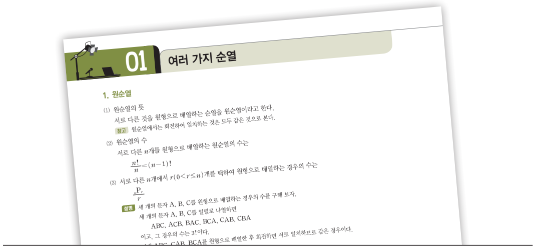
수능특강

수학영역 **확률과 통계**

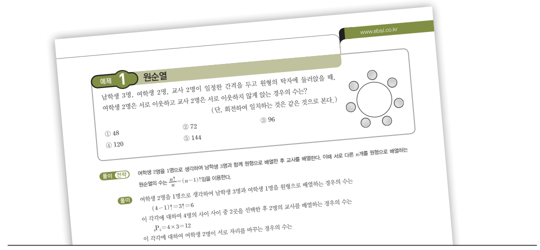
이 책의 **차례** Contents

이 책의 구성과 특징 Structure



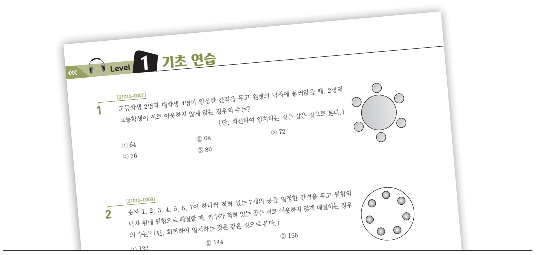
개념 정리

교과서의 핵심 내용을 체계적으로 정리하였다.



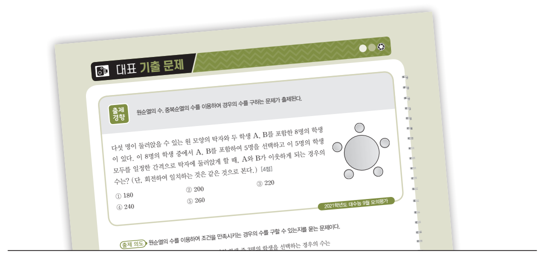
예제 & 유제

예제는 개념을 적용한 대표 문항으로 문제를 해결하는 데 필요한 주요 개념을 풀이 전략으로 제시하여 풀이 과정의 이해를 돕도록 하였고, 유제는 예제와 유사한 내용의 문제나 일반화된 문제를 제시하여 학습 내용과 문제에 대한 연관성을 익히도록 구성하였다.



Level 1－Level 2－Level 3

Level 1 기초 연습은 기초 개념의 인지 정도를 확인할 수 있는 문항을 제시하였으며, Level 2 기본 연습은 기본 응용 문항을, 그리고 Level 3 실력 완성은 수학적 사고력과 문제 해결 능력을 함양할 수 있는 문항을 제시하여 대학수학능력시험 실전에 대비할 수 있도록 구성하였다.

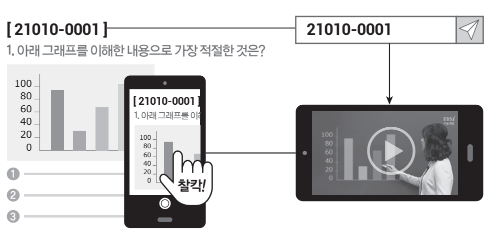


대표 기출 문제

대학수학능력시험과 모의평가 기출 문항으로 구성하였으며 기존 출제 유형을 파악할 수 있도록 출제 경향과 출제 의도를 제시하였다.

학생 EBS 교재 문제 검색

EBS 단추에서 문항코드나 사진으로
문제를 검색하면 푸리봇이 해설 영상을 제공합니다.



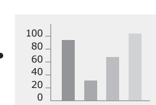
※ EBSi 사이트 및 모바일에서 이용이 가능합니다.
※ 사진 검색은 EBSi 고교강의 앱에서만 이용하실 수 있습니다.

교사 교사지원센터 교재 자료실

교재 문항 한글 문서(HWP)와
교재의 이미지 파일을 무료로 제공합니다.

교재 자료실

- 한글다운로드
- 교재이미지 활용
- 강의활용자료



※ 교사지원센터(http://teacher.ebsi.co.kr) 접속 후 '교사인증'을 통해 이용 가능

01 여러 가지 순열

1. 원순열

(1) 원순열의 뜻

서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라고 한다.

참고 원순열에서는 회전하여 일치하는 것은 모두 같은 것으로 본다.

(2) 원순열의 수

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

(3) 서로 다른 n개에서 $r(0<r\le n)$개를 택하여 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r}$$

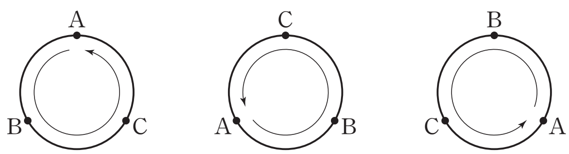
설명 세 개의 문자 A, B, C를 원형으로 배열하는 경우의 수를 구해 보자.

세 개의 문자 A, B, C를 일렬로 나열하면

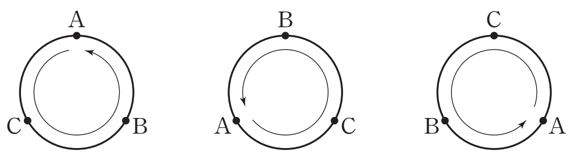
ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

이고, 그 경우의 수는 $3!$이다.

이때 ABC, CAB, BCA를 원형으로 배열한 후 회전하면 서로 일치하므로 같은 경우이다.



마찬가지로 ACB, BAC, CBA를 원형으로 배열한 후 회전하면 서로 일치하므로 같은 경우이다.



따라서 세 개의 문자 A, B, C를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!$이지만 이를 원형으로 배열하면 회전하여 같아지는 것이 3가지씩 있으므로 세 개의 문자 A, B, C를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$\frac{3!}{3}=2!=2$$

이다.

일반적으로 서로 다른 n개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $n!$이지만 이를 원형으로 배열하면 같은 것이 n가지씩 있으므로 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

이다.

예 다섯 명이 원형의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는 서로 다른 5개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

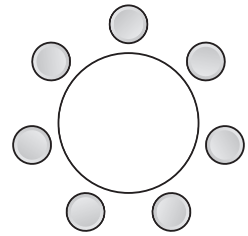
$$\frac{5!}{5}=4!=24$$

이다.

예제 1 원순열

남학생 3명, 여학생 2명, 교사 2명이 일정한 간격을 두고 원형의 탁자에 둘러앉을 때, 여학생 2명은 서로 이웃하고 교사 2명은 서로 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 48 ② 72 ③ 96

④ 120 ⑤ 144

풀이 전략 여학생 2명을 1명으로 생각하여 남학생 3명과 함께 원형으로 배열한 후 교사를 배열한다. 이때 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$임을 이용한다.

풀이 여학생 2명을 1명으로 생각하여 남학생 3명과 여학생 1명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이 각각에 대하여 4명의 사이 사이 중 2곳을 선택한 후 2명의 교사를 배열하는 경우의 수는

${}_4P_2=4\times3=12$

이 각각에 대하여 여학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

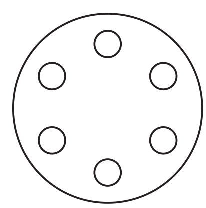
$6\times12\times2=144$

답 ⑤

정답과 풀이 4쪽

[21010-0001]

유제 1 서로 다른 따뜻한 음료 3잔과 서로 다른 차가운 음료 3잔을 일정한 간격을 두고 원 모양의 식탁 위에 원형으로 놓을 때, 따뜻한 음료와 차가운 음료를 교대로 놓는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



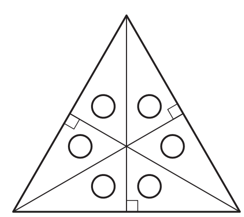
① 4 ② 8 ③ 12

④ 16 ⑤ 20

[21010-0002]

유제 2 그림과 같이 정삼각형 모양의 탁자가 모두 합동인 여섯 개의 직각삼각형으로 영역이 구분되어 있다. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 여섯 개의 접시를 이 탁자의 각각의 직각삼각형에 하나씩 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 빗변을 공유하는 두 직각삼각형에 놓인 두 개의 접시에 적혀 있는 두 수의 합이 모두 같게 되는 경우의 수를 구하시오.

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



2. 중복순열

(1) 중복순열의 뜻

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 순열을 중복순열이라 하고, 이 중복순열의 수를 기호로

$${}_{n}\Pi_{r}$$

와 같이 나타낸다.

참고 ${}_{n}\Pi_{r}$에서 Π는 곱을 뜻하는 영어 Product의 첫 글자 P에 해당하는 그리스 문자로 '파이'라고 읽는다.

(2) 중복순열의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_{n}\Pi_{r}=n^{r}$$

설명 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택해 일렬로 나열할 때, 첫 번째, 두 번째, 세 번째, $\cdots$, r번째 자리에 올 수 있는 것은 각각 n가지씩이다.

나열 순서	첫 번째	두 번째	세 번째	$\cdots$	r번째
경우의 수	n	n	n	$\cdots$	n

따라서 곱의 법칙에 의하여

$${}_{n}\Pi_{r}=\underbrace{n\times n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{개}}=n^{r}$$

이다.

예1 ${}_{3}\Pi_{2}=3^{2}=9$, ${}_{2}\Pi_{3}=2^{3}=8$

예2 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 네 개의 숫자를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수를 구해 보자.

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 각각 1, 2, 3의 3가지이다.

천의 자리	백의 자리	십의 자리	일의 자리
1, 2, 3	1, 2, 3	1, 2, 3	1, 2, 3
3가지	3가지	3가지	3가지

따라서 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$$3\times3\times3\times3=81$$

이고, 이것은 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같다.

즉, ${}_{3}\Pi_{4}=3^{4}=81$이다.

참고 실수 전체의 집합의 공집합이 아닌 두 부분집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n일 때, 집합 X에서 집합 Y로의 함수의 개수는

$${}_{n}\Pi_{m}=n^{m}$$

이다.

예제 2 중복순열

숫자 0, 2, 4, 6, 8 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 5로 나누었을 때의 나머지가 2 이하인 자연수의 개수는?

① 150 ② 200 ③ 250 ④ 300 ⑤ 350

풀이 전략 일의 자리와 천의 자리에 올 수 있는 숫자를 각각 택한 후 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구한다. 이때 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r=n^r$임을 이용한다.

풀이 다섯 개의 숫자 0, 2, 4, 6, 8을 5로 나누었을 때의 나머지는 각각 0, 2, 4, 1, 3이다.

일의 자리에 들어갈 숫자를 택하는 경우의 수는 세 개의 숫자 0, 2, 6에서 한 개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_3C_1=3$$

이 각각에 대하여 천의 자리에 들어갈 숫자를 택하는 경우의 수는 네 개의 숫자 2, 4, 6, 8에서 한 개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_4C_1=4$$

이 각각에 대하여 백의 자리와 십의 자리에 들어갈 숫자를 택하는 경우의 수는 다섯 개의 숫자 0, 2, 4, 6, 8에서 중복을 허락하여 두 개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_2=5^2=25$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$3\times4\times25=300$$

답 ④

정답과 풀이 4쪽

[21010-0003]

유제 3 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 다섯 개를 택해 일렬로 나열할 때, 양 끝에는 서로 다른 문자가 오는 경우의 수는?

① 762 ② 768 ③ 774 ④ 780 ⑤ 786

[21010-0004]

유제 4 서로 다른 볼펜 다섯 자루를 세 명에게 남김없이 나누어 줄 때, 세 명 모두에게 적어도 볼펜 한 자루씩 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.

3. 같은 것이 있는 순열

(1) 같은 것이 있는 순열

같은 것이 포함되어 있는 n개를 일렬로 나열하는 것을 같은 것이 있는 순열이라고 한다.

(2) 같은 것이 있는 순열의 수

n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, 이들을 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!} \text{ (단, } p+q+\cdots+r=n\text{)}$$

설명 5개의 문자 a, a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구해 보자.

5개의 문자 a, a, a, b, b에서 3개의 a를 구별하여 각각 a_1, a_2, a_3이라 하고, 2개의 b를 구별하여 각각 b_1, b_2라 하면 5개의 문자 a_1, a_2, a_3, b_1, b_2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_5\mathrm{P}_5=5!$$

이다.

그런데 $5!$가지 중에서 다음과 같은 $3!\times2!$가지의 서로 다른 순열은 번호를 떼어 구별하지 않으면 모두 $aaabb$와 같다.

$a_1a_2a_3b_1b_2$	$a_1a_2a_3b_2b_1$
$a_1a_3a_2b_1b_2$	$a_1a_3a_2b_2b_1$
$a_2a_1a_3b_1b_2$	$a_2a_1a_3b_2b_1$
$a_2a_3a_1b_1b_2$	$a_2a_3a_1b_2b_1$
$a_3a_1a_2b_1b_2$	$a_3a_1a_2b_2b_1$
$a_3a_2a_1b_1b_2$	$a_3a_2a_1b_2b_1$

➡ $aaabb$

이와 같이 생각하면 5개의 문자 a, a, a, b, b를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{5!}{3!2!}=10$$

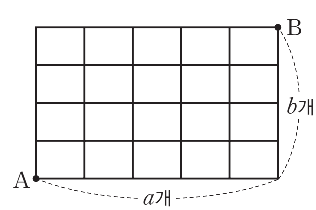
이다.

예 여섯 개의 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수의 개수는

$$\frac{6!}{3!2!1!}=60$$

이다.

참고 직사각형 모양으로 연결된 도로망을 따라 두 지점 사이를 최단 거리로 가는 경우의 수는 가로 방향으로 한 칸 움직이는 이동과 세로 방향으로 한 칸 움직이는 이동을 필요한 횟수만큼 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 같은 것이 있는 순열의 수를 구하는 방법을 이용할 수 있다.



즉, 그림과 같이 가로 방향의 칸의 수가 a, 세로 방향의 칸의 수가 b일 때, 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{(a+b)!}{a!b!}$$

이다.

예제 3 같은 것이 있는 순열

파란 공 4개, 노란 공 2개, 흰 공 1개를 모두 일렬로 나열할 때, 양 끝에는 같은 색의 공이 놓이는 경우의 수는?
(단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않는다.)

① 20　② 25　③ 30　④ 35　⑤ 40

풀이 전략 양 끝에 놓이는 2개의 공은 모두 파란 공이거나 모두 노란 공이다. 이때 n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, 이들을 일렬로 나열하는 순열의 수는 $\frac{n!}{p!q!\cdots r!}$ $(p+q+\cdots+r=n)$임을 이용한다.

풀이 파란 공을 a, 노란 공을 b, 흰 공을 c라 하자.

(i) $a\square\square\square\square\square a$인 경우

5개의 $\square$자리에 a, a, b, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!2!}=30$$

(ii) $b\square\square\square\square\square b$인 경우

5개의 $\square$자리에 a, a, a, a, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{4!}=5$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

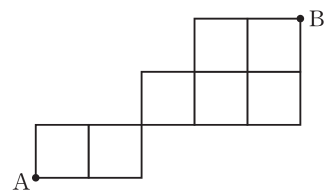
$30+5=35$

답 ④

정답과 풀이 4쪽

유제 5 [21010-0005]

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하시오.



유제 6 [21010-0006]

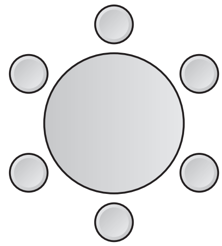
7개의 문자 a, a, b, b, b, c, d를 모두 일렬로 나열할 때, $caadbbb$, $abdbacb$와 같이 c와 d 사이에 2개의 문자가 있는 경우의 수는?

① 48　② 56　③ 64　④ 72　⑤ 80

[21010-0007]

1 고등학생 2명과 대학생 4명이 일정한 간격을 두고 원형의 탁자에 둘러앉을 때, 2명의 고등학생이 서로 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는?

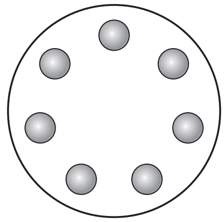
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 64　② 68　③ 72　④ 76　⑤ 80

[21010-0008]

2 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 7개의 공을 일정한 간격을 두고 원형의 탁자 위에 원형으로 배열할 때, 짝수가 적혀 있는 공은 서로 이웃하지 않게 배열하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

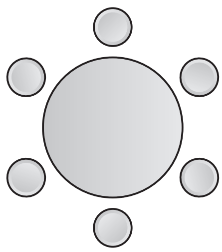


① 132　② 144　③ 156　④ 168　⑤ 180

[21010-0009]

3 그림과 같이 원형의 탁자에 6개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. 할머니, 아버지, 어머니, 자녀 3명이 이 6개의 의자에 앉을 때, 아버지와 어머니는 서로 이웃하고 자녀 3명도 서로 이웃하도록 앉는 경우의 수를 구하시오.

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



[21010-0010]

4 숫자 2, 3, 4, 6 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만든 네 자리의 자연수 중에서 천의 자리의 수는 일의 자리의 수의 약수이고 천의 자리의 수는 일의 자리의 수보다 작은 자연수의 개수는?

① 48　② 54　③ 60　④ 66　⑤ 72

[21010-0011]

5 서로 다른 5개의 공을 서로 다른 3개의 주머니 A, B, C에 남김없이 넣을 때, 주머니 A에는 공을 2개만 넣는 경우의 수는? (단, 빈 주머니가 있을 수 있다.)

① 68 ② 74 ③ 80 ④ 86 ⑤ 92

[21010-0012]

6 6개의 문자 a, a, b, b, c, d를 모두 일렬로 나열할 때, 2개의 문자 b가 모두 문자 d보다 오른쪽에 있는 경우의 수는?

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

[21010-0013]

7 7개의 문자 a, a, a, b, b, c, d를 모두 일렬로 나열할 때, 문자 a가 서로 이웃하지 않는 경우의 수는?

① 88 ② 96 ③ 104 ④ 112 ⑤ 120

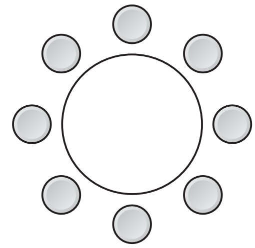
[21010-0014]

8 4의 약수 중에서 중복을 허락하여 네 개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 각 자리의 모든 수의 합이 8인 자연수의 개수는?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

[21010-0015]

1 1학년 학생 2명, 2학년 학생 4명, 3학년 학생 2명이 일정한 간격을 두고 원형의 탁자에 둘러앉을 때, 3학년 학생 2명 사이에는 각각 3명의 학생이 앉고 1학년 학생 2명은 서로 이웃하게 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 156 ② 168 ③ 180 ④ 192 ⑤ 204

[21010-0016]

2 숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하여 여섯 자리의 자연수를 만들 때, 각 자리의 수 중 0의 개수가 1 이하인 자연수의 개수는?

① 224 ② 232 ③ 240 ④ 248 ⑤ 256

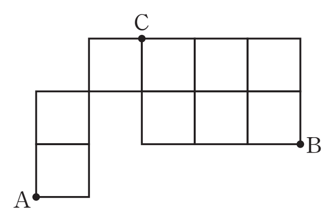
[21010-0017]

3 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열할 때, 문자 a가 나오는 횟수가 문자 b가 나오는 횟수보다 큰 경우의 수는?

① 27 ② 29 ③ 31 ④ 33 ⑤ 35

[21010-0018]

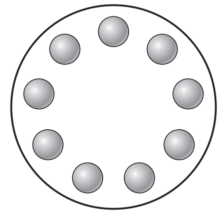
4 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 한 번 지나간 도로는 다시 지나갈 수 없을 때, 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 C지점을 지나 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는?



① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

[21010-0019]

1 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공을 일정한 간격을 두고 원형의 탁자 위에 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 공에 적혀 있는 수는 반드시 서로소가 되도록 배열하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 640 ② 660 ③ 680
④ 700 ⑤ 720

[21010-0020]

2 문자 a, b, b, c, c, c, c 중에서 다섯 개를 택해 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수는?

(가) 문자 c는 3번 이상 나온다.
(나) 문자 b가 2번 나오면 b는 서로 이웃한다.

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

[21010-0021]

3 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \longrightarrow X$의 개수는?

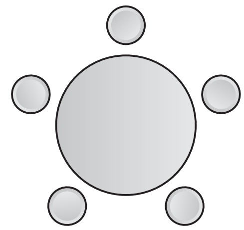
(가) $f(1)+f(4)$는 4의 약수이다.
(나) $x \le 3$이면 $f(x) \le f(1)$이다.
(다) $x > 3$이면 $f(x) \ge f(4)$이다.

① 434 ② 448 ③ 462 ④ 476 ⑤ 490

대표 기출 문제

출제 경향 원순열의 수, 중복순열의 수를 이용하여 경우의 수를 구하는 문제가 출제된다.

다섯 명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생이 있다. 이 8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 할 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



① 180 ② 200 ③ 220
④ 240 ⑤ 260

2021학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 원순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 두 학생 A, B를 제외한 나머지 6명의 학생 중 3명의 학생을 선택하는 경우의 수는

$$_{6}C_{3}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

이 각각에 대하여 두 학생 A, B를 한 사람으로 생각하여 4명의 학생이 일정한 간격으로 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$$(4-1)!=3!=6$$

이 각각에 대하여 두 학생 A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2!=2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$20\times6\times2=240$$

답 ④

대표 기출 문제

출제 경향 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 경우의 수를 구하는 문제가 출제된다.

숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 다섯 개를 다음 조건을 만족시키도록 선택한 후, 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 다섯 자리의 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 각각의 홀수는 선택하지 않거나 한 번만 선택한다.
(나) 각각의 짝수는 선택하지 않거나 두 번만 선택한다.

2020학년도 대수능

출제 의도 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 조건 (가)에서 각각의 홀수는 선택하지 않거나 한 번만 선택해야 하고 조건 (나)에서 각각의 짝수는 선택하지 않거나 두 번만 선택해야 하므로 홀수는 1개 또는 3개 선택해야 한다.

(i) 홀수 3개 중 1개를 선택하는 경우

홀수 3개 중 1개를 선택하고 짝수 3개 중 2개를 각각 2번씩 선택해야 하므로 5개의 숫자를 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_3C_2 = 3 \times 3 = 9$$

이 각각에 대하여 5개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!2!} = 30$$

따라서 이 경우의 자연수의 개수는

$$9 \times 30 = 270$$

(ii) 홀수 3개 중 3개를 선택하는 경우

홀수 3개 중 3개를 선택하고 짝수 3개 중 1개를 2번 선택해야 하므로 5개의 숫자를 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_3 \times {}_3C_1 = 3$$

이 각각에 대하여 5개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

따라서 이 경우의 자연수의 개수는

$$3 \times 60 = 180$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$270 + 180 = 450$$

답 450

02 중복조합과 이항정리

1. 중복조합

(1) 중복조합의 뜻

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 중복조합이라 하고, 이 중복조합의 수를 기호로

$${}_{n}\mathrm{H}_{r}$$

와 같이 나타낸다.

참고 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$에서 H는 같음을 뜻하는 Homogeneous의 첫 글자이다.

(2) 중복조합의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

설명1 두 개의 문자 a, b에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 조합은

$$aaa,\ aab,\ abb,\ bbb$$

의 4가지이므로 ${}_{2}\mathrm{H}_{3}=4$이다.

이때 위의 4가지의 경우를 3개의 ○와 1개의 ▮를 이용하여 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다.

aaa	➡	○○○▮
aab	➡	○○▮○
abb	➡	○▮○○
bbb	➡	▮○○○

즉, ○, ○, ○, ▮를 일렬로 나열한 후 ▮의 앞에 ○가 있으면 그 자리에는 문자 a를 넣고, ▮의 뒤에 ○가 있으면 그 자리에는 문자 b를 넣으면 된다.

따라서 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복조합의 수 ${}_{2}\mathrm{H}_{3}$은 3개의 ○와 1개의 ▮를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_{2}\mathrm{H}_{3}=\frac{4!}{3!1!}=\frac{4!}{3!(4-3)!}={}_{4}\mathrm{C}_{3}$$

이다.

일반적으로 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 중복조합의 수는 r개의 ○와 n개를 구분하는 $(n-1)$개의 ▮를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_{n}\mathrm{H}_{r}=\frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}={}_{r+(n-1)}\mathrm{C}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

이다.

설명2 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 중복조합의 수는 r개의 ○와 n개를 구분하는 $(n-1)$개의 ▮를 놓을 $r+(n-1)=(n+r-1)$개의 자리 중에서 ○를 놓을 r개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

이다.

예 3개의 문자 a, b, c에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3}\mathrm{H}_{5}={}_{3+5-1}\mathrm{C}_{5}={}_{7}\mathrm{C}_{5}={}_{7}\mathrm{C}_{2}=\frac{7\times 6}{2\times 1}=21$$

이다.

예제 1 중복조합

같은 종류의 볼펜 6자루와 같은 종류의 연필 13자루를 네 사람에게 남김없이 나누어 줄 때, 각 사람이 적어도 볼펜 1자루, 연필 2자루를 받도록 나누어 주는 경우의 수는?

① 440 ② 480 ③ 520 ④ 560 ⑤ 600

풀이 전략 먼저 네 사람에게 각각 볼펜 1자루와 연필 2자루를 나누어 준 후, 남은 볼펜과 연필을 네 사람에게 나누어 주는 경우의 수를 중복조합의 수를 이용하여 구한다. 이때 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$임을 이용한다.

풀이 네 사람이 각각 적어도 볼펜 1자루, 연필 2자루를 받아야 하므로 먼저 네 사람에게 각각 볼펜 1자루와 연필 2자루를 나누어 준 후, 남은 볼펜 2자루와 연필 5자루를 나누어 주는 경우를 생각하면 된다.

(ⅰ) 볼펜 2자루를 네 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{4}\mathrm{H}_{2}={}_{4+2-1}\mathrm{C}_{2}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

(ⅱ) 연필 5자루를 네 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{4}\mathrm{H}_{5}={}_{4+5-1}\mathrm{C}_{5}={}_{8}\mathrm{C}_{5}={}_{8}\mathrm{C}_{3}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$10\times56=560$

답 ④

정답과 풀이 10쪽

[21010-0022]

유제 1 같은 종류의 공 13개를 서로 다른 5개의 상자에 남김없이 나누어 넣으려고 한다. 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수는?

① 35 ② 40 ③ 45 ④ 50 ⑤ 55

[21010-0023]

유제 2 같은 종류의 과자 7봉지와 같은 종류의 음료 5병을 A를 포함한 3명에게 남김없이 나누어 줄 때, A는 과자를 적어도 2봉지를 받고 세 사람은 각각 음료를 적어도 1병을 받도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 과자를 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.)

2. 중복조합의 활용

(1) 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수

방정식 $x+y+z=n$(n은 음이 아닌 정수)를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_n$$

이다.

설명 방정식 $x+y+z=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구해 보자.

예를 들어 방정식 $x+y+z=7$의 해 중 하나인 $x=1$, $y=2$, $z=4$는 3개의 문자 x, y, z에서 x를 1개, y를 2개, z를 4개 택한 것으로 생각할 수 있다.

같은 방법으로 생각하면 주어진 방정식의 각 해는 서로 다른 3개의 문자 x, y, z에서 7개를 택하는 중복조합으로 볼 수 있으므로 구하는 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_7={}_{3+7-1}\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$$

이다.

일반적으로 방정식 $x+y+z=n$(n은 음이 아닌 정수)를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 서로 다른 3개의 문자 x, y, z에서 n개를 택하는 중복조합의 수 ${}_3\mathrm{H}_n$과 같다.

참고 방정식 $x+y+z=n$(n은 3 이상의 자연수)를 만족시키는 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$$x=x'+1,\ y=y'+1,\ z=z'+1\ (x',\ y',\ z'\text{은 음이 아닌 정수})$$

로 놓으면 방정식 $x'+y'+z'=n-3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z'의 모든 순서쌍 (x', y', z')의 개수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_{n-3}$$

이다.

(2) 조건을 만족시키는 함수의 개수

실수 전체의 집합의 공집합이 아닌 두 부분집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n일 때, 집합 X에서 집합 Y로의 함수 중에서

'집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$'

를 만족시키는 함수 f의 개수는

$${}_n\mathrm{H}_m$$

이다.

설명 위의 조건을 만족시키는 함수는 집합 Y의 원소 n개에서 중복을 허락하여 m개를 택하여 집합 X의 원소에 크기순으로 대응시키면 되므로 함수의 개수는 서로 다른 n개에서 m개를 택하는 중복조합의 수인 ${}_n\mathrm{H}_m$과 같다.

예제 2 중복조합의 활용

방정식 $x+y+z+4w=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는?

① 88 ② 94 ③ 100 ④ 106 ⑤ 112

풀이 전략 w가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이므로 w의 값에 따라 경우를 나눈 후 중복조합의 수를 이용하여 순서쌍의 개수를 구한다.

풀이 w의 값에 따라 다음 경우로 나누어 생각한다.

(i) $w=0$일 때

방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=\frac{12\times 11}{2\times 1}=66$$

(ii) $w=1$일 때

방정식 $x+y+z=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_6={}_{3+6-1}\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=\frac{8\times 7}{2\times 1}=28$$

(iii) $w=2$일 때

방정식 $x+y+z=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times 3}{2\times 1}=6$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$66+28+6=100$

답 ③

정답과 풀이 10쪽

[21010-0024]

유제 3 $(a+b)^3(c+d+e)^6$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는?

① 104 ② 106 ③ 108 ④ 110 ⑤ 112

[21010-0025]

유제 4 전체 회원이 9명인 어느 동아리의 회장 선거에 회원 중에서 3명의 후보가 출마하였다. 이 동아리의 모든 회원이 회장 선거에 출마한 3명의 후보 중에서 1명의 후보를 택하여 무기명으로 투표할 때, 가능한 득표 결과의 경우의 수는? (단, 기권과 무효표는 없고, 후보인 회원도 투표를 한다.)

① 34 ② 41 ③ 48 ④ 55 ⑤ 62

3. 이항정리

(1) 이항정리

자연수 n에 대하여 다항식 $(a+b)^n$을 전개하면

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_nb^n$$

이다. 이와 같이 다항식 $(a+b)^n$을 전개하는 것을 이항정리라고 한다.

설명 다항식 $(a+b)^3$을 전개하면

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

이다.

이때 a^2b항은 세 개의 인수 $(a+b)$ 중 어느 한 인수에서 b를 택하고, 나머지 두 인수에서 각각 a를 택하여 곱한 단항식 baa, aba, aab의 합이다. 즉, a^2b의 계수는 순서를 생각하지 않고 세 개의 인수 $(a+b)$ 중 한 개에서 b를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_3C_1$이다.

$$\begin{array}{ccccc} (a+b) & (a+b) & (a+b) & & \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & & \\ b & a & a & \Rightarrow & a^2b \\ a & b & a & \Rightarrow & a^2b \\ a & a & b & \Rightarrow & a^2b \end{array}$$

마찬가지 방법으로 생각하면 a^3, ab^2, b^3의 계수는 각각

$${}_3C_0,\ {}_3C_2,\ {}_3C_3$$

임을 알 수 있다. 따라서 다항식 $(a+b)^3$의 전개식을 조합의 수를 이용하여 나타내면

$$(a+b)^3={}_3C_0a^3+{}_3C_1a^2b+{}_3C_2ab^2+{}_3C_3b^3$$

이다.

일반적으로 자연수 n에 대하여 다항식

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)\times\cdots\times(a+b)}_{n\text{개}}$$

의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$항은 n개의 인수 $(a+b)$ 중 r개의 인수에서 b를 택하고, 나머지 $(n-r)$개의 인수에서 a를 택하여 곱한 것이므로 $a^{n-r}b^r$의 계수는 순서를 생각하지 않고 n개의 인수 $(a+b)$ 중 r개의 인수에서 b를 택하는 조합의 수와 같다. 즉, 다항식 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$의 계수는 ${}_nC_r$와 같다. 따라서 다항식 $(a+b)^n$의 전개식은

$$(a+b)^n={}_nC_0\,a^n+{}_nC_1\,a^{n-1}b+{}_nC_2\,a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_r\,a^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_n\,b^n$$

이다.

참고 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로 다항식 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$의 계수와 a^rb^{n-r}의 계수는 같다.

(2) 이항계수

다항식 $(a+b)^n$의 전개식에서 각 항의 계수

$${}_nC_0,\ {}_nC_1,\ {}_nC_2,\ \cdots,\ {}_nC_r,\ \cdots,\ {}_nC_n$$

을 이항계수라 하고, ${}_nC_r\,a^{n-r}b^r$을 다항식 $(a+b)^n$의 전개식의 일반항이라고 한다.

예 다항식 $(3x+y)^6$의 전개식의 일반항을 이용하여 x^2y^4의 계수를 구해 보자.

다항식 $(3x+y)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r\,(3x)^{6-r}y^r={}_6C_r\,3^{6-r}x^{6-r}y^r\ (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$$

이므로 x^2y^4항은 $r=4$일 때이다.

따라서 x^2y^4의 계수는

$${}_6C_4\times3^{6-4}={}_6C_2\times3^2=\frac{6\times5}{2\times1}\times9=135$$

이다.

예제 3 이항정리

$\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^7의 계수는 20이고 x의 계수는 b일 때, $a+b$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 620　② 632　③ 644　④ 656　⑤ 668

풀이 전략 $\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항이 ${}_5\mathrm{C}_r(x^2)^{5-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r$ $(r=0, 1, 2, \cdots, 5)$임을 이용하여 x의 차수가 7이 되는 r의 값과 x의 차수가 1이 되는 r의 값을 구한다.

풀이 $\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5\mathrm{C}_r(x^2)^{5-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r={}_5\mathrm{C}_r\times a^r\times x^{10-3r}\ (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$$

x^7항은 $10-3r=7$, 즉 $r=1$일 때이므로 x^7의 계수는

$${}_5\mathrm{C}_1\times a=5a$$

이때 $5a=20$에서 $a=4$

또 x항은 $10-3r=1$, 즉 $r=3$일 때이므로 x의 계수는

$${}_5\mathrm{C}_3\times a^3={}_5\mathrm{C}_2\times a^3=\frac{5\times4}{2\times1}\times4^3=640$$

즉, $b=640$

따라서 $a+b=4+640=644$

답 ③

정답과 풀이 10쪽

[21010-0026]

유제 5 다항식 $(x+a)^6$의 전개식에서 x^4의 계수가 60일 때, 양수 a의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[21010-0027]

유제 6 다항식 $(2x-1)(x+2)^7$의 전개식에서 x^5의 계수는?

① 464　② 468　③ 472　④ 476　⑤ 480

4. 이항계수의 성질

모든 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

(1) ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$

(2) ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

(3) n이 홀수일 때, ${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$

n이 짝수일 때, ${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_n={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^{n-1}$

설명 이항정리를 이용하여 다항식 $(1+x)^n$을 전개하면

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1\,x+{}_nC_2\,x^2+{}_nC_3\,x^3+\cdots+{}_nC_n\,x^n \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n\,{}_nC_n \quad \cdots\cdots ㉢$$

n이 홀수일 때, $\frac{1}{2}$(㉡+㉢)을 하면

$$2^{n-1}={}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_{n-1}$$

n이 홀수일 때, $\frac{1}{2}$(㉡−㉢)을 하면

$$2^{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots+{}_nC_n$$

마찬가지 방법으로 n이 짝수일 때,

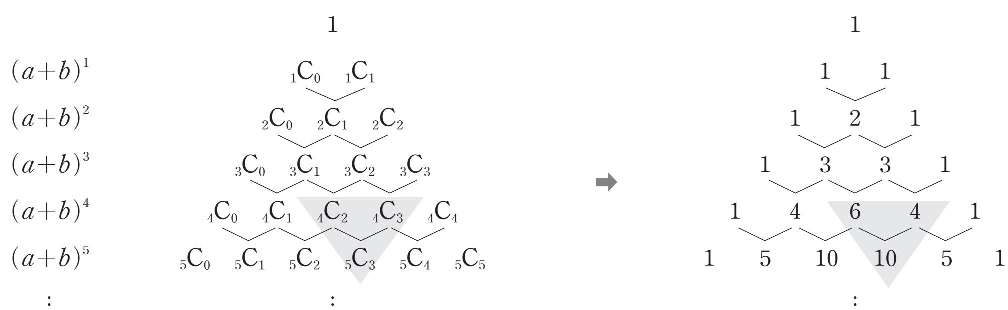
$${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_n={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^{n-1}$$

예 ① ${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+{}_{10}C_3+\cdots+{}_{10}C_{10}=2^{10}$

② ${}_{10}C_0+{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}=2^9$

③ ${}_{10}C_1+{}_{10}C_3+{}_{10}C_5+{}_{10}C_7+{}_{10}C_9=2^9$

참고 자연수 n에 대하여 다항식 $(a+b)^n$의 전개식에서 이항계수를 차례로 삼각형 모양으로 나열한 것을 파스칼의 삼각형이라고 한다.



파스칼의 삼각형에서 다음이 성립함을 알 수 있다.

① ${}_nC_r={}_nC_{n-r}\,(0\le r\le n)$이므로 각 단계의 이항계수의 배열은 좌우 대칭이다.

② ${}_nC_r+{}_nC_{r+1}={}_{n+1}C_{r+1}\,(0\le r\le n-1)$이므로 각 단계에서 이웃하는 두 수의 합은 그 두 수의 가운데의 아래쪽에 있는 다음 단계의 수와 같다.

예제 4 이항계수의 활용

등식 ${}_{9}C_{1}+{}_{9}C_{3}+{}_{9}C_{5}+{}_{9}C_{7}+{}_{9}C_{9}=(1+{}_{n}H_{2})^{2}$을 만족시키는 자연수 n의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

풀이 전략 이항계수의 성질을 이용하여 ${}_{9}C_{1}+{}_{9}C_{3}+{}_{9}C_{5}+{}_{9}C_{7}+{}_{9}C_{9}=2^{8}$임과 ${}_{n}H_{2}={}_{n+2-1}C_{2}$임을 이용하여 자연수 n의 값을 구한다.

풀이 ${}_{9}C_{1}+{}_{9}C_{3}+{}_{9}C_{5}+{}_{9}C_{7}+{}_{9}C_{9}=(1+{}_{n}H_{2})^{2}$에서

$${}_{9}C_{1}+{}_{9}C_{3}+{}_{9}C_{5}+{}_{9}C_{7}+{}_{9}C_{9}=2^{8},$$

$${}_{n}H_{2}={}_{n+2-1}C_{2}={}_{n+1}C_{2}=\frac{(n+1)\times n}{2\times 1}=\frac{n(n+1)}{2}$$

이므로

$$2^{8}=\left\{1+\frac{n(n+1)}{2}\right\}^{2}$$

이때 $1+\frac{n(n+1)}{2}>0$이므로 $2^{4}=1+\frac{n(n+1)}{2}$

$$n^{2}+n-30=0,\ \text{즉 } (n+6)(n-5)=0$$

n은 자연수이므로

$$n=5$$

답 ③

정답과 풀이 11쪽

[21010-0028]

유제 7 두 수 A, B가

$$A={}_{15}C_{0}+{}_{15}C_{2}+{}_{15}C_{4}+\cdots+{}_{15}C_{14},$$

$$B={}_{12}C_{0}+{}_{12}C_{1}+{}_{12}C_{2}+\cdots+{}_{12}C_{12}$$

일 때, $\frac{A}{B}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[21010-0029]

유제 8 $(1+x)^{3}+\frac{(1+x)^{4}}{x}+\frac{(1+x)^{5}}{x^{2}}+\frac{(1+x)^{6}}{x^{3}}+\frac{(1+x)^{7}}{x^{4}}$의 전개식에서 x의 계수는?

