2021학년도 수능 (가) 확률과 통계

해설.

싱상빙.

6. 정규분포 $N(20, 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$ 라 할 때, $E(\overline{X})+\sigma(\overline{X})$의 값은? [3점]

모집단의 정보 크기는 추정에서 중요! 평균 표준편차.

① $\frac{83}{4}$ ② $\frac{85}{4}$ ③ $\frac{87}{4}$ ④ $\frac{89}{4}$ ⑤ $\frac{91}{4}$

모집단의 정보를 통해 표본집단의 정보를 따지기 위해서는 모집단의 정보(당연히)와 표본집단의 크기가 필요하다.

$N(20, 5^2)$ 평균 표준편차. $n=16$

이러한 두 가지 요소를 모두 가지고 있으므로 구해보자.

개념 수업에서 배운 공식은 오른쪽과 같다.

$E(\overline{X}) = E(X)$ ('추정'이기에)

$\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

$E(\overline{X}) = E(X) = 20$

$\sigma(\overline{X}) = \frac{5}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$

$E(\overline{X}) + \sigma(\overline{X}) = 20 + \frac{5}{4} = \frac{85}{4}$

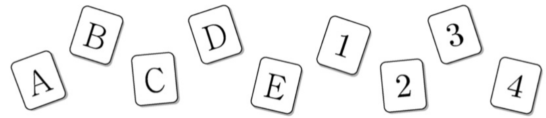
답: ②

9. 문자 A, B, C, D, E가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드와 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 있다. 이 9장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 문자 A가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 각각 숫자가 적혀 있는 카드가 놓일 확률은? [3점]

순서? → 순열일 확률이 높다.

O A O 숫자.

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{12}$



문제를 읽어보면 1. 모든 카드를 일렬로 다 써야 하고, 2. 카드 A옆에는 모두 숫자가 와야 한다는 조건이 걸려있다.

1번 조건을 통해서는 일렬로 쓰므로 순열의 확률이 높다는 정보를 얻을 수 있고 2번 조건을 통해서는 A 양 옆 두 개까지를 하나의 세트로 보고 시작하자는 아이디어를 얻을 수 있다.

(O, A, O), B, C, D, E, 4에서 두 2개

이웃하면 미리 묶어서 처리하자.

A 양 옆의 두 개의 공간의 경우의 수를 체크하자. A의 옆에는 숫자가 와야하고 일렬로 배열하기에 순서가 중요하다.

숫자들끼리 순열

$_4P_2 = 12$

1, 2, 3, 4 중에서 2개 PICK

문제에서 정해준 제한 조건을 해결했으므로 나머지는 단순히 순열로 처리해주자.

묶은 것은 하나로 처리

경우의 수 : $_4P_2 \times 7! = 12 \cdot 7!$

확률을 구하는 것이므로 전체 경우의 수를 구해서 $\frac{\text{특정 경우의 수}}{\text{전체 경우의 수}}$의 형태로 답을 구하자.

$\frac{\cancel{12} \cdot \cancel{7!}}{\cancel{9!}} = \frac{1}{6}$

답: ④

12. 확률변수 X는 평균이 8, 표준편차가 3인 정규분포를 따르고, N(8,3²)
확률변수 Y는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다. N(m,σ²)
두 확률변수 X, Y가

$$\mathrm{P}(4 \le X \le 8) + \mathrm{P}(Y \ge 8) = \frac{1}{2}$$

해결의 KEY

을 만족시킬 때, $\mathrm{P}\left(Y \le 8 + \frac{2\sigma}{3}\right)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

Y에도 기준점이 없다..

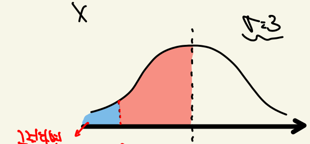
z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8351 ② 0.8413 ③ 0.9332
④ 0.9772 ⑤ 0.9938

확률변수 X에 대한 정보는 모두 주어졌지만 확률변수 Y에 대한 정보는 사실상 주어지지 않았으므로 주어진 조건을 통해 확률변수 Y의 평균과 표준편차를 가시화하는 작업이 필요하다.

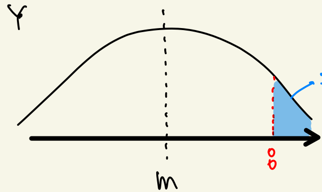
주어진 조건을 살펴보자.

$$\mathrm{P}(4 \le X \le 8) + \mathrm{P}(Y \ge 8) = \frac{1}{2}$$



그렇다면 이게 P(Y≥8)과 같은거네

표준편차의 4/3배이네



그렇다면 P(Y≥8)은 이렇게 되겠네

P(4≤X≤8)과 더해서 1/2이므로 오른쪽에 위치해야함

X에서 4와 8사이의 표준편차의 차와 같아야하므로 $\frac{4}{3}\sigma$

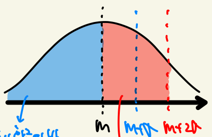
$$8 - m = \frac{4}{3}\sigma$$

우리가 식을 통해 알 수 있는 것은 여기까지이다.

