제 2 교시

수학 영역(가형)

5지선다형

1. $8^{\frac{4}{3}} \times 2^{-2}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$2^{3 \times \frac{4}{3} - 2} = 2^2 = 4$$

2. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2 = 5$, $a_5 = 11$일 때, a_8의 값은? [2점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

$$a_5 = 11$$
$$a_2 = 5$$
$$-)$$
$$3d = 6$$
$$d = 2$$
$$a_8 = a_5 + 3d$$
$$= 11 + 6$$
$$= 17$$

3. $\lim_{n \to \infty}\left(\sqrt{4n^2+2n+1} - \sqrt{4n^2-2n-1}\right)$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(4n^2+2n+1)-(4n^2-2n-1)}{\sqrt{4n^2+2n+1}+\sqrt{4n^2-2n-1}}$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{4n+2}{\sqrt{4n^2+2n+1}+\sqrt{4n^2-2n-1}}$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{4+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}$$
$$= \frac{4}{2+2} = 1$$

4. 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+2h)-f(2)}{h}$ 의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$$2 \lim_{h \to 0} \frac{f(2+2h)-f(2)}{2h} = 2f'(2) = 8$$
$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$
$$f'(2) = 12 - 8 = 4$$

5. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n = 2n^2 - 3n$이다. $a_n > 100$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은? [3점]

① 25 ② 27 ③ 29 ④ 31 ⑤ 33

$n=1 \quad a_1 = S_1 = -1$

$n \geq 2 \quad a_n = S_n - S_{n-1}$

$= 2n^2 - 3n - \{2(n-1)^2 - 3(n-1)\}$

$= 4n - 5$

$a_n = 4n - 5 > 100$

$4n > 105$

$n > 26.25$

6. 부등식 $\log_{18}(n^2 - 9n + 18) < 1$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은? [3점]

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

☆ 로그 나오면 진수(또는 밑) 범위 확인

$0 < \underbrace{n^2 - 9n + 18 < 18}_{①}$

$\underbrace{0 < n^2 - 9n + 18}_{②}$

① $n^2 - 9n < 0$

$n(n-9) < 0$

$0 < n < 9$

② $(n-3)(n-6) > 0$

$n < 3$ 또는 $n > 6$

$\therefore 0 < n < 3$ 또는 $6 < n < 9$

$1, 2, 7, 8$

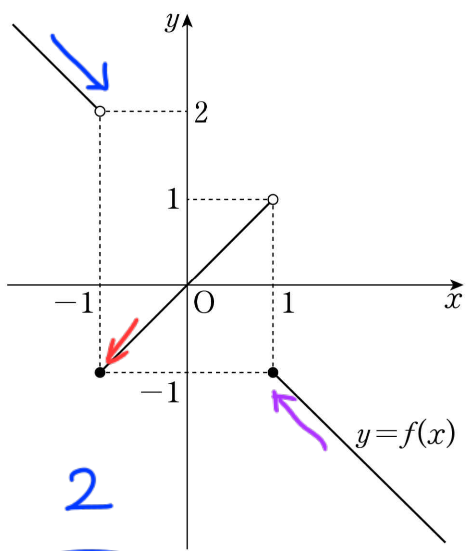
7. 숫자 0, 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후, 일렬로 나열하여 만든 네 자리 자연수가 2100보다 작은 경우의 수는? [3점]

① 80 ② 85 ③ 90 ④ 95 ⑤ 100

① 1□□□ $\quad 4^3 = 64$

② 2 0□□ $\quad 4^2 = 16$

8. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\underbrace{\lim_{x \to 0+} f(x-1)}_{-1} + \underbrace{\lim_{x \to 1+} f(f(x))}_{2}$의 값은? [3점]

① −2 ② −1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$f(-1+)$

$= -1$

$f(f(1+))$

$= f(-1-)$

$= 2$

9. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=7$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n+3}{2} & (a_n\text{이 소수인 경우})\\ a_n+n & (a_n\text{이 소수가 아닌 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. a_8의 값은? [3점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

