이 책에서는 초등학교부터 고등학교까지의 기하 전반을 다룰 것이다.
이 책의 목표는 다음과 같다.

1. 파편화된 기억으로 남아 있는 교육과정의 아이디어들을 명확하게 정리한다.
2. 교육과정의 순서보다 교육과정의 연관성을 중심으로 내용을 전개한다.
3. 기하적인 아이디어에 대한 전반적인 정리를 가능하게 하며, 나아가 학생이 기하의 아이디어를 떠올릴 수 있게 한다.

이 책은 고등학생이라면 모든 학년에게 권해지나, 가능하면 기하를 처음 접하는 학생에게 권한다. 이 책은 기본적으로 강의를 전제로 제작되었다.

목차는 다음과 같다.

1. 순수기하학 기초
2. 해석기하학 기초
3. 정보 전환에 따른 문제
4. 아이디어에 따른 문제
5. 기하란 무엇인가?
6. 연습문제

제 1장 순수기하학

기하학은 일종의 어려운 퀴즈를 푸는 것에서 시작했다.
실질적인 문제를 푸는 과정-농지의 면적 계산이나 천문학 등-을 통해서도
기하학이 발전했지만, 단연코 기하학의 가장 큰 발전은 작도 문제를 풀면서 이루어졌다.

다음 문제를 보자. 풀지 못해도 된다.

유제 0

임의의 원이 있을 때, 이 원의 중심을 컴퍼스와 눈금 없는 자만으로 찾는 방법은 무엇인가?

이 문제를 푸는 과정에서 우리는 수능 문제를 푸는 것과 매우 유사한 사고과정을 거치게 된다. 작도문제들이 발전하는 것에서도 수능 문제를 찾을 수 있기에, 우리는 순수기하학을 다루는 것에 있어서 작도를 시작점으로 잡고자 한다. 이것을 발전시켜서 기하학의 구조적인 측면이 어떤 식으로 발전해 왔는지를 파악할 것이며, 합동과 닮음을 비롯한 개념들을 다시 살펴 보고, 수능 기하학 문제가 순수기하학적 측면에서 어떻게 다루어지는지, 그러한 아이디어를 어떻게 다뤄야 하는지 생각할 것이다.

1.1 작도

작도란 눈금 없는 자와 컴퍼스로 기하학적인 도형들을 그리는 것이다. 정형화된 수치적 방법이 아니기 때문에 작도의 방법은 다양하지만, 그와 함께 철저한 규칙 아래에서 진행되기에 일정한 범주 내에서 이루어진다. 이번 단원의 목표는 초-중등 시절 배운 작도의 일부를 다시 배우고, 작도를 퀴즈의 수준에서 기하학적인 센스를 기르기 위한 기초로 발전시키는 방법에 대해 논하는 것이다.

우선 초등~중등학교 시절의 작도부터 떠올려 보자.

유제 1-1

한 직선이 있을 때, 이 직선에 평행한 직선을 작도하라.

유제 1-2

한 직선이 있을 때, 이 직선에 수직한 직선을 작도하라.

유제 1-3

한 선분이 있을 때, 이 선분의 수직이등분선을 작도하라.

유제 1-4

정삼각형을 작도하라.

유제 1-5

한 삼각형에 대해, 이 삼각형과 합동인 삼각형을 작도하라.

이정도 난이도는 어렵지 않게 해볼 수 있을 것이다. 더 깊게 생각해봐야 할 것은 각각의 작도 방법의 보다 체계적인 해석이다. 유제를 다 풀었다면 다음 페이지로 가서 위 유제들에 대한 분석 중 하나를 읽어보도록 하자.

유제 1-1

한 직선이 있을 때, 이 직선에 평행한 직선을 작도하라.

위 문제에 대한 일반적인 해법은 평행선의 엇각 또는 동위각을 이용하는 것이다.
하지만 원을 적극적으로 이용한다면 이 문제를 해결하는 것이 또한 가능하다는 것을 생각해 볼 수 있겠다. 우선 직선을 긋고, 그 밖의 한 점을 잡자. 그 상태에서 그 점을 중심으로 직선을 지나는 임의의 원을 그린다. 그 경우, 원과 직선은 두 개의 교점을 가질 것이다. 이때 각각의 교점과 원의 중심을 지나는 두 개의 직선을 각각 그으면 이 직선과 원 역시 두 개의 교점을 가지게 되며(원래의 직선과의 교점 외에 새로운 교점) 이때 결론적으로 생긴 4개의 교점은 직사각형의 꼭짓점이 되어 마지막에 생긴 두 개의 교점을 이으면 평행선을 긋는 것이 가능해진다.
이러한 특이한 풀이는 구경하거나 외우라고 있는 것만은 아니다. 다만 여기에서 생각을 어떻게 해야 할지를 고민해야 할 것이다. 이 경우만 봐도 그렇다. 평행선을 긋는다는 건
같은 기울기를 갖는 직선을 긋는다는 것이고, 직선을 긋기 위한 방법은 한 점과 기울기를 구하거나 두 점을 잇는 방법이 있기에 두 가지 방법을 고민해 봐야 하는 것이다.

나머지의 경우에는 강의를 통해서, 또는 유제 해설지를 보면서 확인하도록 하자.

이처럼 우리는 몇 가지 기초적인 작도 문제에 대해서 좀 다르게 생각해볼 수 있는 여지를 확인했다. 즉 어느 정도 쉬운 퀴즈라고 하더라도 그것을 푸는 방법은 다양하다는 것을 확인할 수 있는 것이다. 하지만 우리가 꽤 어려운 문제를 풀 때도 저런 내용은 상당히 도움이 된다. 다음 문제를 보자.

유제 1-6

어떤 예각삼각형 ABC에 대해, 변 AB 위에 점 C0, BC 위에 점 A0, CA 위에 점 B0을 잡자. 삼각형 A0B0C0만이 주어졌을 때, A0가 선분 BC 위에 있도록 하고, B0가 선분 AC 위에 있도록 하고, C0가 선분 AB 위에 있도록 하면서 삼각형 ABC를 삼각형 A0B0C0 위에 작도하는 방법에 대해 논하라.

유제 1-7

볼록사각형 ABCD에 대해 점 P는 ABCD 내부의 점이다. 이 둘은 다음을 만족한다.

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1:2:3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC$$

이때 $\angle ADP$의 각이등분선, $\angle PCB$의 각이등분선, $\overline{AB}$의 수직이등분선이 한 점에서 만남을 증명하시오.