

2021학년도 수능 수II 기출

해설
2.

2021.02.17

심상범

다른 해설지와 달리 있는 자료이므로 차등부여 차등차근 봐주시면 감사하겠습니다.

6. 함수 $f(x) = x^4 + 3x - 2$ 에 대하여 $f'(2)$ 의 값은? [3점]
- ① 35 ② 37 ③ 39 ④ 41 ⑤ 43

값을 구하기 위해서는 $f'(x)$ 가 필요하다. $\rightarrow f'(x)$ 를 통해

$$f'(x) = 4x^3 + 3 \rightarrow f'(2) = 4 \cdot 8 + 3 = 32 + 3 = 35$$

답: ①

9. 곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ 위의 점 $A(0, 2)$ 에서의 접선과 수직이고 점 A 를 지나는 직선의 x 절편은? [3점]
- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

우선 $f(x)$ 위의 점 $A(0, 2)$ 에서의 접선을 구해보자. $\rightarrow$ 미분계수가 필요.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \rightarrow f'(0) = 0 - 0 + 2 = 2$$

우리가 구해야 하는 직선은 이 접선과 수직 이라고 하였으므로 기울기를 곱할 수 없다.

$$2 \times \square = -1 \quad \square = -\frac{1}{2} \quad + A(0, 2) \text{ 를 지나는 } = \text{ 직선을 쓸 수 있다.}$$

$$y = -\frac{1}{2}(x-0) + 2 = -\frac{1}{2}x + 2 \rightarrow \text{이 직선의 } x \text{ 절편을 구한다.}$$

x 절편은 4이다.
답은 ①번

답: ①

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t (t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = 2t - 6$$

$t > 3$ 이 되면 $v < 0$

이다. 점 P가 시각 $t=3$ 에서 $t=k (k > 3)$ 까지 움직인 거리가 25일 때, 상수 k 의 값은? [4점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$v(t) = 2t - 6$ 을 보면 $t > 3$ 이 되면 $v(t) < 0$ 이 되고 그 후에는 방향이 바뀌지 않았다.

→ 그러므로 $(t=k \text{에서의 위치}) - (t=3 \text{에서의 위치}) = 25$ 가 될 수 있다.

위치를 구하기 위해서는 방위에 대한 식을 적분해 주면 된다.

$$x(t) = \int 2t - 6 \, dt = t^2 - 6t + C$$

위치 적분 상수

• $t=3$ 에서의 위치

$$x(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + C = C - 9$$

• $t=k$ 에서의 위치

$$x(k) = k^2 - 6k + C$$

$$|t=k \text{에서의 위치} - t=3 \text{에서의 위치}| = 25$$

→ '이' 이므로 절댓값 치워준다.
↳ 'k'에서의 위치 - 25m '25'도 만들어...

$$|(k^2 - 6k + C) - (C - 9)| = |k^2 - 6k + 9| = |(k-3)^2| = 25$$

$k > 3$ 이므로 $k=8$ 답은 $k=8$

답: ③

17. 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x)}{x} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3}{x g(x)} = 2$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x) = \underbrace{f(x)g(x)}_{\text{곱의 편차}}$ 에 대하여 $h'(0)$ 의 값은?

[4점]

☒ 27
 ☐ 30
 ☐ 33
 ☐ 36
 ☐ 39

우선 주어진 $h'(0)$ 을 위해서는 $h'(x)$ 가 필요하다.

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \xrightarrow{x=0 \text{ 대입}} h'(0) = f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$$

↳ $f(0), g(0), f'(0), g'(0)$ 이 필요하다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x)}{x} = 3$$

$x=0$ 을 대입해보면 분모=0 이므로 분자인 $f(0)+g(0)=0$ 이어야 식이 성립할 수 있다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} + \frac{g(x)}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} + \frac{g(x)}{x} = \frac{f(0)+g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x}$$

↳ $f'(0)+g'(0)=0$ 이므로

$$= f'(0) + g'(0) = 3$$

※ 크피탈레로 무한

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3}{x g(x)} = 2$$

$x=0$ 을 대입해보면 분모=0 이므로 분자인 $f(0)+3=0$ 이어야 한다. $\rightarrow f(0)=-3 \rightarrow g(0)=3$
↳ $f(0)+g(0)=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{g(x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)-f(0)}{x-0} + \frac{3}{x-0}}{\frac{g(x)-g(0)}{x-0}} = \frac{f'(0) + 3}{g'(0)}$$

↳ $\frac{f'(0)}{g'(0)} = 2$ $g(0)=3$ 이므로 $f'(0)=6$

옆의 두 식을 통해 알아낸 사실들을 나열해보자.

