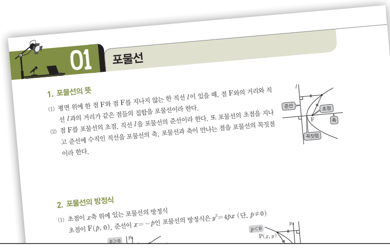
수능특강

수학영역 **기하**

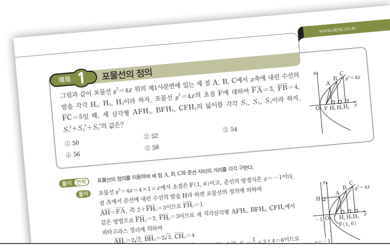
이 책의 차례 Contents

이 책의 구성과 특징 Structure



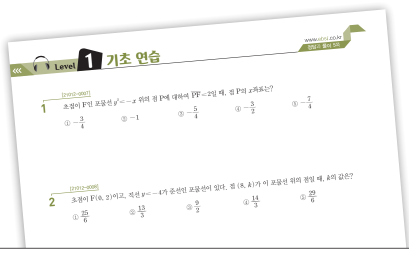
개념 정리

교과서의 핵심 내용을 체계적으로 정리하였다.



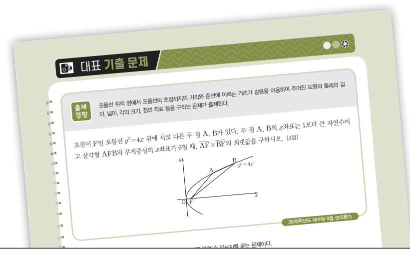
예제 & 유제

EBS 우수 문항을 활용하여 예제는 개념을 적용한 대표 문항으로 문제를 해결하는 데 필요한 주요 개념을 풀이 전략으로 제시하여 풀이 과정의 이해를 돕도록 하였고, 유제는 예제와 유사한 내용의 문제나 일반화된 문제를 제시하여 학습 내용과 문제에 대한 연관성을 익히도록 구성하였다.



Level 1 – Level 2 – Level 3

Level 1 기초 연습은 기초 개념의 인지 정도를 확인할 수 있는 문항을 제시하였으며, Level 2 기본 연습은 기본 응용 문항을, 그리고 Level 3 실력 완성은 수학적 사고력과 문제 해결 능력을 함양할 수 있는 문항을 제시하여 대학수학능력시험 실전에 대비할 수 있도록 구성하였다.

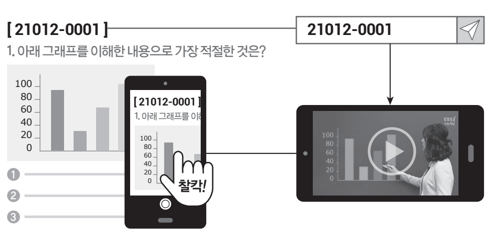


대표 기출 문제

대학수학능력시험과 모의평가 기출 문항으로 구성하였으며 기존 출제 유형을 파악할 수 있도록 출제 경향과 출제 의도를 제시하였다.

학생 EBS 교재 문제 검색

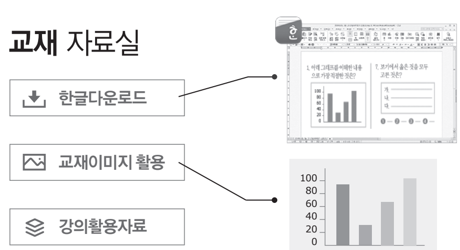
EBS 단추에서 문항코드나 사진으로
문제를 검색하면 푸리봇이 해설 영상을 제공합니다.



※ EBSi 사이트 및 모바일에서 이용이 가능합니다.
※ 사진 검색은 EBSi 고교강의 앱에서만 이용하실 수 있습니다.

교사 교사지원센터 교재 자료실

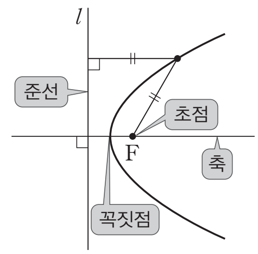
교재 문항 한글 문서(HWP)와
교재의 이미지 파일을 무료로 제공합니다.



※ 교사지원센터(http://teacher.ebsi.co.kr) 접속 후 '교사인증'을 통해 이용 가능

01 포물선

1. 포물선의 뜻



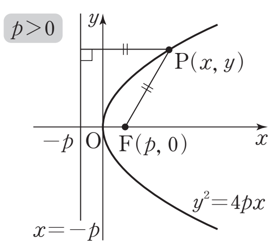
(1) 평면 위에 한 점 F와 점 F를 지나지 않는 한 직선 l이 있을 때, 점 F와의 거리와 직선 l과의 거리가 같은 점들의 집합을 포물선이라 한다.

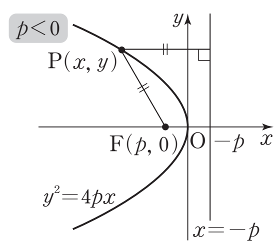
(2) 점 F를 포물선의 초점, 직선 l을 포물선의 준선이라 한다. 또 포물선의 초점을 지나고 준선에 수직인 직선을 포물선의 축, 포물선과 축이 만나는 점을 포물선의 꼭짓점이라 한다.

2. 포물선의 방정식

(1) 초점이 x축 위에 있는 포물선의 방정식

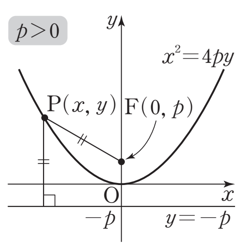
초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)$, 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ (단, $p\neq0$)

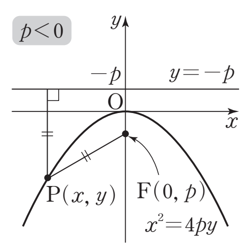




(2) 초점이 y축 위에 있는 포물선의 방정식

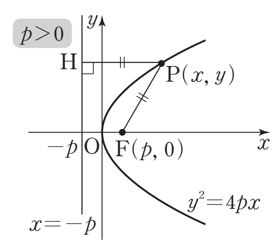
초점이 $\mathrm{F}(0,\ p)$, 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은 $x^2=4py$ (단, $p\neq0$)





설명 0이 아닌 실수 p에 대하여 점 $\mathrm{F}(p,\ 0)$을 초점으로 하고 직선 $x=-p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 구해 보자.

그림과 같이 포물선 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(-p,\ y)$이다.



포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로

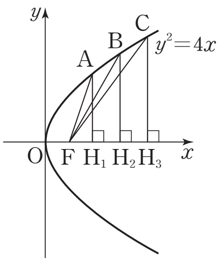
$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p|$$

이고, 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$y^2=4px$$

예제 1 포물선의 정의

그림과 같이 포물선 $y^2=4x$ 위의 제1사분면에 있는 세 점 A, B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2, H_3이라 하자. 포물선 $y^2=4x$의 초점 F에 대하여 $\overline{FA}=3$, $\overline{FB}=4$, $\overline{FC}=5$일 때, 세 삼각형 AFH_1, BFH_2, CFH_3의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. $S_1^2+S_2^2+S_3^2$의 값은?



① 50 ② 52 ③ 54 ④ 56 ⑤ 58

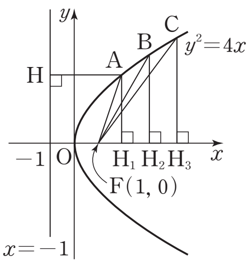
풀이 전략 포물선의 정의를 이용하여 세 점 A, B, C와 준선 사이의 거리를 각각 구한다.

풀이 포물선 $y^2=4x=4\times1\times x$에서 초점은 $F(1, 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-1$이다.
점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여
$\overline{AH}=\overline{FA}$, 즉 $2+\overline{FH_1}=3$이므로 $\overline{FH_1}=1$
같은 방법으로 $\overline{FH_2}=2$, $\overline{FH_3}=3$이므로 세 직각삼각형 AFH_1, BFH_2, CFH_3에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AH_1}=2\sqrt{2},\ \overline{BH_2}=2\sqrt{3},\ \overline{CH_3}=4$$

따라서 $S_1=\frac{1}{2}\times1\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$, $S_2=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$, $S_3=\frac{1}{2}\times3\times4=6$이므로

$$S_1^2+S_2^2+S_3^2=2+12+36=50$$



답 ①

정답과 풀이 4쪽

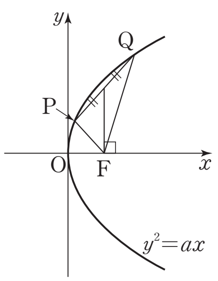
[21012-0001]

유제 1 포물선 $y^2=4px$ $(p>0)$의 초점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 할 때, $\frac{\overline{OF}}{\overline{PQ}}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[21012-0002]

유제 2 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=ax$ 위의 제1사분면에 있는 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 선분 PQ의 중점에서 x축에 내린 수선의 발이 점 F이고 $\overline{PF}+\overline{QF}=12$일 때, 양수 a의 값은?



① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

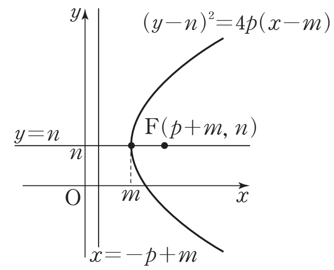
3. 포물선의 평행이동

(1) 포물선 $y^2=4px$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$(y-n)^2=4p(x-m)$$

이다. 이때 포물선의 꼭짓점, 초점, 준선은 다음과 같이 평행이동한다.

$y^2=4px$	x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 →	$(y-n)^2=4p(x-m)$
$(0, 0)$	꼭짓점	(m, n)
$(p, 0)$	초점	$(p+m, n)$
$x=-p$	준선	$x=-p+m$

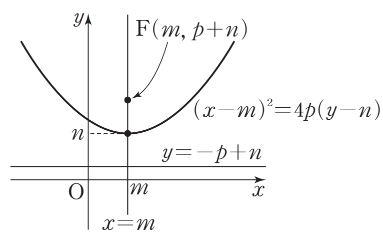


(2) 포물선 $x^2=4py$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$(x-m)^2=4p(y-n)$$

이다. 이때 포물선의 꼭짓점, 초점, 준선은 다음과 같이 평행이동한다.

$x^2=4py$	x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 →	$(x-m)^2=4p(y-n)$
$(0, 0)$	꼭짓점	(m, n)
$(0, p)$	초점	$(m, p+n)$
$y=-p$	준선	$y=-p+n$



4. 포물선과 직선의 위치 관계

포물선과 직선의 방정식을 각각 $y^2=4px$, $y=mx+n$ $(m\neq0)$이라 할 때, $y=mx+n$을 $y^2=4px$에 대입하여 정리하면

$$m^2x^2+2(mn-2p)x+n^2=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

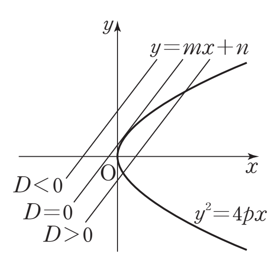
이다. 이때 포물선 $y^2=4px$와 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 x에 대한 이차방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

즉, x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 포물선과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

(1) $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0 \Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) $D<0 \Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.



예제 2 포물선의 평행이동

좌표평면에서 원점 O가 초점이고 점 A$(-1, 0)$이 꼭짓점인 포물선을 C_1이라 하고, 원점 O가 초점이고 점 B$(2, 0)$이 꼭짓점인 포물선을 C_2라 하자. 두 포물선 C_1, C_2가 만나는 두 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{PQ}^2$의 값을 구하시오.

풀이 전략 포물선 $(y-n)^2=4p(x-m)$의 초점의 좌표는 $(p+m, n)$이고, 꼭짓점의 좌표는 (m, n)이다.

풀이 원점 O가 초점이고 점 A$(-1, 0)$이 꼭짓점인 포물선 C_1의 방정식은

$y^2=4\times1\times(x+1)$

즉, $y^2=4(x+1)$ …… ㉠

원점 O가 초점이고 점 B$(2, 0)$이 꼭짓점인 포물선 C_2의 방정식은

$y^2=4\times(-2)\times(x-2)$

즉, $y^2=-8(x-2)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $4(x+1)=-8(x-2)$, $x=1$

따라서 두 포물선 C_1, C_2가 만나는 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(1, 2\sqrt{2})$, $(1, -2\sqrt{2})$이므로

$\overline{PQ}^2=(4\sqrt{2})^2=32$

답 32

정답과 풀이 4쪽

[21012-0003]

유제 3 두 포물선 $y^2=8(x-a)$, $y^2=-4x-4$의 준선이 일치할 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[21012-0004]

유제 4 초점이 F$(4, -2)$이고 직선 $y=4$가 준선인 포물선의 방정식이 $(x+a)^2=b(y+c)$일 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

① -20 ② -19 ③ -18
④ -17 ⑤ -16

5. 포물선의 접선

(1) 기울기가 주어진 포물선의 접선의 방정식

① 포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx+\dfrac{p}{m}$ (단, $m\neq0$)

② 포물선 $x^2=4py$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx-m^2p$

설명 ① 포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구해 보자.

포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m $(m\neq0)$인 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고, 포물선의 방정식 $y^2=4px$에 대입하여 정리한 x에 대한 이차방정식 $m^2x^2+2(mn-2p)x+n^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(mn-2p)^2-m^2n^2=4p(p-mn)=0$이다. 이때 $p\neq0$이므로 $p-mn=0$, 즉 $n=\dfrac{p}{m}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=mx+\dfrac{p}{m}$이다.

② 포물선 $x^2=4py$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구해 보자.

포물선 $x^2=4py$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고, 포물선의 방정식 $x^2=4py$에 대입하여 정리한 x에 대한 이차방정식 $x^2-4pmx-4pn=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2pm)^2-(-4pn)=4p(pm^2+n)=0$이다. 이때 $p\neq0$이므로 $pm^2+n=0$, 즉 $n=-m^2p$

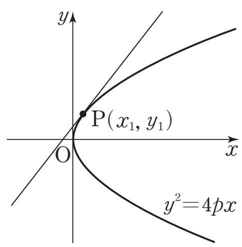
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=mx-m^2p$이다.

(2) 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식

① 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $y_1y=2p(x+x_1)$

② 포물선 $x^2=4py$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $x_1x=2p(y+y_1)$

설명 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.



$x_1\neq0$일 때 접선의 기울기를 m $(m\neq0)$이라 하면 직선의 방정식은

$y-y_1=m(x-x_1)$ …… ㉠

또 포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y=mx+\dfrac{p}{m}$ …… ㉡

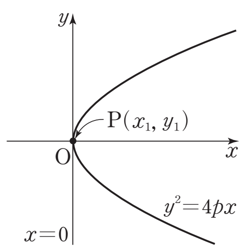
㉠과 ㉡은 같은 직선이므로 $-mx_1+y_1=\dfrac{p}{m}$

양변에 m을 곱해 얻은 m에 대한 이차방정식 $x_1m^2-y_1m+p=0$에서 $m=\dfrac{y_1\pm\sqrt{(-y_1)^2-4px_1}}{2x_1}$

이때 $y_1^{\,2}=4px_1$이므로 $m=\dfrac{y_1}{2x_1}=\dfrac{2p}{y_1}$ $(y_1\neq0)$

이것을 ㉠에 대입하면 $y=\dfrac{2p}{y_1}x-\dfrac{2p}{y_1}x_1+y_1$이고, $y_1^{\,2}=4px_1$이므로 정리하면

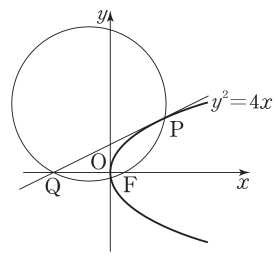
$y_1y=2p(x+x_1)$이다.



$x_1=0$일 때 $y_1=0$이므로 이 식에 대입하면 접선의 방정식은 $x=0$이고, 그림과 같이 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선이 y축 $(x=0)$이므로 $x_1=0$일 때에도 이 식은 성립한다.

예제 3 포물선의 접선

그림과 같이 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 포물선의 초점 F에 대하여 $\overline{\mathrm{FP}}=5$일 때, 삼각형 PQF의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 P는 제1사분면에 있고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



풀이 전략 포물선의 정의에 의하여 점 P의 좌표를 구하고, 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구한다.

풀이 포물선 $y^2=4x$의 준선의 방정식은 $x=-1$이고, 점 P에서 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 R라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PF}}=5$

점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면

$x_1=5-1=4$, $y_1^2=4\times4=16$

이때 $y_1>0$이므로 $y_1=4$

점 P$(4, 4)$에서의 접선의 방정식이 $4y=2(x+4)$이므로 점 Q의 좌표는 $(-4, 0)$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\{4-(-4)\}^2+4^2}=4\sqrt{5}$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=4$

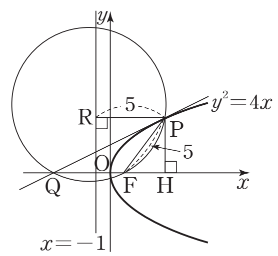
직각삼각형 PQH에서 $\sin(\angle\mathrm{PQH})=\frac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\frac{4}{4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

삼각형 PQF의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{PF}}}{\sin(\angle\mathrm{PQF})}=2R$, $\frac{5}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=2R$, $R=\frac{5\sqrt{5}}{2}$

따라서 삼각형 PQF의 외접원의 넓이가 $\pi\times\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{125}{4}\pi$이므로 $p=4$, $q=125$

$p+q=4+125=129$



답 129

정답과 풀이 5쪽

[21012-0005]

유제 5 초점이 F인 포물선 $y^2=6x$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 선분 PQ의 길이가 $3\sqrt{6}$일 때, 삼각형 FPQ의 넓이는?

① $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{27\sqrt{2}}{4}$ ③ $9\sqrt{2}$ ④ $\frac{45\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{27\sqrt{2}}{2}$

[21012-0006]

유제 6 포물선 $y^2=2x$의 초점을 F, 이 포물선에 접하고 기울기가 $\frac{1}{3}$인 직선을 l이라 하자. 점 F에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H, 직선 l이 x축과 만나는 점을 A라 할 때, 삼각형 AFH의 넓이는?

① $\frac{11}{4}$ ② 3 ③ $\frac{13}{4}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

[21012-0007]

1 초점이 F인 포물선 $y^2=-x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}=2$일 때, 점 P의 x좌표는?

① $-\frac{3}{4}$ ② -1 ③ $-\frac{5}{4}$ ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ $-\frac{7}{4}$

[21012-0008]

2 초점이 $\mathrm{F}(0, 2)$이고, 직선 $y=-4$가 준선인 포물선이 있다. 점 $(8, k)$가 이 포물선 위의 점일 때, k의 값은?

① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$

[21012-0009]

3 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $(3, 6)$에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? (단, p는 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② 3 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{15}{2}$

[21012-0010]

4 포물선 $y^2=8x$에 접하고 기울기가 4인 직선이 x축과 만나는 점을 A라 하자. 이 포물선의 초점을 F라 할 때, 선분 AF의 길이는?

① $\frac{17}{8}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{19}{8}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{21}{8}$

[21012-0011]

1 포물선 $y^2=ax$ $(a\neq0)$ 위의 점 P에서의 접선이 점 $(5, 0)$을 지난다. 포물선의 초점 F에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}=7$일 때, 상수 a의 값은?

① -16　② -14　③ -12　④ -10　⑤ -8

[21012-0012]

2 초점이 $(0, 2)$이고 직선 $y=-2$가 준선인 포물선 위를 움직이는 점을 P라 하자. 점 $(0, -6)$을 지나고 x축에 접하는 원의 중심이 나타내는 도형 위를 움직이는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이의 최솟값을 구하시오.

[21012-0013]

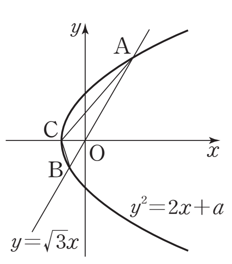
3 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 포물선에 접하고 기울기가 2인 직선을 l이라 하자. 포물선 $y^2=4x$의 초점과 직선 l 사이의 거리가 $\sqrt{5}$일 때, 양수 m의 값은?

① $\frac{5}{4}$　② $\frac{15}{8}$　③ $\frac{5}{2}$　④ $\frac{25}{8}$　⑤ $\frac{15}{4}$

[21012-0014]

4 그림과 같이 초점이 원점 O인 포물선 $y^2=2x+a$와 직선 $y=\sqrt{3}x$가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 포물선의 꼭짓점을 C라 하자. 삼각형 OAC의 넓이를 S_1, 삼각형 OCB의 넓이를 S_2라 할 때, S_1-S_2의 값은?

(단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 크고, a는 상수이다.)



① $\frac{\sqrt{3}}{12}$　② $\frac{\sqrt{3}}{6}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{4}$　④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$　⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{12}$

[21012-0015]

1 포물선 $y^2=4px$ $(p>0)$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기가 1이다. 이 접선이 x축과 만나는 점을 B, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 6일 때, 상수 p의 값은?

① $\sqrt{3}$　② $\sqrt{6}$　③ 3　④ $2\sqrt{3}$　⑤ $3\sqrt{3}$

[21012-0016]

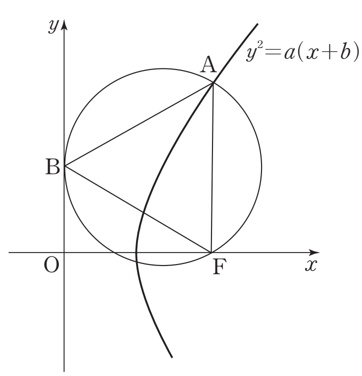
2 포물선 $y^2=\sqrt{5}x$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 이 포물선 위의 제4사분면에 있는 점 R에 대하여 세 점 P, Q, R를 지나는 원이 다음 조건을 만족시킬 때, 점 R의 y좌표는?

(가) 원의 중심이 y축 위에 있다.
(나) 원의 넓이가 $\frac{21}{5}\pi$이다.

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

[21012-0017]

3 그림과 같이 초점이 F이고, 준선이 y축인 포물선 $y^2=a(x+b)$ $(a>0)$에 대하여 포물선 위의 점 $A(2\sqrt[3]{7}, k)$와 점 F를 지나고 y축과 점 B에서 접하는 원이 있다. $\angle FAB=60°$이고, 삼각형 ABF의 넓이가 7일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이고, (점 A의 y좌표)$>$(점 B의 y좌표)>0이다.)

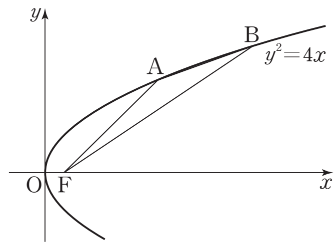


① $\frac{21}{8}$　② $\frac{7}{2}$　③ $\frac{35}{8}$　④ $\frac{21}{4}$　⑤ $\frac{49}{8}$

대표 기출 문제

출제 경향 포물선 위의 점에서 포물선의 초점까지의 거리와 준선에 이르는 거리가 같음을 이용하여 주어진 도형의 둘레의 길이, 넓이, 각의 크기, 점의 좌표 등을 구하는 문제가 출제된다.

초점이 F인 포물선 $y^2=4x$ 위에 서로 다른 두 점 A, B가 있다. 두 점 A, B의 x좌표는 1보다 큰 자연수이고 삼각형 AFB의 무게중심의 x좌표가 6일 때, $\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{BF}}$의 최댓값을 구하시오. [4점]



2020학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 포물선의 정의를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 하자.

포물선 $y^2=4x=4\times1\times x$에서 초점은 $\mathrm{F}(1, 0)$이고 삼각형 AFB의 무게중심의 x좌표가 6이므로

$\dfrac{a+b+1}{3}=6$에서

$$a+b=17 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 포물선의 정의에 의하여 포물선 위의 점에서 초점까지의 거리는 포물선의 준선까지의 거리와 같고, 포물선 $y^2=4x$의 준선의 방정식은 $x=-1$이므로

$$\overline{\mathrm{AF}}=a+1,\ \overline{\mathrm{BF}}=b+1$$

따라서 $\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{BF}}=(a+1)(b+1)=ab+a+b+1=ab+18$

㉠에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{BF}}&=a(17-a)+18\\&=-a^2+17a+18\\&=-\left(a-\frac{17}{2}\right)^2+\frac{361}{4}\end{aligned}$$

이때 a가 자연수이므로 $\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{BF}}$는 $a=8$ 또는 $a=9$일 때 최대이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{BF}}$의 최댓값은

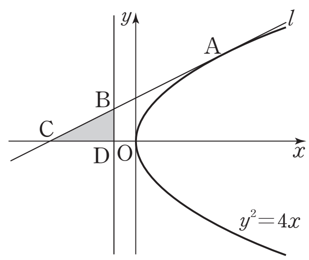
$$8\times9+18=90$$

답 90

대표 기출 문제

출제 경향 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식을 이용하여 포물선 밖의 점이 주어질 때의 접선을 구하거나 주어진 도형의 둘레의 길이, 넓이, 각의 크기, 점의 좌표 등을 구하는 문제가 출제된다.

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{A}(4,\ 4)$에서의 접선을 l이라 하자. 직선 l과 포물선의 준선이 만나는 점을 B, 직선 l과 x축이 만나는 점을 C, 포물선의 준선과 x축이 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 BCD의 넓이는? [3점]



① $\frac{7}{4}$　② 2　③ $\frac{9}{4}$　④ $\frac{5}{2}$　⑤ $\frac{11}{4}$

2016학년도 대수능

출제 의도 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 포물선 $y^2=4x=4\times1\times x$에서 준선의 방정식은 $x=-1$이므로

$\mathrm{D}(-1,\ 0)$

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{A}(4,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$4y=2(x+4)$

$y=\frac{1}{2}x+2$ ⋯⋯ ㉠

㉠에 $x=-1$을 대입하면

$\mathrm{B}\left(-1,\ \frac{3}{2}\right)$

또 ㉠에 $y=0$을 대입하면

$\mathrm{C}(-4,\ 0)$

따라서 삼각형 BCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{2}\times3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$

답 ③

대표 기출 문제

출제 경향 기울기가 주어진 포물선의 접선의 방정식을 이용하여 도형의 넓이, 점의 좌표 등을 구하는 문제가 출제된다. 이때 원의 성질이나 포물선의 정의, 수열을 활용하는 문제가 출제된다.