우리가 문제를 읽으면서 구해야하는 답을 보면서 Y는 평균과 같은 기준점이 없다는 생각을 하였는데 우리가 찾아낸 식을 8에 대해서 정리하면 구해야 하는 답을 평균과 표준편차만으로 정리할 수 있다.

$$8 = m + \frac{4}{3}\sigma$$

$$\mathrm{P}\left(Y \le 8 + \frac{2}{3}\sigma\right) = \mathrm{P}\left(Y \le \underbrace{m + \frac{4}{3}\sigma}_{8} + \frac{2}{3}\sigma\right) = \mathrm{P}(Y \le m + 2\sigma)$$



전체 확률의 반 $\frac{1}{2}$

2×표준편차이니까 표에 의하면 0.4772

더해주면 $0.5 + 0.4772 = 0.9772$

답: ④

17. 좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
> 2 이하이면 점 P를 x축의 양의 방향으로 3만큼,
> 3 이상이면 점 P를 y축의 양의 방향으로 1만큼
> 이동시킨다.

이 시행을 15번 반복하여 이동된 점 P와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은? [4점]

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

문제 조건을 정확히 다시 인지하고 시작해보자.

1, 2 → x축 방향으로 +3
3, 4, 5, 6 → y축 방향으로 +1

이 문제에서 가장 중요한 요소는 시행 X에 대한 평균을 구하는 것이다. 그러므로 평균적인 사건을 만들어서 이를 통한 결과를 도출해낼 것이다.

주사위 15번
1 or 2 → 5번
3 or 4 or 5 or 6 → 10번

위의 시행을 15번 반복한 것을 수학적 확률로 따져보면 아래와 같은 결과가 나옴을 알 수 있다.

$\underbrace{1 \text{ or } 2}_{\text{확률이 } \frac{1}{3}}$: 5번 $\underbrace{3 \sim 6}_{\text{확률이 } \frac{2}{3}}$: 10번

그렇다면 x축 방향으로 +3 × 5번
y축 방향으로 +1 × 10번

원점에서 시작하므로 좌표는 $(\underbrace{15}_{3\times5}, \underbrace{10}_{1\times10})$

이 점과 주어진 직선과의 거리가 확률변수의 평균이라고 할 수 있다.
직선은 항상 그대로이고 점의 위치가 수학적 평균이기에

$3x+4y=0$ 와 $(15,10)$ 사이의 거리 $\boxed{: d = \dfrac{|3\cdot15+4\cdot10|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{85}{5} = 17 \quad = \mathrm{E}(X)}$

답: ③

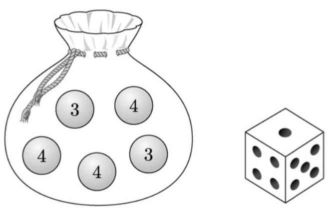
19. 숫자 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다. 동시에 일어나기 X

> 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어
> 꺼낸 공에 적힌 수가 3이면 주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합을 점수로 하고,
> 꺼낸 공에 적힌 수가 4이면 주사위를 4번 던져서 나오는 네 눈의 수의 합을 점수로 한다.

한 개의 주사위를 n개 던진다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 10점일 확률은? [4점]

① $\frac{13}{180}$ ② $\frac{41}{540}$ ③ $\frac{43}{540}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{47}{540}$



결론적으로 주사위를 통해 얻은 점수가 10점이 되어야 하고 주사위를 굴릴 수 있는 횟수는 주머니에서 꺼낸 공의 숫자에 의존한다.

주의해야하는 점은 한 개의 주사위로 시행을 진행하기에 주사위를 던지는 시행은 서로 동시에 이뤄질 수 없다는 것이다.

주머니에서 나오는 숫자는 3이나 4이므로 이 두개로 경우의 수를 나눠보자.

주머니에서 3: $\frac{2}{5}$ 5개의 공 중 2개

주머니에서 4: $\frac{3}{5}$ 5개의 공 중 3개

주머니에서 3이 적힌 공이 나오면 한 개의 주사위를 3번 굴려서 10이 나오는 확률을 구해야한다.

3개의 수를 더해서 10이 되는 경우의 수를 구해서 확률을 구해보자.

주의! 주사위이므로 각각은 6보다 작거나 같다.