① 52 ② 55 ③ 58 ④ 61 ⑤ 64

[21010-0030]

1 ${}_{2}\Pi_{5}+{}_{3}\mathrm{H}_{7}$의 값은?

① 50 ② 56 ③ 62 ④ 68 ⑤ 74

[21010-0031]

2 같은 종류의 손목 보호대 5개와 서로 다른 종류의 수건 2장을 학생 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 아무것도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

① 189 ② 198 ③ 207 ④ 216 ⑤ 225

[21010-0032]

3 서로 다른 세 종류의 과자와 서로 다른 두 종류의 음료 중에서 중복을 허락하여 과자 3개와 음료 3개를 주문하는 경우의 수는? (단, 각 종류의 과자와 음료는 충분히 많고 주문하지 않은 종류의 과자와 음료가 있을 수 있다.)

① 30 ② 40 ③ 50 ④ 60 ⑤ 70

[21010-0033]

4 방정식 $a+b+c+d=21$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d에 대하여 세 수 a, b, c는 모두 홀수이고, d는 짝수인 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?

① 145 ② 150 ③ 155 ④ 160 ⑤ 165

[21010-0034]

5 $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^4의 계수는?

① 480 ② 540 ③ 600 ④ 660 ⑤ 720

[21010-0035]

6 다항식 $(x-a)^6$의 전개식에서 x^3의 계수와 x^2의 계수의 합이 0일 때, 양수 a의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

[21010-0036]

7 어느 마술 동아리 회원 13명 중에서 공연에 참가할 7명 이상의 회원을 택하는 경우의 수는?

① 2^{11} ② 2^{12} ③ 2^{13} ④ 2^{14} ⑤ 2^{15}

[21010-0037]

8 등식 ${}_9\mathrm{H}_0+{}_8\mathrm{H}_1+{}_7\mathrm{H}_2+{}_6\mathrm{H}_3+{}_5\mathrm{H}_4+{}_4\mathrm{H}_5+{}_3\mathrm{H}_6+{}_2\mathrm{H}_7+{}_1\mathrm{H}_8={}_2\Pi_4({}_n\mathrm{H}_2-5)$를 만족시키는 자연수 n의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

[21010-0038]

1 같은 종류의 우유 5개, 같은 종류의 빵 10개를 세 사람에게 남김없이 나누어 줄 때, 세 사람이 적어도 각각 우유 1개와 빵 2개를 받도록 나누어 주는 경우의 수는?

① 66 ② 72 ③ 78 ④ 84 ⑤ 90

[21010-0039]

2 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오.

(가) $a+b+c+d=16$
(나) a, b, c, d 중에서 적어도 하나는 홀수이다.

[21010-0040]

3 자연수 n에 대하여 다항식 $(x+y+z)^n$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 105이고, xyz를 인수로 갖는 서로 다른 항의 개수는 a이다. $n+a$의 값은?

① 76 ② 79 ③ 82 ④ 85 ⑤ 88

[21010-0041]

4 3 이상인 자연수 n에 대하여 다항식 $(1+2x)^n$의 전개식에서 x^2의 계수를 a, x^3의 계수를 b라 하자. $2a+b=132n$일 때, n의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

[21010-0042]

1 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e, f의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e, f)의 개수는?

(가) $a+b+c+d+e+f=20$
(나) x에 대한 이차방정식 $x^2-cx+4=0$의 두 근은 a, b이다.

① 211 ② 215 ③ 219 ④ 223 ⑤ 227

[21010-0043]

2 집합 $X=\{0, 1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f 중 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는?

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이다.
(나) 함수 f의 치역의 모든 원소의 합은 6이다.

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

[21010-0044]

3 다섯 명의 학생 A, B, C, D, E에게 같은 종류의 컴퓨터용 사인펜 11자루와 같은 종류의 수정 테이프 9개를 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.
(단, 수정 테이프를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

(가) 다섯 명의 학생 A, B, C, D, E가 받는 컴퓨터용 사인펜의 개수는 각각 1 이상이고, 학생 A가 받는 컴퓨터용 사인펜의 개수는 학생 B가 받는 컴퓨터용 사인펜의 개수의 2배이다.
(나) 다섯 명의 학생 A, B, C, D, E가 받는 수정 테이프의 개수는 각각 3 이하이고, 학생 E는 학생 D보다 수정 테이프를 2개 더 받는다.

대표 기출 문제

출제 경향 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제, 중복조합의 수를 이용하여 방정식을 만족시키는 해의 개수를 구하는 문제가 출제된다.

세 명의 학생 A, B, C에게 같은 종류의 사탕 6개와 같은 종류의 초콜릿 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 학생 A가 받는 사탕의 개수는 1 이상이다.
(나) 학생 B가 받는 초콜릿의 개수는 1 이상이다.
(다) 학생 C가 받는 사탕의 개수와 초콜릿의 개수의 합은 1 이상이다.

2020학년도 대수능

출제 의도 중복조합의 수를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 조건 (가), (나)에 의하여 학생 A에게 사탕 1개, 학생 B에게 초콜릿 1개를 먼저 나누어 주고 남은 사탕 5개와 초콜릿 4개를 세 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수를 구하면 된다.
그런데 조건 (다)에 의하여 학생 C가 사탕이나 초콜릿을 적어도 1개 받아야 하므로 학생 C가 아무것도 받지 못하는 경우의 수를 빼면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_3\mathrm{H}_5\times{}_3\mathrm{H}_4-{}_2\mathrm{H}_5\times{}_2\mathrm{H}_4 &= {}_7\mathrm{C}_5\times{}_6\mathrm{C}_4-{}_6\mathrm{C}_5\times{}_5\mathrm{C}_4 \\ &= {}_7\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_2-{}_6\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1 \\ &= 21\times15-6\times5 \\ &= 285 \end{aligned}$$

답 285

대표 기출 문제

출제 경향 이항정리를 이용하여 특정한 항의 계수를 구하는 문제, 이항계수의 성질을 이용하는 문제가 출제된다.

$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식에서 x^3의 계수가 7일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2020학년도 대수능 6월 모의평가

출제 의도 이항정리의 전개식의 일반항을 이용하여 특정한 항의 계수를 구한 후 상수 a의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식에서 x^3항은

$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)$에서 x^2과 $\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식에서 x항을 곱한 것과

$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)$에서 $-\frac{1}{x}$과 $\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식에서 x^4항을 곱한 것의 합과 같다.

$\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r\, x^{4-r}\left(\frac{a}{x^2}\right)^r={}_4C_r\, a^r x^{4-3r}\ (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

x항은 $4-3r=1$, 즉 $r=1$일 때이므로 x의 계수는 ${}_4C_1\times a^1=4a$이다.
x^4항은 $4-3r=4$, 즉 $r=0$일 때이므로 x^4의 계수는 ${}_4C_0\times a^0=1$이다.

즉, $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식에서 x^3항은

$$x^2\times 4ax+\left(-\frac{1}{x}\right)\times x^4=4ax^3-x^3=(4a-1)x^3$$

따라서 $4a-1=7$에서

$a=2$

답 ②

03 확률의 뜻과 활용

1. 시행과 사건

(1) 시행

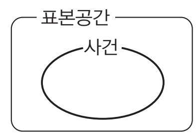
주사위나 동전을 던지는 것처럼 같은 조건에서 반복할 수 있고, 그 결과가 우연에 의하여 정해지는 실험이나 관찰을 시행이라고 한다.

(2) 사건

① 표본공간: 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 표본공간이라고 한다.

② 사건: 표본공간의 부분집합을 사건이라고 한다.

③ 근원사건: 한 개의 원소로 이루어진 사건을 근원사건이라고 한다.

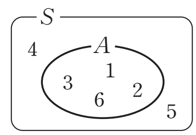


예 한 개의 주사위를 한 번 던져 나오는 눈의 수를 확인하는 시행에서

① 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

② 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 A라 하면 $A=\{1, 2, 3, 6\}$

③ 근원사건은 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$



참고 표본공간은 공집합이 아닌 경우만 생각한다.

2. 배반사건과 여사건

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여

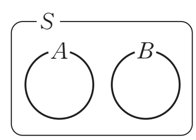
(1) 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 사건을 $A\cup B$와 같이 나타낸다.

(2) 두 사건 A와 B가 동시에 일어나는 사건을 $A\cap B$와 같이 나타낸다.

(3) 배반사건: 두 사건 A와 B가 동시에 일어나지 않을 때, 즉

$$A\cap B=\varnothing$$

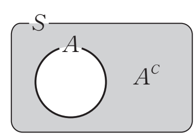
일 때, 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이라고 한다.



(4) 여사건: 사건 A에 대하여 사건 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라 하고, 기호로

$$A^C$$

과 같이 나타낸다.



이때 $A\cap A^C=\varnothing$이므로 사건 A와 그 여사건 A^C은 서로 배반사건이다.

참고 $B=A^C$이면 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이다. 하지만 그 역은 성립하지 않는다.

예 한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에서 2의 약수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수인 자연수의 눈이 나오는 사건을 B, 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 C라 하면

$$A=\{1, 2\},\ B=\{2, 3, 5\},\ C=\{3, 6\}$$

① $A\cup B=\{1, 2, 3, 5\}$, $A\cap B=\{2\}$

② $A\cap C=\varnothing$이므로 두 사건 A와 C는 서로 배반사건이다.

③ 사건 A의 여사건은 $A^C=\{3, 4, 5, 6\}$이다.

예제 1 배반사건과 여사건

한 개의 동전을 세 번 던지는 시행에서 첫 번째 던진 동전이 앞면이 나오는 사건을 A, 앞면이 두 번만 나오는 사건을 B라 하자. 이 시행에서 두 사건 $A\cup B$와 C^C이 서로 배반사건이 되도록 하는 사건 C의 개수를 구하시오.

(단, C^C은 C의 여사건이다.)

풀이 전략

(1) 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$임을 이용한다.
(2) 표본공간 S의 사건 A에 대하여 $A\cup A^C=S$임을 이용한다.

풀이

한 개의 동전을 세 번 던지는 시행의 표본공간을 S라 하고, 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내면

$S=\{\text{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}\}$

첫 번째 던진 동전이 앞면이 나오는 사건이 A이므로

$A=\{\text{HHH, HHT, HTH, HTT}\}$

앞면이 두 번만 나오는 사건이 B이므로

$B=\{\text{HHT, HTH, THH}\}$

따라서 $A\cup B=\{\text{HHH, HHT, HTH, HTT, THH}\}$

이때 두 사건 $A\cup B$와 C^C이 서로 배반사건이려면 $(A\cup B)\cap C^C=\varnothing$이어야 한다.

즉, 사건 C는 사건 $A\cup B$를 포함하는 S의 부분집합이어야 하므로 그 개수는

$2^{8-5}=2^3=8$

답 8

정답과 풀이 16쪽

유제 1 [21010-0045]

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 임의로 하나의 수를 선택하는 시행에서 두 사건 A, B가

$A=\{1, 3\}$, $B=\{x\mid x\le n\}$ (n은 5 이하의 자연수)

일 때, 두 사건 A와 B^C이 서로 배반사건이 되도록 하는 모든 n의 값의 합은?

(단, B^C은 B의 여사건이다.)

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

유제 2 [21010-0046]

한 개의 주사위를 한 번 던져 나오는 눈의 수를 확인하는 시행에서 두 사건 A, B가

$A=\{x\mid x$는 2의 배수$\}$, $B=\{x\mid x$는 2의 약수$\}$

이다. 이 시행에서 다음 조건을 만족시키는 사건 C의 개수는? (단, B^C은 B의 여사건이다.)

(가) 두 사건 A와 C는 서로 배반사건이다.
(나) 두 사건 B^C과 C는 서로 배반사건이 아니다.

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

3. 확률의 뜻

(1) 확률

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 사건 A가 일어날 확률이라 하고, 기호로

$$\mathrm{P}(A)$$

와 같이 나타낸다.

(2) 수학적 확률

표본공간이 S인 어떤 시행에서 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 표본공간 S의 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}$$

로 정의하고, 이것을 사건 A가 일어날 수학적 확률이라고 한다.

예 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 한 번 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 6일 수학적 확률을 구해 보자.

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 한 번 던지는 시행에서 표본공간을 S라 하면

$$S=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ \cdots,\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)\}$$

이므로

$$n(S)=6\times6=36$$

나오는 두 눈의 수의 합이 6인 사건을 A라 하면

$$A=\{(1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2),\ (5,\ 1)\}$$

이므로

$$n(A)=5$$

따라서 구하는 확률 $\mathrm{P}(A)$는

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5}{36}$$

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

참고 수학적 확률은 표본공간이 공집합이 아닌 유한집합인 경우에만 생각한다.

(3) 통계적 확률

같은 시행을 n번 반복할 때 사건 A가 일어난 횟수를 r_n이라 하자. 이때 시행 횟수 n이 한없이 커짐에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워질 때, 이 값 p를 사건 A가 일어날 통계적 확률이라고 한다.

그런데 실제로 n의 값을 한없이 크게 할 수 없으므로 n이 충분히 클 때의 상대도수 $\frac{r_n}{n}$을 통계적 확률로 생각한다.

참고 일반적으로 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, 시행 횟수 n을 충분히 크게 하면 사건 A가 일어나는 상대도수 $\frac{r_n}{n}$은 수학적 확률 p에 가까워진다.

예제 2 수학적 확률

1부터 7까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택할 때, 선택된 3개의 수의 곱은 4의 배수이고 선택되지 않은 4개의 수의 곱은 4의 배수가 아닐 확률은?

① $\frac{9}{35}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{11}{35}$ ④ $\frac{12}{35}$ ⑤ $\frac{13}{35}$

풀이 전략 사건 A가 일어날 수학적 확률 $\mathrm{P}(A)$는 $\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}$임을 이용한다.

풀이 1부터 7까지의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 수를 선택하는 경우의 수는

$${}_7\mathrm{C}_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

선택되지 않은 4개의 수의 곱이 4의 배수가 아니려면 선택되지 않은 수에 4가 포함되지 않아야 하고 2, 6 중 적어도 하나는 포함되지 않아야 한다.

이때 4는 반드시 선택되므로 선택된 3개의 수의 곱은 4의 배수가 된다.

따라서 4를 반드시 선택하고 2, 6 중 적어도 하나를 선택해야 한다.

즉, 선택된 3개의 수는 4와 2와 6, 4와 2와 1, 3, 5, 7 중 하나, 4와 6과 1, 3, 5, 7 중 하나이어야 하므로 이 경우의 수는

$$1+4+4=9$$

그러므로 구하는 확률은

$$\frac{9}{35}$$

답 ①

정답과 풀이 16쪽

[21010-0047]

유제 3 한 개의 주사위를 세 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c라 할 때, x에 대한 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$이 중근을 가질 확률은?

① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{7}{216}$ ③ $\frac{1}{27}$ ④ $\frac{1}{24}$ ⑤ $\frac{5}{108}$

[21010-0048]

유제 4 어느 학급에서 번호가 1번부터 8번까지의 8명의 학생이 모두 임의로 일렬로 설 때, 3번 학생이 1번 학생과 8번 학생보다 뒤에 설 확률은? (단, 1번, 8번 학생과 3번 학생 사이에 다른 학생이 있어도 된다.)

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

4. 확률의 기본 성질

표본공간이 S인 어떤 시행에서

(1) 임의의 사건 A에 대하여 $0\le \mathrm{P}(A)\le 1$

(2) 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $\mathrm{P}(S)=1$

(3) 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing)=0$

설명 어떤 시행에서 표본공간 S의 임의의 사건 A에 대하여 $\varnothing\subset A\subset S$이므로

$$0\le n(A)\le n(S)$$

이다. 이 부등식의 각 변을 $n(S)$로 나누면

$$0\le \frac{n(A)}{n(S)}\le 1,\ \text{즉 } 0\le \mathrm{P}(A)\le 1$$

특히, 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $\mathrm{P}(S)=\dfrac{n(S)}{n(S)}=1$

또 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing)=\dfrac{n(\varnothing)}{n(S)}=0$

5. 확률의 덧셈정리

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

특히, 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이면

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

설명 표본공간 S의 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 두 사건 A와 B에 대하여

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

이 등식의 양변을 $n(S)$로 나누면

$$\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

특히, 두 사건 A와 B가 서로 배반사건, 즉 $A\cap B=\varnothing$이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

예 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드 중에서 임의로 한 장의 카드를 뽑을 때, 뽑힌 카드에 적혀 있는 수가 2의 배수 또는 3의 배수일 확률을 구해 보자.

임의로 한 장의 카드를 뽑을 때, 카드에 적혀 있는 수가 2의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하면 사건 $A\cap B$는 카드에 적혀 있는 수가 6의 배수인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{3}{10},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}-\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$$

예제 3 확률의 덧셈정리

1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 2명이 있다. 이 6명의 학생이 모두 임의로 일렬로 설 때, 1학년 두 학생 사이에 한 명의 3학년 학생만 있거나 3학년 두 학생 사이에 한 명의 1학년 학생만 있을 확률은?

① $\frac{2}{15}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

풀이 전략 두 사건 A, B에 대하여 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률은 확률의 덧셈정리 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$를 이용한다.

풀이 6명의 학생이 일렬로 서는 경우의 수는 $6!=720$

1학년 두 학생 사이에 한 명의 3학년 학생만 있는 사건을 A, 3학년 두 학생 사이에 한 명의 1학년 학생만 있는 사건을 B라 하자.

(ⅰ) 1학년 두 학생 사이에 한 명의 3학년 학생만 있는 경우

1학년 두 학생 사이에 서는 한 명의 3학년 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1=2$

(1학년, 3학년, 1학년)과 같이 이웃한 3명의 학생을 한 사람이라 생각하고 남은 세 학생과 함께 4명이 일렬로 서는 경우의 수는 $4!=24$

이 각각에 대하여 1학년 학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 이 경우의 수는 $2\times24\times2=96$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{96}{720}=\frac{2}{15}$

(ⅱ) 3학년 두 학생 사이에 한 명의 1학년 학생만 있는 경우

(ⅰ)과 같은 방법으로 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{15}$

(ⅲ) 1학년 두 학생 사이에 한 명의 3학년 학생만 있고 3학년 두 학생 사이에 한 명의 1학년 학생만 있는 경우

(1학년, 3학년, 1학년, 3학년) 또는 (3학년, 1학년, 3학년, 1학년)과 같이 이웃하여 서는 경우의 수는 2

이 이웃한 4명의 학생을 한 사람이라 생각하고 남은 두 학생과 함께 3명이 일렬로 서는 경우의 수는 $3!=6$

이 각각에 대하여 1학년 학생 2명과 3학년 학생 2명이 각각 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!\times2!=4$

따라서 이 경우의 수는 $2\times6\times4=48$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{15}+\frac{2}{15}-\frac{1}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

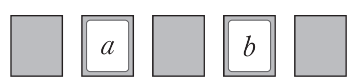
답 ②

정답과 풀이 17쪽

유제 5

[21010-0049]

1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 임의로 서로 다른 5장의 카드를 선택하여 카드에 적혀 있는 수가 작은 수부터 크기순으로 왼쪽부터 일렬로 나열한다. 왼쪽에서 두 번째 카드에 적혀 있는 수와 네 번째 카드에 적혀 있는 수를 각각 a, b라 할 때, $b-a=4$일 확률은?



① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{3}{14}$ ④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{5}{14}$

6. 여사건의 확률

사건 A와 그 여사건 A^C에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$$

설명 표본공간 S의 사건 A에 대하여 사건 A와 그 여사건 A^C은 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cup A^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)$$

이때 $\mathrm{P}(A\cup A^C)=\mathrm{P}(S)=1$이므로

$$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)=1,\ 즉\ \mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$$

가 성립한다.