자연수 n에 대하여 직선 $y=nx+(n+1)$이 꼭짓점의 좌표가 $(0, 0)$이고 초점이 $(a_n, 0)$인 포물선에 접할 때, $\sum_{n=1}^{5} a_n$의 값은? [3점]

① 70　② 72　③ 74　④ 76　⑤ 78

2015학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 기울기가 주어진 포물선의 접선의 방정식을 이용하여 수열을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 꼭짓점의 좌표가 $(0, 0)$이고 초점이 $(a_n, 0)$인 포물선의 방정식은

$$y^2=4a_nx$$

포물선 $y^2=4a_nx$에 접하고 기울기가 자연수 n인 접선의 방정식은

$$y=nx+\frac{a_n}{n}$$

이 직선이 직선 $y=nx+(n+1)$과 일치하므로

$$\frac{a_n}{n}=n+1$$

$$a_n=n(n+1)$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{5} a_n&=\sum_{n=1}^{5} n(n+1)\\&=\sum_{n=1}^{5} (n^2+n)\\&=\frac{5\times6\times11}{6}+\frac{5\times6}{2}\\&=55+15\\&=70\end{aligned}$$

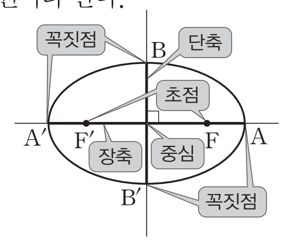
답 ①

02 타원

1. 타원의 뜻

(1) 평면 위의 서로 다른 두 점 F, F′으로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 타원이라 한다.

(2) 두 점 F, F′을 타원의 초점이라 한다. 두 초점을 잇는 직선이 타원과 만나는 점을 각각 A, A′이라 하고, 선분 FF′의 수직이등분선이 타원과 만나는 점을 각각 B, B′이라 할 때, 네 점 A, A′, B, B′을 타원의 꼭짓점이라 하고, 선분 AA′을 타원의 장축, 선분 BB′을 타원의 단축이라 하며, 장축과 단축이 만나는 점을 타원의 중심이라 한다.



2. 타원의 방정식

(1) 초점이 x축 위에 있는 타원의 방정식

두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식은

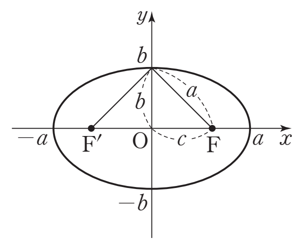
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{단, } a>c>0,\ b^2=a^2-c^2)$$

① 타원의 초점: $\mathrm{F}(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

② 꼭짓점: $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$, $(0,\ b)$, $(0,\ -b)$

③ 장축의 길이: $2a$, 단축의 길이: $2b$

④ 중심: $(0,\ 0)$



(2) 초점이 y축 위에 있는 타원의 방정식

두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$로부터의 거리의 합이 $2b$인 타원의 방정식은

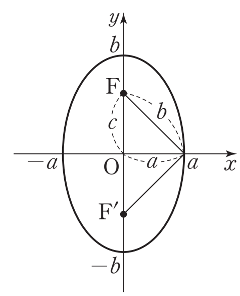
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{단, } b>c>0,\ a^2=b^2-c^2)$$

① 타원의 초점: $\mathrm{F}(0,\ \sqrt{b^2-a^2})$, $\mathrm{F}'(0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$

② 꼭짓점: $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$, $(0,\ b)$, $(0,\ -b)$

③ 장축의 길이: $2b$, 단축의 길이: $2a$

④ 중심: $(0,\ 0)$



설명 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 합이 $2a\ (a>c>0)$인 타원의 방정식을 구해 보자.

타원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

$$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\ \overline{\mathrm{PF}'}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

이고, $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}'}=2a$이므로

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

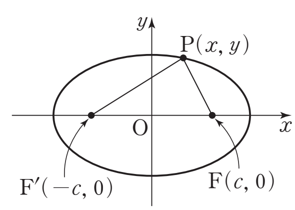
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

이고, 다시 양변을 제곱하여 정리하면 $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

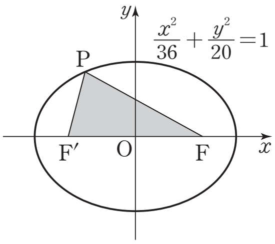
$a>c>0$이므로 $a^2-c^2=b^2\ (b>0)$이라 하면 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

이 식의 양변을 a^2b^2으로 나누면 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



예제 1 타원의 정의

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F′이라 하자. 이 타원 위의 점 P를 $\overline{PF}=2\overline{PF'}$이 되도록 잡을 때, 삼각형 PF′F의 넓이는?



① $8\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{13}$ ③ $4\sqrt{14}$
④ $4\sqrt{15}$ ⑤ 16

풀이 전략 타원의 정의를 이용하여 삼각형의 세 변의 길이를 구한다.

풀이 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$의 초점 F의 x좌표가 $\sqrt{36-20}=4$이므로

$\mathrm{F}(4, 0)$, $\mathrm{F'}(-4, 0)$

타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$의 장축의 길이는 $2\times\sqrt{36}=12$이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=12$

이때 $\overline{PF}=2\overline{PF'}$이므로 $2\overline{PF'}+\overline{PF'}=12$에서

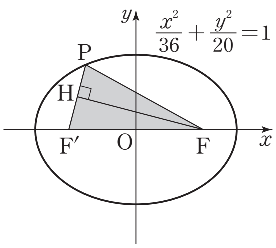
$\overline{PF'}=4$, $\overline{PF}=8$

따라서 삼각형 PF′F는 $\overline{PF}=\overline{FF'}=8$인 이등변삼각형이다.

점 F에서 선분 PF′에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 PF′의 중점이므로 $\overline{PH}=2$

따라서 $\overline{FH}=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$이므로 삼각형 PF′F의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{15}=4\sqrt{15}$



답 ④

정답과 풀이 11쪽

유제 1 [21012-0018]

좌표평면 위의 두 점 F(3, 0), F′(−3, 0)에 대하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=14$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 점 $(5, k)$를 지난다. 양수 k의 값은?

① $\frac{8\sqrt{10}}{7}$ ② $\frac{12\sqrt{5}}{7}$ ③ $\frac{20\sqrt{2}}{7}$ ④ $\frac{4\sqrt{55}}{7}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{15}}{7}$

유제 2 [21012-0019]

두 초점이 F(4, 0), F′(−4, 0)인 타원과 직선 $x=4$가 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=12$일 때, 이 타원의 장축의 길이와 단축의 길이의 합은 $m+n\sqrt{3}$이다. $m+n$의 값을 구하시오.

(단, m, n은 유리수이다.)

3. 타원의 평행이동

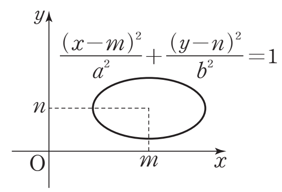
타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 타원의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

이다. 이때 타원의 초점, 꼭짓점, 중심은 다음과 같이 평행이동한다.

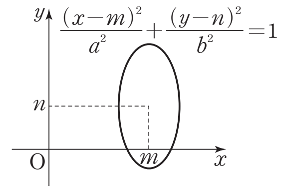
(1) $a>c>0$이고 $c^2=a^2-b^2$일 때

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 →	$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$
$(c, 0)$, $(-c, 0)$	초점	$(c+m, n)$, $(-c+m, n)$
$(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$	꼭짓점	$(a+m, n)$, $(-a+m, n)$, $(m, b+n)$, $(m, -b+n)$
$(0, 0)$	중심	(m, n)



(2) $b>c>0$이고 $c^2=b^2-a^2$일 때

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 →	$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$
$(0, c)$, $(0, -c)$	초점	$(m, c+n)$, $(m, -c+n)$
$(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$	꼭짓점	$(a+m, n)$, $(-a+m, n)$, $(m, b+n)$, $(m, -b+n)$
$(0, 0)$	중심	(m, n)



4. 타원과 직선의 위치 관계

타원과 직선의 방정식을 각각 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=mx+n$이라 할 때, $y=mx+n$을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

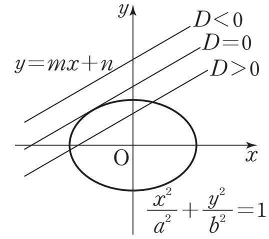
이다. 이때 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$과 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 x에 대한 이차방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

즉, x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 타원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

(1) $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0 \Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) $D<0 \Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.



예제 2 타원의 평행이동

중심이 원점이고 두 초점이 x축에 있는 타원을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 타원을 C라 하자. 타원 C의 두 초점의 x좌표의 합이 10이고, 타원 C의 중심이 직선 $y=-1$ 위에 있을 때, m^2+n^2의 값은?

① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

풀이 전략 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 타원의 두 초점의 좌표는 $(\sqrt{a^2-b^2}+m,\ n)$, $(-\sqrt{a^2-b^2}+m,\ n)$이다.

풀이 중심이 원점이고 두 초점이 x축에 있는 타원의 두 초점은 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)\ (c>0)$이라 할 수 있다.
따라서 이 타원을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 타원 C의 두 초점의 좌표는

$$(c+m,\ n),\ (-c+m,\ n)$$

이다. 이때 타원 C의 두 초점의 x좌표의 합이 10이므로

$$(c+m)+(-c+m)=10$$

$$m=5$$

한편, 타원 C의 중심 $(m,\ n)$이 직선 $y=-1$ 위에 있으므로

$$n=-1$$

따라서 $m^2+n^2=25+1=26$

답 ①

정답과 풀이 11쪽

유제 3

[21012-0020]

타원 $\frac{(x-2)^2}{49}+\frac{y^2}{45}=1$ 위의 점 P와 점 Q$(4,\ 0)$에 대하여 $\overline{\text{OP}}\times\overline{\text{PQ}}$의 최댓값을 구하시오.

(단, O는 원점이다.)

유제 4

[21012-0021]

두 초점이 O$(0,\ 0)$, F$(k,\ 0)\,(k>0)$인 타원 $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 y축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 타원 위의 점 P에 대하여 $\overline{\text{PO}}+\overline{\text{PF}}=8$이고 $\overline{\text{AB}}=6$일 때, $m+a^2+b^2$의 값은?

(단, m, a, b는 상수이다.)

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

5. 타원의 접선

(1) 기울기가 주어진 타원의 직선의 방정식

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

설명 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구해 보자.

구하는 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고, 타원의 방정식 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0$$

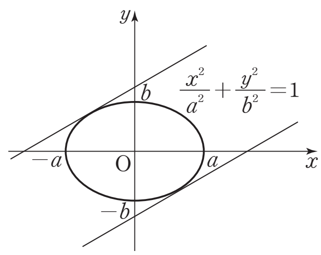
이 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=4a^2b^2(a^2m^2+b^2-n^2)=0$$

이다. 이때 $a\neq0$, $b\neq0$이므로

$a^2m^2+b^2-n^2=0$, 즉 $n^2=a^2m^2+b^2$에서 $n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

이므로 구하는 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$



(2) 타원 위의 점에서의 접선의 방정식

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

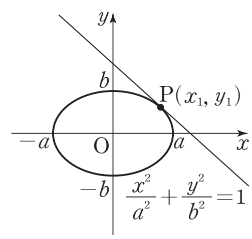
설명 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

$y_1\neq0$일 때 접선의 기울기를 m이라 하면 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 기울기가 m인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2} \quad \cdots\cdots ㉡$$



㉡의 2개의 직선 중 하나가 ㉠과 같은 직선이므로 y절편의 제곱이 같다.

즉, $(-mx_1+y_1)^2=a^2m^2+b^2$

$$(a^2-{x_1}^2)m^2+2x_1y_1m+b^2-{y_1}^2=0$$

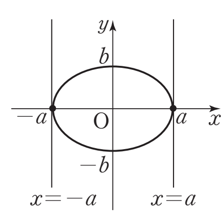
$\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}=1$에서 $a^2-{x_1}^2=\frac{a^2{y_1}^2}{b^2}$, $b^2-{y_1}^2=\frac{b^2{x_1}^2}{a^2}$이므로 대입하여 정리하면

$$\left(\frac{a}{b}y_1m+\frac{b}{a}x_1\right)^2=0, \text{ 즉 } m=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면 $y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x+\frac{b^2{x_1}^2}{a^2y_1}+y_1$이고, $\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}=1$이므로

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

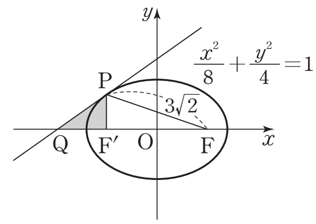
$y_1=0$일 때 $x_1=a$, $x_1=-a$이므로 이 식에 대입하면 접선의 방정식은 각각 $x=a$, $x=-a$이고, 그림과 같이 타원 위의 두 점 $(a, 0)$, $(-a, 0)$에서의 접선이 각각 $x=a$, $x=-a$이므로 $y_1=0$일 때에도 이 식은 성립한다.



예제 3 타원의 접선

그림과 같이 두 초점이 F, F$'$인 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 제2사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=3\sqrt{2}$일 때, 삼각형 PQF$'$의 넓이는?

(단, 점 F의 x좌표는 양수이다.)



① $\frac{\sqrt{2}}{3}$　② $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　③ $\sqrt{2}$　④ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

풀이 전략 타원의 정의와 타원 위의 점에서의 접선의 방정식을 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.

풀이 타원의 장축의 길이가 $2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=4\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{PF}}=3\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{2}$

타원의 두 초점을 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F'}(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=8-4=4$에서 $c=2$이므로 $\overline{\mathrm{FF'}}=4$

삼각형 PF$'$F에서 $\overline{\mathrm{PF'}}^2+\overline{\mathrm{F'F}}^2=(\sqrt{2})^2+4^2=18$, $\overline{\mathrm{PF}}^2=(3\sqrt{2})^2=18$이므로

$$\overline{\mathrm{PF'}}^2+\overline{\mathrm{F'F}}^2=\overline{\mathrm{PF}}^2$$

따라서 $\angle \mathrm{PF'F}=90^\circ$이므로 점 P의 좌표는 $(-2, \sqrt{2})$이다.

타원 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$\frac{-2x}{8}+\frac{\sqrt{2}y}{4}=1,\ \text{즉 } -\frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{4}y=1$$

이므로 $y=0$일 때, $x=-4$

점 Q의 좌표는 $(-4, 0)$이고, $\overline{\mathrm{QF'}}=-2-(-4)=2$

따라서 삼각형 PQF$'$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

답 ③

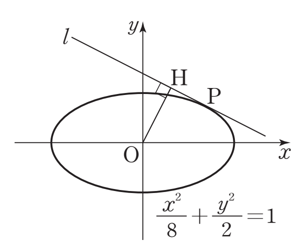
정답과 풀이 12쪽

유제 5 [21012-0022]

타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 두 직선 사이의 거리를 d라 할 때, d^2의 값을 구하시오.

유제 6 [21012-0023]

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선을 l, 원점에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 PH의 길이의 최댓값은?



① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

[21012-0024]

1 타원 $x^2-6x+10y^2=1$의 두 초점 사이의 거리는?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[21012-0025]

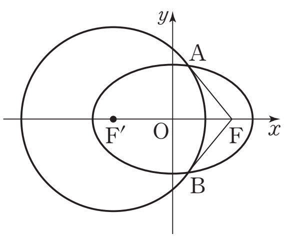
2 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(2, -1)$에서의 접선이 x축과 만나는 점의 좌표가 $(4, 0)$일 때, a^2+b^2의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[21012-0026]

3 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{23}=1$에서 점 F′을 중심으로 하고 반지름의 길이가 8인 원이 타원과 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{FA}}+\overline{\mathrm{FB}}$의 값은? (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.)



① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

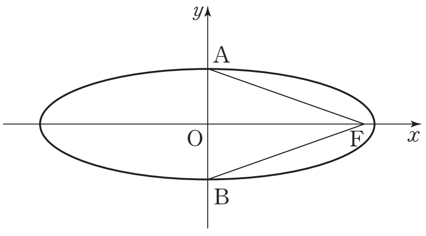
[21012-0027]

4 두 양수 a, b에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a, 0)$, $\mathrm{B}(0, b)$를 지나는 직선이 타원 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{23}=1$에 접한다. $a=3b$일 때, $a+b$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

[21012-0028]

1 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F라 하고, 타원이 y축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 ABF의 둘레의 길이는?



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

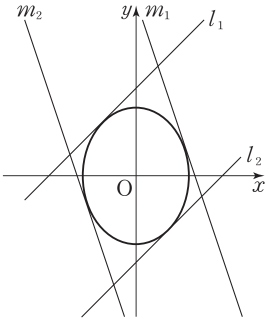
[21012-0029]

2 초점이 점 A(4, 0)이고 준선이 y축인 포물선 C_1과 두 초점이 원점과 점 A인 타원 C_2가 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하자. $\overline{\text{PA}}=5$일 때, 타원 C_2의 장축의 길이는?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

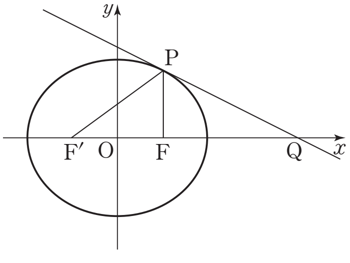
[21012-0030]

3 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{5}=1$에 접하고 기울기가 1인 두 직선을 각각 l_1, l_2라 하고, 이 타원에 접하고 기울기가 -3인 두 직선을 각각 m_1, m_2라 하자. 네 직선 l_1, l_2, m_1, m_2로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.



[21012-0031]

4 그림과 같이 두 초점이 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P(2, 3)에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 삼각형 PF′F의 넓이를 S_1, 삼각형 PFQ의 넓이를 S_2라 할 때, $S_1 : S_2=2 : 3$이다. c가 자연수일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)



[21012-0032]

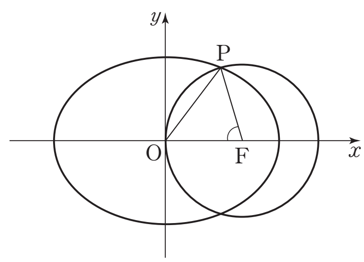
1 타원 $3x^2+y^2-2y-11=0$의 네 꼭짓점과 중심 중에서 3개의 점을 택하려고 한다. 택한 세 점을 지나는 원이 존재할 때, 이 원의 넓이의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은?

① 4π　② 6π　③ 8π　④ 10π　⑤ 12π

[21012-0033]

2 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F라 하고, 점 F를 중심으로 하고 원점 O를 지나는 원이 타원과 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{6}$, $\cos(\angle\mathrm{OFP})=\frac{1}{4}$일 때, a^2+b^2의 값은?

(단, a, b는 $a>b>0$인 상수이다.)



① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

[21012-0034]

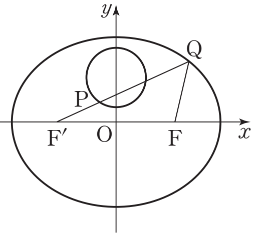
3 $0<t<9$인 실수 t에 대하여 초점 중 한 점이 원점인 타원 C가 직선 $y=t$와 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 점을 각각 P, Q라 할 때, 두 점 P, Q는 항상 y축에 대하여 대칭이고 선분 PQ의 길이는 $t=4$에서 최댓값 6을 갖는다. $t=8$일 때, 타원 C 위의 점 P에서의 접선과 타원 C 위의 점 Q에서의 접선이 만나는 점의 y좌표는?

① $\frac{41}{4}$　② $\frac{83}{8}$　③ $\frac{21}{2}$　④ $\frac{85}{8}$　⑤ $\frac{43}{4}$

대표 기출 문제

출제 경향 타원의 정의를 이용하여 주어진 도형의 둘레의 길이, 넓이, 점의 좌표 등을 구하는 문제가 출제된다. 이때 원의 성질을 활용하는 문제가 출제된다.

두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{33}=1$이 있다. 원 $x^2+(y-3)^2=4$ 위의 점 P에 대하여 직선 F′P가 이 타원과 만나는 점 중 y좌표가 양수인 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}$의 최댓값을 구하시오. [4점]



2019학년도 대수능

출제 의도 타원의 정의와 원의 성질을 이용하여 두 선분의 길이의 합의 최댓값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 타원의 정의에 의하여

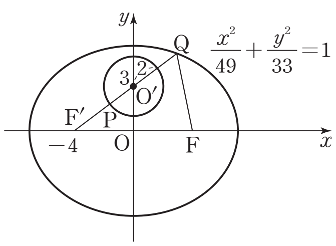
$$\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}=2\times7=14$$

이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}=14-\overline{\mathrm{F'P}}$ …… ㉠

그러므로 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}$가 최대가 되려면 $\overline{\mathrm{F'P}}$가 최소가 되어야 한다.

원 $x^2+(y-3)^2=4$의 중심을 O′이라 하면 O′(0, 3)이고, F′(−4, 0)이다.

선분 F′P의 길이가 최소가 되도록 하는 점 P의 위치는 그림과 같이 원과 선분 F′O′이 만나는 점이다.



따라서 $\overline{\mathrm{F'P}}\ge\overline{\mathrm{F'O'}}-2=\sqrt{4^2+3^2}-2=3$이므로 ㉠에서

$$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}=14-\overline{\mathrm{F'P}}\le14-3=11$$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}$의 최댓값은 11이다.

답 11

대표 기출 문제

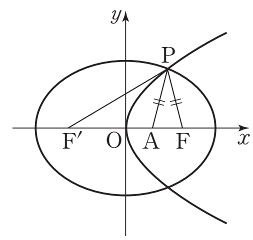
출제 경향 타원의 정의를 이용하여 도형의 방정식, 길이 등을 구하는 문제가 출제된다. 이때 이차곡선의 성질을 활용하는 문제가 출제된다.

좌표평면에서 초점이 $\mathrm{A}(a,\ 0)(a>0)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선과 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)(c>a)$인 타원의 교점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하자.

$\overline{\mathrm{AF}}=2$, $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PF}}$, $\overline{\mathrm{FF'}}=\overline{\mathrm{PF'}}$

일 때, 타원의 장축의 길이는 $p+q\sqrt{7}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오.

(단, p, q는 유리수이다.) [4점]



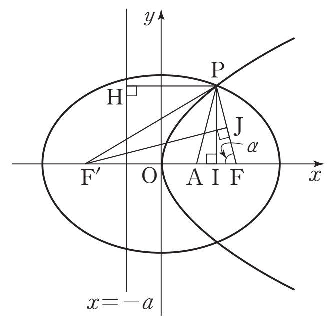
2018학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 포물선의 정의와 타원의 성질을 이용하여 타원의 장축의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $\overline{\mathrm{AF}}=2$, $\mathrm{A}(a,\ 0)$이고 삼각형 PAF가 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PF}}$인 이등변삼각형이므로 점 P의 x좌표는 $a+1$이다.

한편, 점 P에서 포물선의 준선 $x=-a$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PH}}=(a+1)-(-a)=2a+1$$



이때 이등변삼각형 PAF의 꼭짓점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 I라 하고 $\angle\mathrm{PFI}=\alpha$라 하면

$$\cos\alpha=\frac{\overline{\mathrm{IF}}}{\overline{\mathrm{PF}}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AF}}}{\overline{\mathrm{PF}}}=\frac{1}{2a+1} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

또 이등변삼각형 PF′F의 꼭짓점 F′에서 변 FP에 내린 수선의 발을 J라 하면 $\mathrm{F}(a+2,\ 0)$이므로

$$\cos\alpha=\frac{\overline{\mathrm{FJ}}}{\overline{\mathrm{FF'}}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{FF'}}}=\frac{a+\frac{1}{2}}{2a+4}=\frac{2a+1}{4a+8} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$$\frac{1}{2a+1}=\frac{2a+1}{4a+8},\ (2a+1)^2=4a+8,\ 4a^2+4a+1=4a+8,\ a^2=\frac{7}{4}$$

$a>0$이므로 $a=\frac{\sqrt{7}}{2}$

타원의 장축의 길이는

$$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{FF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=(2a+4)+(2a+1)=4a+5=4\times\frac{\sqrt{7}}{2}+5=5+2\sqrt{7}$$

이므로 $p=5$, $q=2$

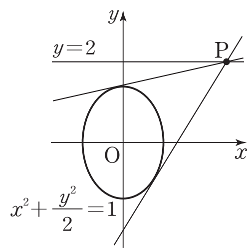
따라서 $p^2+q^2=5^2+2^2=29$

답 29

대표 기출 문제

출제 경향 기울기가 주어진 타원의 접선의 방정식을 이용하여 도형의 넓이, 점의 좌표 등을 구하는 문제가 출제된다.

직선 $y=2$ 위의 점 P에서 타원 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$에 그은 두 접선의 기울기의 곱이 $\frac{1}{3}$이다. 점 P의 x좌표를 k라 할 때, k^2의 값은? [4점]



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2014학년도 대수능 6월 모의평가

출제 의도 기울기가 주어진 타원의 접선의 방정식을 이용하여 점의 좌표를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 기울기가 m인 타원 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$의 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{m^2+2}$$

이 접선이 점 $\mathrm{P}(k,\ 2)$를 지나므로

$$2=mk\pm\sqrt{m^2+2}$$

$$2-mk=\pm\sqrt{m^2+2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$(k^2-1)m^2-4km+2=0$$

이 m에 대한 이차방정식의 두 근을 m_1, m_2라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$m_1\times m_2=\frac{2}{k^2-1}$$

이때 두 접선의 기울기의 곱이 $\frac{1}{3}$이므로

$$\frac{2}{k^2-1}=\frac{1}{3}$$

따라서 $k^2=7$

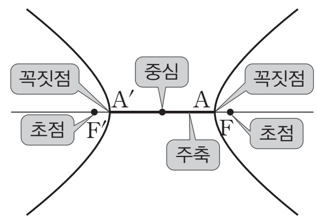
답 ②

03 쌍곡선

1. 쌍곡선의 뜻

(1) 평면 위의 서로 다른 두 점 F, F′으로부터의 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 쌍곡선이라 한다.