$10=6+3+1$ $3!=6$
$=6+2+2$ $\frac{3!}{2!}=3$
$=5+4+1$ $3!=6$
$=5+3+2$ $3!=6$
$=4+4+2$ $\frac{3!}{2!}=3$
$=4+3+3$ $\frac{3!}{2!}=3$

세 수의 순서는 상관없으므로 같은 것이 있는 순열로 처리

$6\times3+3\times3=18+9=27$

전체 경우의 수는 6^3이므로 주사위 3번

확률은 $\frac{27}{6^3}=\frac{27}{216}=\boxed{\frac{1}{8}}$

주머니에서 4가 적힌 공이 나오면 한 개의 주사위를 4번 굴려서 10이 나오는 확률을 구해야한다.

4개의 수를 더해서 10이 되는 경우의 수를 구해서 확률을 구해보자.

주사위이므로 각각의 수는 6보다 작거나 같다.

$10=6+2+1+1$ $\frac{4!}{2!}=12$
$=5+3+1+1$ $\frac{4!}{2!}=12$
$=5+2+2+1$ $\frac{4!}{2!}=12$
$=4+4+1+1$ $\frac{4!}{2!2!}=12$
$=4+3+2+1$ $4!=24$
$=4+2+2+2$ $\frac{4!}{3!}=4$
$=3+3+3+1$ $\frac{4!}{3!}=4$

네 수의 순서는 상관없으므로 같은 것이 있는 순열로 처리

80

전체 경우의 수가 6^4이므로 주사위 4번

확률은 $\frac{80}{6^4}=\frac{5}{3^4}=\boxed{\frac{5}{81}}$

주머니에서 3: $\frac{\cancel{2}^{1}}{5}$ 5개의 공 중 2개 $\times\frac{1}{\cancel{8}_{4}}=\frac{1}{20}$

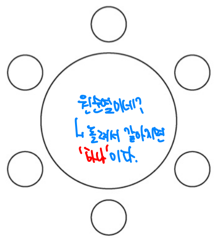
주머니에서 4: $\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{5}}$ 5개의 공 중 3개 $\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{81}_{27}}=\frac{1}{27}$

$\frac{1}{20}+\frac{1}{27}=\frac{27+20}{540}=\frac{47}{540}$

답: ⑤

26. 세 학생 A, B, C를 포함한 6명의 학생이 있다. A,B,C + 3명
이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

> (가) A와 B는 이웃한다. 하나로 묶어서
> (나) B와 C는 이웃하지 않는다. 다른 친구들을 나열해두고

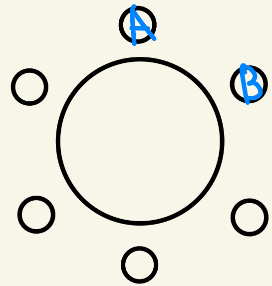


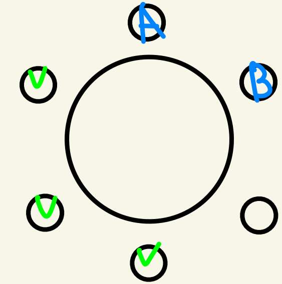
36가지

개념 시간에 배운 원순열이다. 단순히 공식만을 기억하는 것이 아니라 돌렸을때 같아지면 하나로 간주한다는 아이디어를 떠올리자.

원순열이라는 것 이외의 조건은 A,B가 이웃한다는 것과 B,C가 이웃하지 않는다는 것이다.
우리가 평소에 순열에서 이웃하는 경우에는 그 두 친구를 묶어서 마치 하나인 것처럼 처리해주었다.
이웃하지 않는 경우에는 나머지들을 배열한 후에 이웃하지 않는 두 친구를 배치시켜주었다.

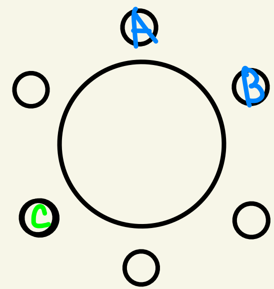
(가) 조건부터 풀기 위하여 A와 B를 하나라고 가정하고 배치를 시작해보자.

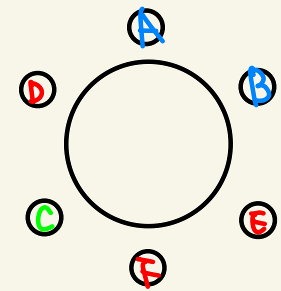




> 배치의 시작이므로 순서를 따지는 기준이 존재하지 않고 A와 B의 서로 간의 왼쪽, 오른쪽만 존재한다.
> 2가지
> 그렇기에 어디에 앉던 경우의 수를 따지지 X

> 조건 (나)를 만족시키기 위해서 C는 B와 이웃해서는 안된다.
> 현재 상황에서 B와 이웃하지 않는 위치는 3개이다.
> 3개





> 나머지 세 친구들은 걸린 제한 조건이 없고 A,B,C가 배열되면서 순서를 따지는 기준까지 맞추어져있으므로 곱셈으로 처리하자.
> $\underset{D}{3} \times \underset{E}{2} \times \underset{F}{1} = 6$가지

전체 나열의 경우의 수

$\underset{A,B}{2} \times \underset{C}{3} \times \underset{\text{그외 3명}}{6} = 36$가지

답: 36

29. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은색 모자 6개와 흰색 모자 6개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 모자끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점] **201**

검은색 모자끼리는 똑같이 생겼다 (흰색)

(가) 각 학생은 1개 이상의 모자를 받는다.