예 흰 공 3개와 검은 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공 중 흰 공이 적어도 1개 포함될 확률을 구해 보자.

이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공 중 흰 공이 적어도 1개 포함되는 사건을 A라 하면 그 여사건 A^C은 꺼낸 3개의 공이 모두 검은 공인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{35}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}$$

한편, 사건 A가 일어날 확률을 직접 구하면

(i) 흰 공 1개, 검은 공 2개를 꺼내는 경우의 확률은 $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{18}{35}$

(ii) 흰 공 2개, 검은 공 1개를 꺼내는 경우의 확률은 $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{12}{35}$

(iii) 흰 공 3개를 꺼내는 경우의 확률은 $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{35}$

(i), (ii), (iii)에서 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{18}{35}+\dfrac{12}{35}+\dfrac{1}{35}=\dfrac{31}{35}$

이와 같이 사건 A의 확률을 직접 구하는 것보다 그 여사건 A^C의 확률을 이용하여 사건 A의 확률을 구하는 것이 편리할 때가 있다.

참고 (1) 일반적으로 '적어도 ~일 확률', '~ 이상일 확률', '~ 이하일 확률', '~가 아닐 확률' 등을 구할 때는 여사건의 확률을 이용하면 편리한 경우가 많다.

(2) 두 사건 A, B와 그 각각의 여사건 A^C, B^C에 대하여

① $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

② $\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$

설명 드모르간의 법칙에 의하여 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$, $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이므로 여사건의 확률에 의하여

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$$

$$\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\mathrm{P}((A\cap B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$$

예제 4 여사건의 확률

흰 공 1개, 빨간 공 2개, 파란 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공의 색의 종류의 수가 2 이상일 확률은?

① $\frac{19}{24}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{7}{8}$ ④ $\frac{11}{12}$ ⑤ $\frac{23}{24}$

풀이 전략 사건 A의 여사건 A^C의 확률을 알 때, 사건 A의 확률은 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$임을 이용하여 구한다.

풀이 10개의 공이 들어 있는 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$$

꺼낸 공의 색의 종류의 수가 2 이상인 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 꺼낸 공의 색이 모두 같은 사건이다.

파란 공 3개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_3=1$

검은 공 3개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3=4$

즉, 꺼낸 공의 색이 모두 같은 경우의 수는 $1+4=5$이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{120}=\frac{1}{24}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{24}=\frac{23}{24}$$

답 ⑤

정답과 풀이 17쪽

[21010-0050]

유제 6 원형의 탁자에 같은 간격으로 놓여 있는 똑같은 의자 6개에 남학생 3명과 여학생 3명이 모두 임의로 앉을 때, 적어도 2명의 여학생이 서로 이웃하도록 앉을 확률은?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

[21010-0051]

유제 7 100부터 999까지의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 선택할 때, 선택한 수의 백의 자리 또는 십의 자리 또는 일의 자리의 수 중에 1이 있을 확률은?

① $\frac{6}{25}$ ② $\frac{7}{25}$ ③ $\frac{8}{25}$ ④ $\frac{9}{25}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

[21010-0052]

1 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이고 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{8}$일 때, $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$의 값은?

(단, A^C은 A의 여사건이다.)

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[21010-0053]

2 흰 공 5개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공 2개와 검은 공 1개가 나올 확률은?

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{11}{21}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{13}{21}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

[21010-0054]

3 한 개의 동전을 4번 던질 때, 앞면이 3번 이상 나오거나 앞면이 연속하여 2번 이상 나올 확률은?

① $\frac{5}{16}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{7}{16}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{9}{16}$

[21010-0055]

4 두 학생 A, B를 포함한 6명의 학생이 모두 한 번씩 차례대로 발표하려고 한다. 이 6명의 학생의 발표 순서를 임의로 정할 때, A와 B 사이에 적어도 한 명이 발표하도록 순서가 정해질 확률은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[21010-0056]

5 10부터 99까지의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 선택할 때, 선택한 수가 2의 배수이거나 십의 자리의 수가 8의 약수일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

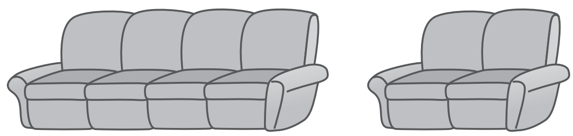
[21010-0057]

1 숫자 2, 2, 3, 4, 4를 일렬로 나열하여 만든 모든 다섯 자리의 자연수 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 일의 자리의 수가 소수일 확률은?

① $\frac{8}{15}$ ② $\frac{17}{30}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{19}{30}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

[21010-0058]

2 그림과 같이 4인용 의자 1개와 2인용 의자 1개가 놓여 있다. 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 2명의 6명의 학생이 모두 이 2개의 의자에 임의로 앉을 때, 2인용 의자에는 같은 학년의 2명의 학생이 앉고 4인용 의자에는 같은 학년의 학생끼리 이웃하지 않도록 4명의 학생이 앉을 확률은?



① $\frac{1}{30}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{15}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

[21010-0059]

3 한 개의 주사위를 두 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b라 하고, 실수 x에 대한 두 조건 p, q를

$$p : x=a,\ q : x^2-(2+b)x+2b\leq 0$$

이라 할 때, 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건이 될 확률은?

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{17}{36}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{19}{36}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

[21010-0060]

4 주머니에 10개의 공이 들어 있고, 주머니에는 흰 공과 검은 공만 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 두 공의 색이 서로 같은 사건을 A, 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내는 사건을 B라 하자.

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{15}$일 때, 흰 공의 개수는? (단, 흰 공의 개수는 5 이하이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[21010-0061]

5 세 수 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 임의로 3개의 수를 선택한 차례대로 a, b, c라 할 때, a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형이 만들어질 확률은?

① $\frac{5}{9}$　② $\frac{16}{27}$　③ $\frac{17}{27}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{19}{27}$

[21010-0062]

6 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 함수 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수 f가 $f(1)<f(2)<f(3)$ 또는 $f(2)<f(4)$를 만족시킬 확률은?

① $\frac{49}{128}$　② $\frac{25}{64}$　③ $\frac{51}{128}$　④ $\frac{13}{32}$　⑤ $\frac{53}{128}$

[21010-0063]

7 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 4개를 선택해 일렬로 나열한 수를 $a_1a_2a_3a_4$라 하자. 모든 $a_1a_2a_3a_4$ 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 선택한 수 $a_1a_2a_3a_4$가 다음 조건을 만족시킬 확률은?

> $1\le k\le 4$인 모든 자연수 k에 대하여 a_1, a_2, a_3, a_4 중 숫자 k의 개수는 0이거나 k의 양의 약수의 개수와 같다.

① $\frac{5}{128}$　② $\frac{11}{256}$　③ $\frac{3}{64}$　④ $\frac{13}{256}$　⑤ $\frac{7}{128}$

[21010-0064]

8 방정식 $x+y+z+w=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w) 중에서 임의로 한 개를 선택한다. 선택한 순서쌍 (x, y, z, w)가

$$(x+y-4)(z-1)=0$$

을 만족시킬 확률은?

① $\frac{5}{14}$　② $\frac{31}{84}$　③ $\frac{8}{21}$　④ $\frac{11}{28}$　⑤ $\frac{17}{42}$

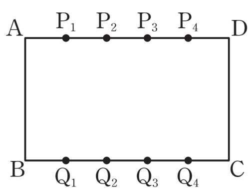
[21010-0065]

1 집합 $X=\{x\,|\,x$는 7 이하의 자연수$\}$의 모든 부분집합 중에서 임의로 선택한 한 집합을 A라 할 때, 집합 A가 다음 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

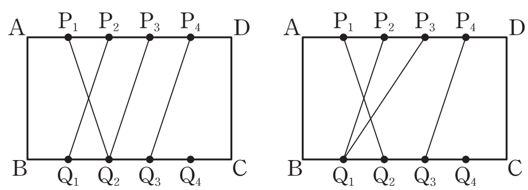
(가) 집합 A의 원소의 개수는 2 이상이다.
(나) 집합 A와 집합 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$는 서로소가 아니다.

[21010-0066]

2 [그림 1]과 같이 직사각형 ABCD에서 선분 AD를 5등분하는 4개의 점 P_1, P_2, P_3, P_4와 선분 BC를 5등분하는 4개의 점 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4가 있다. 각 점 P_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$에 대하여 점 P_i와 4개의 점 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 중에서 임의로 선택한 한 점을 선분으로 연결한다. [그림 2]는 이러한 방법에 따라 4개의 선분을 그린 2가지 예이다. 직사각형 ABCD가 추가된 4개의 선분에 의하여 나누어진 영역의 개수가 6일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[그림 1]



[그림 2]

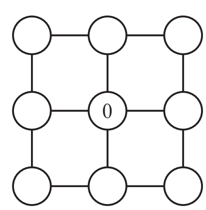
[21010-0067]

3 [그림 1]의 도형에 다음과 같은 [실행 1], [실행 2]의 순서로 숫자를 써넣는다.

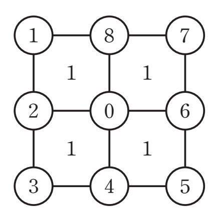
[실행 1] 내부가 비어 있는 8개의 원에 1부터 8까지의 자연수를 모두 한 번씩 사용하여 임의로 써넣는다.
[실행 2] 내부가 비어 있는 4개의 모양의 도형에 이 도형과 원주의 일부를 공유하는 4개의 원에 적혀 있는 모든 수의 합이 홀수이면 1, 짝수이면 0을 써넣는다.

[그림 2]는 [실행 1], [실행 2]의 순서로 숫자를 써넣은 한 예이다. [실행 1], [실행 2]의 순서로 숫자를 써넣을 때, 4개의 모양의 도형에 적혀 있는 1의 개수가 4일 확률은?

(단, 주어진 도형을 회전시키지 않는다.)



[그림 1]



[그림 2]

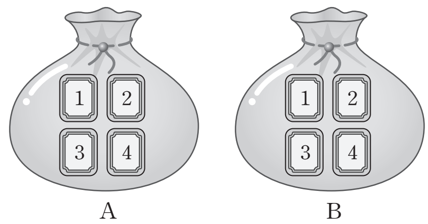
① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{3}{14}$
④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{5}{14}$

대표 기출 문제

출제 경향 어떤 시행에서 사건이 일어나는 경우의 수를 구한 후 확률의 정의를 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다. 또한 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구하는 문제도 출제된다.

두 주머니 A와 B에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 각각 들어 있다. 갑은 주머니 A에서, 을은 주머니 B에서 각자 임의로 두 장의 카드를 꺼내어 가진다. 갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합과 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 같을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



2017학년도 대수능

출제 의도 경우의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 갑이 주머니 A에서 두 장의 카드를 꺼내고, 을이 주머니 B에서 두 장의 카드를 꺼내는 경우의 수는

$${}_4C_2\times{}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}=36$$

갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합과 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 같은 경우의 수는 다음과 같다.

(ⅰ) 갑과 을이 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 숫자가 모두 같을 때

4장의 카드 중에서 두 장의 카드를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

$${}_4C_2=6$$

(ⅱ) 갑과 을이 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 숫자가 모두 다를 때

이 경우는 갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합과 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 모두 5가 될 때이다.

갑이 1과 4가 적힌 카드를 꺼내고 을은 2와 3이 적힌 카드를 꺼내거나 갑이 2와 3이 적힌 카드를 꺼내고 을은 1과 4가 적힌 카드를 꺼낼 때이므로 이 경우의 수는

2

(ⅰ), (ⅱ)에서 갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합과 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 같은 경우의 수는

$6+2=8$

이므로 구하는 확률은 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

따라서 $p=9$, $q=2$이므로 $p+q=9+2=11$

답 11

대표 기출 문제

출제 경향 어떤 사건이 일어나는 경우가 여러 갈래로 나누어져 있는 문제에서 여사건을 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z) 중에서 임의로 한 개를 선택한다. 선택한 순서쌍 (x, y, z)가 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2018학년도 대수능

출제 의도 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하고 여사건의 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=\frac{12\times 11}{2\times 1}=66$$

이 중에서 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$이 성립하려면 x, y, z 중에서 적어도 두 개가 서로 같아야 한다.

그런데 $x=y=z$인 경우는 없으므로 x, y, z 중 두 개가 서로 같아야 한다.

$x=y$를 만족시키는 순서쌍은

$$(0, 0, 10), (1, 1, 8), \cdots, (5, 5, 0)$$

의 6개이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_3C_2\times 6=3\times 6=18$$

따라서 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$이 성립할 확률은

$$\frac{18}{66}=\frac{3}{11}$$

이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$이 성립할 확률은

$$1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$$

따라서 $p=11$, $q=8$이므로 $p+q=11+8=19$

답 19

04 조건부확률

1. 조건부확률

(1) 조건부확률의 뜻

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 확률이 0이 아닌 사건 A가 일어났다고 가정할 때 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라 하고, 기호로

$$\mathrm{P}(B|A)$$

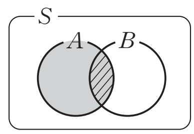
와 같이 나타낸다.

(2) 조건부확률의 계산

사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

설명 어떤 시행에서 표본공간 S의 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 사건 A를 새로운 표본공간으로 하여 사건 B, 즉 사건 $A\cap B$가 일어날 확률이므로



$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

이다. 이 등식의 우변의 분모와 분자를 각각 $n(S)$로 나누면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

이다.

예 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 4의 약수일 때, 그 수가 짝수일 확률을 구해 보자.

한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에서 표본공간을 S, 4의 약수의 눈이 나오는 사건을 A, 짝수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면

$$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\},\ A=\{1,\ 2,\ 4\},\ B=\{2,\ 4,\ 6\},\ A\cap B=\{2,\ 4\}$$

이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

이다.

따라서 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

한편, 다음과 같은 방법으로도 $\mathrm{P}(B|A)$의 값을 구할 수 있다.

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{2}{3}$$

예제 1 조건부확률

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 모든 부분집합 중에서 임의로 한 집합을 선택한다. 선택한 집합의 원소의 개수가 4 이상일 때, 이 집합의 원소의 최솟값이 3일 확률은?

① $\frac{3}{64}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{5}{64}$ ④ $\frac{3}{32}$ ⑤ $\frac{7}{64}$

풀이 전략 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$임을 이용한다. (단, $\mathrm{P}(A)>0$)

풀이 집합 X의 모든 부분집합 중에서 한 집합을 선택하는 경우의 수는 $2^7=128$

선택한 집합의 원소의 개수가 4 이상인 사건을 A, 원소의 최솟값이 3인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

집합 X의 부분집합 중 원소의 개수가 4 이상인 집합, 즉 원소가 4개 또는 5개 또는 6개 또는 7개인 집합을 선택하는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_4+{}_7\mathrm{C}_5+{}_7\mathrm{C}_6+{}_7\mathrm{C}_7=35+21+7+1=64$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{64}{128}=\frac{1}{2}$$

원소의 개수가 4 이상인 집합의 원소의 최솟값이 3이려면 3을 반드시 원소로 선택하고 4, 5, 6, 7 중에서 3개 또는 4개를 선택하면 된다. 이때 이 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_4=4+1=5$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{128}$$

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{5}{128}}{\frac{1}{2}}=\frac{5}{64}$

답 ③

참고 이항계수의 성질에서 ${}_7\mathrm{C}_4+{}_7\mathrm{C}_5+{}_7\mathrm{C}_6+{}_7\mathrm{C}_7=2^{7-1}=2^6$

정답과 풀이 25쪽

유제 1

[21010-0068]

어느 고등학교의 3학년 학생은 181명이다. 이 고등학교의 3학년 학생은 과목 A와 과목 B 중 한 과목을 선택하였고, 각 과목을 선택한 학생의 수는 오른쪽 표와 같다. 이 고등학교의 3학년 학생 중에서 임의로 선택한 한 명이 과목 B를 선택한 학생일 때, 이 학생이 여학생일 확률은?

(단위: 명)

구분	과목 A	과목 B	합계
남학생	21	70	91
여학생	40	50	90
합계	61	120	181

① $\frac{50}{181}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

유제 2

[21010-0069]

한 개의 주사위를 세 번 던져 4의 눈이 한 번 이상 나왔을 때, 나온 세 눈의 수의 합이 6의 배수일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

2. 확률의 곱셈정리

(1) 확률의 곱셈정리

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0)$$

설명 $\mathrm{P}(A)>0$일 때, 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다. ㉠의 양변에 $\mathrm{P}(A)$를 곱하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$$

이다. 같은 방법으로 $\mathrm{P}(B)>0$일 때, 사건 B가 일어났을 때의 사건 A의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(B)},\ \text{즉 } \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $\mathrm{P}(B)$를 곱하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

이다.

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$가 성립한다.

예 흰 공 3개와 검은 공 5개가 들어 있는 주머니에서 임의로 공을 한 개씩 두 번 꺼낸다. 꺼낸 공을 주머니에 다시 넣지 않을 때, 꺼낸 공이 모두 흰 공일 확률을 구해 보자.

첫 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 A, 두 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{8},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$$

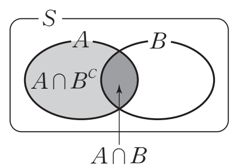
(2) 확률의 곱셈정리의 활용

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)\ (\text{단, } 0<\mathrm{P}(B)<1)$$

설명 두 사건 A, B에 대하여

$$A=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)$$



이다. 이때 두 사건 $A\cap B$와 $A\cap B^C$은 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}((A\cap B)\cup(A\cap B^C))=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)$$

이다. 또한 $0<\mathrm{P}(B)<1$이면 $0<\mathrm{P}(B^C)<1$이므로 확률의 곱셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B),\ \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)$$

이다.

따라서 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)$이 성립한다.

예제 2 확률의 곱셈정리

두 주머니 A, B에는 흰 공 1개와 검은 공 2개로 구성된 공 3개가 각각 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸 후 주머니 A에서 꺼낸 공과 동일한 색과 개수의 공을 주머니 B에서 찾아 꺼내어 이 4개의 공을 주머니 A에 넣는다. 주머니 A에서 다시 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 공이 모두 검은 공일 확률은?

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{4}{15}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{2}{5}$　⑤ $\frac{7}{15}$

풀이 전략 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$임을 이용한다. (단, $\mathrm{P}(A)>0$)

풀이 주머니 A에서 첫 번째에 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내는 사건을 A, 두 번째 공을 꺼낼 때 검은 공을 3개 꺼내는 사건을 T라 하자.

이때 사건 A의 여사건 A^C은 첫 번째에 검은 공 2개를 꺼내는 사건이다.

(i) 주머니 A에서 첫 번째 꺼낸 공이 흰 공 1개, 검은 공 1개인 경우

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{2}{3}$$

두 번째 공을 꺼낼 때 주머니 A에는 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있으므로 이 주머니에서 검은 공 3개를 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(T|A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{1}{10}$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap T)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(T|A)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$

(ii) 주머니 A에서 첫 번째 꺼낸 공이 검은 공 2개인 경우

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}$$

두 번째 공을 꺼낼 때 주머니 A에는 흰 공 1개, 검은 공 4개가 들어 있으므로 이 주머니에서 검은 공 3개를 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(T|A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{2}{5}$$

따라서 $\mathrm{P}(A^C\cap T)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(T|A^C)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(T)=\mathrm{P}(A\cap T)+\mathrm{P}(A^C\cap T)=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}=\frac{1}{5}$

답 ①

정답과 풀이 25쪽

유제 3

[21010-0070]

어느 학급의 학생은 남학생이 60 %이고 이 학급의 남학생의 80 %는 1인 미디어 방송을 시청한 경험이 있으며 여학생의 40 %는 1인 미디어 방송을 시청한 경험이 없다. 이 학급의 학생 중에서 임의로 한 명을 선택할 때, 이 학생이 1인 미디어 방송을 시청한 경험이 있는 학생일 확률은?

