30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x^2+x+1)=\pi f(1)\sin\pi x+f(3)x+5x^2$$

을 만족시킬 때, $f(7)$의 값을 구하시오.

2020학년도 9월 평가원 가형 30번 문항 별해 by YoonSol

sol)

$p(x)=x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ \ \left(x\geq -\frac{1}{2}\right)$

$q(x)=x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ \ \left(x< -\frac{1}{2}\right)$

$p(x),\, q(x)\geq \frac{3}{4}$

$g(x)=p^{-1}(x)=\sqrt{x-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\ \left(x\geq \frac{3}{4}\right)$

$h(x)=q^{-1}(x)=-\sqrt{x-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\ \left(x\geq \frac{3}{4}\right)$

함수 $f(x)$는 실수 전체 집합에서 미분가능하고 모든 실수 x에 대하여
$f'(x^2+x+1)=\pi f(1)\sin\pi x+f(3)x+5x^2$을 만족시킨다.

Ⅰ) $x\geq -\frac{1}{2}$

$f'(p(x))=\pi f(1)\sin\pi x+f(3)x+5x^2$
위 식의 양변의 x자리에 $x=g(t)$를 대입
$f'(t)=\pi f(1)\sin(\pi g(t))+f(3)g(t)+5\{g(t)\}^2$
적분의 편의를 위해 양변에 $g'(t)$를 곱한다.
$f'(t)g'(t)=\pi f(1)\sin(\pi g(t))g'(t)+f(3)g(t)g'(t)+5\{g(t)\}^2g'(t)$

$g'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-\frac{3}{4}}}=\dfrac{1}{2g(t)+1}$

$f'(t)=\pi f(1)\{2g(t)+1\}\sin(\pi g(t))g'(t)+f(3)\{2g(t)+1\}g(t)g'(t)+5\{g(t)\}^2\{2g(t)+1\}g'(t)$
양변을 부정적분하면

$$f(t)=-f(1)\{2g(t)+1\}\cos(\pi g(t))+f(1)\frac{2}{\pi}\sin(\pi g(t))+f(3)\left[\frac{2}{3}\{g(t)\}^3+\frac{1}{2}\{g(t)\}^2\right]$$
$$+5\left[\frac{1}{2}\{g(t)\}^4+\frac{1}{3}\{g(t)\}^3\right]+C_1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

위 식의 양변의 t자리에 $t=1$대입 $f(1)=-f(1)+C_1$

위 식의 양변의 t자리에 $t=3$대입 $f(3)=3f(1)+\frac{7}{6}f(3)+\frac{25}{6}+C_1$

Ⅱ) $x < -\frac{1}{2}$

$f'(q(x)) = \pi f(1)\sin\pi x + f(3)x + 5x^2$

위 식의 양변의 x자리에 $x = h(t)$를 대입

$f'(t) = \pi f(1)\sin(\pi h(t)) + f(3)h(t) + 5\{h(t)\}^2$

적분의 편의를 위해 양변에 $h'(t)$를 곱한다.

$f'(t)h'(t) = \pi f(1)\sin(\pi h(t))h'(t) + f(3)h(t)h'(t) + 5\{h(t)\}^2 h'(t)$

$g'(t) = \dfrac{1}{-2\sqrt{x-\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{2g(t)+1}$

$f'(t) = \pi f(1)\{2h(t)+1\}\sin(\pi h(t))h'(t) + f(3)\{2h(t)+1\}h(t)h'(t) + 5\{h(t)\}^2\{2h(t)+1\}h'(t)$

양변을 부정적분하면

$$f(t) = -f(1)\{2h(t)+1\}\cos(\pi h(t)) + f(1)\frac{2}{\pi}\sin(\pi h(t)) + f(3)\left[\frac{2}{3}\{h(t)\}^3 + \frac{1}{2}\{h(t)\}^2\right] + 5\left[\frac{1}{2}\{h(t)\}^4 + \frac{1}{3}\{h(t)\}^3\right] + C_2 \quad \cdots\cdots \text{ㄴ}$$

위 식의 양변의 t자리에 $t = 1$대입 $f(1) = -f(1) - \frac{1}{6}f(3) + \frac{5}{6} + C_2$

$f(x)$는 실수 전체 집합에서 미분가능하므로 $f(x)$는 $x = \frac{3}{4}$에서 연속이다.

$\therefore$ ㉠에 $t = \frac{3}{4}$를 대입한 값과 ㉡을 대입한 값은 같다.

$$\left(-f(1)\frac{2}{\pi} + \frac{1}{24}f(3) - \frac{5}{96} + C_1\right) = \left(-f(1)\frac{2}{\pi} + \frac{1}{24}f(3) - \frac{5}{96} + C_2\right)$$

$\therefore\ C_1 = C_2$

$\therefore\ f(1) = -1,\ f(3) = 5,\ C_1 = C_2 = -2$

$$\therefore\ f(t) = \{2g(t)+1\}\cos(\pi g(t)) - \frac{2}{\pi}\sin(\pi g(t)) + \frac{5}{2}\{g(t)\}^2\{g(t)+1\}^2 - 2 \quad \left(t \geq \frac{3}{4}\right)$$

$$\therefore\ f(x) = \left\{2\left(\sqrt{x-\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\right) + 1\right\}\cos\left(\pi\left(\sqrt{x-\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\right)\right) - \frac{2}{\pi}\sin\left(\pi\left(\sqrt{x-\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{5}{2}\left\{\sqrt{x-\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\right\}^2\left\{\sqrt{x-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\right\}^2 - 2$$

$$= \sqrt{4x-3}\sin\left(\pi\sqrt{x-\frac{3}{4}}\right) + \frac{2}{\pi}\cos\left(\pi\sqrt{x-\frac{3}{4}}\right) + \frac{5}{2}(x-1)^2 - 2 \quad \left(x \geq \frac{3}{4}\right)$$

$$f(x) = \sqrt{4x-3}\sin\left(\pi\sqrt{x-\frac{3}{4}}\right) + \frac{2}{\pi}\cos\left(\pi\sqrt{x-\frac{3}{4}}\right) + \frac{5}{2}(x-1)^2 - 2 \quad \left(x \geq \frac{3}{4}\right)$$

$\therefore\ f(7) = 5 + 90 - 2 = 93$