(2) 두 점 F, F′을 쌍곡선의 초점이라 한다. 두 초점을 잇는 직선이 쌍곡선과 만나는 점을 각각 A, A′이라 할 때, 두 점 A, A′을 쌍곡선의 꼭짓점이라 하고, 선분 AA′을 쌍곡선의 주축이라 하며, 주축의 중점을 쌍곡선의 중심이라 한다.



2 쌍곡선의 방정식

(1) 초점이 x축 위에 있는 쌍곡선의 방정식

두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선의 방정식은

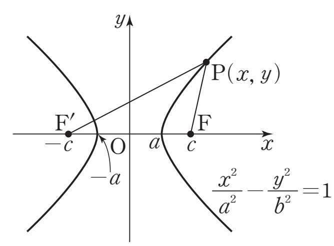
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (\text{단, } c>a>0,\ b^2=c^2-a^2)$$

① 쌍곡선의 초점: $\mathrm{F}(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$, $\mathrm{F'}(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$

② 꼭짓점: $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$

③ 주축의 길이: $2a$

④ 중심: $(0,\ 0)$



(2) 초점이 y축 위에 있는 쌍곡선의 방정식

두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F'}(0,\ -c)$로부터의 거리의 차가 $2b$인 쌍곡선의 방정식은

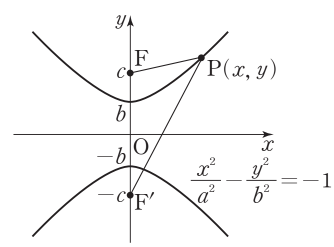
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\ (\text{단, } c>b>0,\ a^2=c^2-b^2)$$

① 쌍곡선의 초점: $\mathrm{F}(0,\ \sqrt{a^2+b^2})$, $\mathrm{F'}(0,\ -\sqrt{a^2+b^2})$

② 꼭짓점: $(0,\ b)$, $(0,\ -b)$

③ 주축의 길이: $2b$

④ 중심: $(0,\ 0)$



설명 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$으로부터 거리의 차가 $2a\ (c>a>0)$인 쌍곡선의 방정식을 구해 보자.

쌍곡선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

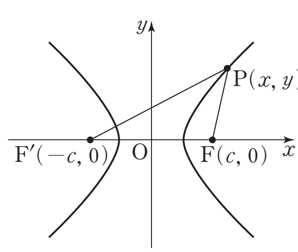
$$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\ \overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

이고, 쌍곡선의 정의에 의하여 $|\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}|=2a$이므로

$$|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}|=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a$$



이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

이고, 다시 양변을 제곱하여 정리하면 $(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$

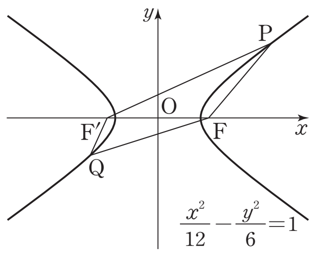
$c>a>0$이므로 $c^2-a^2=b^2$으로 놓으면 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

이고, 이 식의 양변을 a^2b^2으로 나누면 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

예제 1 쌍곡선의 정의

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{6}=1$ 위의 두 점 P, Q와 두 초점 F, F′에 대하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{QF'}}+\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{PF}}$의 값은?

(단, 점 P는 제1사분면, 점 Q는 제3사분면에 있고 점 F의 x좌표는 양수이다.)



① $5\sqrt{3}$ ② $6\sqrt{3}$ ③ $7\sqrt{3}$
④ $8\sqrt{3}$ ⑤ $9\sqrt{3}$

풀이 전략 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}$, $\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QF'}}$의 값을 각각 구한다.

풀이 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{6}=1$에서 주축의 길이가 $2\sqrt{12}=4\sqrt{3}$이므로

$$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=4\sqrt{3},\ \overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QF'}}=4\sqrt{3}$$

따라서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{QF'}}+\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{PF}}&=(\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}})+(\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QF'}})\\&=4\sqrt{3}+4\sqrt{3}\\&=8\sqrt{3}\end{aligned}$$

답 ④

정답과 풀이 17쪽

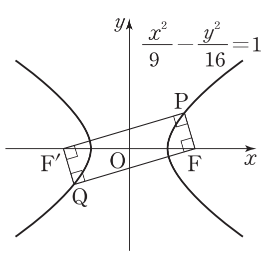
[21012-0035]

유제 1 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}=3$일 때, 삼각형 PF′F의 둘레의 길이를 구하시오. (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.)

[21012-0036]

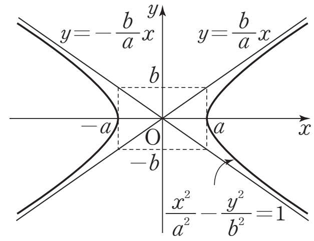
유제 2 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q라 하자. 사각형 PF′QF가 직사각형일 때, 이 직사각형의 둘레의 길이는?

(단, 점 F의 x좌표는 양수이다.)



① $4\sqrt{37}$ ② $4\sqrt{38}$ ③ $4\sqrt{39}$
④ $8\sqrt{10}$ ⑤ $4\sqrt{41}$

3. 쌍곡선의 점근선



곡선 위의 점이 한없이 가까워지는 직선을 점근선이라 한다.

(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$

(2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선의 방정식은 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$

4. 쌍곡선의 평행이동

(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

이다. 이때 쌍곡선의 초점, 점근선, 꼭짓점은 다음과 같이 평행이동한다.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 →	$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$
$(c, 0)$, $(-c, 0)$	초점	$(c+m, n)$, $(-c+m, n)$
$y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$	점근선	$y-n=\frac{b}{a}(x-m)$, $y-n=-\frac{b}{a}(x-m)$
$(a, 0)$, $(-a, 0)$	꼭짓점	$(a+m, n)$, $(-a+m, n)$

(2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 쌍곡선의 방정식은 $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=-1$이고, 마찬가지 방법으로 초점, 점근선, 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.

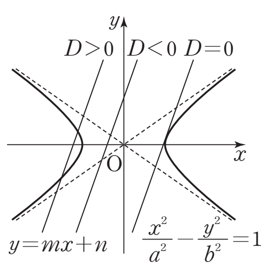
5. 쌍곡선과 직선의 위치 관계

쌍곡선과 직선의 방정식을 각각 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=mx+n$ $(m\neq 0)$이라 할 때, $y=mx+n$을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

$$(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2mnx-a^2(n^2+b^2)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이다. 이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 x에 대한 이차방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

즉, x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 쌍곡선과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.



(1) $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0 \Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) $D<0 \Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.

예제 2 쌍곡선의 평행이동과 점근선

두 초점이 $\mathrm{F}(1,\ 7)$, $\mathrm{F}'(1,\ -3)$이고 한 점근선의 기울기가 -2인 쌍곡선의 주축의 길이는?

① $2\sqrt{5}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{5}$ ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

풀이 전략 쌍곡선의 중심을 찾고, 이 중심이 원점이 되도록 평행이동한 쌍곡선의 방정식을 구한다.

풀이 쌍곡선의 두 초점이 $\mathrm{F}(1,\ 7)$, $\mathrm{F}'(1,\ -3)$이므로 쌍곡선의 중심은 점 $\left(\frac{1+1}{2},\ \frac{7+(-3)}{2}\right)$, 즉 점 $(1,\ 2)$이다.

이 쌍곡선을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 쌍곡선의 방정식은

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ $(a>0,\ b>0)$으로 놓을 수 있다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 한 점근선의 방정식은 $y=-\frac{b}{a}x$이고, 이 점근선의 기울기는 평행이동하기 전의 쌍곡선의 한 점근선의 기울기인 -2와 같으므로 $-\frac{b}{a}=-2$ …… ㉠

또 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 두 초점의 좌표는 각각 $(1-1,\ 7-2)$, $(1-1,\ -3-2)$, 즉 $(0,\ 5)$, $(0,\ -5)$이므로

$a^2+b^2=25$ …… ㉡

㉠에서 $b=2a$를 ㉡에 대입하면 $a^2+(2a)^2=25$에서 $a=\sqrt{5}$, $b=2\sqrt{5}$

쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=-1$과 평행이동하기 전의 쌍곡선의 주축의 길이는 같으므로 구하는 쌍곡선의 주축의 길이는

$2\times2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

답 ⑤

정답과 풀이 17쪽

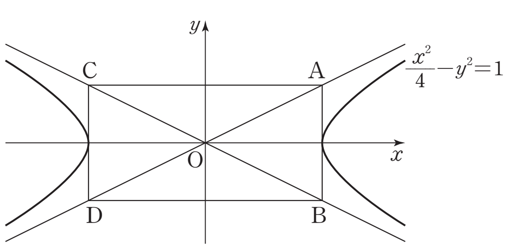
[21012-0037]

유제 3 쌍곡선 $x^2-y^2+4y=0$의 두 점근선과 직선 $x=1$로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[21012-0038]

유제 4 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$의 두 꼭짓점을 각각 지나고 y축에 평행한 두 직선이 쌍곡선의 점근선과 만나는 점을 각각 A, B, C, D라 하자. 사각형 ACDB의 둘레의 길이는? (단, 두 점 A, B의 x좌표와 두 점 A, C의 y좌표는 모두 양수이다.)



① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

6. 쌍곡선의 접선의 방정식

(1) 기울기가 주어진 쌍곡선의 접선의 방정식

① 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}\ (\text{단, } a^2m^2-b^2>0)$$

② 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{b^2-a^2m^2}\ (\text{단, } b^2-a^2m^2>0)$$

설명 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구해 보자.

구하는 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고, 쌍곡선의 방정식 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

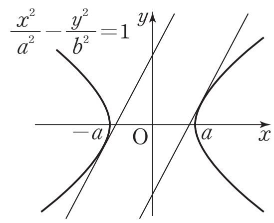
$$(a^2m^2-b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2+b^2)=0$$

이 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=4a^2b^2(-a^2m^2+n^2+b^2)=0$$

이때 $a\neq0$, $b\neq0$이므로 $n^2=a^2m^2-b^2$에서 $a^2m^2-b^2>0$이면

$n=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$이므로 구하는 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$이다.



(2) 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

① 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

② 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=-1$

설명 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

$y_1\neq0$일 때 접선의 기울기를 $m\ (m\neq0)$이라 하면 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 기울기가 m인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 2개의 직선 중 하나가 ㉠과 같은 직선이므로 y절편의 제곱이 같다.

즉, $(-mx_1+y_1)^2=a^2m^2-b^2$

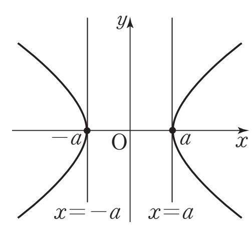
$$(a^2-{x_1}^2)m^2+2x_1y_1m-(b^2+{y_1}^2)=0 \quad \cdots\cdots ㉢$$

$\dfrac{{x_1}^2}{a^2}-\dfrac{{y_1}^2}{b^2}=1$에서 ${x_1}^2-a^2=\dfrac{a^2{y_1}^2}{b^2}$, $b^2+{y_1}^2=\dfrac{b^2{x_1}^2}{a^2}$이므로 ㉢에 대입하면 $\left(\dfrac{a}{b}y_1m-\dfrac{b}{a}x_1\right)^2=0$, 즉 $m=\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면 $y=\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}x-\dfrac{b^2{x_1}^2}{a^2y_1}+y_1$이고, $\dfrac{{x_1}^2}{a^2}-\dfrac{{y_1}^2}{b^2}=1$이므로

$$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$$

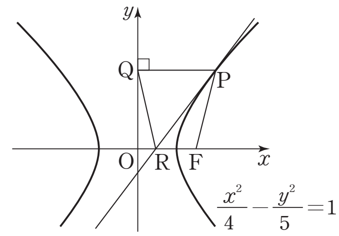
$y_1=0$일 때 $x_1=a$, $x_1=-a$이므로 이 식에 대입하면 접선의 방정식은 각각 $x=a$, $x=-a$이고, 그림과 같이 쌍곡선 위의 두 점 $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$에서의 접선이 각각 $x=a$, $x=-a$이므로 $y_1=0$일 때에도 이 식은 성립한다.



예제 3 쌍곡선의 접선

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서 y축에 내린 수선의 발을 Q, 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 R라 하자. 쌍곡선의 한 초점 $\mathrm{F}(c, 0)(c>0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{QR}}$일 때, 사다리꼴 PQRF의 넓이는?

(단, $x_1>c$, $y_1>0$)



① $2\sqrt{15}$　② $3\sqrt{10}$　③ $3\sqrt{15}$　④ $4\sqrt{10}$　⑤ $4\sqrt{15}$

풀이 전략 쌍곡선 위의 점 P에서의 접선의 방정식으로부터 점 R의 좌표를 구한다.

풀이 점 $\mathrm{F}(c, 0)$이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$의 초점이므로 $c^2=4+5=9$에서

$c=3\ (c>0)$

쌍곡선 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{4}-\frac{y_1y}{5}=1$이고

$y=0$일 때 $x=\frac{4}{x_1}$이므로 점 R의 좌표는 $\left(\frac{4}{x_1}, 0\right)$이다.

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{OR}}=\overline{\mathrm{FH}}$이므로

$\frac{4}{x_1}=x_1-3$, $x_1^2-3x_1-4=0$, $(x_1+1)(x_1-4)=0$

이때 $x_1>3$이므로 $x_1=4$

$\frac{x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{5}=1$이므로 $x_1=4$를 대입하면 $y_1^2=15$

이때 $y_1>0$이므로 $y_1=\sqrt{15}$

$\overline{\mathrm{PQ}}=x_1=4$, $\overline{\mathrm{RF}}=3-\frac{4}{x_1}=2$

따라서 사다리꼴 PQRF의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(4+2)\times\sqrt{15}=3\sqrt{15}$

답 ③

정답과 풀이 18쪽

유제 5

[21012-0039]

쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$에 접하고 기울기가 1인 두 직선 사이의 거리는?

① 2　② $2\sqrt{2}$　③ 3　④ $2\sqrt{3}$　⑤ 4

유제 6

[21012-0040]

쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선이 쌍곡선의 두 점근선과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.

[21012-0041]

1 쌍곡선 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=-1$의 두 초점 사이의 거리를 p라 하고, 주축의 길이를 q라 할 때, $p+q$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

[21012-0042]

2 두 직선 $y=3x+k$, $y=3x-k$가 모두 쌍곡선 $\frac{x^2}{23}-\frac{y^2}{11}=1$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

[21012-0043]

3 쌍곡선 $\frac{x^2}{35}-\frac{y^2}{10}=1$ 위의 점 $(7, 2)$에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

[21012-0044]

4 직선 $y=2x+5$가 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{8}=1$을 y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 쌍곡선의 점근선일 때, a^2+m의 값은? (단, a는 양수이다.)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

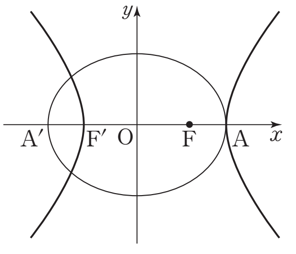
[21012-0045]

1 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=-1$의 점근선 중 기울기가 양수인 것과 평행한 직선 l이 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{8}=1$에 접한다. 직선 l의 y절편이 양수일 때, 점 $(0, 1)$과 직선 l 사이의 거리는?

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

[21012-0046]

2 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하고, 이 타원의 네 꼭짓점 중 x축 위의 두 점을 각각 A, A′이라 하자. 두 점 F′, A가 꼭짓점이고, 점 A′이 한 초점인 쌍곡선의 방정식이 $\frac{(x+k)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$일 때, $k\times(a^2-b^2)$의 값을 구하시오. (단, 두 점 A, F의 x좌표는 모두 양수이고 a, b, k는 상수이다.)



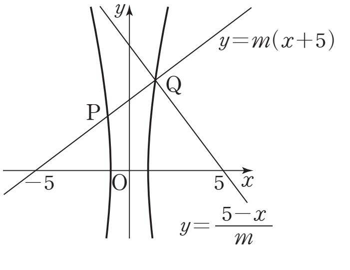
[21012-0047]

3 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F'}(-c, 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(2, k)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하고, 쌍곡선의 꼭짓점 중 x좌표가 음수인 점을 A라 하자. 세 수 $\overline{\mathrm{F'A}}$, $\overline{\mathrm{AQ}}$, $\overline{\mathrm{QF}}$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, c의 값은? (단, b는 상수이다.)

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ 2 ⑤ $\frac{9}{4}$

[21012-0048]

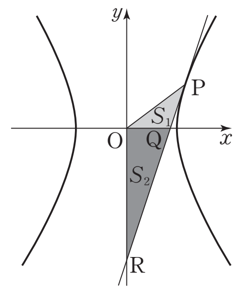
4 그림과 같이 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{24}=1$과 직선 $y=m(x+5)$가 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. 점 Q가 직선 $y=\frac{5-x}{m}$ 위의 점일 때, 점 $(5, 0)$과 점 P 사이의 거리는? (단, m은 $0<m<2$인 상수이고, 점 P는 제2사분면에 있고 점 Q는 제1사분면에 있다.)



① $\frac{31}{5}$ ② $\frac{32}{5}$ ③ $\frac{33}{5}$
④ $\frac{34}{5}$ ⑤ 7

[21012-0049]

1 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 제1사분면에 있는 x좌표가 4인 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, y축과 만나는 점을 R라 할 때, 삼각형 POQ의 넓이를 S_1, 삼각형 QOR의 넓이를 S_2라 하자. $S_1 : S_2=1 : 3$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, O는 원점이고, a, b는 상수이다.)

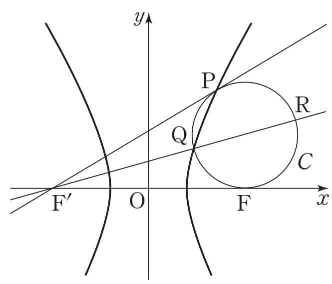


① 6　② $2\sqrt{10}$　③ $2\sqrt{11}$
④ $4\sqrt{3}$　⑤ $2\sqrt{13}$

[21012-0050]

2 그림과 같이 두 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 직선 F$'$P와 점 P에서 접하고 x축과 점 F에서 접하는 원을 C라 하자. 원 C가 쌍곡선과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하고, 직선 F$'$Q가 원 C와 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R라 하자. $\overline{\mathrm{F'Q}}\times\overline{\mathrm{F'R}}=64$이고, 점 P의 x좌표가 3일 때, a^2-b^2의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)



① -8　② -4　③ 0
④ 4　⑤ 8

[21012-0051]

3 두 초점 F, F$'$이 y축에 대하여 대칭이고, 직선 $y=4\sqrt{5}x$가 한 점근선인 쌍곡선이 포물선 $y^2=40a(x+a)$와 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 A라 하자. 점 A가 다음 조건을 만족시킬 때, 선분 AF의 길이를 구하시오.

(단, a는 양수이다.)

(가) $\overline{\mathrm{AF'}}-\overline{\mathrm{AF}}=2a$
(나) 점 A의 x좌표는 점 F의 x좌표보다 작다.
(다) 삼각형 AF$'$F의 넓이는 360이다.

대표 기출 문제

출제 경향 쌍곡선의 정의를 이용하여 쌍곡선의 방정식, 주어진 도형의 넓이, 둘레의 길이 등을 구하는 문제가 출제된다. 이때 이차곡선의 성질을 활용하는 문제가 출제된다.

평면에 한 변의 길이가 10인 정삼각형 ABC가 있다. $\overline{PB}-\overline{PC}=2$를 만족시키는 점 P에 대하여 선분 PA의 길이가 최소일 때, 삼각형 PBC의 넓이는? [4점]

① $20\sqrt{3}$ ② $21\sqrt{3}$ ③ $22\sqrt{3}$ ④ $23\sqrt{3}$ ⑤ $24\sqrt{3}$

2020학년도 대수능

출제 의도 쌍곡선의 정의를 이용하여 선분의 길이가 최소일 때, 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 선분 BC의 중점이 원점 O가 되고, 직선 BC가 x축, 직선 OA가 y축이 되도록 세 점 A, B, C를 좌표평면에 놓으면 $A(0,\ 5\sqrt{3})$, $B(-5,\ 0)$, $C(5,\ 0)$이라 할 수 있다.

$\overline{PB}-\overline{PC}=2$를 만족시키는 점 P는 두 점 $B(-5,\ 0)$, $C(5,\ 0)$이 초점이고, 주축의 길이가 2인 쌍곡선 위의 점이다.

이 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이라 하면

$2a=2,\ a=1$

$b^2=25-a^2=24$

즉, 쌍곡선의 방정식은 $x^2-\dfrac{y^2}{24}=1$이다.

점 P의 좌표를 $(p,\ q)$라 하면 $p^2-\dfrac{q^2}{24}=1$이므로

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2&=p^2+(q-5\sqrt{3})^2\\&=1+\frac{q^2}{24}+(q-5\sqrt{3})^2\\&=\frac{25}{24}\left(q-\frac{24\sqrt{3}}{5}\right)^2+4\end{aligned}$$

따라서 $q=\dfrac{24\sqrt{3}}{5}$일 때 선분 PA의 길이가 최소이므로 삼각형 PBC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times10\times\dfrac{24\sqrt{3}}{5}=24\sqrt{3}$

답 ⑤

대표 기출 문제

출제 경향 쌍곡선의 점근선을 이용하여 쌍곡선의 방정식을 구하는 문제가 출제된다. 이때 원의 성질을 활용하는 문제가 출제된다.

점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{4}{3}x$이고 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)(c>0)$인 쌍곡선이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF'}}=30$, $16\le\overline{\mathrm{PF}}\le20$이다.
(나) x좌표가 양수인 꼭짓점 A에 대하여 선분 AF의 길이는 자연수이다.

이 쌍곡선의 주축의 길이를 구하시오. [4점]

2017학년도 대수능

출제 의도 쌍곡선의 점근선을 이용하여 조건을 만족시키는 쌍곡선의 주축의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$이라 하면 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{b}{a}x$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$, $b=\frac{4}{3}a$

조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{PF'}}>\overline{\mathrm{PF}}$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2a$

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PF'}}-2a=30-2a$

이때 $16\le\overline{\mathrm{PF}}\le20$이므로

$16\le30-2a\le20$

$5\le a\le7$ ...... ㉠

점 A의 좌표는 $(a,\ 0)$이고, 점 F의 x좌표 c는

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+\frac{16}{9}a^2}=\frac{5}{3}a$

이므로 원점 O에 대하여

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{OF}}-\overline{\mathrm{OA}}=\frac{5}{3}a-a=\frac{2}{3}a$

조건 (나)에서 선분 AF의 길이인 $\frac{2}{3}a$가 자연수이므로

㉠에서 $a=6$

따라서 구하는 쌍곡선의 주축의 길이는

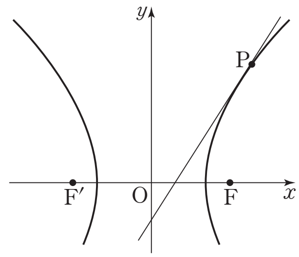
$2a=2\times6=12$

답 12

대표 기출 문제

출제 경향 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식 또는 기울기가 주어진 쌍곡선의 접선의 방정식을 이용하여 주어진 도형의 둘레의 길이, 넓이, 각의 크기, 점의 좌표 등을 구하는 문제가 출제된다.

그림과 같이 두 초점이 F$(3,\ 0)$, F$'(-3,\ 0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P$(4,\ k)$에서의 접선과 x축과의 교점이 선분 F$'$F를 $2:1$로 내분할 때, k^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]



2014학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 이용하여 점의 좌표를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 F$(3,\ 0)$, F$'(-3,\ 0)$이므로

$a^2+b^2=9$ ...... ㉠

또 쌍곡선 위의 점 P$(4,\ k)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=1$$

이 직선이 x축과 만나는 점의 좌표는 $\left(\frac{a^2}{4},\ 0\right)$

한편, 선분 F$'$F를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(1,\ 0)$이므로

$$\frac{a^2}{4}=1,\ a^2=4$$

㉠에 $a^2=4$를 대입하면 $b^2=5$

즉, 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$이다.

점 P$(4,\ k)$가 쌍곡선 위의 점이므로

$$4-\frac{k^2}{5}=1$$

따라서 $k^2=15$

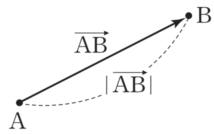
답 15

04 벡터의 연산

1. 벡터의 뜻

(1) 크기와 방향을 모두 가지는 양을 벡터라 하고, 특히 평면 위의 벡터를 평면벡터라 한다.

(2) 그림과 같이 방향이 주어진 선분을 이용하여 벡터를 나타낸다. 점 A에서 점 B로 향하는 방향과 크기가 주어진 선분 AB를 벡터 AB라 하고, 기호 $\overrightarrow{AB}$로 나타낸다.
이때 점 A를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 시점, 점 B를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 종점이라 한다.



(3) 선분 AB의 길이를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기라 하고, 기호 $|\overrightarrow{AB}|$로 나타낸다.

(4) 크기가 1인 벡터를 단위벡터라 한다.

(5) 벡터 $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$와 같이 시점과 종점이 일치하는 벡터를 영벡터라 하고, 이것을 기호

$$\vec{0}$$

로 나타낸다.
이때 영벡터의 크기는 0이고, 그 방향은 생각하지 않는다.

