(나)}\right) \times \sqrt{9n-6}$$

이다.

→ 수열을 통해 구하려던 값을 내는 과정

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(8)$의 값은? [4점]

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

빈칸문제의 흐름을 살펴보자.

이와 같은 빈칸 문제들은 빈칸 주위만 봐서 푸는 것이 아닌 전체적인 문제의 흐름을 잡는 것이 중요하다.

문제를 '제대로' 푸는 일

박스 위의 내용은 그래프의 형태를 설명하는 내용이니 읽고 넘어가고 문제 해설의 IDEA를 보자.

이 문제를 해결하기 위해서는 $\overline{OP_n}$ 을 a_n 으로 나타내어 각각의 규칙성이 있는 길이를 수열로 나타내는 방향성을 잡은 것이다.

박스 안 4번째 줄부터 닮음인 두 삼각형의 비율을 통해서 수식을 만들어내었다.

우리가 해야 하는 것은 문제에서 제시한 풀이대로 진행하는 것이다.

$$\underset{a_n}{\overline{OP_n}} : \underset{\sqrt{3a_n}}{\overline{P_nQ_n}} = \underset{\sqrt{3a_n}}{\overline{P_nQ_n}} : \overline{P_nP_{n+1}}$$

↓ 비례식의 성질에 의해

$$\overline{P_nQ_n}^2 = \overline{OP_n} \cdot \overline{P_nP_{n+1}}$$

$(\sqrt{3a_n})^2 = 3a_n$, $\overline{OP_n} = a_n$, $\overline{P_nP_{n+1}} = 3 = \boxed{(가)} = p$

└→ 문제에서 보니 p는 우리가 만든 수열의 공차네?

$$a_{n+1} = a_n + \underbrace{3}_{\overline{P_nP_{n+1}}} \rightarrow a_n = 3n-2 \quad (+\ a_1 = 1)$$

빈칸 (나)는 삼각형 A_n 의 넓이를 구하는 방식을 알아야 해결할 수 있다. → 삼각형 A_n을 구하는 과정이므로.

A_n = 삼각형 $OP_{n+1}Q_n$

$$A_n = \underbrace{a_{n+1}}_{\text{밑변 } OP_{n+1}} \cdot \underbrace{\sqrt{3a_n}}_{\text{높이 } P_nQ_n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \underbrace{a_{n+1}}_{\boxed{(나)}} \times \underbrace{\sqrt{9n-6}}_{\sqrt{3a_n}}$$

$$\boxed{(나)} = 3(n+1)-2 = 3n+1 = f(n)$$

$$p + f(8) = 3 + \underbrace{f(8)}_{=25} = 3+25 = 28$$

답: ⑤

17. $\angle A = 90°$ 이고 $\overline{AB} = 2\log_2 x$, $\overline{AC} = \log_4 \dfrac{16}{x}$ 인 삼각형 ABC의 넓이를 $S(x)$라 하자. $S(x)$가 $x=a$에서 최댓값 M을 가질 때, $a+M$의 값은? (단, $1<x<16$) [4점]

우리가 아는 특이한 각

주의!

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

삼각형의 넓이를 구하는 방식은 크게 두 가지가 있다.

1. 밑변과 높이를 곱해서 구하기

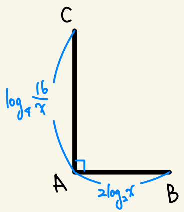
S = 밑변 × 높이 × $\frac{1}{2}$

→ 마침 $\angle A = 90°$ 이네 (직각삼각형)

2. 두 변과 끼인 각의 사인값을 통해 구하기

$S = \frac{1}{2}\cdot \underbrace{a\cdot b}_{\text{두 변}}\cdot \underbrace{\sin\theta}_{\text{끼인 각}}$

→ $\overline{AB}$ 와 $\overline{AC}$ 를 알고 끼인 각인 $\angle A = 90°$ 를 알고 있다.