$$\begin{aligned} f(0) + g(0) &= 0 \\ f(0) &= -3 \quad g(0) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0) + g'(0) &= 3 \\ f'(0) &= 6 \quad g'(0) = -3 \end{aligned}$$

$h'(0)$ 을 구하기 위해 필요한 자료들을 모두 구했다.

$$h'(0) = \underbrace{f'(0)}_6 \cdot \underbrace{g(0)}_3 + \underbrace{f(0)}_{-3} \cdot \underbrace{g'(0)}_{-3} = 18 + 9 = 27$$

$$h'(0) = 27$$

답: ㉠

25. 곡선 $y = 4x^3 - 12x + 7$ 과 직선 $y = k$ 가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k 의 값을 구하시오. [3점]

우선 곡선 $y = 4x^3 - 12x + 7$ 은 3차식이고 그래프를 그려보자.

$f(x) = 4x^3 - 12x + 7$ 이라고 하자.

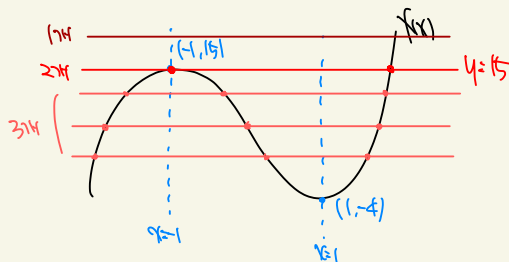
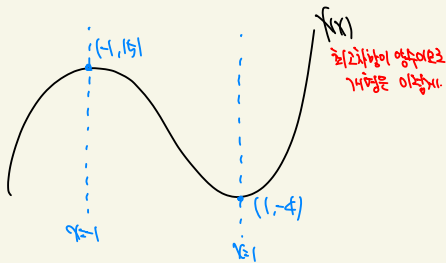
$$f'(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$$

$$\hookrightarrow x = \pm 1 \text{에서 } f'(x) = 0$$

$\hookrightarrow$ 극대/극소에서 $f'(x) = 0$ 으로

만족시키는 k 가 2개이므로

즉, 극대, 극대값



$y = k$ 라는 직선은 y 축에 평행한 직선이다.

이러한 직선들 중 $f(x)$ 와 교점이 2개이려면 극대 또는 극소에 접해야 한다.

$$\underbrace{y = 15}_{\substack{\text{극대값이므로 } k = 15}} \quad y = -4$$

답: 15

26. 함수

$$f(x) = \begin{cases} -3x + a & (x \leq 1) \\ \frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2} & (x > 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.
(단, a 와 b 는 상수이다.) [4점] 변수의 범위

나의 의지를 내일이 위하여 굳은 결심이 굳은 힘을 결심하여 본다.

- $x=1$ - 앞뒤로 함수의 증가와 감소
- ~~$x=1$~~ - 앞뒤에 부호가 있다. $\rightarrow x > 1$ 이면 x 감소

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이고 $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로 a, b 를 구해보자.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -3x + a = -3 + a \quad \text{1. 차분 } x \leq 1 \text{ 이면 } x \leq 1 \text{ 을 적용하므로 } 2. \text{ 차분 } x = 1 \text{ 이면 } x = 1 \text{ 을 적용하므로 } a - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+b)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+b)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$$

↑ 분자 0 이 X

↓ 분모 0 이므로 x=1 을 적용하기 위함

x=b 가 x=1 이 되어야 함.

b=1

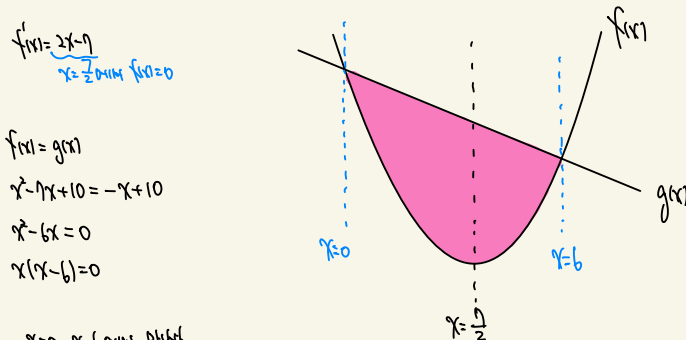
$$\frac{2x+3}{7} = \frac{0}{7}$$
$$2x+3 = 0$$
$$2x = -3$$
$$x = -\frac{3}{2}$$

$$a+b = 7 + (-1) = \underline{6}$$

답: 6

27. 곡선 $y = x^2 - 7x + 10$ 과 직선 $y = -x + 10$ 으로 둘러싸인
부분의 넓이를 구하시오. [4점]

우선 두 식의 그래프를 그려 주 있으므로 그려보자.

$$f(x) = x^2 - x + 10, \quad g(x) = -x + 10 \quad 0 \leq x \leq 6$$


$x=0, x=6$ 에서 만난다.