$a_1=7$: 소수

$a_2=5$

$a_3=4$

$a_4=7$

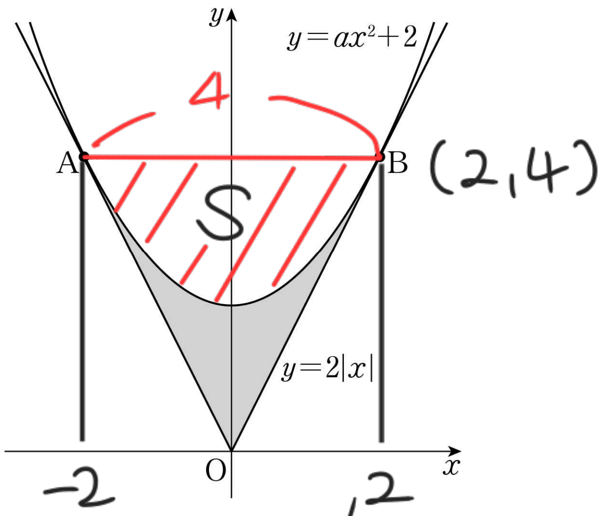
$a_5=5$

$a_6=4$

$a_7=10$

$a_8=17$

10. 그림과 같이 두 함수 $y=ax^2+2$와 $y=2|x|$의 그래프가 두 점 A, B에서 각각 접한다. 두 함수 $y=ax^2+2$와 $y=2|x|$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 상수이다.) [3점]



① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{17}{6}$

$ax^2+2=2x$ 중근

$ax^2-2x+2=0$

$D/4=1-2a=0.\quad a=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x^2-2x+2=\frac{1}{2}(x-2)^2=0$

B(2, 4)

$\triangle OAB - S$

$=\frac{1}{2}\times4\times4-\frac{a}{6}(2-(-2))^3$

$=8-\frac{1}{12}\times4^3$

$=8-\frac{16}{3}$

$=\frac{8}{3}$

11. 흰 공 2개, 빨간 공 2개, 검은 공 4개를 일렬로 나열할 때, 흰 공은 서로 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 색의 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 295 ② 300 ③ 305 ④ 310 ⑤ 315

② W, W

①

R R B B B B

① 6 자리 중 R 들어갈 자리 2개 선택

$_6C_2$

② 7 자리 중 W 들어갈 자리 2개 선택

$_7C_2$

$\therefore {}_6C_2 \times {}_7C_2 = 15\times 21$

$= 315$

12. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & (x<1) \\ \dfrac{1}{2x+1} & (x\geq 1) \end{cases},$$

$$g(x)=2x^3+ax+b$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $b-a$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 10 ② 9 ③ 8 ④ 7 ⑤ 6

$\lim\limits_{x\to1-} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to1-} \dfrac{2x^3+ax+b}{x-1}$

존재하려면 (분자 → 0), $g(1)=0$

$a+b=-2$, $b=-a-2$ 대입

$\lim\limits_{x\to1-} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to1-} \dfrac{(x-1)(2x^2+2x+a+2)}{x-1} = a+6$

$f(1)g(1) = \dfrac{1}{3}\times 0 = 0$

$a=-6$, $b=4$

$b-a=10$

13. 공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_3 \times a_5 \times a_7 = 125 = a_5^3 \quad \therefore a_5 = 5$

(나) $\dfrac{a_4 + a_8}{a_6} = \dfrac{13}{6}$

a_9의 값은? [3점]

① 10 ② $\frac{45}{4}$ ③ $\frac{25}{2}$ ④ $\frac{55}{4}$ ⑤ 15

$$\frac{\frac{a_5}{r} + a_5 r^3}{a_5 r} = \frac{r^4+1}{r^2} = \frac{13}{6}$$

$$6r^4 - 13r^2 + 6 = 0$$

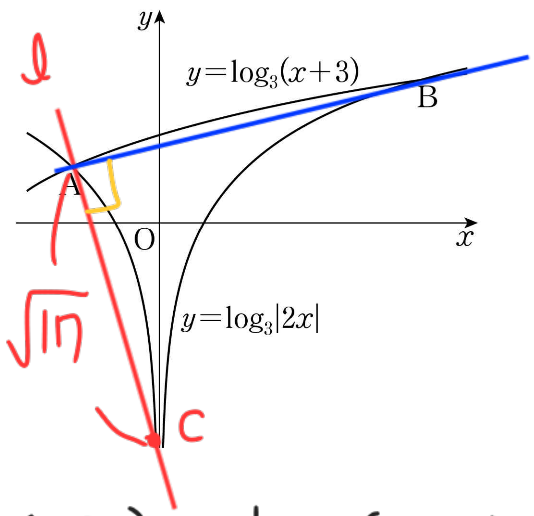
$$(3r^2-2)(2r^2-3) = 0$$

$$r^2 = \frac{3}{2}, \ \cancel{\frac{2}{3}} \quad (r>1)$$

$$a_9 = a_5 \times r^4 = 5 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}$$

14. 함수 $y=\log_3|2x|$의 그래프와 함수 $y=\log_3(x+3)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 직선 AB와 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]

① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$



$$\log_3(x+3) = \log_3(-2x)$$

$$x+3 = -2x, \ x=-1, \ A(-1, \log_3 2)$$

$$\log_3(x+3) = \log_3(2x)$$

$$x+3 = 2x, \ x=3, \ B(3, \log_3 6)$$

$\overline{AB}$ 기울기 $\dfrac{\log_3 6 - \log_3 2}{3-(-1)} = \dfrac{1}{4}$

$l : y = -4(x+1) + \log_3 2$

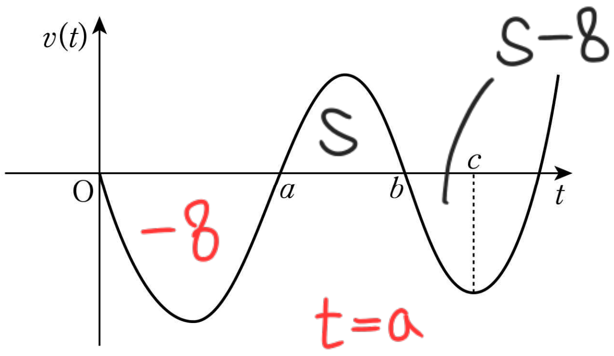
$C(0, -4+\log_3 2)$

$$\overline{AC} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \sqrt{17} \times \sqrt{17} = \frac{17}{2}$$

15. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같다.



점 P가 출발한 후 처음으로 운동 방향을 바꿀 때의 위치는 -8이고 점 P의 시각 $t=c$에서의 위치는 -6이다.

$\int_0^b v(t)dt = \int_b^c v(t)dt$ 일 때, 점 P가 $t=a$부터 $t=b$까지 움직인 거리는? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$\int_0^a v(t)dt = -8$

$\int_a^b v(t)dt = S$ 라 하자.

$\int_0^b v(t)dt = S-8 = \int_b^c v(t)dt$

$t=c$ 일때 위치 6

$-6 = \int_0^c v(t)dt = \int_0^a + \int_a^b + \int_b^c$

$= -8 + S + (S-8)$

$-6 = 2S - 16,$

$S = 5$

16. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = x^3 - 4x\int_0^1 |f(t)|dt = k \qquad f(2) = 8 - 8k$$

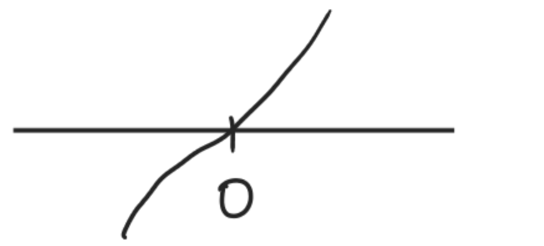
를 만족시킨다. $f(1) > 0$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f(x) = x^3 - 4kx = x(x^2 - 4k)$

$f(1) = 1 - 4k > 0, \quad k < \frac{1}{4}$

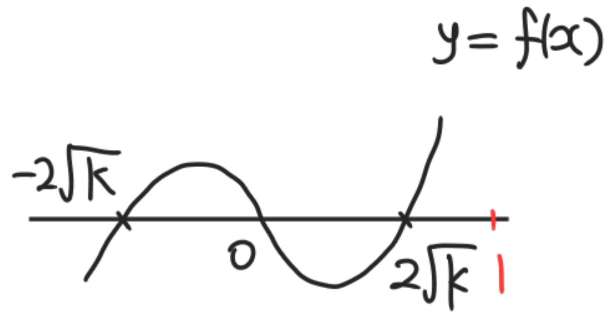
$k = \int_0^1 |f(t)|dt$



① $k \leq 0$

$k = \int_0^1 |f(t)|dt = \int_0^1 (x^3 - 4kx)dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2kx^2\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 2k, \quad k = \cancel{\frac{1}{12}}$



② $0 < k < \frac{1}{4}$

$k = \int_0^1 |f(t)|dt$

$= -\int_0^{2\sqrt{k}} (x^3 - 4kx)dx + \int_{2\sqrt{k}}^1 (x^3 - 4kx)dx$

$= -\left[\frac{1}{4}x^4 - 2kx^2\right]_0^{2\sqrt{k}} + \left[\frac{1}{4}x^4 - 2kx^2\right]_{2\sqrt{k}}^1$