① $\frac{3}{5}$　② $\frac{16}{25}$　③ $\frac{17}{25}$　④ $\frac{18}{25}$　⑤ $\frac{19}{25}$

3. 사건의 독립과 종속

(1) 사건의 독립

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$이고, 사건 A가 일어나는 것이 사건 B가 일어날 확률에 영향을 주지 않을 때, 즉

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$$

일 때, 두 사건 A와 B는 서로 독립이라고 한다.

(2) 사건의 종속

두 사건 A와 B가 서로 독립이 아닐 때, 두 사건 A와 B는 서로 종속이라고 한다.

(3) 두 사건이 서로 독립일 조건

두 사건 A와 B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0)$$

설명 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이므로 확률의 곱셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

가 성립한다.

역으로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}=\mathrm{P}(B)$$

이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

참고 $0<\mathrm{P}(A)<1$이고 $0<\mathrm{P}(B)<1$인 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$$

이므로 두 사건 A와 B^C은 서로 독립이다.

마찬가지로 두 사건 A^C과 B는 서로 독립이고, 두 사건 A^C과 B^C도 서로 독립이다.

예 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B, 2 이하의 눈이 나오는 사건을 C라 하자. 이때 두 사건 A와 B, 두 사건 A와 C가 서로 독립인지 종속인지를 각각 알아보자.

$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $C=\{1, 2\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}$$

① $A\cap B=\{2\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$이고 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 종속이다.

② $A\cap C=\{2\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{6}$이고 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$이므로 두 사건 A와 C는 서로 독립이다.

예제 3 사건의 독립과 종속

방정식 $a+b+cd=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b와 자연수 c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 중에서 임의로 한 개를 선택하자. 선택한 순서쌍 (a, b, c, d)에서 $cd=1$인 사건을 A라 할 때, **보기**의 사건 중에서 사건 A와 서로 독립인 사건만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $a=b$인 사건 B　　ㄴ. $a \neq b$인 사건 C　　ㄷ. $a+c<3$인 사건 D

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이 전략 두 사건 A와 B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$임을 이용한다. (단, $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$)

풀이 $a+b+cd=3$ (a, b는 음이 아닌 정수, c, d는 자연수)이므로 $cd=1$ 또는 $cd=2$ 또는 $cd=3$이다.

(i) $cd=1$이면 $a+b+cd=3$에서 $a+b+1=3$, 즉 $a+b=2$

이 경우의 순서쌍 (a, b, c, d)는 $(0, 2, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 0, 1, 1)$이다.

(ii) $cd=2$이면 $a+b+cd=3$에서 $a+b+2=3$, 즉 $a+b=1$

이 경우의 순서쌍 (a, b, c, d)는 $(0, 1, 1, 2)$, $(0, 1, 2, 1)$, $(1, 0, 1, 2)$, $(1, 0, 2, 1)$이다.

(iii) $cd=3$이면 $a+b+cd=3$에서 $a+b+3=3$, 즉 $a+b=0$

이 경우의 순서쌍 (a, b, c, d)는 $(0, 0, 1, 3)$, $(0, 0, 3, 1)$이다.

(i), (ii), (iii)에서 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $3+4+2=9$

(i)에서 $A=\{(0, 2, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (2, 0, 1, 1)\}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

ㄱ. $B=\{(1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 3), (0, 0, 3, 1)\}$이고 $A\cap B=\{(1, 1, 1, 1)\}$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{9}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

ㄴ. 사건 C는 사건 B의 여사건이다. 두 사건 A와 B가 서로 독립이고 $0<\mathrm{P}(B)<1$이므로

두 사건 A와 B^C, 즉 두 사건 A와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. $D=\{(0, 2, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 2), (0, 1, 2, 1), (1, 0, 1, 2), (0, 0, 1, 3)\}$이고,

$A\cap D=\{(0, 2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$이므로 $\mathrm{P}(D)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap D)=\frac{2}{9}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap D)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(D)$이므로 두 사건 A와 D는 서로 독립이다.

이상에서 사건 A와 서로 독립인 사건은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

정답과 풀이 26쪽

유제 4

[21010-0071]

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 4의 약수의 눈이 나오는 사건을 A, 2 이상 6 이하의 자연수 a에 대하여 1 또는 a의 눈이 나오는 사건을 B라 하자. 두 사건 A와 B가 서로 독립이 되도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오.

4. 독립시행의 확률

(1) 독립시행의 뜻

동전이나 주사위를 여러 번 반복하여 던지는 경우와 같이 매번 같은 조건에서 어떤 시행을 반복할 때, 각 시행에서 일어나는 사건이 서로 독립인 경우 이러한 시행을 독립시행이라고 한다.

(2) 독립시행의 확률

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, 이 시행을 n번 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r번 일어날 확률은

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}p^{r}(1-p)^{n-r} \text{ (단, } r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

예1 한 개의 주사위를 4번 던질 때, 5의 약수의 눈이 2번 나올 확률을 구해 보자.

한 개의 주사위를 던져서 5의 약수의 눈이 나오는 경우를 ○, 5의 약수의 눈이 나오지 않는 경우를 ×로 나타내면 한 개의 주사위를 4번 던지는 시행에서 5의 약수의 눈이 2번 나오는 경우의 수는

$${}_{4}\mathrm{C}_{2}=6$$

이다.

이때 각 시행마다 일어나는 사건은 서로 독립이고 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 5의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 5의 약수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$이므로 6가지의 각 경우에서 5의 약수의 눈이 2번 나오고 5의 약수가 아닌 눈이 2번 나올 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$$

이다.

1회	2회	3회	4회	확률
○	○	×	×	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$
○	×	○	×	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$
○	×	×	○	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$
×	○	○	×	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$
×	○	×	○	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$
×	×	○	○	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

또한 위의 표의 6가지 사건은 모두 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$${}_{4}\mathrm{C}_{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=6\times\frac{1}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{8}{27}$$

이다.

예2 ① 한 개의 주사위를 3번 던질 때, 3의 눈이 1번 나올 확률은

$${}_{3}\mathrm{C}_{1}\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{2}=3\times\frac{1}{6}\times\frac{25}{36}=\frac{25}{72}$$

② 한 개의 동전을 5번 던질 때, 앞면이 4번 이상 나올 확률은

$${}_{5}\mathrm{C}_{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}+{}_{5}\mathrm{C}_{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{3}{16}$$

예제 4 독립시행의 확률

한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
> 3의 배수이면 A는 2점, B는 1점을 얻고, 3의 배수가 아니면 A는 1점, B는 3점을 얻는다.

이 시행을 5번 반복할 때, 얻은 점수의 합이 8점 이상인 사람이 A뿐일 확률은?

① $\frac{11}{243}$　② $\frac{7}{81}$　③ $\frac{31}{243}$　④ $\frac{41}{243}$　⑤ $\frac{17}{81}$

풀이 전략 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, 이 시행을 n번 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r번 일어날 확률은 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}p^{r}(1-p)^{n-r}$ $(r=0, 1, 2, \cdots, n)$임을 이용한다.

풀이 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수일 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

5번의 시행에서 나온 눈의 수가 3의 배수인 횟수를 a라 하면 나온 눈의 수가 3의 배수가 아닌 횟수는 $5-a$이다.

이때 A가 얻은 점수의 합은 $2a+(5-a)=a+5$, B가 얻은 점수의 합은 $a+3(5-a)=15-2a$이고

얻은 점수의 합이 8점 이상인 사람이 A뿐이려면 $a+5\geq8$이고 $15-2a<8$이므로 $a\geq3$이고 $a>\frac{7}{2}$이어야 한다.

즉, $a>\frac{7}{2}$이므로 $a=4$ 또는 $a=5$

따라서 구하는 확률은 5번의 시행에서 3의 배수의 눈이 4번 또는 5번 나올 확률이므로

$${}_{5}\mathrm{C}_{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{1}+{}_{5}\mathrm{C}_{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{5}=\frac{11}{243}$$

답 ①

정답과 풀이 26쪽

유제 5

[21010-0072]

한 개의 동전을 6번 던질 때, 앞면이 3번 나올 확률은?

① $\frac{3}{16}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{5}{16}$　④ $\frac{3}{8}$　⑤ $\frac{7}{16}$

유제 6

[21010-0073]

흰 공 3개와 검은 공 2개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공의 색을 확인한 후 다시 주머니에 넣는 시행을 한다. 이 시행을 반복하여 처음으로 흰 공을 연속으로 3번 꺼내거나 시행 횟수가 8이 되면 공을 꺼내는 것을 멈춘다. 3 이상 8 이하의 자연수 n에 대하여 n번째 시행을 한 후 공을 꺼내는 것을 멈출 확률을 p_n이라 하자. $125\times\frac{p_7}{p_4}$의 값을 구하시오.

[21010-0074]

1 어느 학급의 학생 24명을 대상으로 봉사활동에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 도시락 배달 봉사와 유기견 보호 봉사 중 하나를 선택하였고, 각각의 봉사활동을 선택한 학생의 수는 오른쪽 표와 같다. 이 조사에 참여한 학생 24명 중에서 임의로 선택한 한 명이 남학생일 때, 이 학생이 유기견 보호 봉사를 선택한 학생일 확률은?

(단위: 명)

구분	도시락 배달	유기견 보호	합계
남학생	5	7	12
여학생	4	8	12
합계	9	15	24

① $\frac{5}{12}$　② $\frac{7}{15}$　③ $\frac{8}{15}$　④ $\frac{5}{9}$　⑤ $\frac{7}{12}$

[21010-0075]

2 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 학생 A가 이 6장의 카드 중에서 임의로 한 장의 카드를 선택한 후 학생 B가 남은 5장의 카드 중에서 임의로 한 장의 카드를 선택한다. 학생 A가 1이 적혀 있는 카드를 선택하고, 학생 B도 1이 적혀 있는 카드를 선택할 확률은?

① $\frac{1}{10}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{3}{10}$　④ $\frac{2}{5}$　⑤ $\frac{1}{2}$

[21010-0076]

3 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}$일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은?

① $\frac{7}{12}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{3}{4}$　④ $\frac{5}{6}$　⑤ $\frac{11}{12}$

[21010-0077]

4 한 개의 동전을 4번 던질 때, 앞면이 나온 횟수를 a, 뒷면이 나온 횟수를 b라 하자. $a-b=2$일 확률은?

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{3}{8}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{5}{8}$

[21010-0078]

5 한 개의 주사위를 3번 던질 때, 나온 눈의 수의 최댓값이 5일 확률은?

① $\frac{19}{72}$　② $\frac{59}{216}$　③ $\frac{61}{216}$　④ $\frac{7}{24}$　⑤ $\frac{65}{216}$

[21010-0079]

1 한 개의 주사위를 5번 던질 때, 나온 5개의 눈의 수의 곱이 2의 배수이지만 4의 배수는 아닐 확률은?

① $\frac{1}{24}$　② $\frac{1}{16}$　③ $\frac{1}{12}$　④ $\frac{5}{48}$　⑤ $\frac{1}{8}$

[21010-0080]

2 두 사건 A와 B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{2}$$

일 때, $\mathrm{P}(A|B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.)

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{2}$

[21010-0081]

3 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 함수 중에서 임의로 하나를 선택한다. 선택한 함수 f에 대하여 $f(1)>f(3)$일 때, $f(1)+f(2)=4$일 확률은?

① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{3}{16}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{5}{16}$

[21010-0082]

4 어느 고등학교의 자율학습실을 이용하는 학생 70명을 대상으로 각 학년별, 일주일에 3일 이상 이용 여부를 조사한 결과는 다음과 같다.

(단위: 명)

구분	1학년	2학년	3학년	합계
일주일에 3일 이상 이용	12	a	b	50
일주일에 2일 이하 이용	c	7	d	20

이 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 한 명이 3학년 학생이 아니면서 일주일에 3일 이상 이용하는 학생일 확률은 $\frac{5}{14}$이다. 이 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 한 명이 일주일에 3일 이상 이용하는 학생일 때 이 학생이 3학년 학생일 확률을 p_1, 임의로 선택한 한 명이 3학년 학생일 때 이 학생이 일주일에 3일 이상 이용하는 학생일 확률을 p_2라 하면 $p_1=\frac{3}{5}p_2$이다. $b+c$의 값은?

① 30　② 31　③ 32　④ 33　⑤ 34

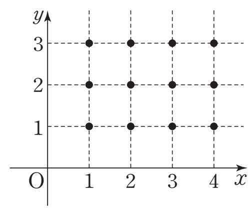
[21010-0083]

5 수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3의 약수이면 점 P를 양의 방향으로 1만큼, 3의 약수가 아니면 점 P를 양의 방향으로 2만큼 이동시키는 시행을 한다. 이 시행을 반복하여 점 P의 좌표가 처음으로 6 이상이 되면 이 시행을 멈춘다. 4번 이하의 시행을 하여 멈출 확률은?

① $\frac{7}{9}$ ② $\frac{22}{27}$ ③ $\frac{23}{27}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{25}{27}$

[21010-0084]

6 좌표평면의 12개의 점 (a, b) $(a=1, 2, 3, 4, b=1, 2, 3)$에서 서로 다른 세 점을 꼭짓점으로 하는 모든 삼각형의 집합을 S라 하자. 집합 S의 원소 중에서 임의로 선택한 한 삼각형이 넓이가 2이고 적어도 한 변이 좌표축에 평행한 삼각형일 때, 이 삼각형이 직각삼각형일 확률은?



① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{10}$
④ $\frac{7}{20}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

[21010-0085]

7 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 4 이하의 눈이 나오는 사건을 A, 6 이하의 자연수 n에 대하여 n의 배수의 눈이 나오는 사건을 B라 하자. 두 사건 A, B가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오.

(가) $\mathrm{P}(A \cup B)=\frac{5}{6}$
(나) 두 사건 A와 B는 서로 종속이다.

[21010-0086]

8 흰 공 3개와 검은 공 3개가 들어 있는 상자 A와 비어 있는 상자 B를 사용하여 다음 시행을 두 번 반복한다.

상자 A에서 임의로 두 개의 공을 동시에 꺼내어,
서로 같은 색의 공이 나오면 꺼낸 2개의 공 중 1개를 상자 A에, 나머지 1개를 상자 B에 넣고,
서로 다른 색의 공이 나오면 꺼낸 2개의 공을 모두 상자 B에 넣는다.

두 번째 시행 후 상자 A에 들어 있는 흰 공의 개수와 검은 공의 개수가 서로 같을 때, 첫 번째 시행 후 상자 A에 들어 있는 흰 공의 개수와 검은 공의 개수가 서로 다를 확률은?

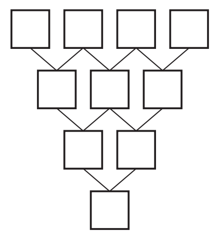
① $\frac{5}{26}$ ② $\frac{3}{13}$ ③ $\frac{7}{26}$ ④ $\frac{4}{13}$ ⑤ $\frac{9}{26}$

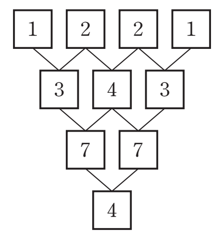
[21010-0087]

1 [그림 1]의 10개의 빈칸에 다음과 같은 [실행 1], [실행 2]의 순서로 수를 써넣는다.

> [실행 1] 맨 윗줄의 빈칸에는 한 개의 동전을 두 번 던져서 앞면이 1번 이상 나오면 그 칸에 1을, 모두 뒷면이 나오면 그 칸에 2를 써넣는 것을 4번 반복하여 왼쪽 칸부터 차례로 수를 써넣는다.
> [실행 2] 위에서 n번째 줄($n=2,\ 3,\ 4$)의 빈칸에는 이 빈칸과 선으로 연결된 $(n-1)$번째 줄의 두 칸에 적혀 있는 두 수에 대하여 두 수의 합이 10 미만이면 그 합을, 10 이상이면 두 수의 합의 일의 자리의 수만 써넣는 것을 6번 반복하여 윗줄부터 차례로 수를 써넣어 빈칸을 모두 채운다.

[그림 2]는 [실행 1], [실행 2]의 순서로 수를 써넣은 한 예이다. [실행 1], [실행 2]의 순서로 수를 써넣을 때, 가장 아랫줄에 있는 1개의 칸에 적혀 있는 수가 1일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)


[그림 1]



[그림 2]

[21010-0088]

2 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드에서 임의로 2장의 카드를 동시에 선택한다. 선택한 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 6인 사건을 A, 3 이상 20 이하의 자연수 m에 대하여 선택한 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 곱이 m 이상인 사건을 B라 하자. 두 사건 A와 B가 서로 독립이 되도록 하는 모든 m의 값의 합은?

① 11　② 13　③ 15　④ 17　⑤ 19

[21010-0089]

3 상자 A와 상자 B에 각각 9개씩 공이 들어 있고, 상자에 들어 있지 않은 공 14개가 있다. 주사위 한 개를 사용하여 다음 시행을 7번 반복한다.

> 한 개의 주사위를 한 번 던져
> 4 이하의 눈이 나오면 상자 A에서 공 1개를 꺼내어 상자 B에 넣고,
> 5 이상의 눈이 나오면 상자에 들어 있지 않은 공 2개를 두 상자 A, B에 각각 1개씩 넣는다.

상자 B에 들어 있는 공의 개수가 7번째 시행 후 처음으로 상자 A에 들어 있는 공의 개수의 2배가 될 확률은 p이다. $3^7 \times p$의 값을 구하시오.

대표 기출 문제

출제 경향 사건의 독립과 종속을 이해하고 확률 계산을 통하여 두 사건이 독립 또는 종속인지를 판단하는 문제가 출제된다.

한 개의 주사위를 한 번 던진다. 홀수의 눈이 나오는 사건을 A, 6 이하의 자연수 m에 대하여 m의 약수의 눈이 나오는 사건을 B라 하자. 두 사건 A와 B가 서로 독립이 되도록 하는 모든 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

2019학년도 대수능

출제 의도 두 사건이 서로 독립인지를 판단할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $A=\{1, 3, 5\}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

(i) $m=1$일 때, $B=\{1\}$이므로

$$A\cap B=\{1\},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(ii) $m=2$일 때, $B=\{1, 2\}$이므로

$$A\cap B=\{1\},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(iii) $m=3$일 때, $B=\{1, 3\}$이므로

$$A\cap B=\{1, 3\},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(iv) $m=4$일 때, $B=\{1, 2, 4\}$이므로

$$A\cap B=\{1\},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(v) $m=5$일 때, $B=\{1, 5\}$이므로

$$A\cap B=\{1, 5\},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(vi) $m=6$일 때, $B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

$$A\cap B=\{1, 3\},\ \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(i)~(vi)에서 두 사건 A와 B가 서로 독립이 되도록 하는 모든 m의 값의 합은 $2+6=8$

답 8

대표 기출 문제

출제 경향 조건부확률을 구하는 문제, 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구하는 문제와 독립시행의 확률을 구하는 문제가 출제된다.

한 개의 동전을 7번 던질 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

(가) 앞면이 3번 이상 나온다.
(나) 앞면이 연속해서 나오는 경우가 있다.

① $\frac{11}{16}$ ② $\frac{23}{32}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{25}{32}$ ⑤ $\frac{13}{16}$

2020학년도 대수능

출제 의도 독립시행의 확률을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내기로 하자.

