2021학년도 수능 나형 확률과 통계.

해설.

2021.02.20

김상범

다른 해설지와 달리 읽는 자료이므로 처음부터 차근차근 봐주시면 감사하겠습니다.

Copyright 2021.심상범, All rights reserved.

8. 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 할 때, $a \times b \times c = 4$일 확률은? [3점]

세 번의 시도가 각각 다르다.

3개의 수를 곱해서 4가 되려면?

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{5}{108}$ ③ $\frac{1}{27}$ ④ $\frac{1}{36}$ ⑤ $\frac{1}{54}$

한 개의 주사위를 세 번 던지는 행위이므로 각각의 던지는 행위는 독립적이다. 하나의 주사위를 동시에 두 번 던질 수 없다.

그렇다면 각각의 경우의 수를 구하기 위해서는 곱셈으로 처리해야 할 것이다.

이어지는 사건

세 수의 곱이 4가 되어야 하므로 이를 만족시키는 세 수의 조합을 찾아보면 (1,1,4)와 (1,2,2)가 있다.

$4 = 1 \times 2^2$

a,b,c는 모두 다른 기호이므로 각각 누구에게 어떤 수를 할당해주어야 할지 정해줘야한다.

1) 1,1,4

a, b, c 중에 누가 4가 될건지 구하면 된다.

a or b or c → 3가지

2) 1,2,2

a, b, c 중에 누가 1이 될건지 구하면 된다.

a or b or c → 3가지

총 3+3=6가지

구해야하는 값이 '확률'이므로 전체 경우의 수도 구해서 분수처리해주자.

전체 경우의 수 : $\underset{1st\ TRY}{6} \times \underset{2nd\ TRY}{6} \times \underset{3rd\ TRY}{6} = 216$

주사위 한 개를 3번 던진다.

→ 곱셈으로

확률 $= \dfrac{\text{특정 경우의 수}}{\text{전체 경우의 수}} = \dfrac{6}{216} = \dfrac{1}{36}$

답 : ④

11. 정규분포 $N(20, 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $E(\overline{X}) + \sigma(\overline{X})$의 값은? [3점]

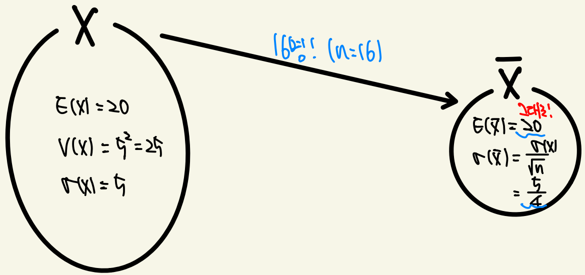
모집단의 정보

표본의 크기

평균

표준편차

① $\frac{83}{4}$ ② $\frac{85}{4}$ ③ $\frac{87}{4}$ ④ $\frac{89}{4}$ ⑤ $\frac{91}{4}$



$E(\overline{X}) + \sigma(\overline{X}) = 20 + \frac{5}{4} = \frac{85}{4}$

답 : ②

13. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는

4개가 있구나.

함수 $f : X \to X$의 개수는? [3점]

일대일대응 같은 조건 없다.

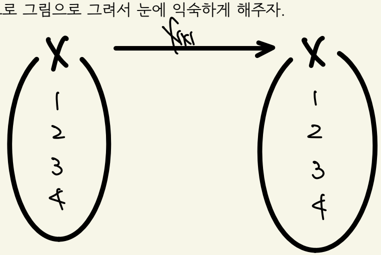
$$f(2) \le f(3) \le f(4)$$

자기들끼리 순서가 정해져있네?

ㄴ 그러면 뽑기만 하면 되네

① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

우선 함수가 X에서 X로 가므로 그림으로 그려서 눈에 익숙하게 해주자.



우선 $f(1)$에 대한 조건이 없으므로 $f(1)$의 경우의 수를 따져보자. → 1~4이므로 4개

그 외에 나머지 3개는 문제 조건에 의해 순서가 정해져있다.