(나) 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4 이상이다.

(다) 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생은 A를 포함하여 2명뿐이다.

A에 대한 언급이 많다 → 기준을 A로 잡자.

문제 조건에서 네 명의 학생들 중에서 A에 대한 언급이 제일 많기에 학생들의 기준은 A로 잡자.

문제 조건에서 모자의 색깔 중에 검은색에 대한 언급이 비교적 많기에 모자의 색깔의 기준은 검은색으로 잡자.

필자는 문제를 읽고 위의 두 개의 요소 말고는 아무 생각도 하지 못했다.-> 그렇다면 이 두 개의 요소로 시작해보자.

A와 검은색 모자.

4명의 학생과 모자의 색을 표로 만들어서 시작해보자.

	A	B	C	D
검은색				
흰색				

이 표를 기반으로 3가지 조건을 모두 만족시키는 경우의 수를 만들어보자.

A가 검은 색 모자를 최대한 가져갈 때

	A	B	C	D
검은색				
흰색				

우선 검은 색 모자를 먼저 배치할 것이다. 조건 (나)에 의하면 학생 A는 검은 색 모자를 4개 이상 가져야기에 4, 5, 6개가 가능하다. 그러나 조건 (다)에 의하면 흰 색보다 검은 색 모자를 더 많이 가지는 사람이 A를 제외하고도 한 명이 더 있으니 A가 검은 색 모자를 6개 가져가는 것은 불가능하다.

그렇다면 검은 색 모자가 있어야하네.

→ 그렇다면 A가 검은 색 5개까지 가능

A가 5개 가져가는 거로 해보자.

i) A가 검은 색 5개, 나머지가 1개.

	A	B	C	D	
검은색	5	1	0	0	→ 총 6개
흰색	a	0	1+c	1+d	→ 총 6개

검은 모자 > 흰색 모자 이니에

C와 D 모두 1개이상의 모자를 가져야한다.

└ 조건 (가)

흰 색 모자의 개수로 식을 만들면

$a+(c+1)+(d+1)=6$

$a+c+d=4$ → $a, c, d \geq 0$ 이므로 중복조합.

$_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$

여기서 검은 색 모자를 1개 가지는 사람이 B일 수도, C일수도, D일수도 있기에 흰 색 모자를 나눠가지는 경우의 수에 3을 곱해주자.

$\underline{3} \times \underline{15} = \boxed{45}$

누가 검은색 모자 1개 가져가나? 흰 색 모자 나눠주기.

ii) A가 4개, 나머지 한 명이 2개 (검은 색 모자)

	A	B	C	D	
검은색	4	2	0	0	→ 총 6개
흰색	a	(0 or 1)	1+c	1+d	

∘ B가 흰 색 모자 0개

$a+(1+c)+(1+d)=6$

$a+c+d=4$ → $a, c, d \geq 0$ 이므로 중복조합.

$_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$ 그런데 $a=4$이면 조건 (다)에 위배

└ 한 가지는 빼주자. $15-1=14$가지

∘ B가 흰 색 모자 1개

$a+1+(1+c)+(1+d)=6$

$a+c+d=3$ → $a, c, d \geq 0$ 이므로 중복조합.

$_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$

여기서 검은 색 모자를 2개 가지는 사람이 B인지, C인지, D일 수 있기에 흰 색 모자를 나눠자기는 경우의 수에 3을 곱해주자.

$\underline{3} \times \underline{14} + \underline{3} \times \underline{10} = \boxed{72}$

누가 검은색 2개 가져가나? 흰 색 모자 나눠주기 누가 검은색 2개 가져가나? 흰 색 모자 나눠주기

iii) A가 4개, 나머지 중 2명이 1개씩 (검은 색)

	A	B	C	D	
검은색	4	1	1	0	→ 총 6개
흰색	a	0	1+c	1+d	

조건 (다)에 의해 흰 색 > 검은 색이어야하니께.

$a+1+c+1+d=6$

$a+c+d=4$ → $a, c, d \geq 0$ 이므로 중복조합.

$_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$ 그런데 $a=4$이면 조건 (다)에 위배

└ 한 가지는 빼주자. $15-1=14$가지

여기서 검은 색 모자를 1개씩 가져가는 2명을 골라주는 경우의 수를 곱해줘야한다. $3 \times 2 \times 14 = \boxed{84}$

$\boxed{45+72+84=201\text{개}}$