$\log_2\frac{16}{x} = \log_2 16 - \log_2 x$

$$S = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot \underbrace{\log_4\frac{16}{x}}_{\overline{AC}}\cdot \underbrace{\cancel{2}\log_2 x}_{\overline{AB}} = \frac{1}{2}\log_2\frac{16}{x}\cdot\log_2 x = \frac{1}{2}(\log_2 16-\log_2 x)\log_2 x$$

$$= \frac{1}{2}(4-\log_2 x)\log_2 x$$

넓이의 최댓값을 구해야하므로 $\log_2 x = t$로 치환하여 계산하자.

$$S = \frac{1}{2}(4-t)t = -\frac{1}{2}t^2 + 2t = -\frac{1}{2}(t^2-4t) = \underbrace{-\frac{1}{2}(t-2)^2+2}$$

$t=2$ 일때

S가 최대. → 최댓값: 2

$\log_2 x = 2$

$x = 4$

$a=4$, $M=2$ 이므로

$a+M=6$

답: ①

21. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} 2a_n + a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_n + a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

대소비교가 중요한 듯?

을 만족시킨다. $a_3 = 2$, $a_6 = 19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

어려운 수열 문제의 특징이지만 문제를 읽어봤을 때 너무나 정보가 부족하다고 느껴진다.

우리가 문제를 읽으면서 잡을 수 있는 정보는 이어진 두 항의 대소 비교에 의해서 식이 바뀐다는 것 정도이다.

그렇다면 첫 항과 두번째 항의 대소 비교를 통해 시작해보자.

대소 비교의 경우의 수가 2가지이므로 나눠서 생각해보자.

- $a_1 \le a_2$

$a_1 \le a_2$이므로 $\underbrace{a_3}_{=2} = 2a_1 + a_2$이다. $\longrightarrow$ $a_1 \le a_2$이고 $2a_1 + a_2$가 양수이므로 $a_2 > 0$이다.

a_2가 음수라면 $2a_1 + a_2$는 3이 될 수 X

두번째의 항의 부호는 정했으나 첫 항의 부호는 확정할 수 없으므로 첫 항의 부호의 경우의 수를 나눠서 보자.

∘ $a_1 \ge 0$일때

$a_2 \le \underbrace{a_3}_{양수 + a_2}$이므로 $a_4 = 2a_2 + a_3 = 2a_2 + 2$ ($a_3 = 2$; 양수 양수)

$a_3 \le \underbrace{a_4}_{양수 + a_3}$이므로 $a_5 = 2a_3 + a_4 = 2\cdot 2 + 2a_2 + 2 = 2a_2 + 6$ ($a_4 = 2a_2 + 2$)

$a_4 \le \underbrace{a_5}_{양수 + a_4}$이므로 $a_6 = 2a_4 + a_5 = 2(2a_2 + 2) + 2a_2 + 6 = 6a_2 + 10$

이때 $a_6 = 19$이므로 $19 = 6a_2 + 10 \longrightarrow a_2 = \frac{3}{2}$ $a_3 = 2 = 2a_1 + \underbrace{a_2}_{\frac{3}{2}}$이므로 $a_1 = \frac{1}{4}$

∘ $a_1 < 0$일때

$a_2 > \underbrace{a_3}_{음수 + a_2}$이므로 $a_4 = a_2 + a_3 = a_2 + 2$

$a_3 \le \underbrace{a_4}_{양수 + a_3}$이므로 $a_5 = 2a_3 + a_4 = a_2 + 2 + 2\cdot 2 = a_2 + 6$

$a_4 \le \underbrace{a_5}_{양수 + a_4}$이므로 $a_6 = 2a_4 + a_5 = 2(a_2 + 2) + a_2 + 6 = 3a_2 + 10$ $a_6 = 19$이므로 $a_2 = 3 \rightarrow 2a_1 + 3 = 2$이므로 $a_1 = -\frac{1}{2}$