순서가 정해져있고 등호도 포함되어있으므로 중복조합을 사용하여 처리해주자.

$f(2), f(3), f(4)$의 수 3개가 정해지면
순서는 이미 결정되어있다.
$f(2) \le f(3) \le f(4)$

1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 3개를 선택 → ${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 20$

등호가 있으므로

문제에서 물어본 함수를 새로 정의하는데 있어서 필요한 정보들을 모두 모았으므로 곱셈으로 마무리하자.

$f(1) = ?,\ f(2) = ?,\ f(3) = ?,\ f(4) = ?$

하나의 함수에서 벌어지는 일이다.

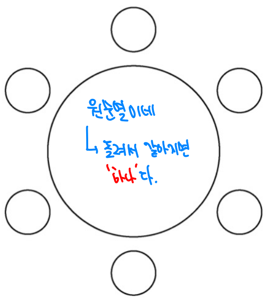
$$\underbrace{4}_{f(1)} \times \underbrace{20}_{f(2), f(3), f(4)} = 80$$

답: ⑤

15. 세 학생 A, B, C를 포함한 6명의 학생이 있다. A,B,C+3명
이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

> (가) A와 B는 이웃한다. 하나로 묶어서
> (나) B와 C는 이웃하지 않는다. 다른 친구들을 나열해주고

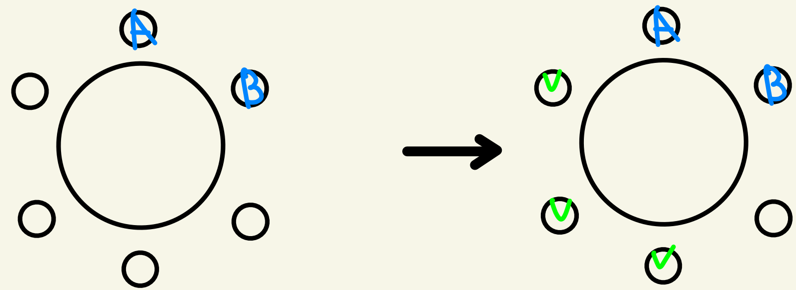
① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40



개념 시간에 배운 원순열이다. 단순히 공식만을 기억하는 것이 아니라 돌렸을때 같아지면 하나로 간주한다는 아이디어를 떠올리자.

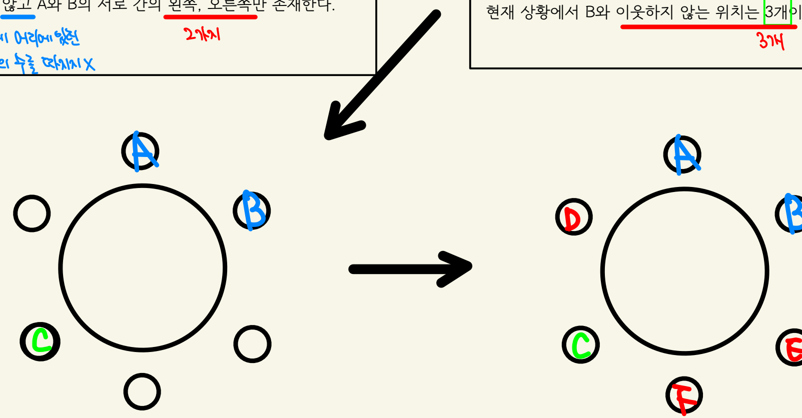
원순열이라는 것 이외의 조건은 A,B가 이웃한다는 것과 B,C가 이웃하지 않는다는 것이다.
우리가 평소에 순열에서 이웃하는 경우에는 그 두 친구를 묶어서 마치 하나인 것처럼 처리해주었다.
이웃하지 않는 경우에는 나머지들을 배열한 후에 이웃하지 않는 두 친구를 배치시켜주었다.

(가) 조건부터 풀기 위하여 A와 B를 하나라고 가정하고 배치를 시작해보자.