0. $\frac{240}{122} \approx 1.967$

$$\frac{1}{20} \pi = \int_0^6 (-x+10) - (x^2-7x+10) dx = \int_0^6 -x^2+6x dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2 \right]_0^6 = -\frac{1}{3} \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 = 6^2(3-2) = 36$$

• 광도를 통해 : $S = \frac{\text{외지점의 광도}}{6} (\beta - d)^3$ α, β : 2점의 X 값으로 ($\beta > d$)

$$\frac{1401}{260} = \frac{1}{6} (6-0)^2 = 6^2 = 36$$

답: 36

20. 실수 a ($a > 1$)에 대하여 함수 $f(x)$ 를
 갖지 마라.

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-a)$$

$x=-1, x=1, x=a$ 에서 x 축과 만남

라 하자. 함수

$$g(x) = x^2 \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t^2 f(t) dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a 의 최댓값은? [4점]
 미분계수 부호 변화 필요.

- ① $2\sqrt{2}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{2}}{8}$

$g(x)$ 의 극값을 따지기 위해서는 도함수가 필요하다. → 도함수의 부호를 보기 위해

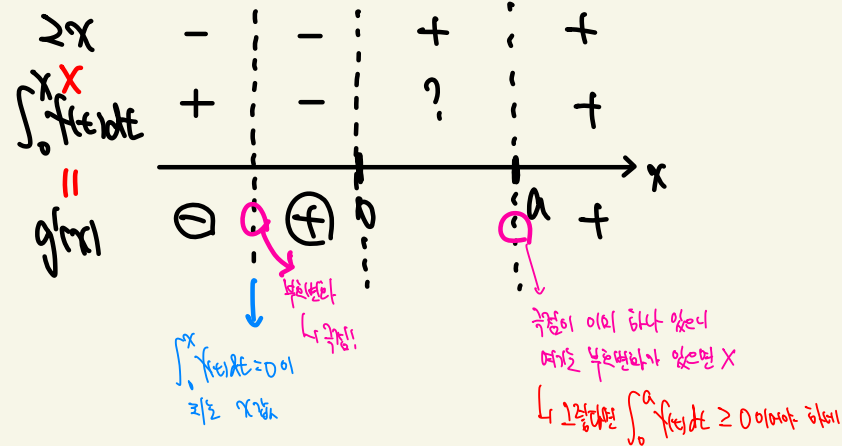
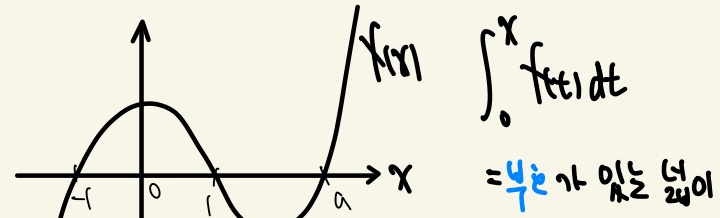
$$g'(x) = 2x \int_0^x f(t) dt + x^2 f(x) - x^2 f(x) = 2x \int_0^x f(t) dt$$

$g'(x)$ 의 부호 변화를 살펴보자.

도함수의 부호가 바뀌는 지점이 극점이다.

$f(x)$ 의 그래프로 대략이나마 그려서 $g'(x)$ 의 부호변화를 알아보자.

왜? → $g'(x)$ 에 $f(x)$ 에 대한 식이 포함되어있음



$$\begin{aligned} \int_0^a f(t) dt &= \int_0^a (t+1)(t-1)(t-a) dt = \int_0^a (t^2-1)(t-a) dt = \int_0^a (t^3-at^2-t+at) dt \\ &= \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}at^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}at^2 \right]_0^a \\ &= \frac{a^4}{4} - \frac{1}{3}a^4 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 = -\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{2}a^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{2}a^2 &\geq 0 \\ 6a^2 &\geq a^4 \\ 6 &\geq a^2 \\ -\sqrt{6} \leq a \leq \sqrt{6} &+ a \geq 1 \text{ 이니까 } a \text{의 최댓값은 } \sqrt{6} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

답: ②