(i) 앞면이 3번 나오는 경우

H 3개와 T 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_7C_3=35$

H가 이웃하지 않는 경우의 수는 ${}_5C_3=10$

즉, 조건 (나)를 만족시킬 확률은

$$(35-10)\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=25\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$$

(ii) 앞면이 4번 나오는 경우

H 4개와 T 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_7C_4={}_7C_3=35$

H가 이웃하지 않는 경우의 수는 1

즉, 조건 (나)를 만족시킬 확률은

$$(35-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=34\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$$

(iii) 앞면이 5번 이상 나오는 경우

조건 (나)를 항상 만족시키므로 이 경우의 확률은

$$({}_7C_5+{}_7C_6+{}_7C_7)\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=29\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$(25+34+29)\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{88}{128}=\frac{11}{16}$$

답 ①

05 이산확률변수의 확률분포

1. 확률변수

(1) 확률변수: 어떤 시행에서 표본공간의 각 원소에 하나의 실수의 값을 대응시키는 함수를 확률변수라고 한다. 확률변수 X가 어떤 값 x를 가질 확률을 기호로 $\mathrm{P}(X=x)$와 같이 나타낸다.

예 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X가 갖는 값은 0, 1, 2이다.

참고 확률변수는 표본공간을 정의역으로 하고 실수 전체의 집합을 공역으로 하는 함수이지만 변수의 역할도 하기 때문에 확률변수라고 한다.

(2) 이산확률변수: 확률변수 X가 갖는 값이 유한개이거나 무한히 많더라도 자연수와 같이 셀 수 있을 때, 그 확률변수 X를 이산확률변수라고 한다.

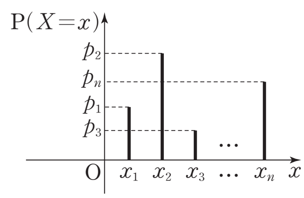
예 두 개의 주사위를 동시에 한 번 던져 나온 두 눈의 수의 합을 X라 할 때, X가 갖는 값은 2부터 12까지의 자연수로 유한개이므로 X는 이산확률변수이다.

2. 이산확률변수의 확률분포

(1) 이산확률변수의 확률분포: 이산확률변수 X가 갖는 값이 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$이고 X가 이들 값을 가질 확률이 각각 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$일 때, $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$과 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ 사이의 대응 관계를 이산확률변수 X의 확률분포라고 한다.

이때 이산확률변수 X의 확률분포는 다음과 같이 표 또는 그래프로 나타낼 수 있다.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1



(2) 확률질량함수: 이산확률변수 X가 갖는 값 x_i $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$과 X가 이들 값을 가질 확률 p_i $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$ 사이의 대응 관계를 나타내는 함수

$$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, 3, \cdots, n)$$

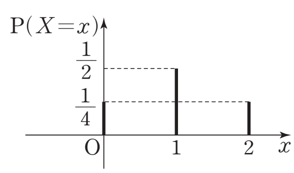
을 이산확률변수 X의 확률질량함수라고 한다.

예 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X가 갖는 값은 0, 1, 2이므로 X는 이산확률변수이고, X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_2\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}\ (x=0, 1, 2)$$

이다. 이때 확률변수 X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1



예제 1 이산확률변수의 확률분포

숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 합을 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(6 \le X \le 8)$의 값은?

① $\frac{3}{10}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{3}{5}$　⑤ $\frac{7}{10}$

풀이 전략 확률변수 X가 가질 수 있는 값을 조사하고 주어진 조건을 만족시키는 X에 대한 확률을 구한다.

풀이 5개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$${}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

확률변수 X가 갖는 값은 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9이므로

$$\mathrm{P}(6\le X\le 8)=\mathrm{P}(X=6)+\mathrm{P}(X=7)+\mathrm{P}(X=8)$$

$X=6$일 때, 1과 5, 2와 4가 적혀 있는 공을 꺼내는 2가지 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=6)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$X=7$일 때, 2와 5, 3과 4가 적혀 있는 공을 꺼내는 2가지 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=7)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$X=8$일 때, 3과 5가 적혀 있는 공을 꺼내는 1가지 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=8)=\frac{1}{10}$$

따라서 $\mathrm{P}(X=6)+\mathrm{P}(X=7)+\mathrm{P}(X=8)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{1}{2}$

답 ③

정답과 풀이 33쪽

[21010-0090]

유제 1 이산확률변수 X가 갖는 값이 2, 3, 4, 5, 6이고 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{x-1}{15}\ (x=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$$

일 때, $\mathrm{P}(X^2-8X+15>0)$의 값은?

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{4}{15}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{2}{5}$　⑤ $\frac{7}{15}$

[21010-0091]

유제 2 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수가 6의 약수인 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(|X-2|=1)$의 값은?

① $\frac{10}{27}$　② $\frac{11}{27}$　③ $\frac{4}{9}$　④ $\frac{13}{27}$　⑤ $\frac{14}{27}$

3. 확률질량함수의 성질

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\,(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$일 때, 확률의 기본 성질에 의하여 다음이 성립한다.

(1) $0\le p_i\le 1$

(2) $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$

예 한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X가 갖는 값은 0, 1, 2이고 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_2\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x}\ (x=0,\ 1,\ 2)$$

이므로

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{4}{9},\ \mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{9},\ \mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{9}$$

따라서

$$0\le \mathrm{P}(X=x)\le 1,$$
$$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=1$$

이므로 확률질량함수가 위의 성질 (1), (2)를 만족시킴을 확인할 수 있다.

4. 이산확률변수 X의 기댓값(평균)

이산확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때,

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

$$x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$$

를 확률변수 X의 기댓값 또는 평균이라 하고, 기호로

$$\mathrm{E}(X)$$

와 같이 나타낸다.

예 한 개의 동전을 세 번 던지는 시행에서 동전의 앞면이 나오는 횟수를 X라 할 때, X의 기댓값을 구해 보자.
확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3이고, X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_3\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

참고 $\mathrm{E}(X)$의 E는 기댓값을 뜻하는 Expectation의 첫 글자이다.

예제 2 이산확률변수의 평균

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. $\mathrm{E}(X)=\frac{8}{3}$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{1}{4}$	b	1

① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{18}$　③ $\frac{1}{20}$　④ $\frac{1}{22}$　⑤ $\frac{1}{24}$

풀이 전략 이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때

① $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n}p_i=1$　② $\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$

임을 이용한다.

풀이 확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{4}+b=1,\ a+b=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times a+3\times\frac{1}{4}+4\times b=1+2a+4b=\frac{8}{3}$$

$$2a+4b=\frac{5}{3} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{6},\ b=\frac{1}{3}$$

따라서 $ab=\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

답 ②

정답과 풀이 33쪽

[21010-0092]

유제 3 이산확률변수 X가 갖는 값이 -1, 0, 1, 2이고 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{a}{x^2+2}\ (x=-1, 0, 1, 2)$$

일 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{2}$

[21010-0093]

유제 4 주머니에 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수 중 가장 큰 수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은?

① $\frac{9}{2}$　② $\frac{19}{4}$　③ 5　④ $\frac{21}{4}$　⑤ $\frac{11}{2}$

5. 이산확률변수 X의 분산, 표준편차

이산확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, 확률변수 X의 분산과 표준편차는 다음과 같다.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

(1) 분산

$\mathrm{E}(X)=m$일 때, 확률변수 $(X-m)^2$의 평균

$$\mathrm{E}((X-m)^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+(x_3-m)^2p_3+\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

을 확률변수 X의 분산이라 하고, 기호로

$$\mathrm{V}(X)$$

와 같이 나타낸다. 이때

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2p_i-2mx_ip_i+m^2p_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2m\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+m^2\sum_{i=1}^{n}p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2m^2+m^2\ \left(\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=m,\ \sum_{i=1}^{n}p_i=1\text{이므로}\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-m^2=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\end{aligned}$$

이므로 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

(2) 표준편차

분산 $\mathrm{V}(X)$의 양의 제곱근을 확률변수 X의 표준편차라 하고, 기호로 $\sigma(X)$와 같이 나타낸다.

즉, $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

참고 $\mathrm{V}(X)$의 V는 분산을 뜻하는 Variance의 첫 글자이고, $\sigma(X)$의 σ는 표준편차를 뜻하는 standard deviation의 첫 글자 s에 해당하는 그리스 문자이다.

예 확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, X의 평균, 분산, 표준편차를 구해 보자.

X	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$m=\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{4}=3$이므로

① $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$를 이용하면

$$\mathrm{V}(X)=(-1)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

② $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$을 이용하면

$$\mathrm{E}(X^2)=2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{2}+4^2\times\frac{1}{4}=\frac{19}{2}$$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{19}{2}-3^2=\frac{1}{2}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

예제 3 이산확률변수의 분산, 표준편차

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. $\mathrm{V}(X)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

X	-1	0	1	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{3}{8}$	$2a$	$\frac{1}{8}$	1

① $\frac{11}{6}$ ② $\frac{17}{9}$ ③ $\frac{35}{18}$
④ 2 ⑤ $\frac{37}{18}$

풀이 전략 이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\,(i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때

① $\mathrm{E}(X)=m=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

② $\mathrm{V}(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i-m^2=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

임을 이용한다.

풀이 확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$$a+\frac{3}{8}+2a+\frac{1}{8}=1,\ 3a=\frac{1}{2},\ a=\frac{1}{6}$$

따라서

$$\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{6}+0\times\frac{3}{8}+1\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{8}=\frac{2}{3}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{6}+0^2\times\frac{3}{8}+1^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{8}=\frac{5}{2}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{5}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{37}{18}$$

답 ⑤

정답과 풀이 33쪽

유제 5 [21010-0094]

흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 나오는 검은 공의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(X)$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{6}{25}$ ③ $\frac{7}{25}$ ④ $\frac{8}{25}$ ⑤ $\frac{9}{25}$

유제 6 [21010-0095]

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. $\mathrm{P}(1\le X\le 3)=\frac{5}{6}$일 때, $\mathrm{V}(X)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}-a$	b	1

① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{7}{9}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ 1

6. 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

이산확률변수 X와 두 상수 a, b $(a\neq0)$에 대하여 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

(1) $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

(2) $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

(3) $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

설명 이산확률변수 X의 확률분포가 다음과 같을 때, 이산확률변수

$$Y=aX+b\ (a,\ b\text{는 상수},\ a\neq0)$$

의 평균, 분산, 표준편차를 구해 보자.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

$y_i=ax_i+b$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$이라 할 때, 확률

$$\mathrm{P}(Y=y_i)=\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$$

이므로 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

따라서 확률변수 Y의 평균은

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\sum_{i=1}^{n}y_ip_i=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i\\&=a\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+b\sum_{i=1}^{n}p_i=a\mathrm{E}(X)+b\end{aligned}$$

확률변수 X의 평균을 m이라 하면 확률변수 Y의 평균은 $am+b$이므로 Y의 분산과 표준편차는

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y)&=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-(am+b)\}^2p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}\{(ax_i+b)-(am+b)\}^2p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}a^2(x_i-m)^2p_i\\&=a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i=a^2\mathrm{V}(X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(Y)&=\sqrt{\mathrm{V}(Y)}=\sqrt{a^2\mathrm{V}(X)}\\&=|a|\sqrt{\mathrm{V}(X)}\\&=|a|\sigma(X)\end{aligned}$$

예 이산확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=5$, $\mathrm{V}(X)=4$일 때, 확률변수 $2X+3$의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(2X+3)=2\mathrm{E}(X)+3=2\times5+3=13$$

$$\mathrm{V}(2X+3)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times4=16$$

$$\sigma(2X+3)=|2|\sigma(X)=2\times\sqrt{4}=4$$

예제 4 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

그림과 같이 숫자 1, 1, 3, 3, 3, 7이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(6X-3)$의 값은?

① 6　② 9　③ 12　④ 15　⑤ 18

풀이 전략 확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률을 구하고 두 상수 a, $b\,(a\neq 0)$에 대하여 $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$임을 이용한다.

풀이 확률변수 X가 갖는 값은 1, 3, 7이고,

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(X=3)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(X=7)=\frac{1}{6}$$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{2}+7\times\frac{1}{6}=3$$

따라서

$$\mathrm{E}(6X-3)=6\mathrm{E}(X)-3=6\times3-3=15$$

답 ④

정답과 풀이 34쪽

[21010-0096]

유제 7 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(3X+1)=16$, $\mathrm{V}(2X+1)=8$일 때, $\mathrm{E}(X^2)$의 값은?

① 23　② 25　③ 27　④ 29　⑤ 31

[21010-0097]

유제 8 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. $\mathrm{E}(2X+1)=\frac{5}{2}$일 때, $\mathrm{V}(4X+1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	a	b	1

① 9　② 11　③ 13　④ 15　⑤ 17

7. 이항분포

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X가 갖는 값은 0, 1, 2, $\cdots$, n이고 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x} \text{ (단, } x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\text{이고, } q=1-p)$$

이다. 이와 같은 이산확률변수 X의 확률분포를 이항분포라 하고, 기호로 $\mathrm{B}(n,\ p)$와 같이 나타낸다.
이때 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따른다고 하며, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	$\cdots$	r	$\cdots$	n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	${}_n\mathrm{C}_0 p^0 q^n$	${}_n\mathrm{C}_1 p^1 q^{n-1}$	${}_n\mathrm{C}_2 p^2 q^{n-2}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_n p^n q^0$	1

예 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 A라 하고, 이 주사위를 120번 던질 때 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하자. 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{1}{3}$이고 독립시행의 횟수가 120이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(120,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

참고 (1) 위의 표에서 각 확률은 이항정리에 의하여 $(p+q)^n$을 전개한 식

$$(p+q)^n={}_n\mathrm{C}_0 p^0 q^n+{}_n\mathrm{C}_1 p^1 q^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2 p^2 q^{n-2}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n p^n q^0$$

의 우변의 각 항과 같다. 이때 $p+q=1$이므로 $\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}=1$임을 알 수 있다.

(2) 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$의 B는 이항분포를 뜻하는 Binomial distribution의 첫 글자이다.

8. 이항분포의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때

(1) 평균: $\mathrm{E}(X)=np$

(2) 분산: $\mathrm{V}(X)=npq$ (단, $q=1-p$)

(3) 표준편차: $\sigma(X)=\sqrt{npq}$ (단, $q=1-p$)

예 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(90,\ \frac{1}{3}\right)$을 따를 때, X의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X)=90\times\frac{1}{3}=30,\ \mathrm{V}(X)=90\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=20,\ \sigma(X)=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

9. 큰수의 법칙

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 임의의 양수 h에 대하여 n이 한없이 커질 때, 확률 $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<h\right)$의 값은 1에 한없이 가까워진다.

참고 큰수의 법칙에 의하여 시행 횟수 n이 충분히 클 때, 사건 A의 상대도수는 수학적 확률에 가까워지므로 사건 A의 상대도수 $\frac{X}{n}$를 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$로 간주할 수 있다. 따라서 자연현상이나 사회현상에서 수학적 확률을 구하기 곤란한 경우에는 시행 횟수를 충분히 크게 한 후 사건의 상대도수를 구하여 수학적 확률로 이용할 수 있다.

예제 5 이항분포의 평균과 분산

어떤 기계에서 생산되는 제품의 불량률이 10 %라고 한다. 이 기계로 100개의 제품을 생산할 때 나오는 불량품의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)$의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

풀이 전략 이산확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때
① $\mathrm{E}(X)=np$
② $\mathrm{V}(X)=npq$ (단, $q=1-p$)
임을 이용한다.

풀이 100개의 제품을 생산할 때 나오는 불량품의 개수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{10}\right)$을 따른다.

$$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{10}=10,$$

$$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=9$$

이므로

$$\mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=10+9=19$$

답 ⑤

정답과 풀이 34쪽

[21010-0098]

유제 9 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$을 따르고 $\mathrm{E}(X^2)=70$일 때, n의 값은?

① 32 ② 36 ③ 40 ④ 44 ⑤ 48

[21010-0099]

유제 10 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수를 a라 할 때,

$$\log_2(a+1)-\log_2 3$$

의 값이 정수가 되는 사건을 A라 하자. 한 개의 주사위를 24번 던지는 시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(2X-3)$의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

[21010-0100]

1 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. $\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

X	1	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	a	$\frac{1}{3}$	1

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{11}{6}$ ④ 2 ⑤ $\frac{13}{6}$

[21010-0101]

2 숫자 1, 1, 2, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 5장의 카드에서 임의로 2장의 카드를 동시에 선택할 때, 선택한 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합을 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은?

① 3 ② $\frac{16}{5}$ ③ $\frac{17}{5}$ ④ $\frac{18}{5}$ ⑤ $\frac{19}{5}$

[21010-0102]

3 이산확률변수 X가 갖는 값이 -2, 0, 1, 2이고 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{k}{4-x}\ (x=-2,\ 0,\ 1,\ 2)$$

일 때, $\mathrm{E}(3X-k)$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① $\frac{7}{5}$ ② $\frac{8}{5}$ ③ $\frac{9}{5}$ ④ 2 ⑤ $\frac{11}{5}$

[21010-0103]

4 한 개의 주사위를 n번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(2X)=24$일 때, $\mathrm{V}(2X+4)$의 값은?

① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

[21010-0104]

5 이산확률변수 X가 갖는 값이 0, 1, 2, $\cdots$, 90이고 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{90}\mathrm{C}_{x}\frac{2^{x}}{3^{90}}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 90)$$

일 때, $\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X+1\right)$의 값을 구하시오.

[21010-0105]

1 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 5개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 홀수인 공의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(X>2)$의 값은?

① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{17}{28}$ ③ $\frac{9}{14}$ ④ $\frac{19}{28}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

[21010-0106]

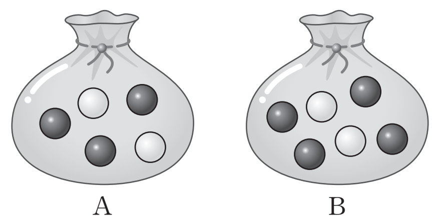
2 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. $\mathrm{E}(X)=3$일 때, $\mathrm{V}(X)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

X	1	2	a	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	b	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}b$	$\frac{1}{8}$	1

① $\frac{11}{4}$ ② 3 ③ $\frac{13}{4}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

[21010-0107]

3 그림과 같이 검은 공 3개, 흰 공 2개가 들어 있는 주머니 A와 검은 공 4개, 흰 공 2개가 들어 있는 주머니 B가 있다. 두 주머니 A, B에서 각각 임의로 공을 한 개씩 꺼낼 때, 나오는 검은 공의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(30X+5)$의 값을 구하시오.



[21010-0108]

4 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다. $\mathrm{V}(3X)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	a	$2a$	$3a$	$4a$	1

① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

[21010-0109]

5 이산확률변수 X가 갖는 값이 -2, -1, 0, 1, 2, 3이고 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} \dfrac{1}{12} & (x=-2,\ -1) \\ a & (x=0,\ 1) \\ b & (x=2,\ 3) \end{cases}$$

이다. $\mathrm{E}(X)=\dfrac{7}{6}$일 때, $\mathrm{E}\left(\dfrac{X}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

[21010-0110]

6 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르고 $\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)=390$을 만족시킬 때, n의 값은?

① 28 ② 32 ③ 36 ④ 40 ⑤ 44

[21010-0111]

7 이항분포 $\mathrm{B}(4n,\ p)$를 따르는 확률변수 X가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X=2n-1)=25\mathrm{P}(X=2n+1)$
(나) $\mathrm{E}(X)=80$

확률변수 Y가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ 2p)$를 따를 때, $\mathrm{V}(Y)$의 값은?

① $\dfrac{40}{3}$ ② $\dfrac{50}{3}$ ③ 20 ④ $\dfrac{70}{3}$ ⑤ $\dfrac{80}{3}$

[21010-0112]

8 좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 이용하여 다음 시행을 한다.

한 개의 주사위를 한 번 던져서
4 이하의 눈이 나오면 점 P를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시키고,
5 이상의 눈이 나오면 점 P를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨다.

위의 시행을 45번 반복하여 이동한 점 P의 좌표 $(x,\ y)$에 대하여 $x+y$의 값의 기댓값은?