배치의 시작이므로 순서를 따지는 기준이 존재하지 않고 A와 B의 서로 간의 왼쪽, 오른쪽만 존재한다.
2가지
그렇기에 어디에 있던 경우의 수를 따지지 X

조건 (나)를 만족시키기 위해서 C는 B와 이웃해서는 안된다. 현재 상황에서 B와 이웃하지 않는 위치는 3개이다.
3개



나머지 세 친구들은 걸린 제한 조건이 없고 A,B,C가 배열되면서 순서를 따지는 기준까지 맞추어져있으므로 곱셈으로 처리하자.

$\underset{D}{3} \times \underset{E}{2} \times \underset{F}{1} = 6$가지

전체 나열의 경우의 수

$\underset{A,B}{2} \times \underset{C}{3} \times \underset{\text{그외 3명}}{6} = 36$가지

답:③

19. 확률변수 X는 평균이 8, 표준편차가 3인 정규분포를 따르고, 확률변수 Y는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다. 두 확률변수 X, Y가

N(8, 3²)
N(m, σ²)

$$\mathrm{P}(4 \le X \le 8) + \mathrm{P}(Y \ge 8) = \frac{1}{2}$$

해결의 KEY

을 만족시킬 때, $\mathrm{P}\left(Y \le 8 + \frac{2\sigma}{3}\right)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

Y에는 기준점이 없는데...?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

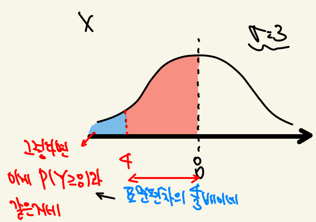
① 0.8351 ② 0.8413 ③ 0.9332 ④ 0.9772 ⑤ 0.9938

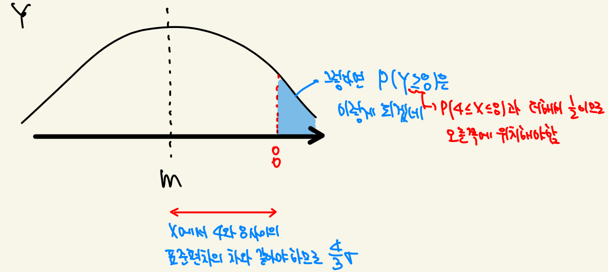
V

확률변수 X에 대한 정보는 모두 주어졌지만 확률변수 Y에 대한 정보는 사실상 주어지지 않았으므로 주어진 조건을 통해 확률변수 Y의 평균과 표준편차를 가시화하는 작업이 필요하다.

주어진 조건을 살펴보자.

$$\mathrm{P}(4 \le X \le 8) + \mathrm{P}(Y \ge 8) = \frac{1}{2}$$



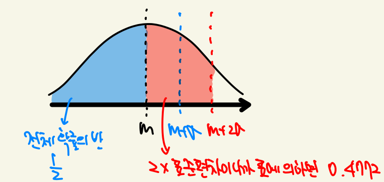


$$8 - m = \frac{4}{3}\sigma$$

우리가 식을 통해 알 수 있는 것은 여기까지이다.

우리가 문제를 읽으면서 구해야하는 답을 보면서 Y는 평균과 같은 기준점이 없다는 생각을 하였는데 우리가 찾아낸 식을 8에 대해서 정리하면 구해야 하는 답을 평균과 표준편차만으로 정리할 수 있다.

$$8 = m + \frac{4}{3}\sigma \qquad \mathrm{P}\left(Y \le 8 + \frac{2}{3}\sigma\right) = \mathrm{P}\left(Y \le \underbrace{m + \frac{4}{3}\sigma}_{8} + \frac{2}{3}\sigma\right) = \mathrm{P}(Y \le m + 2\sigma)$$