(6) 벡터를 한 문자로 나타낼 때에는 기호

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \cdots$$

로 나타내고, 벡터 $\vec{a}$의 크기는 기호

$$|\vec{a}|$$

로 나타낸다.

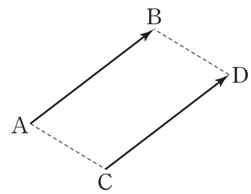
2. 서로 같은 벡터

(1) 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 시점의 위치가 달라도 그 크기와 방향이 같을 때, 두 벡터는 서로 같다고 하고, 기호

$$\vec{a}=\vec{b}$$

로 나타낸다.

(2) 시점과 종점이 주어진 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 평행이동하여 벡터 $\overrightarrow{CD}$와 겹칠 수 있으면 두 벡터는 크기와 방향이 같으므로 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$이다.



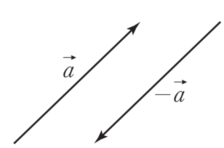
3. 크기가 같고, 방향이 반대인 벡터

(1) 벡터 $\vec{a}$와 크기가 같고 방향이 반대인 벡터를 기호

$$-\vec{a}$$

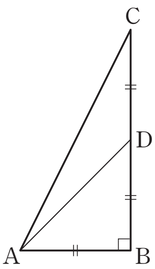
로 나타낸다.

(2) $|-\vec{a}|=|\vec{a}|$가 성립한다.



예제 1 벡터의 크기

그림과 같이 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 D라 할 때, $\overline{AB}=\overline{BD}$, $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{6}$이다. $|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}|$의 값은?



① $3\sqrt{2}$　② $2\sqrt{6}$　③ $3\sqrt{3}$
④ $3\sqrt{5}$　⑤ $4\sqrt{3}$

풀이 전략 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기 $|\overrightarrow{AB}|$는 선분 AB의 길이이므로 직각삼각형에서 각 변의 길이를 구해 본다.

풀이 $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{6}$에서 직각이등변삼각형 ABD의 빗변 AD의 길이가 $\sqrt{6}$이다.
$|\overrightarrow{AB}|=x$라 하면 $\overline{AB}=\overline{BD}$이므로

$$x^2+x^2=(\sqrt{6})^2,\ 2x^2=6,\ x^2=3$$

즉, $x=\sqrt{3}$
그러므로 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}$
직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\sqrt{3}$, $\overline{BC}=2\overline{BD}=2\sqrt{3}$이므로

$$\overline{AC}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{3+12}=\sqrt{15}$$

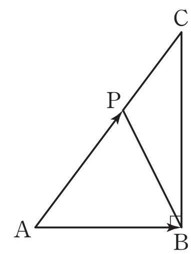
그러므로 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{15}$
따라서 $|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}\times\sqrt{15}=3\sqrt{5}$

답 ④

정답과 풀이 23쪽

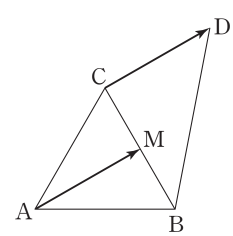
유제 1 [21012-0052]

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$이고 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC의 변 CA 위의 점 P에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP}$의 크기가 서로 같다. 삼각형 ABP의 넓이를 S라 할 때, $10S$의 값을 구하시오.



유제 2 [21012-0053]

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 변 BC의 중점을 M이라 하자. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CD}$가 되도록 점 D를 잡을 때, 삼각형 DCB의 넓이는?



① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$
④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

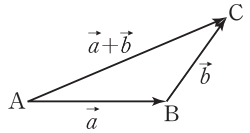
4. 벡터의 덧셈

(1) 벡터의 덧셈

① 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$일 때, 벡터 $\overrightarrow{AC}$로 나타나는 벡터 $\vec{c}$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합이라 하며, 기호

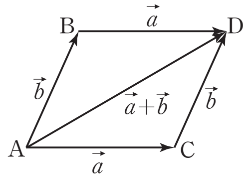
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \text{ 또는 } \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

로 나타낸다.



② 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$에 대하여 그림과 같이 사각형 ACDB가 평행사변형이 되도록 점 D를 잡으면 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$이므로 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$이다.

즉, 두 벡터의 합 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$는 $\overrightarrow{AD}$이다.



참고 두 벡터의 합은 한 벡터의 시점을 다른 벡터의 종점과 일치시키거나 두 벡터의 시점을 일치시켜 구한다.

(2) 벡터의 덧셈에 대한 성질

임의의 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 영벡터 $\vec{0}$에 대하여

① $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (교환법칙)

② $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (결합법칙)

③ $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

④ $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$

5. 벡터의 뺄셈

(1) 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$를 만족시키는 벡터 $\vec{x}$를 $\vec{a}$에서 $\vec{b}$를 뺀 차라 하고, 이것을 기호

$$\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$$

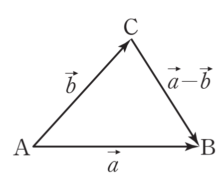
로 나타낸다.

(2) 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$일 때,

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$이므로 $\vec{b}+\overrightarrow{CB}=\vec{a}$에서

$$\overrightarrow{CB}=\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$

즉, 벡터 $\overrightarrow{CB}$는 벡터 $\vec{a}$에서 $\vec{b}$를 뺀 차 $\vec{a}-\vec{b}$이다.

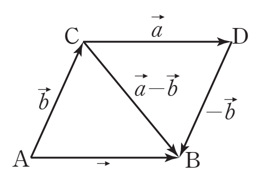


(3) 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$에 대하여 그림과 같이 사각형 ABDC가 평행사변형이 되도록 점 D를 잡으면

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

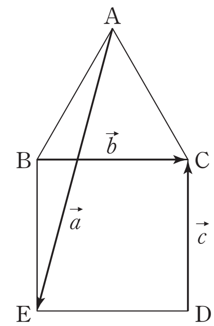
이다.

따라서 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 차는 $\vec{a}$와 $-\vec{b}$의 합과 같다.



예제 2 벡터의 덧셈

평면에 그림과 같이 정삼각형 ABC와 정사각형 BEDC가 있다. $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\vec{c}$라 할 때, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$의 크기가 2이다. 삼각형 ABC의 넓이는?



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

풀이 전략 벡터의 덧셈에 대한 정의와 성질을 이용한다.

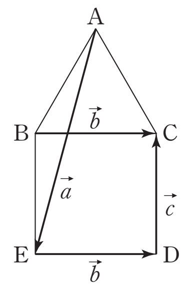
풀이

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}&=(\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})+\overrightarrow{\mathrm{DC}}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{ED}})+\overrightarrow{\mathrm{DC}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

이때 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$의 크기가 2이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\overline{\mathrm{AC}}=2$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\sqrt{3}$

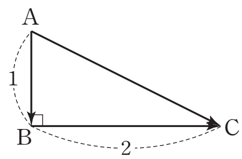


답 ③

정답과 풀이 23쪽

[21012-0054]

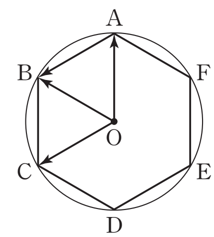
유제 3 그림과 같이 $\angle\mathrm{B}=90^\circ$, $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{BC}}=2$인 직각삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$라 할 때, $|\vec{a}+\vec{b}|$의 값은?



① 0 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

[21012-0055]

유제 4 그림과 같이 중심이 O인 원에 내접하는 정육각형 ABCDEF에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{15}$일 때, 이 원의 넓이는?



① 3π ② 4π ③ 5π
④ 6π ⑤ 7π

6. 벡터의 실수배

(1) 임의의 실수 k와 벡터 $\vec{a}$의 곱 $k\vec{a}$를 벡터 $\vec{a}$의 실수배라 한다.

(2) 실수 k에 대하여

① $\vec{a}\neq\vec{0}$일 때, $k\vec{a}$는

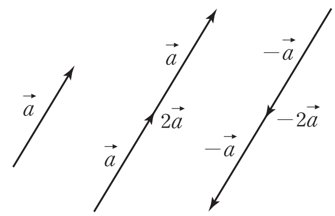
(i) $k>0$이면 $\vec{a}$와 방향이 같고, 크기가 $k|\vec{a}|$인 벡터이다.

(ii) $k<0$이면 $\vec{a}$와 방향이 반대이고, 크기가 $|k||\vec{a}|$인 벡터이다.

(iii) $k=0$이면 $\vec{0}$이다.

② $\vec{a}=\vec{0}$일 때, $k\vec{a}=\vec{0}$이다.

설명 영벡터가 아닌 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 벡터의 합 $\vec{a}+\vec{a}$는 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같고, 크기가 2배인 벡터이다. 이것을 $2\vec{a}$로 나타낸다. 또 $(-\vec{a})+(-\vec{a})$는 벡터 $\vec{a}$와 방향이 반대이고, 크기가 2배인 벡터이다. 이것을 $-2\vec{a}$로 나타낸다.



(3) 벡터의 실수배의 기본 성질

두 실수 k, l과 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

① $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

② $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

③ $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

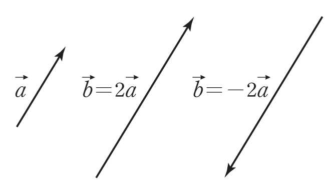
(4) 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{a}$에 대하여 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같은 단위벡터는 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$이다.

7. 벡터의 평행

(1) 그림과 같이 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 방향이 같거나 또는 반대일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 평행하다고 하고, 기호

$$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$$

로 나타낸다.



(2) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$와 0이 아닌 실수 k에 대하여

$$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a}$$

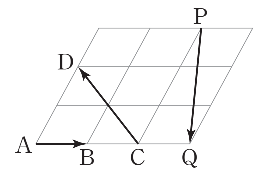
8. 서로 다른 세 점이 한 직선 위에 있을 조건

(1) 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하면 $\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{AC}$이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

(2) 서로 다른 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재한다.

예제 3 벡터의 실수배

그림과 같이 모양과 크기가 같은 9개의 평행사변형으로 이루어진 도형에서 평행사변형의 꼭짓점 A, B, C, D, P, Q가 있다. $\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{CD}$가 성립할 때, 두 실수 k, l의 합 $k+l$의 값은?



① $-\frac{7}{2}$　② $-\frac{3}{2}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{5}{2}$　⑤ $\frac{9}{2}$

풀이 전략

(1) 임의의 두 실수 k, l과 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

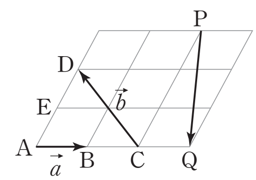
$(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$, $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$, $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

(2) 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ $(\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0})$와 네 실수 k, l, m, n에 대하여

$k\vec{a}+l\vec{b}=m\vec{a}+n\vec{b} \Longleftrightarrow k=m,\ l=n$

풀이

그림과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$라 하고, 선분 AD의 중점을 E라 하자.



$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\vec{a}+\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(2\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}=-3\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}=-3\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+\vec{a}=-2\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$$

$$=-2\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{CD}$$

이때 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$는 서로 평행하지 않으므로 $k=-2$, $l=-\frac{3}{2}$

따라서 $k+l=-2+\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{7}{2}$

답 ①

정답과 풀이 24쪽

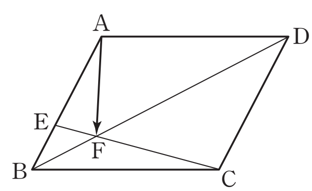
[21012-0056]

유제 5 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않을 때, 등식 $3(\vec{x}+\vec{a}-2\vec{b})=4\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)-\vec{x}$를 만족시키는 벡터 $\vec{x}$는 $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}$로 나타내어진다. 두 실수 m, n에 대하여 mn의 값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

[21012-0057]

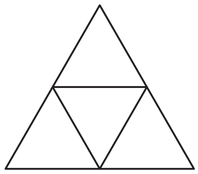
유제 6 그림과 같이 평행사변형 ABCD에서 변 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 E, 직선 EC와 직선 BD의 교점을 F라 하자. $\overrightarrow{AF}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{EC}$를 만족시키는 두 실수 m, n에 대하여 mn의 값은?



① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{1}{6}$　④ $\frac{1}{7}$　⑤ $\frac{1}{8}$

[21012-0058]

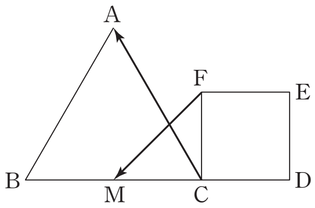
1 그림은 한 변의 길이가 1인 정삼각형 4개를 한 평면에 붙여 만든 도형이다. 정삼각형들의 꼭짓점 6개 중 한 점을 시점으로 하고 다른 한 점을 종점으로 하는 벡터의 크기를 k라 할 때, 서로 다른 모든 k의 값의 곱은?



① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{3}$
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

[21012-0059]

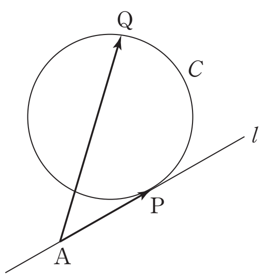
2 그림과 같이 한 평면에 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC와 한 변의 길이가 1인 정사각형 CDEF가 있다. 선분 BC의 중점을 M이라 할 때, $|\overrightarrow{\mathrm{FM}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2$의 값은? (단, 세 점 B, C, D는 한 직선 위에 있다.)



① $6-2\sqrt{3}$ ② $7-2\sqrt{3}$ ③ $8-2\sqrt{3}$
④ $9+\sqrt{3}$ ⑤ $10+2\sqrt{3}$

[21012-0060]

3 그림과 같이 한 평면에 반지름의 길이가 3인 원 C와 직선 l이 점 P에서 접한다. 직선 l 위의 점 A와 원 C 위의 점 Q에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 크기의 최댓값은?

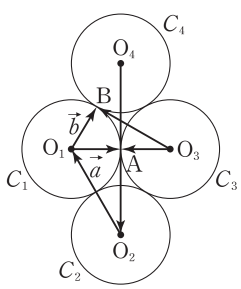


① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[21012-0061]

4 그림과 같이 반지름의 길이가 같은 네 원 C_1, C_2, C_3, C_4의 중심이 각각 O_1, O_2, O_3, O_4이고 두 원 C_1, C_3의 교점을 A, 두 원 C_1, C_4의 교점을 B라 하자. $\overrightarrow{\mathrm{O_1A}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{O_1B}}=\vec{b}$라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{O_2O_1}}+\overrightarrow{\mathrm{O_4O_2}}-\overrightarrow{\mathrm{O_3B}}-\overrightarrow{\mathrm{O_3A}}=m\vec{a}+n\vec{b}$를 만족시키는 두 실수 m, n의 합 $m+n$의 값은?

(단, 네 원은 서로 이웃하는 모든 원과 오직 한 점에서만 만난다.)



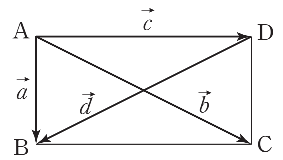
① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[21012-0062]

5 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{AD}}=2$인 직사각형 ABCD에서

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{DB}}=\vec{d}$$

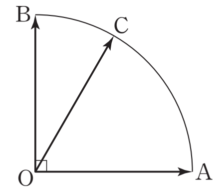
라 할 때, $|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}|$의 값은?



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

[21012-0063]

6 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA}}=1$, $\angle\mathrm{AOB}=90°$인 부채꼴 OAB의 호 AB의 삼등분점 중 점 B와 가까운 점을 C라 하자. $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=m\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$를 만족시키는 두 실수 m, n에 대하여 mn의 값은?



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{4}$

[21012-0064]

7 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않을 때,

$$\vec{x}=\vec{a}+2\vec{b},\ \vec{y}=2\vec{a}+m\vec{b}$$

라 하자. 두 벡터 $\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{x}-2\vec{y}$가 서로 평행할 때, 실수 m의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[21012-0065]

8 한 평면 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{DA}}=2\vec{a}+\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{DB}}=-\vec{a}-5\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{DC}}=m\vec{a}-2\vec{b}$$

이다. 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하는 실수 m의 값은?

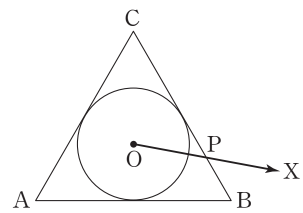
(단, 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하지 않다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

Level 2 기본 연습

[21012-0066]

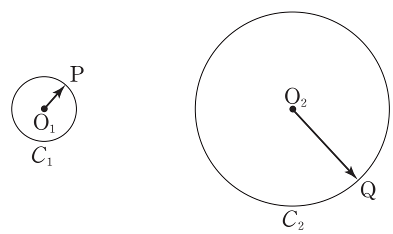
1 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O라 하자. 변 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{OX}=2\overrightarrow{OP}$를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형의 길이는?



① $\sqrt{46}$　　② $\sqrt{47}$　　③ $4\sqrt{3}$
④ 7　　⑤ $5\sqrt{2}$

[21012-0067]

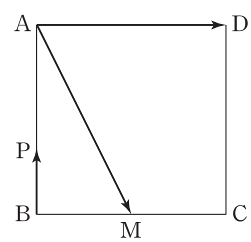
2 그림과 같이 한 평면에 있는 반지름의 길이가 1인 원 C_1의 중심을 O_1, 반지름의 길이가 3인 원 C_2의 중심을 O_2라 할 때, $|\overrightarrow{O_1O_2}|=8$이다. 원 C_1 위의 점 P, 원 C_2 위의 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}|=k$라 할 때, 서로 다른 모든 정수 k의 값의 합은?



① 6　　② 7　　③ 8
④ 9　　⑤ 10

[21012-0068]

3 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD의 변 AB 위의 점 P와 변 BC의 중점 M에 대하여 $|\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. M^2+m^2의 값을 구하시오.



[21012-0069]

4 영벡터가 아닌 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 다음 조건을 만족시킨다.

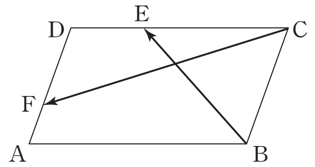
> (가) $\vec{a}=\frac{1}{4}\vec{b}$
> (나) $4(\vec{a}-\vec{b})+\vec{c}-3\vec{b}=2(\vec{c}+3\vec{a})$

$|\vec{a}|=3$일 때, $|\vec{c}|$의 값은?

① 70　　② 75　　③ 80　　④ 85　　⑤ 90

[21012-0070]

5 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 두 변 CD, DA를 각각 2 : 1로 내분하는 점을 각각 E, F라 할 때, $\overrightarrow{BE}+m\overrightarrow{CF}=n\overrightarrow{CA}$를 만족시킨다. 두 실수 m, n에 대하여 mn의 값은?



① $\frac{61}{3}$ ② $\frac{62}{3}$ ③ 21
④ $\frac{64}{3}$ ⑤ $\frac{65}{3}$

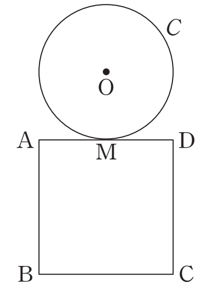
[21012-0071]

6 정삼각형 ABC의 무게중심이 D이고 $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}|=2$일 때, 정삼각형 ABC의 넓이는?

① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{3}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

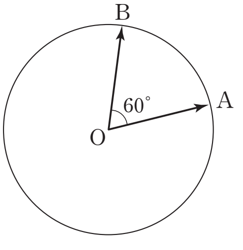
[21012-0072]

7 그림과 같이 한 평면에 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD의 변 AD의 중점 M에서 접하고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원 C 위의 점 P, 변 BC 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$가 서로 평행할 때, $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m=p+q\sqrt{10}$일 때, 두 자연수 p, q의 합 $p+q$의 값을 구하시오.
(단, 점 O는 원 C의 중심이고, 정사각형 ABCD의 외부에 있다.)



[21012-0073]

8 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 원 위에 두 점 A, B가 $\angle AOB=60^{\circ}$를 만족시키면서 움직인다.
$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$를 만족시키는 점 C가 나타내는 도형의 넓이는?



① 11π ② 12π ③ 13π
④ 14π ⑤ 15π

[21012-0074]

1 $0<k<1$이고 평면 위의 사각형 ABCD와 같은 평면 위의 네 점 P, Q, R, S가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BQ}=k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CR}=k\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DS}=k\overrightarrow{DA}$

(나) 사각형 ABCD의 넓이는 육각형 PBQRDS의 넓이의 $\frac{5}{4}$배이다.

모든 실수 k의 값의 곱은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

[21012-0075]

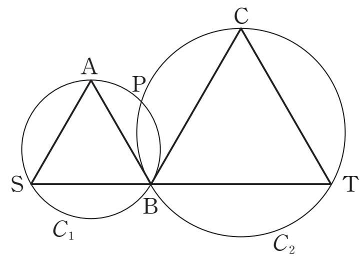
2 삼각형 ABC와 등식 $4\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{CP}$를 만족시키는 점 P에 대하여 직선 AC와 직선 BP의 교점을 D라 하자. 삼각형 DPA의 넓이를 S, 삼각형 PBC의 넓이를 T라 할 때, $\frac{S}{T}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[21012-0076]

3 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3$인 두 정삼각형 ASB, CBT의 외접원을 각각 C_1, C_2라 하고 두 원 C_1, C_2의 교점 중 B가 아닌 점을 P라 하자. $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{BC}$일 때, 두 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?

(단, 세 점 S, B, T는 한 직선 위에 있다.)



① $\frac{10}{19}$ ② $\frac{11}{19}$ ③ $\frac{12}{19}$ ④ $\frac{13}{19}$ ⑤ $\frac{14}{19}$

대표 기출 문제

출제 경향 벡터의 연산과 벡터의 정의를 이용하여 벡터의 크기를 구하는 문제가 출제된다.

삼각형 ABC에서

$\overline{AB}=2$, $\angle B=90°$, $\angle C=30°$

이다. 점 P가 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{PA}|^2$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

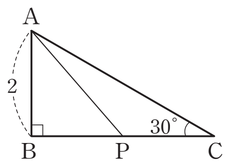
2012학년도 대수능

출제 의도 벡터의 성질을 이용하여 벡터의 크기를 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서

$\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{PC}$

이므로 점 P는 선분 BC의 중점이다.



직각삼각형 ABC에서

$\overline{BC}=\dfrac{2}{\tan 30°}=2\sqrt{3}$이므로

$\overline{PB}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$

따라서 $\overline{PA}^2=\overline{AB}^2+\overline{PB}^2=2^2+(\sqrt{3})^2=7$이므로

$|\overrightarrow{PA}|^2=\overline{PA}^2=7$

답 ③

대표 기출 문제

출제 경향 여러 가지 평면도형에서 벡터의 연산 또는 벡터의 평행 조건 등을 이용하여 도형의 성질들을 파악하고, 벡터의 크기나 도형의 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

직사각형 ABCD의 내부의 점 P가

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CA}$$

를 만족시킨다. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{CP}$

ㄴ. $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

ㄷ. 삼각형 ADP의 넓이가 3이면 직사각형 ABCD의 넓이는 8이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2017학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 직사각형 ABCD에서 조건을 만족시키는 점 P의 위치를 정하고, 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 ㄱ. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CA}$에서

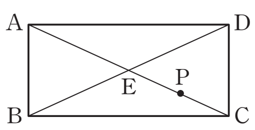
$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}$이므로

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}$$

따라서 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{CP}$이다. (참)

ㄴ. 선분 BD의 중점을 E라 하면 벡터의 덧셈과 실수배에 의하여

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}&=(\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EP})+(\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{EP})\\&=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED}-2\overrightarrow{EP}=-2\overrightarrow{EP}\end{aligned}$$



ㄱ에서 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{CP}$이므로

$$\overrightarrow{PE}=-\overrightarrow{PC}$$

두 벡터 $\overrightarrow{PE}$, $\overrightarrow{PC}$는 서로 방향이 반대이고 크기가 같으므로 점 P는 선분 EC의 중점이다.

그러므로 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$이다. (참)

ㄷ. 삼각형 ADC의 넓이는 삼각형 ADP의 넓이의 $\frac{4}{3}$이므로 삼각형 ADC의 넓이는 $3\times\frac{4}{3}=4$이다.

그러므로 직사각형 ABCD의 넓이는 $4\times2=8$이다. (참)

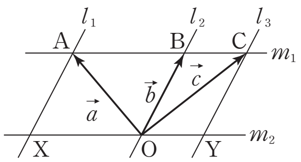
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

대표 기출 문제

출제 경향 벡터의 연산과 두 벡터가 평행할 조건을 이용하여 벡터의 종점이 나타내는 도형이 어떤 도형인지를 파악하는 문제가 출제된다.

그림과 같이 한 평면 위에서 서로 평행한 세 직선 l_1, l_2, l_3가 평행한 두 직선 m_1, m_2와 A, B, C, X, O, Y에서 만나고 있다. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라고 할 때, $\overrightarrow{AP}=(\vec{c}-\vec{b}-\vec{a})t$ (t는 실수)를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은? [2점]



① 직선 AY ② 직선 AO ③ 직선 AX ④ 직선 AB ⑤ 직선 CX

2004학년도 대수능 6월 모의평가

출제 의도 벡터의 연산과 벡터의 평행을 이용하여 점 P가 나타내는 도형을 구하는 문제이다.

풀이 $-\vec{b}=-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{CY}$이므로

$$\vec{c}-\vec{b}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CY}=\overrightarrow{OY}$$

$-\vec{a}=-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AO}$이므로

$$\vec{c}-\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{OY}-\vec{a}=\overrightarrow{OY}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{AY}$$

즉, 실수 t에 대하여

$$\overrightarrow{AP}=(\vec{c}-\vec{b}-\vec{a})t=t\overrightarrow{AY}$$

이므로 점 P는 직선 AY 위에 존재한다.

따라서 점 P가 나타내는 도형은 직선 AY이다.

답 ①

05 평면벡터의 성분과 내적

1. 위치벡터

(1) 평면에서 정해진 점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OA}$를 점 A의 위치벡터라 한다.