- $a_1 > a_2$일때

$a_3 = a_1 + a_2 = 2$이므로 $a_1 > 0$

음수라면 $\underbrace{a_1}_{음수} + \underbrace{a_2}_{음수} = 2$ ↓불가능

$a_2 \le \underbrace{a_3}_{a_1 + a_2}$이므로 $a_4 = 2a_2 + a_3 = 2a_2 + 2$

양 + 양

∘ $a_2 \ge 0$일때

$a_3 \le \underbrace{a_4}_{2a_2 + a_3}$이므로 $a_5 = 2a_3 + a_4 = 2\cdot 2 + 2a_2 + 2 = 2a_2 + 6$

⊕ ⊕

$a_4 \le \underbrace{a_5}_{⊕ + ⊕}$이므로 $a_6 = 2a_4 + a_5 = 2(2a_2 + 2) + 2a_2 + 6 = 6a_2 + 10 = \underbrace{19}_{a_6 = 19이므로} \longrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2} \downarrow a_1 + a_2 = a_3 = 2 \quad a_1 = \frac{1}{2}}$

전제조건이 $a_1 > a_2$였으니 이거는 X

∘ $a_2 < 0$일때

$a_3 > \underbrace{a_4}_{음수 + a_3}$이므로 $a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 2a_2 + 2 = 2a_2 + 4$

$a_4 \le \underbrace{a_5}_{양수 + a_4}$이므로 $a_6 = 2a_4 + a_5 = (2a_2 + 2)2 + 2a_2 + 4 = 6a_2 + 8 = \underbrace{19}_{a_6 = 19} \longrightarrow \boxed{a_2 = \frac{11}{6}}$ 전제조건이 $a_2 < 0$이니까 이것도 X

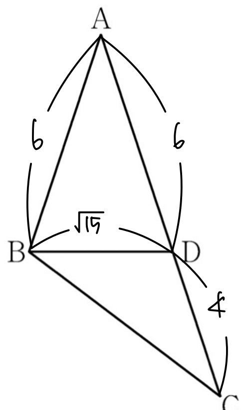
모든 조건을 만족시키는 a_1 은 $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{1}{4} + (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$ 이다.

답: ②

25. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=10$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{AB}=\overline{AD}$가 되도록 잡는다. $\overline{BD}=\sqrt{15}$ 일 때, 선분 BC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오. [3점]

글로 준 조건들을 그림에 그리자!

기본 태도.



선분 BC를 구하기 위해서는 주어진 도형에서 우리 크기를 아는 각이 있어야 한다. 그러나 문제에서 주지 않았기에 사인이나 코사인법칙으로 구해야 한다.

사인, 코사인 법칙 모두 각을 필요로 한다.

우리가 아는 각이 없는 상황에서는 세 변의 길이를 모두 알면 어느 각이던 코사인 법칙으로 각의 코사인값을 구할 수 있다.

선분 BC의 길이를 구하기 위해서는 각 BAD나 각 BDC를 알아야 한다. 삼각형 BDC의 세 변의 길이를 모두 아는 것이 아니기에 삼각형 ABD를 사용하여 각 BAD의 코사인 값을 구해보자.

코사인법칙 또는 사인법칙을 쓰기 위해.

$$\underbrace{\overline{BD}^2}_{\sqrt{15}} = \underbrace{\overline{AB}^2}_{6} + \underbrace{\overline{AD}^2}_{6} - 2\cdot \underbrace{\overline{AB}}_{6}\cdot \underbrace{\overline{AD}}_{6}\cdot \cos(\angle BAD)$$

$$15 = 36+36-72\cos(\angle BAD) \longrightarrow \cos(\angle BAD) = \frac{57}{72} = \frac{19}{24}$$

각 BAD의 코사인 값을 구했으므로 삼각형 ABC를 통해 선분 BC의 길이를 구하자.

코사인법칙 사용.

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\cdot \overline{AB}\cdot \overline{AC}\cdot \cos(\angle BAD)$$

$$= 36+100-120\cdot \frac{19}{24} = 136-95 = 41$$

$\overline{BC}^2 = 41$

$\boxed{답 : 41}$