① 70 ② 75 ③ 80 ④ 85 ⑤ 90

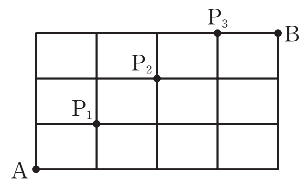
[21010-0113]

1 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 한 개의 동전을 한 번 던져서 앞면이 나오면 이 주머니에서 임의로 3장의 카드를 동시에 꺼내고, 뒷면이 나오면 이 주머니에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼낸다. 주머니에서 꺼낸 카드에 적힌 수가 홀수인 카드의 개수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(12X+3)$의 값은?

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

[21010-0114]

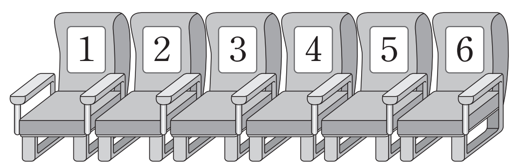
2 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망에서 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 35이다. 이 35가지의 경우에서 임의로 한 가지를 선택할 때, 선택한 경로에서 세 지점 P_1, P_2, P_3 중 지나는 지점의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은?



① $\frac{10}{7}$ ② $\frac{54}{35}$ ③ $\frac{58}{35}$ ④ $\frac{62}{35}$ ⑤ $\frac{66}{35}$

[21010-0115]

3 그림과 같이 1번부터 6번까지의 좌석번호가 있는 자리에 남학생 2명과 여학생 4명을 앉히려고 한다. 이 6명의 학생 중에서 임의로 한 명씩을 택하여 좌석번호가 작은 수부터 차례로 모든 학생을 자리에 앉힐 때, 남학생이 처음으로 앉는 자리의 좌석번호를 확률변수 X라 하자. 예를 들어, 1번 자리부터 차례로 여, 여, 남, 남, 여, 여 순으로 앉으면 $X=3$이다. $\mathrm{V}(6X+4)$의 값은?



① 40 ② 44 ③ 48 ④ 52 ⑤ 56

[21010-0116]

4 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, $(a-4)(b-2)>0$인 사건을 A라 하자. 한 개의 주사위를 두 번 던지는 24회의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{V}(3X)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

대표 기출 문제

출제 경향 확률변수와 확률분포의 의미를 이해하고 이산확률변수 X 또는 이산확률변수 $aX+b$의 평균과 분산 등을 구하는 문제가 출제된다.

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 다음은 $\mathrm{E}(X)=0.271$일 때, $\mathrm{V}(X)$를 구하는 과정이다.

X	0.121	0.221	0.321	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	$\frac{2}{3}$	1

$Y=10X-2.21$이라 하자. 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	a	b	$\frac{2}{3}$	1

$\mathrm{E}(Y)=10\mathrm{E}(X)-2.21=0.5$이므로 $a=\boxed{\text{(가)}}$, $b=\boxed{\text{(나)}}$이고 $\mathrm{V}(Y)=\frac{7}{12}$이다.

한편, $Y=10X-2.21$이므로 $\mathrm{V}(Y)=\boxed{\text{(다)}}\times\mathrm{V}(X)$이다.

따라서 $\mathrm{V}(X)=\frac{1}{\boxed{\text{(다)}}}\times\frac{7}{12}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, pqr의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{13}{9}$ ② $\frac{16}{9}$ ③ $\frac{19}{9}$ ④ $\frac{22}{9}$ ⑤ $\frac{25}{9}$

2018학년도 대수능

출제 의도 이산확률변수의 평균을 구할 수 있고 평균, 분산의 성질을 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $Y=10X-2.21$이라 하자.

확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

Y	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	a	b	$\frac{2}{3}$	1

확률의 총합이 1이므로 $a+b+\frac{2}{3}=1$, 즉 $a+b=\frac{1}{3}$ ······ ㉠

또 $\mathrm{E}(Y)=10\mathrm{E}(X)-2.21=0.5$이므로

$\mathrm{E}(Y)=(-1)\times a+0\times b+1\times\frac{2}{3}=-a+\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$ ······ ㉡

그러므로 ㉠과 ㉡에서 $a=\boxed{\frac{1}{6}}$, $b=\boxed{\frac{1}{6}}$이고 $\mathrm{V}(Y)=\frac{7}{12}$이다.

한편, $Y=10X-2.21$이므로 $\mathrm{V}(Y)=\boxed{100}\times\mathrm{V}(X)$이다.

따라서 $\mathrm{V}(X)=\frac{1}{\boxed{100}}\times\frac{7}{12}$이다.

그러므로 $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{1}{6}$, $r=100$이므로 $pqr=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times100=\frac{25}{9}$

답 ⑤

대표 기출 문제

출제 경향 이항분포의 의미를 이해하고 이항분포를 따르는 확률변수 X의 평균과 분산에 대한 간단한 계산 문제 또는 이항분포에서 확률변수의 성질을 이용하여 독립시행의 횟수, 확률, 평균과 분산 등을 구하는 문제가 출제된다.

이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X+1\right)=5$일 때, n의 값을 구하시오. [3점]

2019학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 이항분포를 따르는 확률변수의 분산을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{n}{4}$$

$\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X+1\right)=\frac{1}{4}\mathrm{V}(X)=5$이므로

$$\mathrm{V}(X)=20$$

따라서 $\frac{n}{4}=20$이므로

$$n=80$$

답 80

06 연속확률변수의 확률분포

1. 연속확률변수

확률변수 X가 어떤 구간에 속하는 모든 실수의 값을 가질 때, X를 연속확률변수라고 한다.

참고 확률변수 X가 키, 무게, 온도, 시간 등의 값을 취하면 X는 어떤 범위에 속하는 모든 실수의 값을 가진다.

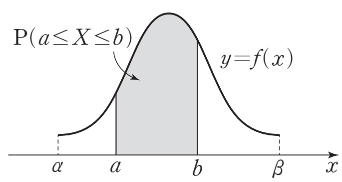
2. 확률밀도함수

일반적으로 $\alpha \le X \le \beta$의 모든 실수의 값을 가지는 연속확률변수 X에 대하여 $\alpha \le x \le \beta$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 세 가지 성질을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$를 확률변수 X의 확률밀도함수라고 한다. 이때 X는 확률밀도함수가 $f(x)$인 확률분포를 따른다고 한다.

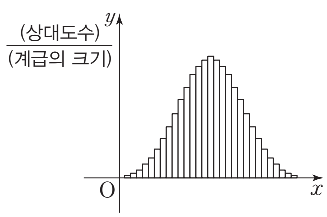
① $f(x) \ge 0$ (단, $\alpha \le x \le \beta$)

② 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

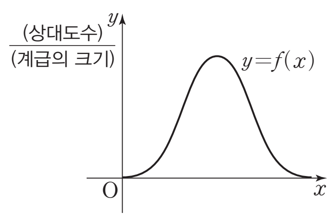
③ $\mathrm{P}(a \le X \le b)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. (단, $\alpha \le a \le b \le \beta$)



설명 [그림 1]과 같이 연속확률변수 X의 $\dfrac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})}$를 히스토그램으로 나타내면 히스토그램의 각 직사각형의 넓이는 각 구간의 상대도수를 나타내고, 상대도수의 합이 1이므로 직사각형들의 넓이의 합은 1이다. 이때 조사 대상의 수를 한없이 늘리고, 계급의 크기를 0에 가깝게 하면 도수분포다각형은 [그림 2]와 같이 매끄러운 곡선이 된다.



[그림 1]



[그림 2]

참고 연속확률변수 X가 하나의 값을 가질 확률은 0이다. 즉,

$\alpha \le X \le \beta$이고 $\alpha \le c \le \beta$일 때, $\mathrm{P}(X=c)=\mathrm{P}(c \le X \le c)=0$

따라서

$\mathrm{P}(a \le X \le b)=\mathrm{P}(a \le X < b)=\mathrm{P}(a < X \le b)=\mathrm{P}(a < X < b)$

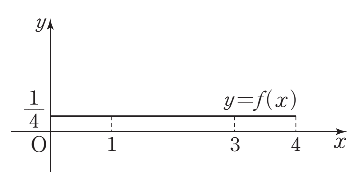
예 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0 \le X \le 4$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$f(x)=\dfrac{1}{4}$ $(0 \le x \le 4)$

일 때,

$\mathrm{P}(0 \le X \le 4)=4 \times \dfrac{1}{4}=1$

$\mathrm{P}(1 \le X \le 3)=(3-1) \times \dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$



예제 1 연속확률변수와 확률밀도함수

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $-1\le X\le 1$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

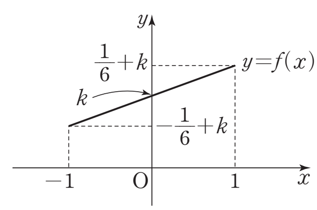
$$f(x)=\frac{1}{6}x+k$$

일 때, $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{4}\le X\le k\right)$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① $\frac{21}{64}$ ② $\frac{23}{64}$ ③ $\frac{25}{64}$ ④ $\frac{27}{64}$ ⑤ $\frac{29}{64}$

풀이 전략 $-1\le x\le 1$에서 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이가 1이다.

풀이 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 $-1\le x\le 1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이가 1이다.



즉, $\frac{1}{2}\times 2\times\left\{\left(-\frac{1}{6}+k\right)+\left(\frac{1}{6}+k\right)\right\}=2k=1$이므로 $k=\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}$이므로

$$f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}=\frac{11}{24},\ f(k)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$$

따라서

$$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{4}\le X\le k\right)=\mathrm{P}\left(-\frac{1}{4}\le X\le \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}\times\left(\frac{11}{24}+\frac{7}{12}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{25}{24}=\frac{25}{64}$$

답 ③

정답과 풀이 41쪽

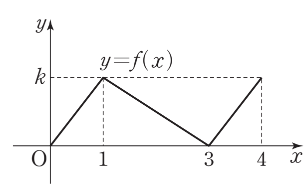
유제 1 [21010-0117]

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $-1\le X\le 1$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 $f(x)=ax+b$이다. $\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\frac{3}{5}$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

유제 2 [21010-0118]

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0\le X\le 4$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. $\mathrm{P}(2k\le X\le 4k)$의 값은? (단, k는 상수이다.)



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

3. 정규분포

실수 전체의 집합에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 두 상수 m, $\sigma\,(\sigma>0)$에 대하여

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{단, } e\text{는 } 2.718281\cdots\text{인 무리수})$$

일 때, X의 확률분포를 정규분포라고 한다.

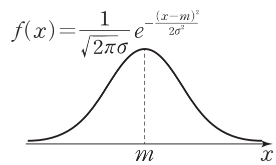
이때 확률변수 X의 평균은 m, 표준편차는 σ임이 알려져 있다.

또한 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 기호로 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$과 같이 나타내고, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다고 한다.

참고 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$의 N은 정규분포를 뜻하는 Normal distribution의 첫 글자이다.

4. 정규분포를 따르는 확률변수의 확률밀도함수의 그래프

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$와 그 그래프는 다음과 같은 성질을 가지고 있음이 알려져 있다.



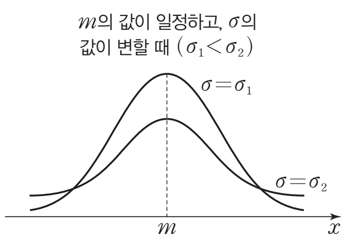
① 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이다.

② $x=m$에서 최댓값을 갖고, x축을 점근선으로 한다.

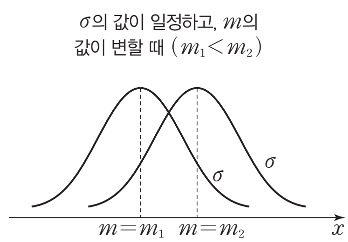
③ 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

④ 평균 m의 값이 일정할 때, [그림 1]과 같이 표준편차 σ의 값이 커지면 곡선의 중앙 부분이 낮아지면서 양쪽으로 퍼지고, 표준편차 σ의 값이 작아지면 곡선의 중앙 부분이 높아지면서 좁아진다.

⑤ 표준편차 σ의 값이 일정할 때, [그림 2]와 같이 평균 m의 값이 변하면 대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 변하지 않는다.



[그림 1]



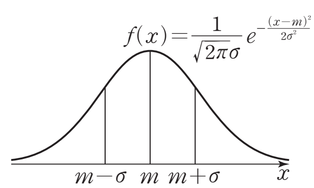
[그림 2]

참고 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 다음을 만족시킨다.

① $\mathrm{P}(X\le m)=\mathrm{P}(X\ge m)=0.5$

② $\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)=\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$

③ $\mathrm{P}(m-k\sigma\le X\le m)=\mathrm{P}(m\le X\le m+k\sigma)$ (단, k는 양의 상수)



예 확률변수 X가 평균이 50, 표준편차가 6인 정규분포를 따를 때, X는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 6^2)$을 따른다고 한다.

이때 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=50$에 대하여 대칭이고,

$$\mathrm{P}(X\le 50)=\mathrm{P}(X\ge 50)=0.5,\ \mathrm{P}(44\le X\le 50)=\mathrm{P}(50\le X\le 56)$$

이다.

예제 2 정규분포

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르고

$$\mathrm{P}(m \le X \le m+2a)=0.35,\ \mathrm{P}(X \ge m-a)=0.62$$

일 때, $\mathrm{P}(m+a \le X \le m+2a)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 0.17 ② 0.19 ③ 0.21 ④ 0.23 ⑤ 0.25

풀이 전략 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

풀이 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면
함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이며 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이는 1이므로

$$\mathrm{P}(X \ge m-a)=\mathrm{P}(m-a \le X \le m)+0.5=0.62$$

$$\mathrm{P}(m-a \le X \le m)=0.62-0.5=0.12$$

이때 $\mathrm{P}(m-a \le X \le m)=\mathrm{P}(m \le X \le m+a)$이므로

$$\mathrm{P}(m \le X \le m+a)=0.12$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(m+a \le X \le m+2a)&=\mathrm{P}(m \le X \le m+2a)-\mathrm{P}(m \le X \le m+a)\\&=0.35-0.12\\&=0.23\end{aligned}$$

답 ④

정답과 풀이 41쪽

[21010-0119]

유제 3 확률변수 X가 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다. $\mathrm{V}(2X)=36$이고 $\mathrm{P}(X \le 20)=\mathrm{P}(X \ge 35+\sigma)$일 때, $m+\sigma$의 값은?

① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

[21010-0120]

유제 4 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(20 \le X \le 30)=\mathrm{P}(50 \le X \le 60)$
(나) $\mathrm{P}(X \le m-\sigma)=\mathrm{P}(X \ge 45)$

$\mathrm{P}\left(\frac{m}{\sigma} \le X \le 50\right)=\mathrm{P}(30 \le X \le k)$일 때, 상수 k의 값은?

① 70 ② 71 ③ 72 ④ 73 ⑤ 74

5. 표준정규분포

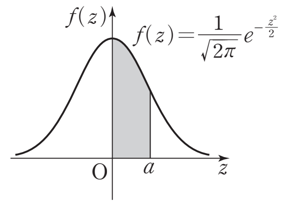
평균이 0이고 표준편차가 1인 정규분포를 표준정규분포라 하고, 기호로

$\mathrm{N}(0,\ 1)$

과 같이 나타낸다.

확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, Z의 확률밀도함수 $f(z)$는

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\ (\text{단, } e\text{는 } 2.718281\cdots\text{인 무리수})$$



이다. 이때 임의의 양수 a에 대하여 확률 $\mathrm{P}(0\le Z\le a)$는 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같고, 그 값은 표준정규분포표에 주어져 있다.

참고 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(0\le Z\le a)$는 표준정규분포표를 이용하여 구할 수 있다.
예를 들어, 확률 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)$은 표준정규분포표의 왼쪽에 있는 수 중에서 1.9를 찾고, 표의 위쪽에 있는 수 중에서 0.06을 찾아 1.9의 가로줄과 0.06의 세로줄이 만나는 곳의 수를 찾으면 된다.
즉, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.4750$이다.

z	0.00	0.01	$\cdots$	0.06	$\cdots$
0.0	.0000	.0040	$\cdots$	.0239	$\cdots$
0.1	.0398	.0438	$\cdots$	.0636	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1.9	.4713	.4719	$\cdots$	.4750	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

6. 정규분포와 표준정규분포의 관계

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)\ (\sigma>0)$을 따를 때, 확률변수

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다는 사실이 알려져 있다.

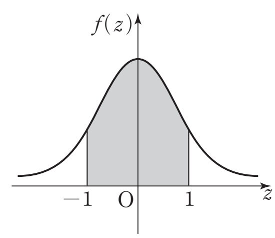
이때 확률 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$는 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$을 이용하여 다음과 같이 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수 Z로 바꾸어 구한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(a\le X\le b)&=\mathrm{P}\left(\frac{a-m}{\sigma}\le\frac{X-m}{\sigma}\le\frac{b-m}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{a-m}{\sigma}\le Z\le\frac{b-m}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

예 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(8,\ 2^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(6\le X\le 10)$의 값을 구해 보자.

$Z=\frac{X-8}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(6\le X\le 10)&=\mathrm{P}\left(\frac{6-8}{2}\le Z\le\frac{10-8}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\end{aligned}$$



표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$$\mathrm{P}(6\le X\le 10)=2\times 0.3413=0.6826$$

예제 3 표준정규분포

어느 공장에서 생산하는 운동화 한 켤레의 무게는 평균이 420, 표준편차가 10인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산하는 운동화 중에서 임의로 선택한 운동화 한 켤레의 무게가 415 이상이고 430 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 무게의 단위는 g이다.)

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328　② 0.6247　③ 0.6826　④ 0.7745　⑤ 0.8185

풀이 전략 정규분포를 따르는 확률변수의 어떤 구간에서의 확률은 표준정규분포를 따르는 확률변수로 바꾸어 구한다.

풀이 운동화 한 켤레의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(420,\ 10^2)$을 따르고,

$Z=\frac{X-420}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(415\le X\le 430)&=\mathrm{P}\left(\frac{415-420}{10}\le Z\le \frac{430-420}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.1915+0.3413\\&=0.5328\end{aligned}$$

답 ①

정답과 풀이 42쪽

[21010-0121]

유제 5 확률변수 X가 평균이 30, 표준편차가 3인 정규분포를 따를 때, $\mathrm{P}(X\le 36)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6247　② 0.6915　③ 0.8413　④ 0.9332　⑤ 0.9772

[21010-0122]

유제 6 어느 미술관에 관람객 한 명이 입장하여 관람하는 시간은 평균이 m분, 표준편차가 8분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 미술관의 관람객 중에서 임의로 선택한 관람객 한 명의 관람 시간이 72분 이상일 확률이 0.3085일 때, m의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 64　② 66　③ 68　④ 70　⑤ 72

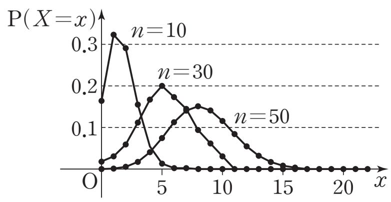
7. 이항분포와 정규분포의 관계

(1) 이항분포와 정규분포를 나타내는 그래프

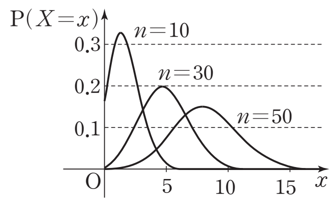
한 개의 주사위를 n번 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

[그림 1]은 주사위를 던지는 횟수가 $n=10$, $n=30$, $n=50$일 때의 이항분포를 그래프로 나타낸 것이고, 점들을 부드럽게 연결하면 [그림 2]를 얻을 수 있다.

일반적으로 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 나타내는 그래프는 n의 값이 커지면 정규분포의 확률밀도함수의 그래프에 가까워짐을 알 수 있다.



[그림 1]



[그림 2]

(2) 이항분포와 정규분포의 관계

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

이때 $Z=\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

참고 일반적으로 $np\geq 5$, $nq\geq 5$이면 n이 충분히 큰 것으로 생각한다.