(2) 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 하면

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$$

(3) 내분점의 위치벡터

① 평면에서 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 할 때, 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$는

$$\vec{p}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

또한 선분 AB의 중점 P의 위치벡터 $\vec{p}$는

$$\vec{p}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

② 평면에서 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라 할 때, 삼각형 ABC의 무게중심 G의 위치벡터 $\vec{g}$는

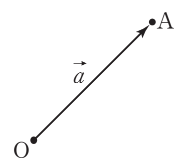
$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

(4) 외분점의 위치벡터

평면에서 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 할 때, 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 위치벡터 $\vec{q}$는

$$\vec{q}=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$$

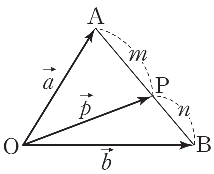
설명 (1) 평면에서 한 점 O를 고정시키면 임의의 점 A에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$인 벡터 $\vec{a}$가 유일하게 정해진다. 역으로 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$인 점 A도 유일하게 정해진다. 그러므로 시점을 O로 고정하면 평면 위의 점 A와 이 점의 위치를 나타내는 벡터 $\overrightarrow{OA}$는 일대일로 대응한다. 일반적으로 위치벡터의 시점은 원점 O로 잡는다.



(3) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$이고 $\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$이므로 $\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})$

이때 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$이므로

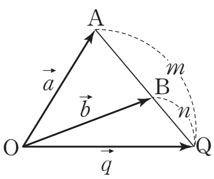
$$\vec{p}=\vec{a}+\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$



(4) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$이고 $\overrightarrow{AQ}=\frac{m}{m-n}\overrightarrow{AB}$이므로 $\overrightarrow{AQ}=\frac{m}{m-n}(\vec{b}-\vec{a})$

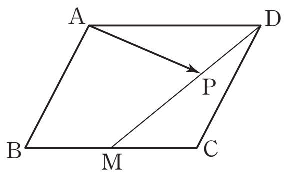
이때 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}$이므로

$$\vec{q}=\vec{a}+\frac{m}{m-n}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$$



예제 1 위치벡터

그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 변 BC의 중점을 M, 선분 MD를 3 : 2로 내분하는 점을 P라 하자. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$라 할 때, $\overrightarrow{AP}=m\vec{a}+n\vec{b}$를 만족시킨다. 두 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?



① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ 1
④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{7}{5}$

풀이 전략 벡터의 덧셈, 벡터의 실수배와 내분점의 위치벡터를 이용한다.

풀이 $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\vec{b}$이므로

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

점 P가 선분 MD를 3 : 2로 내분하므로

$$\overrightarrow{AP}=\frac{3\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AM}}{3+2}=\frac{3\vec{b}+2\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)}{3+2}=\frac{2\vec{a}+4\vec{b}}{5}$$

따라서 $m=\frac{2}{5}$, $n=\frac{4}{5}$이므로

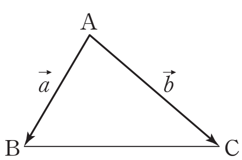
$$m+n=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}=\frac{6}{5}$$

답 ④

정답과 풀이 30쪽

유제 1 [21012-0077]

그림과 같은 삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하자. 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점을 P, 2 : 1로 외분하는 점을 Q라 할 때, $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=m\vec{a}+n\vec{b}$를 만족시키는 두 실수 m, n에 대하여 $m-n$의 값은?



① -4 ② $-\frac{11}{3}$ ③ $-\frac{10}{3}$
④ -3 ⑤ $-\frac{8}{3}$

유제 2 [21012-0078]

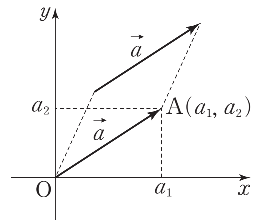
선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점을 M이라 하고, 선분 OM을 1 : 2로 외분하는 점을 N이라 하자. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 할 때, $\overrightarrow{AN}=k\vec{a}+l\vec{b}$를 만족시키는 두 실수 k, l에 대하여 $k-l$의 값은?
(단, 세 점 O, A, B는 한 직선 위에 있지 않다.)

① -1 ② $-\frac{6}{5}$ ③ $-\frac{7}{5}$ ④ $-\frac{8}{5}$ ⑤ $-\frac{9}{5}$

2. 평면벡터의 성분

(1) 평면벡터의 성분

좌표평면에서 원점 O를 시점으로 하고 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$를 종점으로 하는 위치벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$를 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$로 나타낸다. 이때 두 실수 $a_1,\ a_2$를 벡터 $\vec{a}$의 성분이라 하고, a_1을 x성분, a_2를 y성분이라 한다.



(2) 평면벡터의 성분과 연산

두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$에 대하여

① 크기: $|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$

② 두 벡터가 서로 같을 조건

$\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1$이고 $a_2=b_2$

③ 덧셈: $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

④ 뺄셈: $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

⑤ 실수배: $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$ (단, k는 실수이다.)

⑥ 두 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2),\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

설명 (1) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{E}_1(1,\ 0)$, $\mathrm{E}_2(0,\ 1)$의 위치벡터를 각각 $\overrightarrow{\mathrm{OE}_1}=\vec{e_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}_2}=\vec{e_2}$라 하면 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이때 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$를

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$$

와 같이 나타낸다.

(2) 좌표평면에서 원점을 O, $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$라 하자.

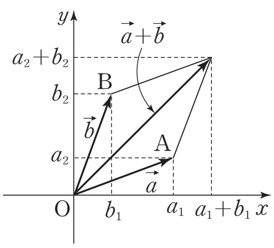
① 벡터 $\vec{a}$의 크기는 선분 OA의 길이이므로

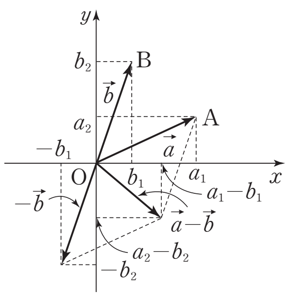
$$|\vec{a}|=\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$$

② $\vec{a}=\vec{b}$이면 두 벡터에 대응하는 성분이 서로 같으므로 $a_1=b_1$, $a_2=b_2$이다.
역도 성립한다.

③ $\vec{a}+\vec{b}=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})+(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})$
$=(a_1+b_1)\vec{e_1}+(a_2+b_2)\vec{e_2}$
$=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

④ $\vec{a}-\vec{b}=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})-(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})$
$=(a_1-b_1)\vec{e_1}+(a_2-b_2)\vec{e_2}$
$=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$





⑤ $k\vec{a}=k(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})=ka_1\vec{e_1}+ka_2\vec{e_2}$
$=(ka_1,\ ka_2)$

⑥ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(b_1,\ b_2)-(a_1,\ a_2)=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$이므로
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

예제 2 평면벡터의 성분

좌표평면 위의 두 점 A$(3,\ -1)$, B$(4,\ 2)$에 대하여 벡터 $\vec{p}=(a,\ b)$가 다음 조건을 만족시킬 때, ab의 값은?

(단, a, b는 실수이다.)

(가) 벡터 $\vec{p}$는 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 방향이 반대이다.
(나) $|\vec{p}|=2$

① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{9}{10}$ ③ 1 ④ $\frac{11}{10}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

풀이 전략 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$이고, $\vec{p}=(a,\ b)$에 대하여 $|\vec{p}|=\sqrt{a^2+b^2}$임을 이용한다.

풀이 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(4,\ 2)-(3,\ -1)=(1,\ 3)$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 방향이 같은 단위벡터는

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{\sqrt{10}}(1,\ 3)$$

벡터 $\vec{p}$는 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 방향이 반대이고, $|\vec{p}|=2$이므로

$$\vec{p}=-\frac{2}{\sqrt{10}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\frac{2}{\sqrt{10}}(1,\ 3)$$

따라서 $a=-\frac{2}{\sqrt{10}}$, $b=-\frac{6}{\sqrt{10}}$이므로

$$ab=-\frac{2}{\sqrt{10}}\times\left(-\frac{6}{\sqrt{10}}\right)=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$$

답 ⑤

정답과 풀이 30쪽

유제 3 [21012-0079]

두 벡터 $\vec{a}=(1-p,\ q+3)$, $\vec{b}=(q-3,\ 4p+2)$에 대하여 $\vec{a}=\vec{b}$일 때, p^2+q^2의 값을 구하시오.

(단, p, q는 실수이다.)

유제 4 [21012-0080]

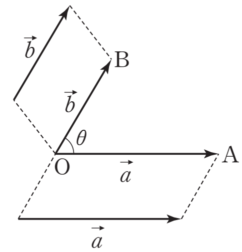
두 벡터 $\vec{a}=(x+y,\ 3)$, $\vec{b}=(1,\ x-y)$에 대하여

$$\vec{a}+\vec{b}=2(\vec{a}-\vec{b})$$

일 때, 두 실수 x, y의 곱 xy의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

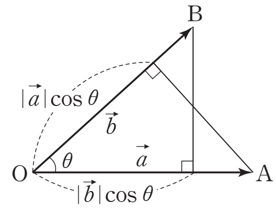
3. 평면벡터의 내적



(1) 두 벡터가 이루는 각

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 한 점 O를 잡아서 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$가 되도록 두 점 A, B를 정할 때, $\angle AOB$의 크기 θ는 점 O의 위치에 관계없이 일정하고, $\theta=\angle AOB\ (0^\circ\le\theta\le180^\circ)$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기라 한다.

(2) 벡터의 내적



영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때,

$$\begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta & (0^\circ\le\theta\le90^\circ) \\ -|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ-\theta) & (90^\circ<\theta\le180^\circ) \end{cases}$$

를 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적이라 하고 기호 $\vec{a}\cdot\vec{b}$와 같이 나타낸다.

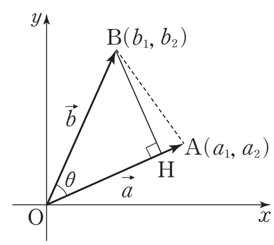
참고 ① 〈수학 I〉에서 공부한 삼각함수를 이용하면 다음과 같이 간단하게 평면벡터의 내적을 정의할 수 있다.
영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\theta\ (0^\circ\le\theta\le180^\circ)$일 때, $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$를 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적이라 하고, 기호로 $\vec{a}\cdot\vec{b}$와 같이 나타낸다.
즉, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

② $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때에는 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$으로 정한다.

(3) 벡터의 내적과 성분표시

두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$에 대하여

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$



설명 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0^\circ<\theta<90^\circ)$라 하자.
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 각각 위치벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}=(b_1, b_2)$로 나타낼 때,
점 B에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$|\overrightarrow{BH}|=|\overrightarrow{OB}|\sin\theta,\ |\overrightarrow{AH}|=|\overrightarrow{OA}|-|\overrightarrow{OH}|=|\overrightarrow{OA}|-|\overrightarrow{OB}|\cos\theta$$

이때 직각삼각형 BHA에서 $\overline{AB}^2=\overline{BH}^2+\overline{AH}^2$이므로

$$\overline{AB}^2=(\overline{OB}\sin\theta)^2+(\overline{OA}-\overline{OB}\cos\theta)^2$$

이를 정리하면 $\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\theta$

따라서 $(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2=(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-2(\vec{a}\cdot\vec{b})$

이를 정리하면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$이다.

같은 방법으로 위의 식은 $90^\circ<\theta<180^\circ$일 때에도 성립하며 $\theta=0^\circ$ 또는 $\theta=90^\circ$ 또는 $\theta=180^\circ$일 때에도 성립한다.

〈수학 I〉에서 공부한 삼각함수를 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

좌표평면에서 세 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(a_1, a_2)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2)$에 대하여 $\angle AOB=\theta$라 하면 삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의해

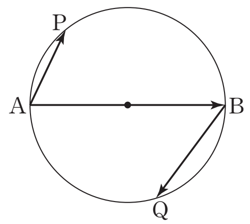
$$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\theta$$

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2=(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\theta$$

따라서 $\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

예제 3 평면벡터의 내적

그림과 같이 지름이 선분 AB인 원 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}=4$, $\overline{\mathrm{BQ}}=6$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$의 값은? (단, $\overline{\mathrm{AB}}>6$)



① -32 ② -26 ③ -20
④ -14 ⑤ -8

풀이 전략 직각삼각형 ABP에서 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos(\angle\mathrm{PAB})=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$임을 이용한다.

풀이 선분 AB가 원의 지름이므로 $\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{AQB}=90°$이다.

직각삼각형 ABP에서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos(\angle\mathrm{PAB})\\&=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos(\angle\mathrm{PAB})\\&=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\\&=4\times4=16\end{aligned}$$

직각삼각형 AQB에서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}&=-\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}\\&=-|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|\cos(\angle\mathrm{ABQ})\\&=-|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}||\overrightarrow{\mathrm{BA}}|\cos(\angle\mathrm{ABQ})\\&=-|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}||\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|\\&=-6\times6=-36\end{aligned}$$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=16+(-36)=-20$

답 ③

정답과 풀이 31쪽

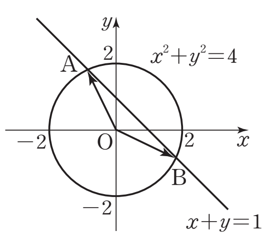
[21012-0081]

유제 5 두 벡터 $\vec{a}=(x-1,\ x)$, $\vec{b}=(2x,\ -x+1)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 최솟값은? (단, x는 실수이다.)

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ -1 ⑤ -2

[21012-0082]

유제 6 그림과 같이 원 $x^2+y^2=4$와 직선 $x+y=1$의 두 교점을 각각 A, B라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① -3 ② -2 ③ $-\sqrt{3}$
④ $-\sqrt{2}$ ⑤ -1

4. 평면벡터의 내적의 성질

(1) 벡터의 내적의 연산법칙

세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 실수 k에 대하여

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (교환법칙)

② $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ (분배법칙)

③ $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

(2) 평면벡터의 크기와 내적

① $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

② $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

③ $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

④ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

설명 내적의 정의에 의하여 다음 등식이 성립한다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

또한 세 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$, $\vec{c}=(c_1,\ c_2)$에 대하여

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})&=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2\\&=(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

5. 두 평면벡터가 이루는 각의 크기

(1) 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ\le\theta\le180^\circ)$라 하면

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

(2) 벡터의 평행 조건과 수직 조건

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

① 평행 조건: $\vec{a}/\!/\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$

② 수직 조건: $\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

설명 (1) 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ $(0^\circ\le\theta\le180^\circ)$이므로

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

이것을 벡터의 성분으로 나타내면

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

(2) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$에서

$\vec{a}/\!/\vec{b}$이면 $\theta=0^\circ$ 또는 $\theta=180^\circ$이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$

또 $\vec{a}\perp\vec{b}$이면 $\theta=90^\circ$이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ=0$이다.

한편, 이들의 역도 성립한다.

예제 4 벡터의 내적

두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $60°$이고, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$일 때, $|\vec{a}-2\vec{b}|$의 값은?

① $\sqrt{47}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ 7 ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{51}$

풀이 전략 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2\geq 0$

풀이

$$\begin{aligned}|\vec{a}-2\vec{b}|^2&=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})\\&=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2\\&=9-4|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°+64\\&=73-4\times3\times4\times\frac{1}{2}\\&=73-24\\&=49\end{aligned}$$

따라서 $|\vec{a}-2\vec{b}|=7$

답 ③

정답과 풀이 31쪽

[21012-0083]

유제 7 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}+2\vec{b}|=4$일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값은?

① -2 ② -3 ③ -4 ④ -5 ⑤ -6

[21012-0084]

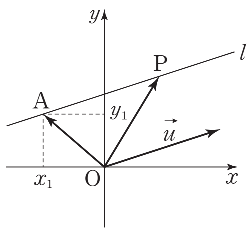
유제 8 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 각각 $\vec{a}=(1, 2)$, $\vec{b}=(2k, -k)$이다. 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$와 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $120°$일 때, 양의 실수 k의 값은?

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

6. 직선의 방정식

⑴ 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(a, b)$인 직선 l 위의 점을 $P(x, y)$라 하면 그 직선 l의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}\ (\text{단, } ab\neq0)$$

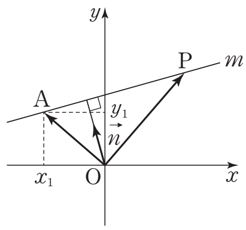


⑵ 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\ (\text{단, } x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2)$$

⑶ 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(a, b)$인 직선 m 위의 점을 $P(x, y)$라 하면 그 직선 m의 방정식은

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$$



7. 두 직선이 이루는 각의 크기

두 직선 l_1, l_2의 방향벡터가 각각 $\overrightarrow{u_1}=(a_1, b_1)$, $\overrightarrow{u_2}=(a_2, b_2)$일 때

⑴ 두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0°\leq\theta\leq90°)$라 하면

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2}\sqrt{{a_2}^2+{b_2}^2}}$$

⑵ 두 직선 l_1, l_2가 평행하면

$$a_1 : b_1=a_2 : b_2$$

⑶ 두 직선 l_1, l_2가 수직이면

$$a_1a_2+b_1b_2=0$$

8. 원의 방정식

좌표평면에서 점 $C(x_1, y_1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 위의 임의의 한 점을 $P(x, y)$라 하고 두 점 C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{c}$, $\vec{p}$라 하면

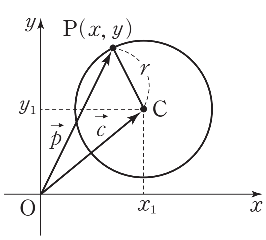
$$|\vec{p}-\vec{c}|=r \Longleftrightarrow (\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$$

이므로

$$(x-x_1, y-y_1)\cdot(x-x_1, y-y_1)=r^2$$

에서

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$$



예제 5 직선의 방정식

좌표평면에서 두 직선 $l_1 : \frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{4}$, $l_2 : x-1=\frac{y+1}{3}$이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

풀이 전략 두 직선이 이루는 각의 크기는 두 직선의 방향벡터를 이용하여 구할 수 있다.

풀이 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라 하면

$\vec{u_1}=(2,\ 4)$, $\vec{u_2}=(1,\ 3)$

$\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=(2,\ 4)\cdot(1,\ 3)=2+12=14$

$|\vec{u_1}|=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$

$|\vec{u_2}|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

따라서 $\cos\theta=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}=\frac{14}{2\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$

답 ⑤

정답과 풀이 31쪽

[21012-0085]

유제 9 좌표평면에서 두 직선 $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{k}$, $2x-5y+1=0$이 서로 수직이 되도록 하는 0이 아닌 실수 k의 값은?

① $-\frac{15}{2}$ ② $-\frac{13}{2}$ ③ $-\frac{11}{2}$ ④ $-\frac{9}{2}$ ⑤ $-\frac{7}{2}$

[21012-0086]

유제 10 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$, P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$일 때,

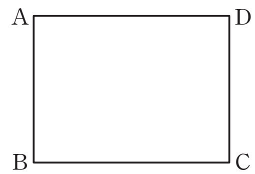
$$\vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{b}\cdot\vec{p}+(\vec{b}+\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① $\sqrt{10}\pi$ ② $2\sqrt{5}\pi$ ③ $2\sqrt{10}\pi$ ④ $4\sqrt{5}\pi$ ⑤ $4\sqrt{10}\pi$

[21012-0087]

1 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{AD}}=4$인 직사각형 ABCD에서 점 E가 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|$의 값은?



① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

[21012-0088]

2 직선 l 위에 있는 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=4\overrightarrow{\mathrm{AC}}$이고 직선 l 위의 점이 아닌 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+b\overrightarrow{\mathrm{PB}}$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

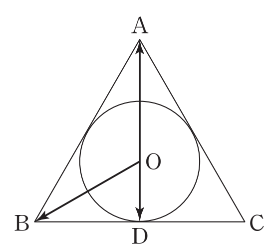
[21012-0089]

3 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ 3)$에 대하여 벡터 $\vec{a}-2\vec{b}$의 모든 성분의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[21012-0090]

4 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O라 하자. 내접원과 변 BC의 교점을 D라 할 때, $(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}$의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[21012-0091]

5 두 벡터 $\vec{a}=(k,\ 2)$, $\vec{b}=(k-5,\ 3)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[21012-0092]

6 두 벡터 $\vec{a}=(-1,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ 1)$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$, $2\vec{a}+\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[21012-0093]

7 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$이고 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$, $-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$가 서로 수직일 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $\sin\theta$의 값은? (단, $0^\circ\le\theta\le180^\circ$)

① $\frac{\sqrt{11}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{13}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{14}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{15}}{4}$

[21012-0094]

8 좌표평면 위의 점 $(3,\ 4)$를 지나고 벡터 $\vec{n}=(1,\ -1)$에 수직인 직선을 l이라 하자. 원점 O와 직선 l 사이의 거리는?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

[21012-0095]

1 집합 $A=\{\vec{a}\mid\vec{a}=(i,\ j),\ i,\ j$는 $i<j$인 100 이하의 자연수$\}$에 대하여 $\vec{p}=(50,\ 51)$이고 $\vec{q}\in A$일 때, $\vec{p}+2\vec{q}\in A$를 만족시키는 벡터 $\vec{q}$의 개수는?

① 270 ② 276 ③ 282 ④ 288 ⑤ 294

[21012-0096]

2 $\overline{\mathrm{OA}}=2$, $\overline{\mathrm{OB}}=3$인 삼각형 OAB에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k$일 때, 모든 정수 k의 개수는?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

[21012-0097]

3 평면 위의 서로 다른 다섯 개의 점 O, A, B, C, D에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{d}=\dfrac{-\vec{a}+2\vec{b}}{4}$

(나) $|\vec{c}|=4$, $|\vec{d}|=1$

두 직선 AB와 CD가 서로 수직일 때, $\vec{c}\cdot\vec{d}$의 값은?

① $\dfrac{22}{13}$ ② $\dfrac{24}{13}$ ③ 2 ④ $\dfrac{28}{13}$ ⑤ $\dfrac{30}{13}$

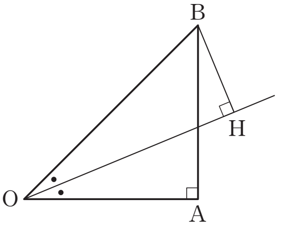
[21012-0098]

4 평면 위에 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=1$인 삼각형 OAB의 변 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 C, $2:1$로 외분하는 점을 D라 하자. $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{COD}$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 값은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ $\dfrac{4}{5}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

[21012-0099]

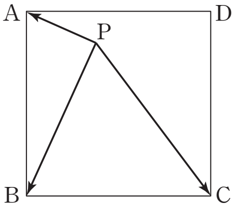
1 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}=1$이고 $\angle\mathrm{OAB}=90^{\circ}$인 직각삼각형 OAB의 꼭짓점 B에서 $\angle\mathrm{AOB}$의 이등분선에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=m\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$일 때, 두 실수 m, n의 합 $m+n$의 값은?



① $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ ④ $\dfrac{\sqrt{2}+2}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{2}+3}{2}$

[21012-0100]

2 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD의 내부의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.



(가) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PB}}$
(나) 두 실수 x, y에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$이다.

$x+y$가 최대일 때, 삼각형 PAB의 넓이를 구하시오.

[21012-0101]

3 좌표평면 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 점 P, Q는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이다.
(나) $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}$

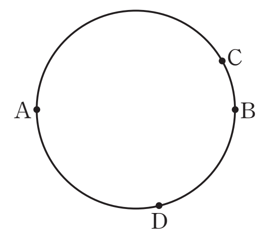
점 R(2, 3)에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① 141 ② 142 ③ 143 ④ 144 ⑤ 145

대표 기출 문제

출제 경향 도형에서 벡터의 연산의 성질과 벡터의 내적의 성질 등을 이용하여 벡터의 크기 등을 구하는 문제가 자주 출제된다.

한 원 위에 있는 서로 다른 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{AD}|^2$의 값은? [4점]



(가) $|\overrightarrow{AB}|=8$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

(나) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

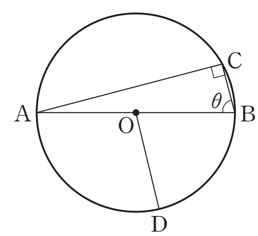
2020학년도 대수능

출제 의도 벡터의 내적을 이용하여 두 벡터의 수직, 벡터의 크기 등을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 조건 (가)에서 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$는 서로 수직이다. 그러므로 선분 AB는 원의 지름이다.

이때 $|\overrightarrow{AB}|=8$이므로 이 원은 지름의 길이가 8인 원이다.

이 원의 중심을 O라 하면 조건 (나)에서



$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}+2\overrightarrow{CB}$$

이때 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}$이므로 $\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{CB}$

점 D는 원 위의 점이므로 $|\overrightarrow{OD}|=4$에서

$$2|\overrightarrow{CB}|=4,\ |\overrightarrow{CB}|=2$$

$\angle ABC=\theta$라 하면 삼각형 ABC에서 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

한편, 두 벡터 $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{CB}$는 서로 평행하므로 $\angle AOD=180^\circ-\theta$

따라서

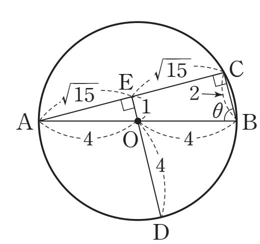
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AD}|^2&=|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}|^2=(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})\\&=|\overrightarrow{OD}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2-2\,\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OA}\\&=|\overrightarrow{OD}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2-2|\overrightarrow{OD}||\overrightarrow{OA}|\cos(180^\circ-\theta)\\&=|\overrightarrow{OD}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2+2|\overrightarrow{OD}||\overrightarrow{OA}|\cos\theta\\&=4^2+4^2+2\times4\times4\times\frac{1}{4}=40\end{aligned}$$

답 ⑤

다른 풀이 주어진 조건을 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.