$= -(4k^2 - 8k^2) + \left(\frac{1}{4} - 2k\right) - (4k^2 - 8k^2)$

$= 8k^2 - 2k + \frac{1}{4} = k$

$32k^2 - 12k + 1 = 0$

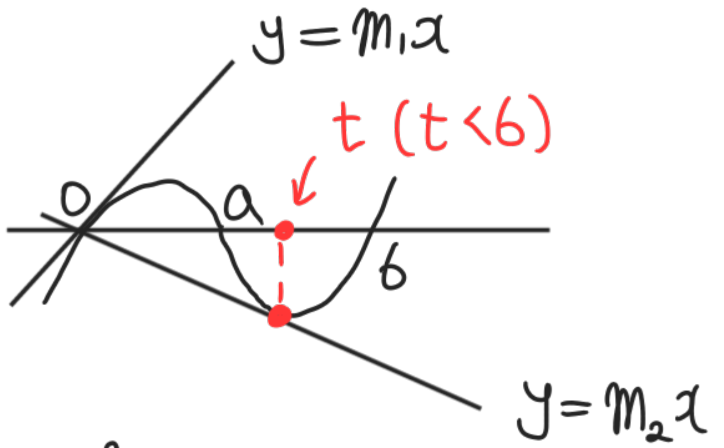
$(8k - 1)(4k - 1) = 0$

$k = \frac{1}{8}, \ \cancel{\frac{1}{4}}, \quad f(2) = 8 - 8k$

$= 7$

17. $0<a<6$인 실수 a에 대하여 원점에서 곡선 $y=x(x-a)(x-6)$에 그은 두 접선의 기울기의 곱의 최솟값은? [4점]

① -54 ② -51 ③ -48 ④ -45 ⑤ -42



$f(x)=x^3-(a+6)x^2+6ax$

$f'(x)=3x^2-2(a+6)x+6a$

$m_1=f'(0)=6a$

$x=t$ $\quad f(t)=t^3-(a+6)t^2+6at=m_2t$

$(t\neq0,\ t<6)$ $\quad t^2-(a+6)t+6a-m_2=0$

대입

$f'(t)=3t^2-2(a+6)t+6a=m_2$

$2t^2-(a+6)t=0$

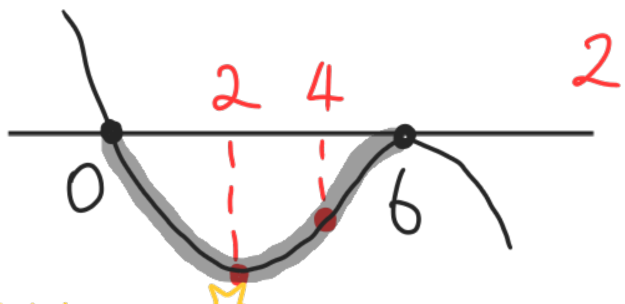
$t=\dfrac{a+6}{2}$

$m_2=(t-a)(t-6)=-\left(\dfrac{a-6}{2}\right)^2$

$m_1m_2=-\dfrac{3}{2}a(a-6)^2$

그래프

x 좌표 2인 이유



최솟값은 $a=2$ 일때 $m_1m_2=-48$

18. 다음은 $1\le|m|<n\le10$을 만족시키는 두 정수 m, n에 대하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하는 과정이다.

> (ⅰ) $m>0$인 경우
> n의 값에 관계없이 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다. 그러므로 $m>0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 (가) 이다.
>
> (ⅱ) $m<0$인 경우
> n이 홀수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다. 한편, n이 짝수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다. 그러므로 $m<0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 (나) 이다.
>
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는 (가) + (나) 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은? [4점]

① 70 ② 65 ③ 60 ④ 55 ⑤ 50

(가) $m<n\le10$ 인 n은 $(10-m)$개

$\sum_{m=1}^{9}(10-m)=45=p$

(나) $n=9$ $\quad 1\le-m<9$, 8개

$n=7$ $\quad 1\le-m<7$, 6개

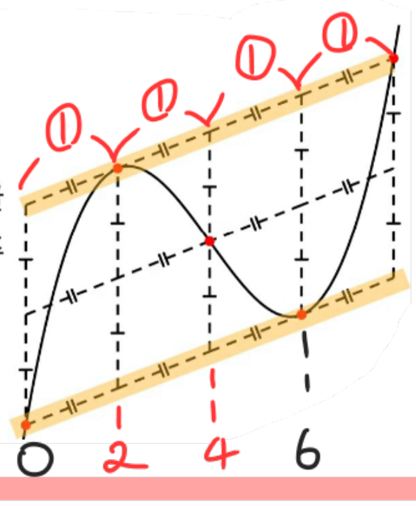
$n=5$ $\quad 1\le-m<5$, 4개

$n=3$ $\quad 1\le-m<3$, 2개

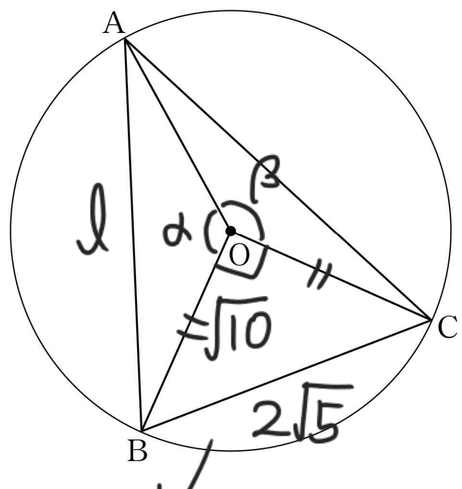
$n=1$ $\quad 1\le-m<1$, 0개

$\rightarrow$ 20개 $=q$

① 삼차함수는 점대칭입니다.
② 접점, 대칭점, 교점 사이의 비율 관계를 알아두면 계산이 아주 편해지는 경우가 있습니다.



19. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC에 대하여 두 삼각형 OAB, OCA의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $3S_1 = 4S_2$이고 $\overline{BC} = 2\sqrt{5}$ 일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]



① $2\sqrt{7}$ ② $\sqrt{30}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{34}$ ⑤ 6

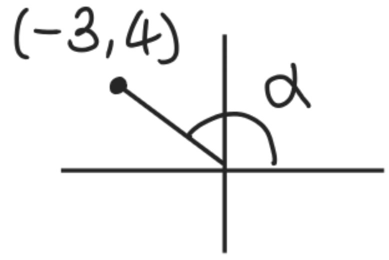
△OBC는 직각이등변삼각형

$\alpha+\beta=\frac{3}{2}\pi$

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{4}{3}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}$

$\frac{4}{3}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\tan\alpha$

$\tan\alpha=-\frac{4}{3}$



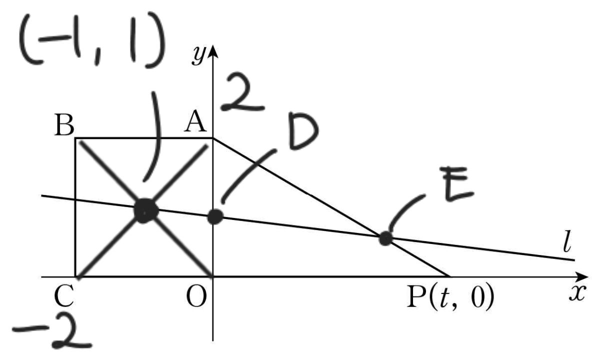
$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

$=\frac{10+10-l^2}{2\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=1-\frac{l^2}{20}$

$\frac{l^2}{20}=\frac{8}{5}$, $l^2=32$

$l=4\sqrt{2}$

20. 그림과 같이 좌표평면 위의 네 점 O(0, 0), A(0, 2), B(−2, 2), C(−2, 0)과 점 P$(t, 0)$ $(t>0)$에 대하여 직선 l이 정사각형 OABC의 넓이와 직각삼각형 AOP의 넓이를 각각 이등분한다. 양의 실수 t에 대하여 직선 l의 y절편을 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+} f(t)$의 값은? [4점]



① $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ② $2-\sqrt{2}$ ③ $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$

□ABCO 이등분하려면 (−1, 1) 지남.

$l : y=m(x+1)+1$ $(m<0)$

직선 AP : $y=-\frac{2}{t}x+2$

$D(0, m+1)$, $\overline{AD}=1-m$

E의 x좌표 구하자 (직선 AP와 l의 교점)

$-\frac{2}{t}x+2=mx+m+1$

$(m+\frac{2}{t})x=1-m$, $x=\frac{1-m}{m+\frac{2}{t}}$

$\triangle ADE=\frac{1}{2}\times(1-m)\times\frac{1-m}{m+\frac{2}{t}}=\frac{t}{2}=\frac{1}{2}\triangle AOP$

$(1-m)^2=t(m+\frac{2}{t})$

$m^2-(t+2)m-1=0$

$m=\frac{t+2-\sqrt{(t+2)^2+4}}{2}$ $(\because m<0)$

$f(t)=m+1=\frac{-2}{t+2+\sqrt{(t+2)^2+4}}+1$

$\lim_{t\to 0+} f(t)=\frac{-2}{2+\sqrt{8}}+1=2-\sqrt{2}$

21. 0이 아닌 실수 m에 대하여 두 함수

$$f(x)=2x^3-8x, \quad = 2x(x^2-4), \quad f'(x)=6x^2-8$$

$$g(x)=\begin{cases} -\dfrac{47}{m}x+\dfrac{4}{m^3} & (x<0) \\ 2mx+\dfrac{4}{m^3} & (x\ge 0) \end{cases}$$

$\to -2, 0, 2$

이 있다. 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $g(x)$ 중 크지 않은 값을 $h(x)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $m=-1$일 때, $h\left(\frac{1}{2}\right)=-5$이다.

ㄴ. $m=-1$일 때, 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 2이다.