더해주면 $0.5 + 0.4772 = 0.9772$

답: ④

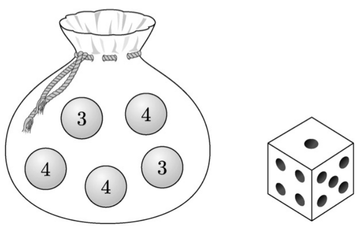
29. 숫자 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

동시에 일어나지 X

> 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어
> 꺼낸 공에 적힌 수가 3이면 주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합을 점수로 하고, $\frac{2}{5}$
> 꺼낸 공에 적힌 수가 4이면 주사위를 4번 던져서 나오는 네 눈의 수의 합을 점수로 한다. $\frac{3}{5}$
>
> 한 개의 주사위를 n번 던진다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 10점일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

587



결론적으로 주사위를 통해 얻은 점수가 10점이 되어야 하고 주사위를 굴릴 수 있는 횟수는 주머니에서 꺼낸 공의 숫자에 의존한다.

주의해야하는 점은 한 개의 주사위로 시행을 진행하기에 주사위를 던지는 시행은 서로 동시에 이뤄질 수 없다는 것이다.

주머니에서 나오는 숫자는 3이나 4이므로 이 두개로 경우의 수를 나눠보자.

주머니에서 3: $\frac{2}{5}$ 5개의 공 중 2개

주머니에서 4: $\frac{3}{5}$ 5개의 공 중 3개

주머니에서 3이 적힌 공이 나오면 한 개의 주사위를 3번 굴려서 10이 나오는 확률을 구해야한다.

3개의 수를 더해서 10이 되는 경우의 수를 구해서 확률을 구해보자.

$\boxed{\text{주의!}}$ 주사위이므로 각각은 6보다 작거나 같다.

$10 = 6+3+1$ ... $3! = 6$
$= 6+2+2$ ... $\frac{3!}{2!} = 3$
$= 5+4+1$ ... $3! = 6$
$= 5+3+2$ ... $3! = 6$
$= 4+4+2$ ... $\frac{3!}{2!} = 3$
$= 4+3+3$ ... $\frac{3!}{2!} = 3$

세 수의 순서는 상관없으므로 같은 것이 있는 순열로 처리

$6\times3+3\times3 = 18+9 = 27$

전체 경우의 수는 6^3이므로 (주사위 3번)

확률은 $\frac{27}{6^3} = \frac{27}{216} = \boxed{\frac{1}{8}}$

주머니에서 4가 적힌 공이 나오면 한 개의 주사위를 4번 굴려서 10이 나오는 확률을 구해야한다.

4개의 수를 더해서 10이 되는 경우의 수를 구해서 확률을 구해보자.

주사위이므로 각각의 수는 6보다 작거나 같다.

$10 = 6+2+1+1$ ... $\frac{4!}{2!} = 12$
$= 5+3+1+1$ ... $\frac{4!}{2!} = 12$
$= 5+2+2+1$ ... $\frac{4!}{2!} = 12$
$= 4+4+1+1$ ... $\frac{4!}{2!2!} = 6$
$= 4+3+2+1$ ... $4! = 24$
$= 3+3+3+1$ ... $\frac{4!}{3!} = 4$
$= 3+3+3+2$ ... $\frac{4!}{3!} = 4$

네 수의 순서는 상관없으므로 같은 것이 있는 순열로 처리

80

전체 경우의 수가 6^4이므로 (주사위 4번)

확률은 $\frac{80}{6^4} = \frac{5}{3^4} = \boxed{\frac{5}{81}}$

주머니에서 3: $\frac{\cancel{2}^{1}}{5}$ 5개의 공 중 2개 $\times \frac{1}{\cancel{8}_{4}} = \frac{1}{20}$

주머니에서 4: $\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{5}}$ 5개의 공 중 3개 $\times \frac{\cancel{5}}{\cancel{81}_{27}} = \frac{1}{27}$

$\frac{1}{20}+\frac{1}{27} = \frac{27+20}{540} = \frac{47}{540}$

$p+q = 587$

$\boxed{\text{답: 587}}$