$\angle AOE=\theta$이고 $\cos\theta=\frac{1}{4}$이므로 $\cos(\angle AOD)=-\cos\theta=-\frac{1}{4}$

따라서 $|\overrightarrow{AD}|^2=|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}|^2=40$



대표 기출 문제

출제 경향 도형에서 벡터의 내적의 연산의 성질을 이용하여 벡터의 내적의 최댓값 또는 최솟값을 구하는 문제가 출제된다.

좌표평면에서 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 한 점을 A, 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 한 점을 B라 할 때, 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$
(나) $|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2=20$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$의 최솟값은 m이고 이때 $|\overrightarrow{OP}|=k$이다. $m+k^2$의 값을 구하시오. [4점]

2018학년도 대수능 6월 모의평가

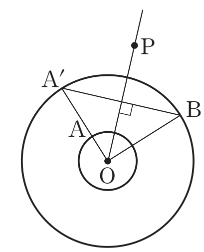
출제 의도 벡터의 연산과 내적을 이용하여 두 벡터의 내적의 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$에서 $(\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OP}=0$

$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$이 되도록 점 A′을 잡으면 $(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA'})\cdot\overrightarrow{OP}=0$

즉, $\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{OP}=0$

또한 $\overline{OA'}=\overline{OB}=3$이므로 점 P는 선분 A′B의 수직이등분선 위의 점이다.



$|\overrightarrow{BA}|^2=|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|^2=|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$에서

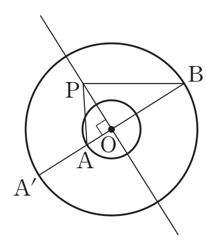
$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2-|\overrightarrow{BA}|^2)=\frac{1}{2}(20-|\overrightarrow{BA}|^2)$$

한편, 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 한 점 A와 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 한 점 B에 대하여 $|\overrightarrow{BA}|$의 최댓값은 4이므로 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$의 최솟값은 $m=2$이다.

이때 $\angle A'OP=\angle AOP=\angle BOP=90°$이므로

직각삼각형 AOP에서 $\overline{AO}^2+\overline{OP}^2=\overline{PA}^2$ …… ㉠

직각삼각형 BOP에서 $\overline{BO}^2+\overline{OP}^2=\overline{PB}^2$ …… ㉡



㉠+㉡을 하면

$$\overline{AO}^2+\overline{BO}^2+2\overline{OP}^2=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$$

$$10+2\overline{OP}^2=20,\ \overline{OP}^2=5$$

따라서 $k^2=|\overrightarrow{OP}|^2=\overline{OP}^2=5$이므로

$$m+k^2=2+5=7$$

답 7

06 공간도형

1. 공간에서 직선과 평면의 위치 관계

(1) 평면의 결정 조건

① 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점 ② 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점

③ 한 점에서 만나는 두 직선 ④ 평행한 두 직선

(2) 서로 다른 두 직선의 위치 관계

① 한 점에서 만난다. ② 평행하다. ③ 꼬인 위치에 있다.

(3) 직선과 평면의 위치 관계

① 포함된다. ② 한 점에서 만난다. ③ 평행하다.

(4) 서로 다른 두 평면의 위치 관계

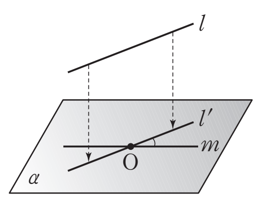
① 만난다. ② 평행하다.

참고 ① 서로 다른 두 평면이 만나서 생기는 도형은 직선이고 이 직선을 두 평면의 교선이라 한다.

② 서로 다른 두 평면 α, β가 만나지 않을 때, 두 평면은 평행하다고 하고 기호로 $\alpha /\!/ \beta$와 같이 나타낸다.

2. 공간에서 두 직선이 이루는 각

두 직선 l, m이 꼬인 위치에 있을 때, 직선 m 위에 한 점 O를 잡고, 점 O를 지나고 직선 l에 평행한 직선 l'을 그으면 두 직선 l', m은 점 O에서 만나므로 한 평면을 결정한다. 이때 두 직선 l', m이 이루는 각을 두 직선 l, m이 이루는 각이라 한다.



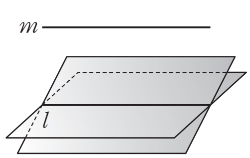
참고 ① 일반적으로 두 직선이 이루는 각의 크기는 크기가 크지 않은 것을 택한다.

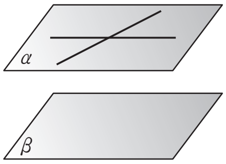
② 두 직선이 이루는 각이 직각일 때 두 직선 l, m은 수직이라 하고, 기호로 $l \perp m$과 같이 나타낸다.

3. 공간에서 직선과 평면의 평행

(1) 두 직선 l, m이 평행할 때, 직선 l을 포함하고 직선 m을 포함하지 않는 모든 평면은 직선 m과 평행하다.

(2) 두 평면 α, β가 평행할 때, 평면 α 위에 있는 모든 직선은 평면 β와 평행하다.

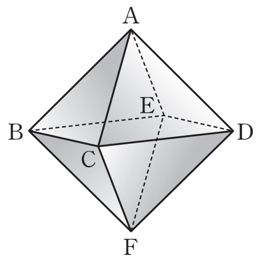




예제 1 공간에서의 직선과 평면

그림과 같은 정팔면체 ABCDEF에서 직선 AB와 세 직선 DF, EF, CD가 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2, θ_3이라 할 때, $\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$의 값은?

(단, $i=1, 2, 3$에 대하여 $0° \le \theta_i \le 90°$이다.)



① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

풀이 전략 꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각의 크기는 어느 한 직선을 평행이동하여 두 직선이 만날 때 이루는 각의 크기와 같다.

풀이 사각형 ABFD는 정사각형이므로 $\overline{AB} /\!/ \overline{DF}$이다.

따라서 $\theta_1=0°$이다.

사각형 ACFE는 정사각형이므로 $\overline{AC} /\!/ \overline{EF}$이다.

따라서 두 직선 AB와 EF가 이루는 각의 크기는 두 직선 AB와 AC가 이루는 각의 크기와 같고, 삼각형 ABC는 정삼각형이므로 $\theta_2=60°$이다.

사각형 BCDE는 정사각형이므로 $\overline{BE} /\!/ \overline{CD}$이다.

따라서 두 직선 AB와 CD가 이루는 각의 크기는 두 직선 AB와 BE가 이루는 각의 크기와 같고, 삼각형 ABE는 정삼각형이므로 $\theta_3=60°$이다.

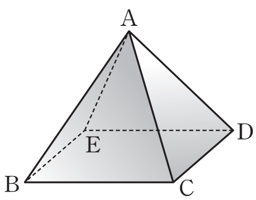
즉, $\theta_1+\theta_2+\theta_3=120°$이므로 $\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)=\cos 120°=-\frac{1}{2}$

답 ③

정답과 풀이 37쪽

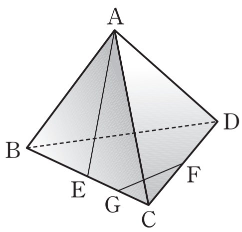
유제 1 [21012-0102]

그림과 같은 정사각뿔 A$-$BCDE의 모든 모서리를 연장한 직선 중에서 직선 BC와 평행한 직선의 개수를 a, 직선 BC와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.



유제 2 [21012-0103]

그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 두 선분 BC, CD의 중점을 각각 E, F, 선분 BC를 3 : 1로 내분하는 점을 G라 하자. 두 직선 AE, FG가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\theta$의 값은? (단, $0° \le \theta \le 90°$)

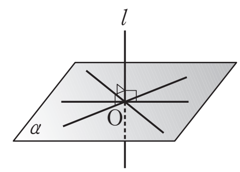


① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

④ $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

4. 공간에서 직선과 평면의 수직 관계

공간에서 직선 l과 평면 α 위의 모든 직선이 수직일 때, 직선 l은 평면 α와 수직이라 하고, 기호로 $l\perp\alpha$와 같이 나타낸다. 이때 직선 l을 평면 α의 수선, 직선 l과 평면 α가 만나는 점 O를 수선의 발이라 한다.



참고 직선 l이 평면 α 위의 평행하지 않은 서로 다른 두 직선과 각각 수직이면 $l\perp\alpha$이다.

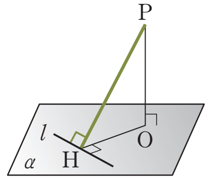
5. 삼수선의 정리

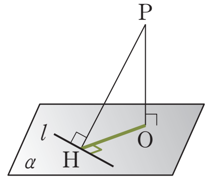
평면 α 위에 있지 않은 한 점 P, 평면 α 위의 한 점 O, 평면 α에 포함되고 점 O를 지나지 않는 한 직선 l, 직선 l 위의 한 점 H에 대하여 다음과 같은 세 가지 성질이 성립한다. 이를 삼수선의 정리라 한다.

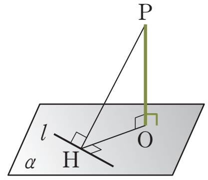
(1) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이면 $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$

(2) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$이면 $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$

(3) $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{PO}}\perp\overline{\mathrm{OH}}$이면 $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$

(1)


(2)


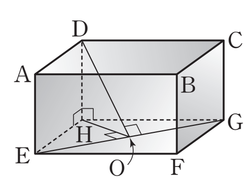
(3)


설명 (1) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$이므로 선분 PO는 평면 α 위의 모든 직선과 수직이다.
이때 직선 l은 평면 α에 포함되므로 $\overline{\mathrm{PO}}\perp l$이다.
또 $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이므로 직선 l은 선분 PO와 선분 OH를 포함하는 평면 PHO와 수직이다.
이때 선분 PH는 평면 PHO에 포함되고, 직선 l은 평면 PHO 위에 있는 모든 직선과 수직이므로 $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$이다.

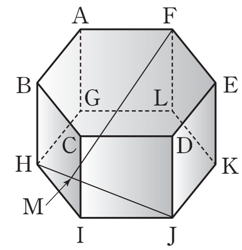
(2) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$이므로 선분 PO는 평면 α 위의 모든 직선과 수직이다.
이때 직선 l은 평면 α에 포함되므로 $\overline{\mathrm{PO}}\perp l$이다.
또 $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$이므로 직선 l은 선분 PO와 선분 PH를 포함하는 평면 PHO와 수직이다.
이때 선분 OH는 평면 PHO에 포함되고, 직선 l은 평면 PHO 위에 있는 모든 직선과 수직이므로 $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이다.

(3) $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이므로 직선 l은 선분 PH와 선분 OH를 포함하는 평면 PHO와 수직이다.
이때 선분 PO는 평면 PHO에 포함되고, 직선 l은 평면 PHO 위에 있는 모든 직선과 수직이므로 $\overline{\mathrm{PO}}\perp l$이다.
또 $\overline{\mathrm{PO}}\perp\overline{\mathrm{OH}}$이므로 선분 PO는 두 직선 OH와 l을 포함하는 평면 α와 수직이다.
즉, $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$이다.

예 그림과 같은 직육면체 ABCD$-$EFGH의 한 꼭짓점 D에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 O라 하자. $\overline{\mathrm{DH}}\perp\overline{\mathrm{EH}}$, $\overline{\mathrm{DH}}\perp\overline{\mathrm{HG}}$이므로 $\overline{\mathrm{DH}}\perp$(평면 EFGH)이고 $\overline{\mathrm{DO}}\perp\overline{\mathrm{EG}}$이므로 삼수선의 정리 (2)에 의하여 $\overline{\mathrm{HO}}\perp\overline{\mathrm{EG}}$이다.



예제 2 삼수선의 정리



그림과 같이 모든 모서리의 길이가 4인 정육각기둥 ABCDEF$-$GHIJKL에서 선분 HJ를 $1:3$으로 내분하는 점을 M이라 할 때, 선분 FM의 길이는?

① $\sqrt{53}$ ② $3\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{55}$
④ $2\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{57}$

풀이 전략 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O라 하고, 점 P에서 점 O를 지나지 않는 평면 α 위의 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이다.

풀이 주어진 입체도형은 정육각기둥이므로

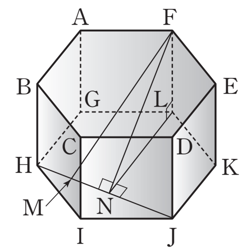
$\overline{\mathrm{FL}}\perp$(평면 GHIJKL) …… ㉠

밑면은 정육각형이므로 선분 HJ의 중점을 N이라 하면

$\overline{\mathrm{LN}}\perp\overline{\mathrm{HJ}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{FN}}\perp\overline{\mathrm{HJ}}$



밑면은 한 변의 길이가 4인 정육각형이므로

$\overline{\mathrm{IN}}=\overline{\mathrm{IJ}}\cos 60^\circ=4\times\frac{1}{2}=2$, $\overline{\mathrm{LN}}=\overline{\mathrm{IL}}-\overline{\mathrm{IN}}=2\overline{\mathrm{JK}}-\overline{\mathrm{IN}}=2\times4-2=6$

직각삼각형 FNL에서

$\overline{\mathrm{FN}}=\sqrt{\overline{\mathrm{FL}}^2+\overline{\mathrm{LN}}^2}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$

또한 직각삼각형 HIN에서 $\overline{\mathrm{HN}}=\sqrt{\overline{\mathrm{HI}}^2-\overline{\mathrm{IN}}^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$이고 $\overline{\mathrm{MN}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{HN}}=\sqrt{3}$이므로

직각삼각형 FMN에서

$\overline{\mathrm{FM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{FN}}^2+\overline{\mathrm{MN}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{13})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{55}$

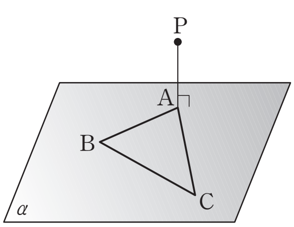
답 ③

정답과 풀이 37쪽

유제 3

[21012-0104]

그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 A라 할 때, 정삼각형 ABC는 평면 α 위에 있고 $\overline{\mathrm{PA}}=6$이다. 선분 BC 위의 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이의 최댓값은 10이고, 최솟값은 k이다. k^2의 값을 구하시오.



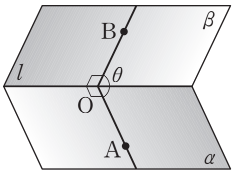
6. 이면각

(1) 반평면

평면 위의 한 직선은 그 평면을 두 부분으로 나누는데, 그 각각을 반평면이라 한다.

(2) 이면각

직선 l을 공유하는 두 개의 반평면 α와 β로 이루어진 도형을 이면각이라 한다.
이때 직선 l을 이면각의 변, 두 반평면 α와 β를 각각 이면각의 면이라 한다.



(3) 이면각의 크기

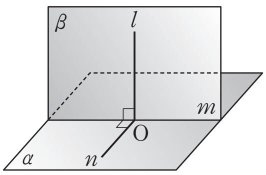
이면각의 변 l 위의 한 점 O를 지나고 l에 수직인 두 반직선 OA, OB를 각각 반평면 α, β 위에 그을 때, $\angle$AOB의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 일정하다. 이 일정한 각의 크기 θ를 이면각의 크기라 한다.

(4) 두 평면이 이루는 각

서로 다른 두 평면이 만나서 생기는 이면각 중에서 크기가 크지 않은 한 이면각의 크기를 두 평면이 이루는 각의 크기라 한다.

참고 두 평면 α, β에서 이면각의 크기가 $90°$일 때 두 평면 α, β는 서로 수직이라 하고, 기호로 $\alpha\perp\beta$와 같이 나타낸다.

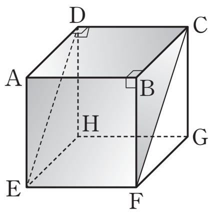
참고 직선 l이 평면 α에 수직일 때, 직선 l을 포함하는 평면 β는 평면 α와 수직임을 보이자.
그림과 같이 두 평면 α, β의 교선을 m이라 하고, 직선 l과 평면 α의 교점을 O라 하자.
평면 α 위에 점 O를 지나고 직선 m과 수직인 직선 n을 그으면 $l\perp\alpha$이므로 $l\perp n$이다.
이때 $l\perp m$, $m\perp n$이므로 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 두 직선 l, n이 이루는 각의 크기와 같다.
따라서 $\alpha\perp\beta$이다.



예 그림과 같은 정육면체 ABCD$-$EFGH에서

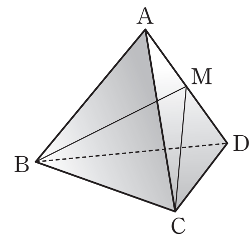
① $\overline{\text{DC}}\perp\overline{\text{AD}}$, $\overline{\text{DC}}\perp\overline{\text{ED}}$이고 $\angle\text{ADE}=45°$이므로 두 평면 ABCD, EFCD가 이루는 예각의 크기는 $45°$이다.

② $\overline{\text{AB}}\perp\overline{\text{BC}}$, $\overline{\text{AB}}\perp\overline{\text{BF}}$이고 $\angle\text{CBF}=90°$이므로 두 평면 ABCD, AEFB가 이루는 각의 크기는 $90°$이다.
즉, (평면 ABCD)$\perp$(평면 AEFB)이다.



예제 3 이면각

그림과 같이 모든 모서리의 길이가 2인 정사면체 ABCD에서 모서리 AD의 중점을 M이라 하고 두 평면 ABC와 MBC가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은?

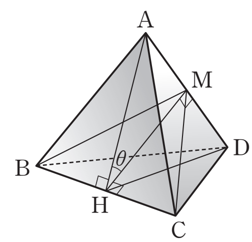


① $\frac{\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{\sqrt{2}}{2}$　③ 1　④ $\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

풀이 전략 두 평면이 이루는 각의 크기를 구할 때에는 두 평면의 교선 위의 한 점을 지나고 교선에 수직이 되도록 두 평면 위에 각각 그은 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하면 된다.

풀이 점 A에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\overline{AB}\times\sin 60^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$



이때 삼각형 AHD는 $\overline{AH}=\overline{DH}$인 이등변삼각형이고 점 M은 선분 AD의 중점이므로

$\overline{HM}\perp\overline{AD}$

또한 이등변삼각형 BCM과 정삼각형 ABC에서 점 H는 선분 BC의 중점이므로

$\overline{HM}\perp\overline{BC}$, $\overline{AH}\perp\overline{BC}$

따라서 이면각의 정의에 의하여 $\angle AHM=\theta$

이때 삼각형 AHM은 $\angle HMA=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$$\tan\theta=\frac{\overline{AM}}{\overline{HM}}=\frac{\overline{AM}}{\sqrt{\overline{AH}^2-\overline{AM}^2}}=\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

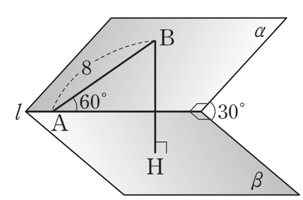
답 ②

정답과 풀이 37쪽

유제 4

[21012-0105]

그림과 같이 두 반평면 α, β가 이루는 이면각의 크기는 30°이고 교선 l 위의 한 점 A와 평면 α 위의 한 점 B에 대하여 선분 AB와 교선 l이 이루는 각의 크기는 60°이다. $\overline{AB}=8$이고 점 B에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 BH의 길이는?

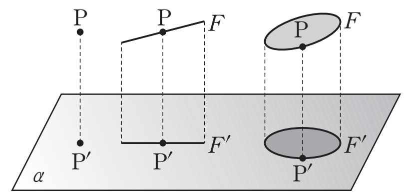


① $\sqrt{3}$　② $2\sqrt{3}$　③ $3\sqrt{3}$　④ $4\sqrt{3}$　⑤ $5\sqrt{3}$

7. 정사영

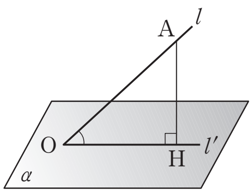
(1) 정사영

평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 P′을 점 P의 평면 α 위로의 정사영이라 한다. 또 도형 F에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영 전체로 이루어진 도형 F'을 도형 F의 평면 α 위로의 정사영이라 한다.



(2) 직선과 평면이 이루는 각

직선 l과 평면 α가 한 점에서 만나고 수직이 아닐 때, 직선 l의 평면 α 위로의 정사영 l'과 직선 l이 이루는 각을 직선 l과 평면 α가 이루는 각이라 한다. 즉, 직선 l이 평면 α와 점 O에서 만나고 수직이 아닐 때 직선 l 위의 O가 아닌 한 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 AOH에서 $\angle$AOH의 크기가 직선 l과 평면 α가 이루는 각의 크기이다.



참고 직선 l과 평면 α가 서로 평행할 때, 직선 l과 평면 α가 이루는 각의 크기는 0°이다.

(3) 정사영의 길이

선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$라 하면

$$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AB}} \cos\theta$$

설명 $0^\circ < \theta < 90^\circ$일 때, 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하면

$\overline{\mathrm{AA'}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{BB'}} \perp \alpha$이므로 $\overline{\mathrm{AA'}} /\!/ \overline{\mathrm{BB'}}$이다.

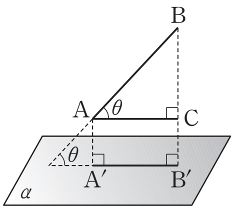
점 A에서 직선 BB′에 내린 수선의 발을 C라 하면 사각형 AA′B′C는 직사각형이므로

$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{A'B'}} /\!/ \overline{\mathrm{AC}}$이다.

따라서 $\angle\mathrm{BAC} = \theta$이고 직각삼각형 BAC에서 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AB}} \cos\theta$이므로

$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AB}} \cos\theta$가 성립한다.

한편, $\theta = 0^\circ$ 또는 $\theta = 90^\circ$일 때에도 $\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AB}} \cos\theta$가 성립한다.

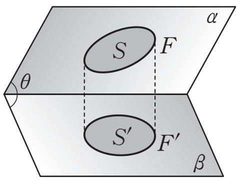


(4) 정사영의 넓이

평면 α 위의 도형 F의 평면 β 위로의 정사영을 F'이라 하고, F, F'의 넓이를 각각 S, S'이라 할 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 $\theta\ (0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$이면

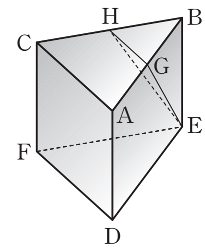
$$S' = S \cos\theta$$

참고 등식 $S' = S\cos\theta\ (0^\circ \le \theta < 90^\circ)$는 $S = \dfrac{S'}{\cos\theta}$ 또는 $\cos\theta = \dfrac{S'}{S}$으로 변형하여 사용할 수 있다.



예제 4 정사영

그림과 같이 모든 모서리의 길이가 4인 정삼각기둥 ABC$-$DEF에서 두 선분 AB, BC의 중점을 각각 G, H라 하자. 두 평면 GHE, ACFD가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $19\cos^2\theta$의 값을 구하시오. (단, $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$)



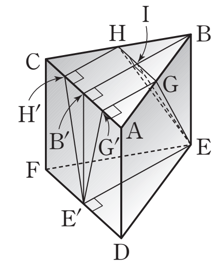
풀이 전략 평면 α 위의 도형 F의 평면 β 위로의 정사영을 F'이라 할 때, 두 도형 F, F'의 넓이가 각각 S, S'이고 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 θ $(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$이면 $S' = S\cos\theta$이다.

풀이 직각삼각형 EBH에서 $\overline{\mathrm{BE}}=4$, $\overline{\mathrm{BH}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{EH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BE}}^2+\overline{\mathrm{BH}}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

또 $\overline{\mathrm{GH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}}=2$이다.

선분 GH의 중점을 I라 하면 $\overline{\mathrm{GH}}\perp\overline{\mathrm{EI}}$이므로 $\overline{\mathrm{EI}}=\sqrt{\overline{\mathrm{EH}}^2-\overline{\mathrm{HI}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-1^2}=\sqrt{19}$

삼각형 GEH의 넓이를 S라 하면 $S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{GH}}\times\overline{\mathrm{EI}}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{19}=\sqrt{19}$



한편, 두 점 B, E에서 평면 ACFD에 내린 수선의 발을 각각 B′, E′이라 하면 두 점 B′, E′은 각각 선분 AC, DF의 중점이다.

또 두 점 G, H에서 평면 ACFD에 내린 수선의 발을 각각 G′, H′이라 하면 두 점 G′, H′은 각각 선분 AB′, CB′의 중점이다.

삼각형 GEH의 평면 ACFD 위로의 정사영은 삼각형 G′E′H′이고, 그 넓이를 S'이라 하면

$$S'=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{G'H'}}\times\overline{\mathrm{B'E'}}=\frac{1}{2}\times2\times4=4$$

따라서 $\cos\theta=\frac{S'}{S}=\frac{4}{\sqrt{19}}$이므로 $19\cos^2\theta=19\times\left(\frac{4}{\sqrt{19}}\right)^2=16$

답 16

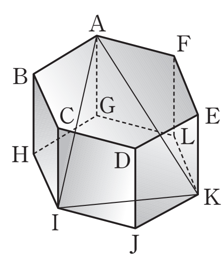
정답과 풀이 38쪽

유제 5

[21012-0106]

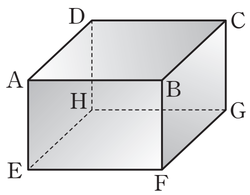
그림과 같이 모든 모서리의 길이가 2인 정육각기둥 ABCDEF$-$GHIJKL이 있다. 평면 AIK 위에 있는 반지름의 길이가 1인 원의 평면 GHIJKL 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. $\left(\frac{S}{\pi}\right)^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[21012-0107]

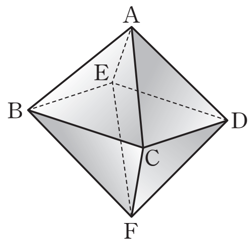
1 그림과 같은 직육면체 ABCD−EFGH가 있다. 다음 중 한 평면을 결정하지 않는 것은?