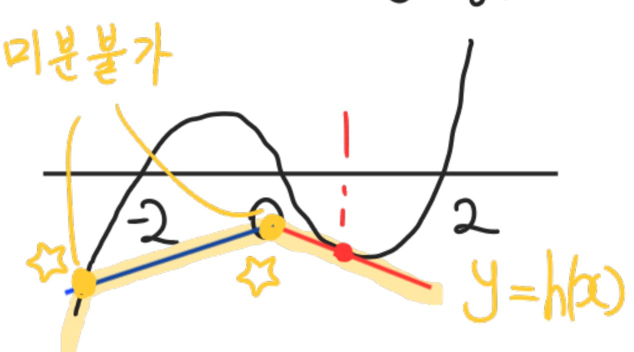
ㄷ. 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1인 양수 m의 최댓값은 6이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ $g(x)=\begin{cases} 47x-4 & (x<0) \\ -2x-4 & (x\ge 0) \end{cases}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-4, \quad g\left(\frac{1}{2}\right)=-5=h\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄴ



$2x^3-8x=-2x-4$

$x^3-3x+2=0$

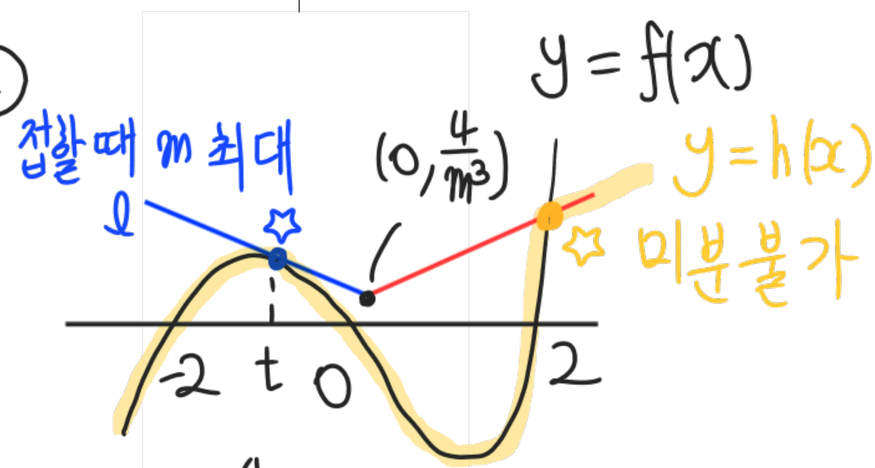
$(x-1)^2(x+2)=0$

$\to 1, 1, -2$

$2x^3-8x=47x-4$

$\to x<0$ 인 실근 하나 (Graph)

ㄷ



$g(0)=\frac{4}{m^3}>0$

$x=t$ 에서의 접선 l : $y=f'(t)(x-t)+f(t)$

$y=(6t^2-8)(x-t)+2t^3-8t \leftarrow \left(0, \frac{4}{m^3}\right)$ 대입

$\frac{4}{m^3}=-4t^3 \Rightarrow t=-\frac{1}{m},$

$f'(t)=g'(t) \Rightarrow \frac{6}{m^2}-8=-\frac{47}{m}$

$t = -\frac{1}{m}$

$\Rightarrow 8m^2-47m-6=(m-6)(8m+1)=0$

$m=6$ 또는 $m=-\frac{1}{8}$

단답형

22. 함수 $f(x)=(2x+3)(x^2+5)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

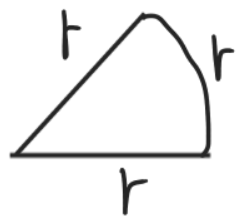
$f'(x)=2(x^2+5)+(2x+3)\times 2x$

$f'(1)=12+10=22$

$\boxed{22}$

23. 중심각의 크기가 1라디안이고 둘레의 길이가 24인 부채꼴의 넓이를 구하시오. [3점]

$l=r\cdot 1=r$



$3r=24, \ r=8$

$S=\frac{1}{2}r^2\times 1=\boxed{32}$

24. $\int_1^3 (4x^3-6x+4)dx + \int_1^3 (6x-1)dx$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$\int_1^3 \{(4x^3-6x+4)+(6x-1)\}dx$$
$$=\int_1^3 (4x^3+3)dx$$
$$=[x^4+3x]_1^3$$
$$=(81+9)-(1+3)$$
$$=90-4$$
$$=86$$
$$\boxed{86}$$

25. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 3,\ \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 5$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} n a_n(b_n+2n)$의 값을 구하시오. [3점]

$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n \times \left(\frac{b_n}{n}+2\right)$$
$$=3\times(5+2)$$
$$=21$$
$$\boxed{21}$$

26. 좌표평면에서 제1사분면에 점 P가 있다. 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하고, 점 Q를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R라 할 때, 세 동경 OP, OQ, OR가 나타내는 각을 각각 α, β, γ라 하자.

$\sin\alpha = \frac{1}{3}$일 때, $9(\sin^2\beta+\tan^2\gamma)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 시초선은 x축의 양의 방향이다.) [4점]

$$\sin\alpha=\frac{1}{3} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\overline{OP}=r$라 하면

$$P(r\cos\alpha, r\sin\alpha)=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}r, \frac{1}{3}r\right)$$

$y=x$ 대칭하면

$$Q\left(\frac{1}{3}r, \frac{2\sqrt{2}}{3}r\right)=(r\cos\beta, r\sin\beta)$$
$$\hookrightarrow \sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

원점 대칭하면

$$R\left(-\frac{1}{3}r, -\frac{2\sqrt{2}}{3}r\right)=(r\cos\gamma, r\sin\gamma)$$
$$\hookrightarrow \cos\gamma=-\frac{1}{3}$$
$$\sin\gamma=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$\tan\gamma=2\sqrt{2}$$

$$9(\sin^2\beta+\tan^2\gamma)=9\times\left(\frac{8}{9}+8\right)$$
$$=80$$
$$\boxed{80}$$

27. 그림과 같이 합동인 9개의 정사각형으로 이루어진 색칠판이 있다.

②	①	②
①		①
②	①	②

빨간색과 파란색을 포함하여 총 9가지의 서로 다른 색으로 이 색칠판을 다음 조건을 만족시키도록 칠하려고 한다.

> (가) 주어진 9가지의 색을 모두 사용하여 칠한다.
> (나) 한 정사각형에는 한 가지 색만을 칠한다.
> (다) 빨간색과 파란색이 칠해진 두 정사각형은 꼭짓점을 공유하지 않는다.

색칠판을 칠하는 경우의 수는 $k \times 7!$이다. k의 값을 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

빨, 파는 중앙 색칠할수 없다

① 빨간색 ①에 칠하는 경우

x	///	x
x	7	x

중앙 파란색 나머지
$7 \times 3 \times 6!$

② 빨간색 ②에 칠하는 경우

///	x	
x	7	

중앙 파란색 나머지
$7 \times 5 \times 6!$

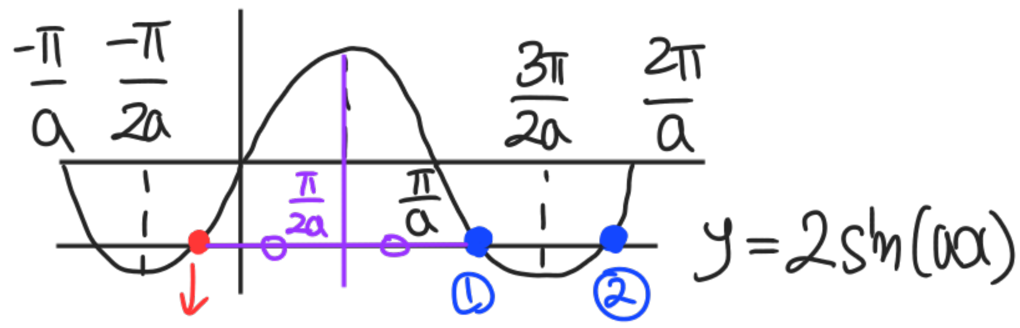
더하면 $7 \times (3+5) \times 6!$

$= 8 \times 7!$

$k = 8$ $\boxed{8}$

28. $0 < a < \frac{4}{7}$인 실수 a와 유리수 b에 대하여 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right]$에서 정의된 함수 $f(x) = 2\sin(ax) + b$가 있다. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}\pi, 0\right)$을 지날 때, $30(a+b)$의 값을 구하시오. [4점]

주기 $\frac{2\pi}{a}$



$A'\left(-\frac{\pi}{2}, -b\right)$ $B'\left(\frac{7\pi}{2}, -b\right)$

① 인 경우 $\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2a}$, $a = \frac{1}{3}$