① 세 점 A, C, F　　② 점 B와 직선 CE
③ 직선 AE와 직선 EG　　④ 직선 DE와 직선 BG
⑤ 직선 AF와 직선 GD

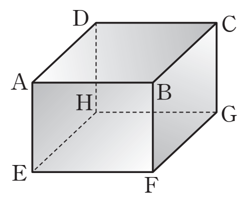
[21012-0108]

2 그림과 같은 정팔면체 ABCDEF의 모든 모서리를 연장한 직선 중에서 직선 AF와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수는 p이고, 직선 AD와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수는 q이다. $p+q$의 값을 구하시오.



[21012-0109]

3 그림과 같은 직육면체 ABCD−EFGH가 있다. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



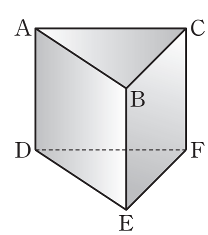
보기

ㄱ. 직선 DE와 직선 CF는 평행하다.
ㄴ. 직선 DE는 평면 ACF와 평행하다.
ㄷ. 평면 ACF와 평면 DEG는 평행하다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[21012-0110]

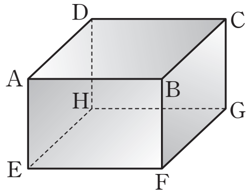
4 그림과 같이 밑면이 정삼각형이고 옆면이 정사각형인 삼각기둥 ABC−DEF가 있다. 직선 AB와 직선 EF가 이루는 예각의 크기를 α라 하고, 직선 AD와 직선 CE가 이루는 예각의 크기를 β라 할 때, $\cos\alpha\times\cos\beta$의 값은?



① $\frac{1}{4}$　② $\frac{\sqrt{2}}{4}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{4}$
④ $\frac{\sqrt{6}}{4}$　⑤ $\frac{3}{4}$

[21012-0111]

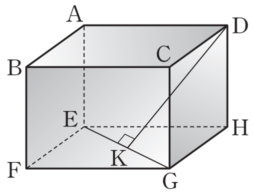
5 그림과 같은 직육면체 ABCD$-$EFGH에 대하여 다음 조건을 만족시키는 직선의 개수를 구하시오.



(가) 직육면체 ABCD$-$EFGH의 8개의 꼭짓점 중 두 점을 지난다.
(나) 직선 BF와 서로 수직이다.

[21012-0112]

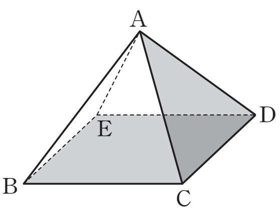
6 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{AD}}=2$, $\overline{\mathrm{AE}}=\sqrt{2}$인 직육면체 ABCD$-$EFGH가 있다. 점 D에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 K라 할 때, 선분 DK의 길이는 $\frac{\sqrt{n}}{5}$이다. 자연수 n의 값을 구하시오.



[21012-0113]

7 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 같은 정사각뿔 A$-$BCDE가 있다. 평면 ACD와 평면 BCDE가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

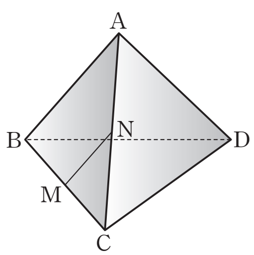
① $\frac{1}{2}$　② $\frac{\sqrt{3}}{3}$　③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{\sqrt{6}}{3}$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$



[21012-0114]

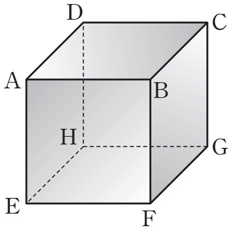
8 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정사면체 ABCD가 있다. 두 선분 BC, AC의 중점을 각각 M, N이라 할 때, 선분 MN의 평면 BCD 위로의 정사영의 길이는?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{\sqrt{2}}{6}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{6}$
④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{\sqrt{5}}{6}$



[21012-0115]

1 그림과 같은 정육면체 ABCD$-$EFGH가 있다. 평면 ABF와 평면 EHG의 교선을 l이라 하고, 평면 AFG와 평면 CDH의 교선을 m이라 할 때, 두 직선 l, m이 이루는 각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? (단, $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$)

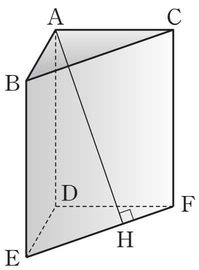


① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ 1

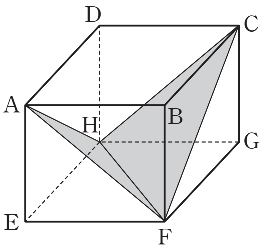
[21012-0116]

2 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{AC}=2$, $\overline{AD}=3$이고, $\angle EDF=120^\circ$인 삼각기둥 ABC$-$DEF가 있다. 꼭짓점 A에서 모서리 EF에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $7\times\overline{AH}^2$의 값을 구하시오.



[21012-0117]

3 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 EFGH를 밑면으로 하고 높이가 h인 정사각기둥 ABCD$-$EFGH가 있다. 평면 AFH와 평면 CFH가 서로 수직일 때, h의 값은?

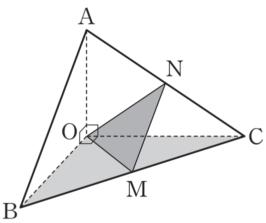


① $\frac{5}{4}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

[21012-0118]

4 그림과 같이 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=90^\circ$이고 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$인 삼각뿔 A$-$OBC가 있다. 선분 BC의 중점을 M, 선분 AC의 중점을 N이라 하자. 평면 OMN과 평면 OBC가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

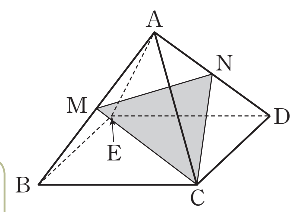


① $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　② $\dfrac{1}{2}$　　③ $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

④ $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　　⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

[21012-0119]

5 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 같은 정사각뿔 A$-$BCDE가 있다. 두 모서리 AB, AD의 중점을 각각 M, N이라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. $\overline{CE}\perp\overline{MN}$

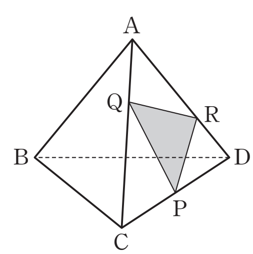
ㄴ. $\overline{AE}\perp\overline{MN}$

ㄷ. 평면 CMN과 평면 ABD가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$이다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄴ　　④ ㄱ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

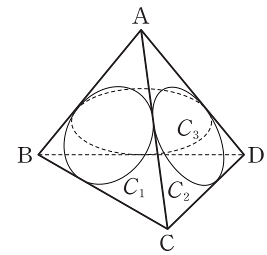
[21012-0120]

6 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정사면체 ABCD가 있다. 선분 CD의 중점을 P, 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점을 Q, 선분 AD를 $2:1$로 내분하는 점을 R라 하자. 삼각형 PQR의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이가 $\dfrac{q\sqrt{3}}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[21012-0121]

1 그림과 같이 한 모서리의 길이가 12인 정사면체 ABCD에서 세 삼각형 ABC, ACD, ABD에 내접하는 원을 각각 C_1, C_2, C_3이라 하고, 세 원 C_1, C_2, C_3 위의 점 중에서 점 A에 가장 가까운 점을 각각 P_1, P_2, P_3이라 하자. 삼각형 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는?



① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ 1

[21012-0122]

2 중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 구 위의 세 점 A, B, C가 $\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$, $\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$를 만족시킬 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 평면 AOC와 평면 BOC가 이루는 예각의 크기는 60°이다.

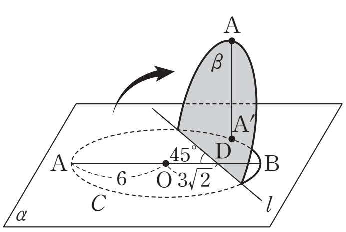
ㄴ. 평면 ABC와 평면 OAB가 이루는 예각의 크기를 α라 하면 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{21}}{7}$이다.

ㄷ. 직선 OB와 직선 AC가 이루는 예각의 크기를 β라 하면 $\cos\beta=\frac{1}{4}$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[21012-0123]

3 그림과 같이 평면 α 위에 놓인 종이에 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 원 C가 그려져 있다. 선분 OB 위에 $\overline{\mathrm{OD}}=3\sqrt{2}$인 점 D를 정하고 점 D를 지나며 선분 AB와 이루는 각의 크기가 45°인 직선 l을 평면 α 위에 그린다. 직선 l을 접는 선으로 하여 점 A를 포함하는 부분을 접을 때, 접힌 도형에서 점 A와 직선 l을 포함하는 평면을 β라 하고, 점 A의 평면 α 위로의 정사영을 A′이라 하자. 점 A′이 원 C 위의 점일 때, 두 평면 α와 β가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? (단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)

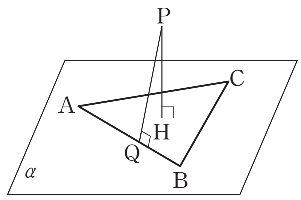


① $3-2\sqrt{2}$　② $2-\sqrt{3}$　③ $\sqrt{2}-1$　④ $2\sqrt{3}-3$　⑤ $2-\sqrt{2}$

대표 기출 문제

출제 경향 평면 위에 있지 않은 한 점에서 평면에 내린 수선의 발이 주어지고 평면 위에 한 직선이 주어진 상황에서 삼수선의 정리를 이용하여 선분의 길이를 구하는 문제가 출제된다.

그림과 같이 평면 α 위에 넓이가 24인 삼각형 ABC가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 직선 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 점 H가 삼각형 ABC의 무게중심이고, $\overline{\mathrm{PH}}=4$, $\overline{\mathrm{AB}}=8$일 때, 선분 PQ의 길이는? [3점]



① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{22}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{26}$

2019학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 삼수선의 정리와 삼각형의 무게중심의 성질을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발이 H이므로

$\overline{\mathrm{PH}}\perp\alpha$ …… ㉠

점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발이 Q이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{HQ}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$

한편, 점 H가 삼각형 ABC의 무게중심이고, 삼각형 ABC의 넓이가 24이므로 삼각형 ABH의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{3}$이다.

즉, $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{HQ}}=\frac{1}{3}\times24$이므로

$\frac{1}{2}\times8\times\overline{\mathrm{HQ}}=\frac{1}{3}\times24$

따라서 $\overline{\mathrm{HQ}}=2$이므로 직각삼각형 PQH에서

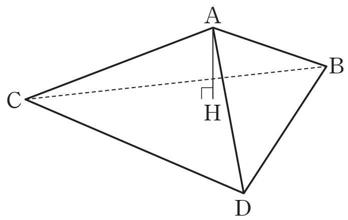
$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PH}}^2+\overline{\mathrm{HQ}}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

답 ②

대표 기출 문제

출제 경향 평면 위에 있지 않은 한 점에서 평면에 내린 수선의 발이 주어지고 직선과 평면이 수직일 조건을 이용하여 선분의 길이를 구하는 문제가 출제된다.

한 변의 길이가 12인 정삼각형 BCD를 한 면으로 하는 사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 놓여 있다. 삼각형 CDH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 3배, 삼각형 DBH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 2배이고 $\overline{\mathrm{AH}}=3$이다. 선분 BD의 중점을 M, 점 A에서 선분 CM에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 선분 AQ의 길이는? [4점]

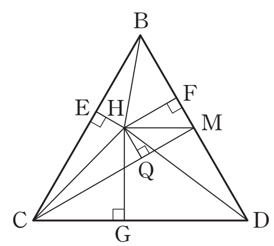


① $\sqrt{11}$　② $2\sqrt{3}$　③ $\sqrt{13}$　④ $\sqrt{14}$　⑤ $\sqrt{15}$

2019학년도 대수능

출제 의도 삼각형의 넓이의 비와 삼수선의 정리를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 점 H에서 세 선분 BC, BD, CD에 내린 수선의 발을 각각 E, F, G라 하자.



$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{DB}}=12$이고 삼각형 CDH의 넓이가 삼각형 BCH의 넓이의 3배, 삼각형 DBH의 넓이가 삼각형 BCH의 넓이의 2배이므로

$\overline{\mathrm{HE}}=k$, $\overline{\mathrm{HF}}=2k$, $\overline{\mathrm{HG}}=3k$ $(k>0)$

으로 놓을 수 있다. 이때 정삼각형 BCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times12\times(k+2k+3k)=36k$

이고, 한 변의 길이가 12인 정삼각형의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times12^2=36\sqrt{3}$이므로 $S=36k=36\sqrt{3}$에서 $k=\sqrt{3}$

한편, 삼각형 CDH의 넓이는 $\frac{1}{2}S$이고 삼각형 CDM의 넓이도 $\frac{1}{2}S$이므로

$\overline{\mathrm{HM}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{CD}}$　…… ㉠

또 삼각형 DBH의 넓이는 $\frac{1}{3}S$이고 $\overline{\mathrm{DM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BD}}$이므로 삼각형 DMH의 넓이는 $\frac{1}{6}S$이다.

한편, $\overline{\mathrm{AH}}\perp$(평면 BCD), $\overline{\mathrm{AQ}}\perp\overline{\mathrm{CM}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{HQ}}\perp\overline{\mathrm{CM}}$

이때 ㉠에 의하여 삼각형 CMH의 넓이도 $\frac{1}{6}S$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CM}}\times\overline{\mathrm{HQ}}=\frac{1}{6}\times36\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}\times6\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{HQ}}=6\sqrt{3}$

따라서 $\overline{\mathrm{HQ}}=2$이므로 직각삼각형 AHQ에서

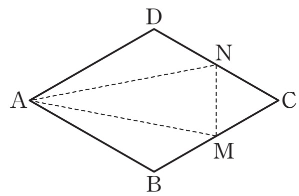
$\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{HQ}}^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

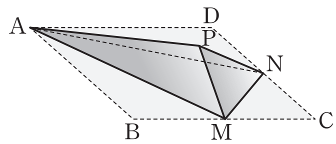
답 ③

대표 기출 문제

출제 경향 도형의 길이 또는 넓이를 구하고, 두 평면의 이면각의 크기를 구하여 정사영의 길이 또는 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

그림과 같이 한 변의 길이가 4이고 $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$인 마름모 ABCD 모양의 종이가 있다. 변 BC와 변 CD의 중점을 각각 M과 N이라 할 때, 세 선분 AM, AN, MN을 접는 선으로 하여 사면체 PAMN이 되도록 종이를 접었다. 삼각형 AMN의 평면 PAM 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 고려하지 않으며 P는 종이를 접었을 때 세 점 B, C, D가 합쳐지는 점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]





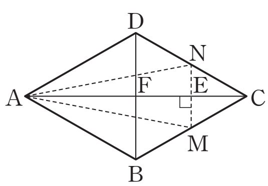
2020학년도 대수능

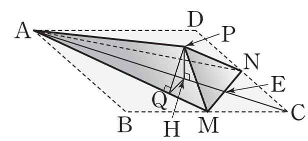
출제 의도 이면각의 뜻과 삼수선의 정리를 이용하여 정사영의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 두 점 M, N은 각각 두 변 BC, CD의 중점이므로 $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times4=2$

두 삼각형 ABD, BCD는 모두 정삼각형이므로 두 선분 MN, AC의 중점을 각각 E, F라 하면

$\overline{AE}=\frac{3}{2}\overline{AF}=3\sqrt{3}$





삼각형 AMN의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{MN}\times\overline{AE}=3\sqrt{3}$

점 P에서 평면 AMN에 내린 수선의 발을 H,

점 P에서 선분 AM에 내린 수선의 발을 Q라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HQ}\perp\overline{AM}$이므로 평면 AMN과 평면 PAM이 이루는 각의 크기 θ $(0^\circ\le\theta\le90^\circ)$는 $\theta=\angle HQP$이다.

$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{ME}^2}=2\sqrt{7}$이고 $\angle APM=\angle ABC=120^\circ$이므로 삼각형 PAM의 넓이에서

$\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{MP}\times\sin120^\circ=\frac{1}{2}\times\overline{AM}\times\overline{PQ}$, $\frac{1}{2}\times4\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{7}\times\overline{PQ}$, $\overline{PQ}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$

한편, $\overline{HE}=k$라 하면 두 직각삼각형 AHP, EHP에서

$\overline{AP}^2-\overline{AH}^2=\overline{EP}^2-\overline{EH}^2$, 즉 $4^2-(3\sqrt{3}-k)^2=(\sqrt{3})^2-k^2$이므로 $k=\frac{7\sqrt{3}}{9}$

따라서 직각삼각형 PHE에서 $\overline{PH}=\sqrt{\overline{PE}^2-\overline{HE}^2}=\frac{4\sqrt{6}}{9}$

이때 직각삼각형 PHQ에서 $\overline{HQ}=\sqrt{\overline{PQ}^2-\overline{PH}^2}=\frac{10\sqrt{21}}{63}$이므로 $\cos\theta=\frac{\overline{HQ}}{\overline{PQ}}=\frac{5}{9}$

그러므로 삼각형 AMN의 평면 PAM 위로의 정사영의 넓이는 $S\times\cos\theta=3\sqrt{3}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{3}\sqrt{3}$

따라서 $p+q=3+5=8$

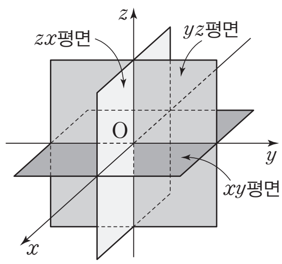
답 8

07 공간좌표

1. 공간좌표

(1) 좌표공간

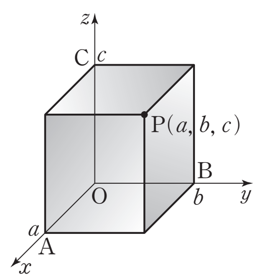
그림과 같이 공간의 한 점 O에서 서로 직교하는 세 수직선을 그어 각각 x축, y축, z축이라 하고, 점 O를 원점이라 한다. 이때 x축, y축, z축을 통틀어 좌표축이라 하고, 좌표축으로 정해진 공간을 좌표공간이라 한다. 또 x축과 y축을 포함하는 평면을 xy평면, y축과 z축을 포함하는 평면을 yz평면, z축과 x축을 포함하는 평면을 zx평면이라 하고, 이 세 평면을 통틀어 좌표평면이라 한다.



(2) 공간좌표

그림과 같이 좌표공간의 한 점 P에 대하여 점 P를 지나면서 x축, y축, z축과 수직인 평면이 각각 x축, y축, z축과 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자. 이때 세 점 A, B, C의 x축, y축, z축 위에서의 좌표를 각각 a, b, c라 하면 점 P와 세 실수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 일대일로 대응된다.

이와 같이 좌표공간의 점 P에 대응하는 세 실수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$를 점 P의 공간좌표라 하고, 기호로 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$와 같이 나타낸다. 이때 a, b, c를 각각 점 P의 x좌표, y좌표, z좌표라 한다.



(3) 좌표공간의 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$의 수선의 발의 좌표

① 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$에서 x축, y축, z축에 내린 수선의 발의 좌표는 각각

$(a,\ 0,\ 0)$, $(0,\ b,\ 0)$, $(0,\ 0,\ c)$

② 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$에서 xy평면, yz평면, zx평면에 내린 수선의 발의 좌표는 각각

$(a,\ b,\ 0)$, $(0,\ b,\ c)$, $(a,\ 0,\ c)$

예 점 $\mathrm{P}(-2,\ 1,\ 3)$에서 x축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(-2,\ 0,\ 0)$, xy평면에 내린 수선의 발의 좌표는 $(-2,\ 1,\ 0)$이다.

(4) 좌표공간의 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$를 대칭이동시킨 점의 좌표

① 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$를 x축, y축, z축에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 각각

$(a,\ -b,\ -c)$, $(-a,\ b,\ -c)$, $(-a,\ -b,\ c)$

② 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$를 xy평면, yz평면, zx평면에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 각각

$(a,\ b,\ -c)$, $(-a,\ b,\ c)$, $(a,\ -b,\ c)$

③ 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는

$(-a,\ -b,\ -c)$

예 점 $\mathrm{P}(-2,\ 1,\ 3)$을 y축에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $(2,\ 1,\ -3)$, yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $(2,\ 1,\ 3)$, 원점에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $(2,\ -1,\ -3)$이다.

예제 1 공간좌표

좌표공간의 점 P$(3,\ 4,\ 5)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 A, 점 P에서 y축, z축에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 할 때, 사면체 OABC의 부피는? (단, O는 원점이다.)

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

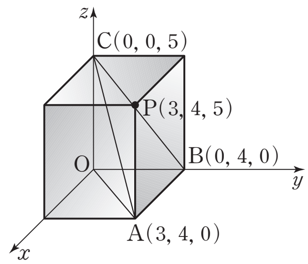
풀이 전략 점 P$(a,\ b,\ c)$에서 xy평면에 내린 수선의 발의 좌표는 $(a,\ b,\ 0)$이고, y축, z축에 내린 수선의 발의 좌표는 각각 $(0,\ b,\ 0)$, $(0,\ 0,\ c)$임을 이용한다.

풀이 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발은 A$(3,\ 4,\ 0)$
점 P에서 y축에 내린 수선의 발은 B$(0,\ 4,\ 0)$
점 P에서 z축에 내린 수선의 발은 C$(0,\ 0,\ 5)$
이때 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6$이고,

$\overline{OC}=5$이다.
따라서 사면체 OABC의 부피는

$\frac{1}{3}\times 6\times 5=10$



답 ③

정답과 풀이 47쪽

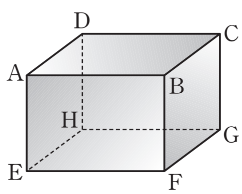
[21012-0124]

유제 1 좌표공간의 점 P$(2,\ -1,\ 3)$을 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q, 점 Q를 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 R라 하자. 점 R의 좌표가 $(a,\ b,\ c)$일 때, $a+b+c$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

[21012-0125]

유제 2 좌표공간에서 직육면체 ABCD$-$EFGH는 다음 조건을 만족시킨다.



(가) 세 모서리 AD, AB, AE가 각각 x축, y축, z축에 평행하다.
(나) 점 E를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점은 점 G이다.
(다) 꼭짓점 B의 좌표는 $(2,\ 3,\ 5)$이다.

꼭짓점 H의 좌표가 $(a,\ b,\ c)$일 때, $(a+b+c)^2$의 값을 구하시오.

2. 좌표공간의 두 점 사이의 거리

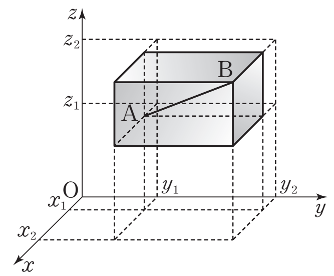
⑴ 좌표공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

⑵ 좌표공간의 원점 O와 점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA}=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}$$

설명 좌표공간에서의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리는 직선 AB가 세 좌표평면에 평행하지 않은 경우, 그림과 같이 두 점 A, B를 꼭짓점으로 하고 세 좌표평면에 평행한 6개의 평면으로 이루어진 직육면체를 생각하면 선분 AB는 직육면체의 대각선이다.



그런데 직육면체의 세 모서리의 길이가

$|x_2-x_1|$, $|y_2-y_1|$, $|z_2-z_1|$

이므로 두 점 A, B 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

또한 직선 AB가 세 좌표평면 중 어느 한 평면에 평행한 경우에도 위의 식은 성립한다.

참고 ① 두 점 A, B가 xy평면 위에 있을 때에는 z좌표가 0이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

즉, 평면 위의 두 점 사이의 거리에 대한 공식과 일치함을 알 수 있다.

② 두 점 A, B가 x축 위에 있을 때에는 y좌표와 z좌표가 모두 0이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|$$

즉, 수직선 위의 두 점 사이의 거리에 대한 공식과 일치함을 알 수 있다.

예 ① 원점 O와 점 $P(2, -2, 3)$ 사이의 거리는

$$\overline{OP}=\sqrt{2^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{17}$$

② 두 점 $A(2, -2, 3)$, $B(-2, 0, 1)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(-2-2)^2+\{0-(-2)\}^2+(1-3)^2}=2\sqrt{6}$$

예제 2 좌표공간의 두 점 사이의 거리

좌표공간의 두 점 $A(1, 2, t)$, $B(-1, t, 4)$에 대하여 선분 AB의 길이의 최솟값은? (단, t는 실수이다.)

① 2 ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

풀이 전략 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

풀이 $\overline{AB}=\sqrt{(-1-1)^2+(t-2)^2+(4-t)^2}$

$=\sqrt{2t^2-12t+24}$

$=\sqrt{2(t-3)^2+6}$

따라서 $t=3$일 때 선분 AB의 길이의 최솟값은 $\sqrt{6}$이다.

답 ②

정답과 풀이 47쪽

[21012-0126]

유제 3 좌표공간의 점 $A(2, -1, 3)$을 원점에 대하여 대칭이동시킨 점을 B라 하자. 점 $C(3, 2, 1)$에 대하여 선분 BC의 길이는?

① $\sqrt{38}$ ② $\sqrt{39}$ ③ $2\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{41}$ ⑤ $\sqrt{42}$

[21012-0127]

유제 4 좌표공간의 세 점 $A(3, 3, 0)$, $B(3, 0, 3)$, $C(0, 2, a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형일 때, 모든 실수 a의 값의 합은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

3. 선분의 내분점과 외분점

(1) 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점

좌표공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$에 대하여

① 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

② 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0, m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

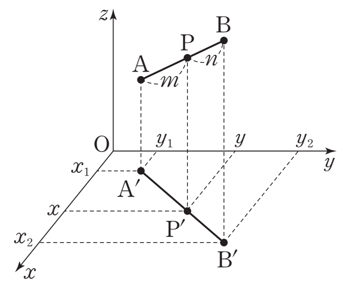
③ 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

설명 좌표공간의 세 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $P(x, y, z)$의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A', B', P'이라 하면

$A'(x_1, y_1, 0)$, $B'(x_2, y_2, 0)$, $P'(x, y, 0)$이고 $\overline{AP} : \overline{PB}=m : n$이면

$\overline{A'P'} : \overline{P'B'}=m : n$이다.



따라서 선분 $A'B'$의 내분점의 좌표를 xy평면 위에서 생각하면

$x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$, $y=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$이다. 마찬가지로 세 점 A, B, P의 yz평면(또는 zx평면) 위로의 정사영을 이용하여 점 P의 z좌표를 구하면

$z=\dfrac{mz_2+nz_1}{m+n}$이므로 점 P의 좌표는 $P\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}, \dfrac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$이다.

또 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$를 이은 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0, m\neq n)$으로 외분하는 점의 좌표도 같은 방법으로 구할 수 있다.

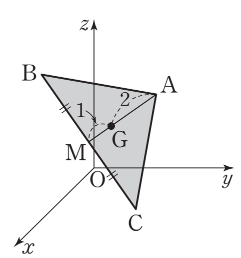
(2) 좌표공간에서 삼각형의 무게중심

좌표공간의 삼각형 ABC에 대하여 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$일 때, 무게중심 G의 좌표는

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

설명 변 BC의 중점을 $M(x_4, y_4, z_4)$라 하면

$$x_4=\frac{x_2+x_3}{2},\ y_4=\frac{y_2+y_3}{2},\ z_4=\frac{z_2+z_3}{2}$$



무게중심 G의 좌표를 (x, y, z)라 하면 점 G는 선분 AM을 $2 : 1$로 내분하는 점이므로

$$x=\frac{2x_4+x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y=\frac{2y_4+y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3},$$

$$z=\frac{2z_4+z_1}{2+1}=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

즉, $G\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}, \dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$이다.

예제 3 공간에서 선분의 내분점과 외분점

좌표공간의 두 점 A$(6,\ -1,\ a)$, B$(b,\ 5,\ 4)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점은 xy평면 위에 있고, 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점은 yz평면 위에 있을 때, $a+b$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

풀이 전략 좌표공간의 두 점 A$(x_1,\ y_1,\ z_1)$, B$(x_2,\ y_2,\ z_2)$에 대하여

(1) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

(2) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n},\ \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

임을 이용한다.

풀이 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 xy평면 위에 있으므로 이 점의 z좌표는 0이다.

즉, $\dfrac{2\times4+1\times a}{2+1}=0$에서 $a=-8$

또 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점이 yz평면 위에 있으므로 이 점의 x좌표는 0이다.

즉, $\dfrac{2\times b-1\times6}{2-1}=0$에서 $b=3$

따라서 $a+b=-8+3=-5$

답 ①

정답과 풀이 47쪽

[21012-0128]

유제 5 좌표공간의 점 P$(2,\ 10,\ -5)$를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q라 하자. 선분 PQ를 $3:2$로 내분하는 점을 R라 할 때, 선분 OR의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

[21012-0129]

유제 6 좌표공간의 세 점 A$(8,\ 1,\ 9)$, B$(5,\ -3,\ 6)$, C$(-1,\ -4,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G, 선분 OG의 중점을 M이라 하자. 점 M의 좌표가 $(a,\ b,\ c)$일 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

4. 구의 방정식

(1) 구

공간에서 한 정점으로부터 일정한 거리에 있는 점 전체의 집합을 구라 한다. 이때 정점을 구의 중심, 구의 중심과 구 위의 한 점을 이은 선분을 구의 반지름이라 한다.

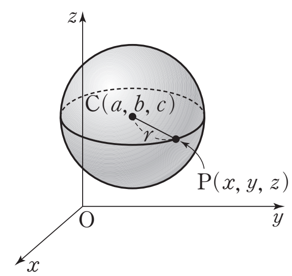
(2) 구의 방정식

좌표공간에서 중심이 $C(a, b, c)$이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

특히 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$x^2+y^2+z^2=r^2$



예 ① 중심의 좌표가 $(2, -3, 1)$이고 반지름의 길이가 5인 구의 방정식은

$(x-2)^2+\{y-(-3)\}^2+(z-1)^2=5^2$

즉, $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=25$

② 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 구의 방정식은 $x^2+y^2+z^2=4$

(3) 방정식 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$이 나타내는 도형

방정식 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$을 변형하면

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2+C^2-4D}{4}$$

이므로 $A^2+B^2+C^2-4D>0$이면 중심이 점 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$인 구를 나타낸다.

예 방정식 $x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0$은

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$

이므로 중심의 좌표가 $(-1, 2, 3)$이고 반지름의 길이가 3인 구를 나타낸다.

또한 중심의 z좌표 3이 반지름의 길이 3과 같으므로 구는 xy평면과 접한다.

참고 구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$이 좌표평면 또는 좌표축과 접할 조건은 다음과 같다.

① xy평면과 접하는 경우 : $r=|c|$

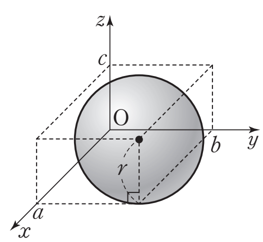
② yz평면과 접하는 경우 : $r=|a|$

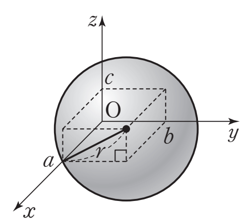
③ zx평면과 접하는 경우 : $r=|b|$

④ x축에 접하는 경우 : $r=\sqrt{b^2+c^2}$

⑤ y축에 접하는 경우 : $r=\sqrt{a^2+c^2}$

⑥ z축에 접하는 경우 : $r=\sqrt{a^2+b^2}$





예제 4 구의 방정식

좌표공간의 두 점 $A(3,\ 3,\ -1)$, $B(-5,\ 1,\ 3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 구와 zx평면이 만나서 생기는 도형의 넓이는?

① 13π ② 14π ③ 15π ④ 16π ⑤ 17π

풀이 전략 중심이 $C(a, b, c)$이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

풀이 두 점 $A(3,\ 3,\ -1)$, $B(-5,\ 1,\ 3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{3+(-5)}{2},\ \frac{3+1}{2},\ \frac{-1+3}{2}\right)$$

즉, $C(-1,\ 2,\ 1)$

$\overline{CA}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(3-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{21}$이므로 구의 반지름의 길이는 $\sqrt{21}$이다.

이때 중심이 $C(-1,\ 2,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{21}$인 구의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=21 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 구와 zx평면이 만나서 생기는 도형은 ㉠에 $y=0$을 대입하면

$$(x+1)^2+(0-2)^2+(z-1)^2=21,\ \text{즉}\ (x+1)^2+(z-1)^2=17,\ y=0$$

이므로 중심이 점 $(-1,\ 0,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{17}$인 zx평면 위의 원이다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\pi\times(\sqrt{17})^2=17\pi$$

답 ⑤

정답과 풀이 47쪽

[21012-0130]

유제 7 좌표공간에서 점 $(-3,\ 0,\ 2)$를 중심으로 하고 yz평면에 접하는 구의 방정식은 $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$이다. $a+b+c+d$의 값을 구하시오. (단, a, b, c, d는 상수이다.)

[21012-0131]

유제 8 좌표공간에서 점 $C(0,\ a,\ 3)$을 중심으로 하는 구가 y축과 두 점 $A(0,\ -3,\ 0)$, $B(0,\ 5,\ 0)$에서 만난다. 이 구가 z축과 만나는 두 점을 각각 D, E라 할 때, 삼각형 BDE의 넓이는?

① $6\sqrt{6}$ ② $7\sqrt{6}$ ③ $8\sqrt{6}$ ④ $9\sqrt{6}$ ⑤ $10\sqrt{6}$

[21012-0132]

1 좌표공간의 점 $(1, -2, -1)$에서 z축에 내린 수선의 발의 좌표는 (a, b, c)이다. $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[21012-0133]

2 좌표공간의 점 $(2, 3, -1)$을 zx평면에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는?

① $(-2, 3, -1)$ ② $(-2, 3, 1)$ ③ $(2, -3, -1)$ ④ $(2, -3, 1)$ ⑤ $(2, 3, 1)$

[21012-0134]

3 좌표공간에서 두 점 $(1, 0, 2)$, $(-1, a, 3)$ 사이의 거리가 5일 때, a^2의 값을 구하시오.

[21012-0135]

4 좌표공간에서 다음 조건을 만족시키는 점 P의 개수는?

(가) 점 P는 zx평면 위에 있다.
(나) 점 P와 xy평면 사이의 거리는 1이고, 점 P와 yz평면 사이의 거리도 1이다.

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

[21012-0136]

5 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 1,\ 4)$, $\mathrm{B}(0,\ -2,\ 2)$에 대하여 선분 AB를 $3:4$로 외분하는 점의 z좌표를 구하시오.

[21012-0137]

6 좌표공간의 두 점 $(2,\ -1,\ a)$, $(b,\ c,\ -3)$이 서로 원점에 대하여 대칭일 때, $a+b+c$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

[21012-0138]

7 좌표공간의 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{A}(-3,\ a,\ 4)$, $\mathrm{B}(6,\ 5,\ -a)$에 대하여 삼각형 OAB의 무게중심의 y좌표와 z좌표가 서로 같을 때, a의 값은?

① $-\frac{5}{6}$　② $-\frac{2}{3}$　③ $-\frac{1}{2}$　④ $-\frac{1}{3}$　⑤ $-\frac{1}{6}$

[21012-0139]

8 좌표공간에서 구 $(x+2)^2+(y+a)^2+(z-1)^2=2a$의 반지름의 길이가 4일 때, 이 구의 중심의 y좌표는?

(단, a는 양수이다.)

① -8　② -4　③ -2　④ 4　⑤ 8

[21012-0140]

1 좌표공간의 점 $\mathrm{A}(a, b, a-b)$에서 xy평면에 내린 수선의 발이 $\mathrm{H}(2, -4, 0)$일 때, 삼각형 OAH의 넓이는?
(단, O는 원점이다.)

① $5\sqrt{5}$ ② $6\sqrt{5}$ ③ $7\sqrt{5}$ ④ $8\sqrt{5}$ ⑤ $9\sqrt{5}$

[21012-0141]

2 좌표공간의 세 점 $\mathrm{A}(-4, 2, 0)$, $\mathrm{B}(2, 8, a)$, $\mathrm{C}(b, 4, -2)$에 대하여 점 C는 선분 AB 위에 있고, $\overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{CB}} = 1 : c$일 때, $a+b+c$의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

[21012-0142]

3 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(2, 3, 4)$, $\mathrm{B}(2, 5, 2)$에 대하여 선분 AB의 중점을 M이라 하고, 점 M에서 yz평면에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 ABH의 무게중심의 좌표를 (a, b, c)라 할 때, $a \times b \times c$의 값을 구하시오.

[21012-0143]

4 좌표공간에서 원점 O, 점 $\mathrm{A}(2, 0, 0)$과 점 $\mathrm{B}(p, q, r)$ $(q>0, r>0)$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 삼각형 OAB는 정삼각형이다.
> (나) 직선 AB와 xy평면이 이루는 예각의 크기는 $30°$이다.

$p \times q \times r$의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

[21012-0144]

5 좌표공간에 세 점 $\mathrm{A}(2,\ -2,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ 0,\ 3)$, $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$가 있다. 점 C를 zx평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 D라 할 때, 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $b<0$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=6$이다.
(나) 세 점 A, B, D는 한 직선 위에 있다.

$a+b+c$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[21012-0145]

6 좌표공간에서 구 $(x-a)^2+(y-a+1)^2+(z-a+2)^2=49$와 zx평면이 만나서 생기는 원의 넓이가 24π일 때, 양수 a의 값은?

① 5　② $3\sqrt{3}$　③ $4\sqrt{2}$　④ 6　⑤ $2\sqrt{10}$

[21012-0146]

7 좌표공간에 점 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ a)$와 xy평면 위에 있는 원 C : $x^2+y^2=9$가 있다. 원 C 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킬 때, 양수 a의 값은?

(가) $\overline{\mathrm{PQ}}=2$
(나) 평면 APQ와 xy평면이 이루는 예각의 크기는 60°이다.

① $2\sqrt{2}$　② $2\sqrt{3}$　③ 4　④ $2\sqrt{5}$　⑤ $2\sqrt{6}$

[21012-0147]

8 좌표공간에서 구 S : $(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$와 xy평면이 만나서 생기는 원을 C라 하자. 구 S의 중심 A와 원 C 위의 점 P에 대하여 직선 AP와 직선 OP가 서로 수직일 때, 선분 OP의 길이는?

(단, O는 원점이다.)

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{3}$　③ 2　④ $\sqrt{5}$　⑤ $\sqrt{6}$

[21012-0148]

1 좌표공간에 있는 구 S와 xy평면, yz평면, zx평면이 만나서 생기는 원을 각각 C_1, C_2, C_3이라 하면 세 원 C_1, C_2, C_3이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 세 원 C_1, C_2, C_3의 넓이는 각각 π, 4π, 9π이다.
> (나) 두 원 C_2, C_3은 한 점에서만 만난다.

구 S의 중심의 좌표를 (a, b, c)라 할 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오.

[21012-0149]

2 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(2, 1, 2)$, $\mathrm{B}(-1, -2, -3)$과 구 $S : x^2+y^2+z^2=4$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 점 P가 나타내는 도형의 길이를 l이라 할 때, $\left(\frac{l}{\pi}\right)^2$의 값을 구하시오.

> (가) 점 P는 구 S 위에 있다.
> (나) 세 점 A, B, P는 xy평면과 수직인 한 평면 위에 있다.

[21012-0150]

3 좌표공간에서 점 $\mathrm{A}(2, 3, 2\sqrt{3})$과 구 $S : x^2+y^2+z^2=9$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 점 P를 포함하는 평면을 α라 하자.

> 선분 AP를 $1 : p\ (p>0)$으로 내분하는 점을 Q라 하면 직선 AP와 구 S는 점 Q에서 접한다.

평면 α가 구 S에 접할 때, 상수 p의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

대표 기출 문제

출제 경향 좌표공간에서 선분의 내분점 또는 외분점의 좌표를 구하거나, 내분점 또는 외분점이 좌표평면 또는 좌표축 위에 있을 조건을 묻는 문제가 출제된다.

좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ a,\ -6)$, $\mathrm{B}(-3,\ 2,\ b)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점이 x축 위에 있을 때, $a+b$의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

2017학년도 대수능

출제 의도 좌표공간에서 선분을 외분하는 점의 좌표를 구할 수 있는지, 그리고 x축 위의 모든 점은 y좌표와 z좌표가 모두 0임을 알고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 두 점 $\mathrm{A}(1,\ a,\ -6)$, $\mathrm{B}(-3,\ 2,\ b)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\times(-3)-2\times1}{3-2},\ \frac{3\times2-2\times a}{3-2},\ \frac{3\times b-2\times(-6)}{3-2}\right)$$

즉, $(-11,\ 6-2a,\ 3b+12)$ $\cdots\cdots$ ㉠

그런데 점 ㉠은 x축 위에 있으므로 y좌표와 z좌표는 모두 0이어야 한다.

즉, $6-2a=0$이고 $3b+12=0$이어야 하므로

$a=3,\ b=-4$

따라서 $a+b=3+(-4)=-1$

답 ①

대표 기출 문제

출제 경향 좌표공간에서 점 또는 직선의 xy평면 위로의 정사영과 이차곡선의 위치 관계를 묻는 문제가 출제된다.

좌표공간에 점 $\mathrm{A}(9,\ 0,\ 5)$가 있고, xy평면 위에 타원 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$이 있다. 타원 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}$의 최댓값을 구하시오. [3점]

2012학년도 대수능

출제 의도 좌표공간의 한 점에서 xy평면에 내린 수선의 발을 구하고, 직선과 평면의 수직 조건을 이용하여 좌표공간의 점과 xy평면 위에 있는 타원 위의 점 사이의 거리의 최댓값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 점 $\mathrm{A}(9,\ 0,\ 5)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\mathrm{H}(9,\ 0,\ 0)$이므로

$$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{(9-9)^2+(0-0)^2+(0-5)^2}=5$$

한편, xy평면 위에 있는 타원 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 위의 점 P는 xy평면 위에 있으므로

$$\angle\mathrm{AHP}=90^\circ$$

따라서 직각삼각형 AHP에서

$$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{HP}}^2}=\sqrt{5^2+\overline{\mathrm{HP}}^2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

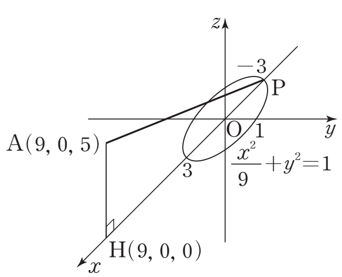
이때 오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{HP}}$는 점 P가 $(-3,\ 0,\ 0)$일 때 최댓값

$$\sqrt{(-3-9)^2+(0-0)^2+(0-0)^2}=12$$

를 갖는다.

따라서 ㉠에서 $\overline{\mathrm{AP}}$의 최댓값은

$$\sqrt{5^2+12^2}=13$$



답 13

대표 기출 문제

출제 경향 좌표공간에서 한 점과 구 위의 점 사이의 거리에 대한 문제, 구와 평면이 접할 조건, 구와 평면이 만나서 생기는 원에 대한 문제, 구의 평면 위로의 정사영에 대한 문제가 출제된다.

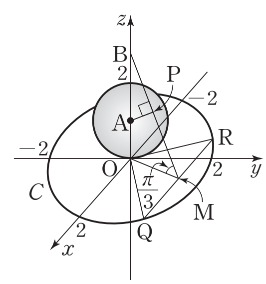
좌표공간에 구 $S : x^2+y^2+(z-1)^2=1$과 xy평면 위의 원 $C : x^2+y^2=4$가 있다. 구 S와 점 P에서 접하고 원 C 위의 두 점 Q, R를 포함하는 평면이 xy평면과 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이다. 점 P의 z좌표가 1보다 클 때, 선분 QR의 길이는? [4점]

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

2018학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 좌표공간에서 구와 평면이 접할 조건을 이해하고, 삼수선의 정리를 이용하여 두 평면이 이루는 각의 크기를 구한 다음, 원의 현의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 구 S의 중심 $(0,\ 0,\ 1)$을 A라 하고, 구 S와 점 P에서 접하고 두 점 Q, R를 포함하는 평면이 z축과 만나는 점을 B라 하자. 이등변삼각형 OQR에서 선분 QR의 중점을 M이라 하면



$\overline{\mathrm{BO}}\perp(xy\text{평면})$, $\overline{\mathrm{OM}}\perp\overline{\mathrm{QR}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{BM}}\perp\overline{\mathrm{QR}}$

이때 xy평면과 평면 BQR의 교선은 직선 QR이고

$\overline{\mathrm{OM}}\perp\overline{\mathrm{QR}}$, $\overline{\mathrm{BM}}\perp\overline{\mathrm{QR}}$이므로 xy평면과 평면 BQR가 이루는 예각의 크기는

$\angle\mathrm{OMB}=\frac{\pi}{3}$

직각삼각형 BAP에서 $\angle\mathrm{ABP}=\frac{\pi}{6}$이고 선분 AP의 길이는 구 S의 반지름의 길이인 1이므로

$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$, 즉 $\frac{1}{2}=\frac{1}{\overline{\mathrm{AB}}}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}=2$

이때 $\overline{\mathrm{OA}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}=1+2=3$

따라서 직각삼각형 MOB에서

$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OM}}}$, 즉 $\sqrt{3}=\frac{3}{\overline{\mathrm{OM}}}$이므로

$\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{3}$

따라서 이등변삼각형 OQR와 직각삼각형 OMQ에서

$\overline{\mathrm{QR}}=2\overline{\mathrm{MQ}}=2\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OM}}^2}=2\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=2$

답 ④

고1~2 내신 중점 로드맵

과목	고교 입문		기초		기본	특화	단기
국어	고등 예비 과정	내 등급은?	윤혜정의 나비효과 입문편 어휘가 독해다!		기본서 올림포스	국어 특화: 국어 독해의 원리 / 국어 문법의 원리	단기 특강
영어	고등 예비 과정	내 등급은?			기본서 올림포스 전국연합 학력평가 기출문제집	영어 특화: Grammar POWER / Reading POWER / Listening POWER / Voca POWER	단기 특강
수학	고등 예비 과정	내 등급은?	기초 50일 수학	초급 올림포스 닥터링	기본서 올림포스 전국연합 학력평가 기출문제집	고급 올림포스 고난도 수학 특화 수학의 왕도	단기 특강
사회	고등 예비 과정				기본서 개념완성 + 개념완성 문항편		
과학	고등 예비 과정				기본서 개념완성 + 개념완성 문항편	인공지능 수학과 함께하는 AI 기초	

과목	시리즈명	특징	수준	대상
전과목	고등예비과정	예비 고등학생을 위한 과목별 단기 완성		예비 고1
국/영/수	내 등급은?	고1 첫 학력평가 + 반 배치고사 대비 모의고사		예비 고1
국/영/수	올림포스	내신과 수능 대비 EBS 대표 국어 · 수학 · 영어 기본서		고1~2
국/영/수	올림포스 전국연합학력평가 기출문제집	전국연합학력평가 문제 + 개념 기본서		고1~2
국/영/수	단기 특강	단기간에 끝내는 유형별 문항 연습		고1~2
한/사/과	개념완성 & 개념완성 문항편	개념 한 권 + 문항 한 권으로 끝내는 한국사 · 탐구 기본서		고1~2
국어	윤혜정의 나비효과 입문편	베스트셀러 '개념의 나비효과', '패턴의 나비효과'의 입문편		고1~2
국어	어휘가 독해다!	7개년 학평 · 모평 · 수능 출제 필수 어휘 학습		고1~2
국어	국어 독해의 원리	내신과 수능 대비 문학 · 독서(비문학) 특화서		고1~2
국어	국어 문법의 원리	필수 개념과 필수 문항의 언어(문법) 특화서		고1~2
영어	Grammar POWER	구문 분석 트리로 이해하는 영어 문법 특화서		고1~2
영어	Reading POWER	수준과 학습 목적에 따라 선택하는 영어 독해 특화서		고1~2
영어	Listening POWER	수준별 수능형 영어듣기 모의고사		고1~2
영어	Voca POWER	고등학교 영어 교육과정 필수 어휘 단어집		고1~2
수학	50일 수학	50일 만에 완성하는 중학~고교 수학의 맥		고1~2
수학	올림포스 닥터링	친절한 개념 설명을 통해 쉽게 연습하는 수학 유형		고1~2
수학	올림포스 고난도	1등급을 위한 고난도 유형 집중 연습		고1~2
수학	수학의 왕도	EBS가 만든 신개념 수학 특화서		고1~2
기타	수학과 함께하는 AI 기초	파이선 프로그래밍, AI 알고리즘에 직접 필요한 수학 개념		고1~2

고2~N수 수능 집중 로드맵

과목	수능 입문		기출 / 연습	연계+연계 보완		고난도	모의고사
국어	수능 감(感)잡기	강의노트 수능개념	수능 기출의 미래	수능연계교재의 국어 어휘	수능특강 사용설명서	수능연계완성 3/4주 특강 고난도 · 신유형	FINAL 실전모의고사
영어	뉴수능 스타트			수능연계교재의 VOCA 1800	수능특강 연계 기출	수능의 7대 함정	만점마무리 봉투모의고사
수학	수능특강 Light		수능특강Q 미니모의고사	수능연계 기출 Vaccine VOCA 2200	수능완성 사용설명서		고난도 시크릿X 봉투모의고사
사회				연계 수능특강			
과학				수능완성			

과목	시리즈명	특징	수준	영역
수능 입문	수능 감(感) 잡기	동일 개념의 내신과 수능 문항 비교로 수능 입문		국/수/영
	뉴수능 스타트	2022학년도 수능 평가원 예시문항 최초 분석		국/수/영
	수능특강 Light	수능 연계교재 학습 전 연계교재 입문서		국/영
	수능개념	EBSi 대표 강사들과 함께하는 수능 개념 다지기		전영역
기출/연습	수능 기출의 미래	올해 수능에 딱 필요한 문제만 선별한 기출 문제집		전영역
	수능특강Q 미니모의고사	매일 15분으로 연습하는 고퀄리티 미니모의고사		전영역
연계 + 연계 보완	수능특강	최신 수능 경향과 기출 유형을 분석한 종합 개념서		전영역
	수능특강 사용설명서	수능 연계교재 수능특강 지문 · 자료 · 문항 분석		전영역
	수능특강 연계 기출	수능특강 수록 작품과 지문과 연관된 기출문제 학습		국/영
	수능완성	유형 분석과 실전모의고사로 단련하는 문항 연습		전영역
	수능완성 사용설명서	수능 연계교재 수능완성 국어 · 영어 지문 분석		국/영
	수능연계교재의 국어 어휘	수능 지문과 문항 이해에 필요한 어휘 학습서		국어
	수능연계교재의 VOCA 1800	수능특강과 수능완성의 필수 중요 어휘 1800개 수록		영어
	수능연계 기출 Vaccine VOCA 2200	수능-EBS 연계 및 평가원 최다 빈출 어휘 선별 수록		영어
고난도	수능연계완성 3/4주 특강	단기간에 끝내는 수능 킬러 문항 대비서		국/수/영/과
	수능의 7대 함정	아깝게 틀리기 쉬운 영역별 수능 함정 문제 유형 분석		국/수/영/사/과
모의고사	FINAL 실전모의고사	수능 동일 난도의 최다 분량, 최다 과목 모의고사		전영역
	만점마무리 봉투모의고사	실제 시험지 형태 + OMR카드 실전 훈련 모의고사		전영역
	고난도 시크릿X 봉투모의고사	제대로 어려운 고퀄리티 최고난도 모의고사		국/수/영

MEMO