A'좌표 대입 $-b = 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $b = 1$

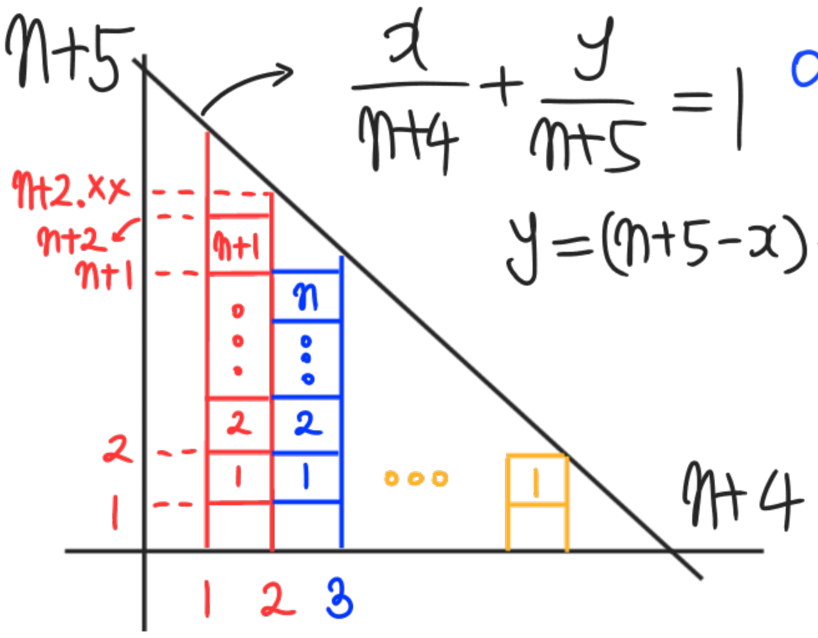
$30(a+b) = 40$ $\boxed{40}$

② 인 경우 $\frac{7\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{a}$, $a = \frac{1}{2}$

A'좌표 대입 $-b = 2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $b = \sqrt{2}$

b가 무리수.

29. 자연수 n에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(0, n+5)$, $\mathrm{B}(n+4, 0)$과 원점 O를 꼭짓점으로 하는 삼각형 AOB가 있다. 삼각형 AOB의 내부에 포함된 정사각형 중 한 변의 길이가 1이고 꼭짓점의 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 정사각형의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{8} a_n$의 값을 구하시오. [4점]



$$\frac{x}{n+4}+\frac{y}{n+5}=1$$

$0 \le x < n+4$ 에서

$0.xx$

$$y=(n+5-x)-\frac{1}{n+4}x$$

$$a_n=(n+1)+n+\cdots+1$$
$$=\frac{(n+2)\times(n+1)}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$$
$$\sum_{n=1}^{8}a_n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8}n^2+\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{8}n+\sum_{n=1}^{8}1$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{8\times9\times17}{6}+\frac{3}{2}\times\frac{8\times9}{2}+8$$
$$=2\times3\times17+3\times2\times9+8$$
$$=102+54+8$$
$$=164$$

$\boxed{164}$

30. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_t^x f(s)ds$$

라 하자. 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

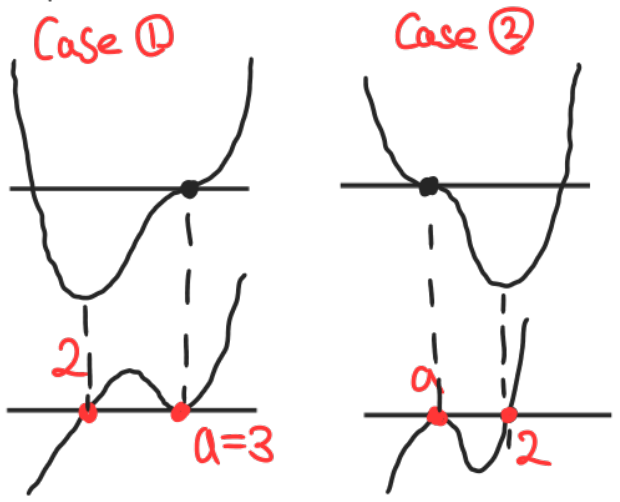
(가) $f'(a)=0$
(나) 함수 $\lvert g(x)-g(a)\rvert$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1이다.

실수 t에 대하여 $g(a)$의 값을 $h(t)$라 할 때, $h(3)=0$이고 함수 $h(t)$는 $t=2$에서 최댓값 27을 가진다.

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

$g(x)-g(a)=\int_a^x f(s)ds$: 4차함수

조건 (나)에 의하여



$y=g(x)-g(a)$

$y=(g(x)-g(a))'$

$=f(x)$

$$h(3)=\int_3^a f(s)ds=0$$

$h(t)$의 최댓값 $h(2)=\int_2^a f(s)ds=27$

① $f(x)=4(x-2)(x-3)^2 \Rightarrow \int_2^3 f(x)dx=\frac{1}{3}\neq27$

② $f(x)=4(x-a)^2(x-2)$

$$\int_3^a f(x)dx=\int_{3-a}^{0}4x^2(x+a-2)dx=(a-3)^3\times\frac{a+1}{3}=0$$

$\therefore a=-1,$

$$\int_2^a f(x)dx=\int_2^{-1}4(x+1)^2(x-2)dx=\int_3^0 4x^2(x-3)dx$$
$=27$, ok!

$$f(x)=4(x+1)^2(x-2)$$
$$f(5)=4\times6^2\times3=432$$

$\boxed{432}$