예 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(72,\ \frac{1}{3}\right)$을 따를 때, $\mathrm{P}(20\leq X\leq 32)$의 값을 표준정규분포표를 이용하여 구해 보자.

$$\mathrm{E}(X)=72\times\frac{1}{3}=24$$

$$\mathrm{V}(X)=72\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=16$$

이때 72는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(24,\ 4^2)$을 따르고,

$Z=\dfrac{X-24}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(20\leq X\leq 32)&=\mathrm{P}\left(\frac{20-24}{4}\leq Z\leq\frac{32-24}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 2)\\&=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)\end{aligned}$$

표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)=0.3413$, $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)=0.4772$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(20\leq X\leq 32)&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$

예제 4 이항분포와 정규분포의 관계

한 개의 주사위를 던지는 시행을 450회 반복할 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(X \le 158)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.2257
0.8	0.2881
1.0	0.3413
1.2	0.3849

① 0.5138 ② 0.7257 ③ 0.7881
④ 0.8413 ⑤ 0.8849

풀이 전략 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np, npq)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

풀이 한 개의 주사위를 던져서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$$\mathrm{E}(X)=450\times\frac{1}{3}=150,\ \mathrm{V}(X)=450\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=100$$

이때 $n=450$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(150, 10^2)$을 따르고,

$Z=\frac{X-150}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 158)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{158-150}{10}\right)=\mathrm{P}(Z\le 0.8)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)=0.5+0.2881\\&=0.7881\end{aligned}$$

답 ③

정답과 풀이 42쪽

유제 7 [21010-0123]

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(900, \frac{1}{5}\right)$을 따를 때, $\mathrm{P}(168 \le X \le 204)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6247 ② 0.6687 ③ 0.7745
④ 0.8185 ⑤ 0.9104

유제 8 [21010-0124]

1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시 주머니에 넣는 시행을 720회 반복할 때, 꺼낸 2개의 공에 적힌 두 수의 곱이 4의 배수인 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(X \ge 300)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

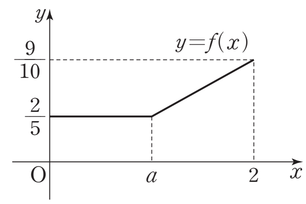
z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.8413 ③ 0.9332
④ 0.9544 ⑤ 0.9772

[21010-0125]

1 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 2$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. $\mathrm{P}(a \le X \le 2)$의 값은?

(단, a는 $0<a<2$인 상수이다.)



① $\frac{2}{5}$　② $\frac{11}{25}$　③ $\frac{12}{25}$　④ $\frac{13}{25}$　⑤ $\frac{14}{25}$

[21010-0126]

2 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르고

$$\mathrm{P}(X \le 30)=0.76,\ \mathrm{P}(m-8 \le X \le 30)=0.52$$

일 때, m의 값은?

① 21　② 22　③ 23　④ 24　⑤ 25

[21010-0127]

3 확률변수 X가 평균이 20, 표준편차가 4인 정규분포를 따를 때, $\mathrm{P}(|X-14| \ge 2)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.7143　② 0.7583　③ 0.8641　④ 0.9081　⑤ 0.9093

[21010-0128]

4 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(40, 5^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(60, 4^2)$을 따른다. $\mathrm{P}(X \ge 30)=\mathrm{P}(Y \le k)$일 때, 상수 k의 값은?

① 62　② 64　③ 66　④ 68　⑤ 70

[21010-0129]

5 흰 공 1개, 검은 공 9개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 색을 확인하고 꺼낸 공을 주머니에 다시 넣는 시행을 100번 반복할 때, 흰 공이 4번 이상 나올 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915　② 0.8413　③ 0.9104　④ 0.9332　⑤ 0.9772

[21010-0130]

1 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $-5\le X\le 5$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 $-5\le x\le 5$인 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시킨다.

$$\mathrm{P}(-5\le X\le -1)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(0\le X\le 3)=\frac{7}{18}$$

일 때, $\mathrm{P}(1\le X\le 3)$의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{2}{9}$ ④ $\frac{5}{18}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

[21010-0131]

2 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$$f(20-x)=f(x+40)$$

을 만족시킨다. $\mathrm{P}(X\le 36)=0.8413$일 때, $\mathrm{P}(27\le X\le 39)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.6687
④ 0.7745 ⑤ 0.8185

[21010-0132]

3 어느 농장에서 재배하는 토마토 한 개의 무게는 평균이 170, 표준편차가 10인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농장에서 재배하는 토마토 중에서 무게가 160 이하인 토마토는 B등급 상품으로 구분하여 판매한다고 한다. 이 농장에서 재배한 토마토 중 임의로 선택한 한 개의 토마토가 B등급으로 분류될 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 무게의 단위는 g이다.)

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
④ 0.3085 ⑤ 0.3413

[21010-0133]

4 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 4^2)$을 따르고, 확률변수 Z는 표준정규분포를 따른다.

$$\mathrm{P}(k\le X\le 60)=\mathrm{P}(0\le Z\le a),\ \mathrm{P}(X\ge k+4)=\mathrm{P}(Z\le b)$$

일 때, 두 양수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은? (단, k는 $k<56$인 상수이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

[21010-0134]

5 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수는 $f(x)$이다. $f(12)=f(28)$일 때, $\mathrm{P}\left(|X-m| \geq \frac{m}{5}\right)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0456 ② 0.1336 ③ 0.3174
④ 0.5328 ⑤ 0.6170

[21010-0135]

6 어느 회사에서 생산되는 미세먼지 측정기 한 대의 완전 충전으로 사용가능한 시간은 평균이 15시간, 표준편차가 σ시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 미세먼지 측정기 한 대를 임의로 선택할 때, 이 측정기의 완전 충전으로 사용가능한 시간이 17시간 이하일 확률이 0.92이다. σ의 값은?

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.4)=0.42$로 계산한다.)

① 1 ② $\frac{8}{7}$ ③ $\frac{9}{7}$ ④ $\frac{10}{7}$ ⑤ $\frac{11}{7}$

[21010-0136]

7 어느 대기업에서 전체 직원 10000명을 대상으로 업무 만족도 조사를 한 결과 업무 만족도는 평균이 m점, 표준편차가 10점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 대기업의 전체 직원 중에서 임의로 한 명을 선택할 때, 선택된 직원의 업무 만족도가 72점 이상일 확률이 0.6915이다. 이 대기업의 전체 직원 10000명 중 업무 만족도가 k점 이상인 직원이 668명일 때, 정수 k의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 88 ② 89 ③ 90 ④ 91 ⑤ 92

[21010-0137]

8 한 개의 동전을 한 번 던져서 앞면이 나오면 2점을 얻고, 뒷면이 나오면 1점을 잃는 게임을 한다. 0점에서 시작하여 한 개의 동전을 100회 던진 후에 이 게임에서 얻는 점수가 35점 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6826 ② 0.6915 ③ 0.8413
④ 0.9332 ⑤ 0.9772

[21010-0138]

1 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=20$에서 최댓값을 갖는다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f(x+5)$

$P(16 \le X \le 24)=0.3830$일 때, $P(Y \ge k)=0.0228$을 만족시키는 상수 k의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 28 ② 29 ③ 30 ④ 31 ⑤ 32

[21010-0139]

2 어느 드론 생산업체에서는 A, B 두 종류의 드론을 생산하고 있다. 드론 A 한 개의 무게는 평균이 480, 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 드론 B 한 개의 무게는 평균이 320, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 드론 생산업체에서 생산된 드론 A와 드론 B에서 임의로 드론을 각각 1개씩 선택할 때, 선택된 드론 A의 무게가 487 이상일 확률이 선택된 드론 B의 무게가 330 이상일 확률의 2배와 같다. σ의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 무게의 단위는 g이다.)

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.2	0.38
1.4	0.42
1.6	0.45
1.8	0.46
2.0	0.48

① $\frac{14}{3}$ ② $\frac{44}{9}$ ③ $\frac{46}{9}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{50}{9}$

[21010-0140]

3 어느 도시에서는 공원 조성을 위하여 A, B, C, D 네 가지 계획안을 발표하였다. 이 도시의 시민을 대상으로 네 가지 공원 조성 계획안에 대한 선호도를 조사한 결과는 다음과 같다.

계획안	A	B	C	D	합계
선호도(%)	a	b	22	8	100

임의로 뽑은 600명의 시민이 각각 한 가지씩의 계획안을 선택한다고 할 때, 계획안 A, 계획안 B를 선택할 시민의 수를 각각 확률변수 X, Y라 하자. $V\left(\frac{1}{3}Y\right)=14$일 때, $P(X \ge 252)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

(단, a, b는 상수이고, $a>b$이다.)

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
④ 0.1915 ⑤ 0.2143

대표 기출 문제

출제 경향 확률밀도함수의 성질을 이용하여 확률변수의 확률을 구하거나 정규분포를 따르는 확률변수의 확률밀도함수의 그래프의 성질과 표준정규분포를 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 2^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다.

$f(12) \le g(20)$

을 만족시키는 m에 대하여 $\mathrm{P}(21 \le Y \le 24)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.7745 ④ 0.8185 ⑤ 0.9104

2020학년도 대수능

출제 의도 정규분포를 따르는 확률변수의 확률밀도함수의 그래프의 성질을 이해하고, 표준정규분포를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 두 확률변수 X와 Y는 모두 정규분포를 따르고 $\sigma(X)=\sigma(Y)=2$이므로

두 확률밀도함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 평행이동에 의하여 겹쳐질 수 있다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=10$에 대하여 대칭이고

함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$f(8)=f(12)=g(m-2)=g(m+2)$이다.

이때 $f(12) \le g(20)$이므로

$m-2 \le 20 \le m+2$

이어야 한다. 즉, $18 \le m \le 22$이므로 $m=22$일 때 확률 $\mathrm{P}(21 \le Y \le 24)$는 최댓값을 갖는다.

이때 $Z=\dfrac{Y-22}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률의 최댓값은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(21 \le Y \le 24) &= \mathrm{P}\left(\frac{21-22}{2} \le Z \le \frac{24-22}{2}\right)\\ &= \mathrm{P}(-0.5 \le Z \le 1)\\ &= \mathrm{P}(-0.5 \le Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)\\ &= \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)\\ &= 0.1915+0.3413\\ &= 0.5328\end{aligned}$$

답 ①

대표 기출 문제

출제 경향 실생활과 관련된 정규분포에 관한 문제를 표준정규분포를 이용하여 해결하는 문제가 출제된다.

어느 회사 직원들의 어느 날의 출근 시간은 평균이 66.4분, 표준편차가 15분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 날 출근 시간이 73분 이상인 직원들 중에서 40 %, 73분 미만인 직원들 중에서 20 %가 지하철을 이용하였고, 나머지 직원들은 다른 교통수단을 이용하였다. 이 날 출근한 이 회사 직원들 중 임의로 선택한 1명이 지하철을 이용하였을 확률은?

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.44)=0.17$로 계산한다.) [4점]

① 0.306 ② 0.296 ③ 0.286 ④ 0.276 ⑤ 0.266

2019학년도 대수능

출제 의도 정규분포를 따르는 확률변수에 관련된 확률을 구하고, 확률의 곱셈정리를 활용할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 직원들의 출근 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(66.4,\ 15^2)$을 따르고,

$Z=\dfrac{X-66.4}{15}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 73)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{73-66.4}{15}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0.44)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.44)\\&=0.5-0.17=0.33\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X<73)&=1-\mathrm{P}(X\ge 73)\\&=1-0.33=0.67\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$0.33\times 0.4+0.67\times 0.2=0.266$$

답 ⑤

1. 모집단과 표본

(1) 모집단과 표본

통계 조사에서 조사의 대상이 되는 집단 전체를 모집단이라 하고, 모집단에서 조사하기 위하여 뽑은 일부분을 표본이라고 한다.

(2) 전수조사와 표본조사

통계 조사에서 모집단 전체를 조사하는 것을 전수조사라 하고, 표본을 조사하는 것을 표본조사라고 한다.

또한 표본에 포함된 대상의 개수를 표본의 크기라고 한다.

참고 모집단에서 표본을 뽑는 것을 추출이라 하고, 표본을 추출하는 여러 방법 중 모집단에 속하는 각 대상이 같은 확률로 추출되도록 하는 방법을 임의추출이라고 한다.

2. 모평균과 표본평균

(1) 모평균, 모분산, 모표준편차

모집단에서 조사하고자 하는 특성을 나타내는 확률변수를 X라 할 때, X의 평균, 분산, 표준편차를 각각 모평균, 모분산, 모표준편차라 하고, 기호로 각각 m, σ^2, σ와 같이 나타낸다.

(2) 표본평균, 표본분산, 표본표준편차

모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본을 X_1, X_2, X_3, $\cdots$, X_n이라 할 때, 이 표본의 평균, 분산, 표준편차를 각각 표본평균, 표본분산, 표본표준편차라 하고, 기호로 각각 $\overline{X}$, S^2, S와 같이 나타낸다. 이때 $\overline{X}$, S^2, S는 다음과 같이 구한다.

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n)$$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+(X_3-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2\}$$

$$S=\sqrt{S^2}$$

3. 표본평균의 확률분포

모평균 m은 고정된 상수이지만 표본평균 $\overline{X}$는 임의추출된 표본에 따라 값이 정해지는 확률변수이다. 따라서 $\overline{X}$의 확률분포를 구할 수 있다.

예 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 X_1, X_2라 할 때, 그 표본평균 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$는 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

(X_1, X_2)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)
$\overline{X}$	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

따라서 확률변수 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

$\overline{X}$	1	1.5	2	2.5	3	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

예제 1 모평균과 표본평균

모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(3<\overline{X}<6)$의 값은?

X	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{7}{16}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

풀이 전략 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 X_1, X_2라 할 때, 이 표본의 평균인 표본평균 $\overline{X}$는 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$이다.

풀이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 X_1, X_2라 하면
표본평균 $\overline{X}$가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6이다.
(i) $\overline{X}=4$인 경우는 (X_1, X_2)가 $(2, 6)$, $(4, 4)$, $(6, 2)$일 때이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$$

(ii) $\overline{X}=5$인 경우는 (X_1, X_2)가 $(4, 6)$, $(6, 4)$일 때이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}=5)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(3<\overline{X}<6)&=\mathrm{P}(\overline{X}=4)+\mathrm{P}(\overline{X}=5)\\&=\frac{5}{16}+\frac{1}{8}\\&=\frac{7}{16}\end{aligned}$$

답 ②

정답과 풀이 48쪽

유제 1

[21010-0141]

모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 3인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(X\leq 2)=\frac{2}{3}$일 때, $\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{10}{3}\right)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	a	b	$\frac{1}{6}$	1

① $\frac{7}{144}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{11}{144}$ ④ $\frac{13}{144}$ ⑤ $\frac{5}{48}$

4. 표본평균의 평균, 분산, 표준편차

모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\mathrm{E}(\overline{X})=m$

(2) $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$

(3) $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

설명 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같을 때, 모평균 m, 모분산 σ^2, 모표준편차 σ는 각각 다음과 같다.

X	1	3	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$$m=1\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{3}=3$$

$$\sigma^2=1^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{3}+5^2\times\frac{1}{3}-3^2=\frac{8}{3}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 X_1, X_2라 할 때, 그 표본평균 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$가 갖는 값은 1, 2, 3, 4, 5이고, 확률변수 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

표본평균 $\overline{X}$의 평균, 분산, 표준편차는

$$\mathrm{E}(\overline{X})=1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{2}{9}+5\times\frac{1}{9}=3$$

$$\mathrm{V}(\overline{X})=1^2\times\frac{1}{9}+2^2\times\frac{2}{9}+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{2}{9}+5^2\times\frac{1}{9}-3^2=\frac{4}{3}$$

$$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

이다.

따라서 표본의 크기 $n=2$일 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균 $\mathrm{E}(\overline{X})$, 분산 $\mathrm{V}(\overline{X})$, 표준편차 $\sigma(\overline{X})$와 모평균 m, 모분산 σ^2, 모표준편차 σ 사이에 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\mathrm{E}(\overline{X})=3=m$$

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{4}{3}=\frac{\sigma^2}{2}=\frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma(\overline{X})=\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\sigma}{\sqrt{2}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

예제 2 표본평균의 평균, 분산, 표준편차

모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $V\left(\frac{1}{a}\overline{X}\right)$의 값을 구하시오.

(단, a는 상수이다.)

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$2a$	a	1

풀이 전략 확률변수 X의 확률분포를 이용하여 모평균과 모분산을 구한다. 모평균이 m, 모분산이 σ^2인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $E(\overline{X})=m$, $V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$임을 이용한다.

풀이 확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+2a+a=1$에서 $a=\frac{1}{10}$

$$E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{10}=\frac{11}{5}$$

$$V(X)=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{1}{10}-\left(\frac{11}{5}\right)^2=\frac{19}{25}$$

이때 표본의 크기가 4이므로

$$V(\overline{X})=\frac{V(X)}{4}=\frac{19}{100}$$

따라서 $V\left(\frac{1}{a}\overline{X}\right)=V(10\overline{X})=10^2V(\overline{X})=100\times\frac{19}{100}=19$

답 19

정답과 풀이 48쪽

[21010-0142]

유제 2 모평균이 30, 모표준편차가 6인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $V(\overline{X})=4$일 때, $n+E(\overline{X})$의 값을 구하시오.

[21010-0143]

유제 3 숫자 1이 적혀 있는 공 3개, 숫자 2가 적혀 있는 공 2개, 숫자 3이 적혀 있는 공 1개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 6번 반복하여 확인한 6개의 수의 합을 확률변수 X라 할 때, $E(X)+V(X)$의 값은?

① $\frac{40}{3}$ ② $\frac{43}{3}$ ③ $\frac{46}{3}$ ④ $\frac{49}{3}$ ⑤ $\frac{52}{3}$

5. 표본평균의 분포

모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

참고 모집단이 정규분포를 따르지 않을 때에도 표본의 크기 n이 충분히 크면 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

예 정규분포 $\mathrm{N}(50, 6^2)$을 따르는 모집단의 확률변수를 X라 하고, 이 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출할 때 표본평균을 $\overline{X}$라 하자.

$$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=50$$

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}=\frac{36}{4}=9$$

이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(50, 3^2)$을 따른다. 이때

$$Z=\frac{\overline{X}-50}{3}$$

으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 $\mathrm{P}(\overline{X}\geq 47)$의 값을 구하면 다음과 같다.

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\geq 47)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{47-50}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq -1)\\&=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(Z\geq 0)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)+\mathrm{P}(Z\geq 0)\\&=0.3413+0.5\\&=0.8413\end{aligned}$$

예제 3 표본평균의 분포

어느 공장에서 생산하는 과일 음료 1병의 용량은 평균이 180 mL, 표준편차가 2 mL인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 과일 음료 중에서 임의추출한 9병의 용량의 표본평균이 179 mL 이상이고 181 mL 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328　② 0.6826　③ 0.7745
④ 0.8664　⑤ 0.9544

풀이 전략 모평균이 180, 모표준편차가 2, 표본의 크기가 9이므로 $\mathrm{E}(\overline{X})=180$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$이다.

풀이 이 공장에서 생산하는 과일 음료 1병의 용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(180,\ 2^2)$을 따른다.
이 공장에서 생산한 과일 음료 중에서 임의추출한 9병의 용량의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$$\mathrm{E}(\overline{X})=180,\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(180,\ \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 $Z=\dfrac{\overline{X}-180}{\frac{2}{3}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(179\le\overline{X}\le181)=\mathrm{P}\left(\frac{179-180}{\frac{2}{3}}\le Z\le\frac{181-180}{\frac{2}{3}}\right)=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le1.5)=2\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$$
$$=2\times0.4332=0.8664$$

답 ④

정답과 풀이 48쪽

[21010-0144]

유제 4 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 10^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$, 정규분포 $\mathrm{N}(36,\ 4^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X}\le64)+\mathrm{P}(\overline{Y}\le a)=1$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

[21010-0145]

유제 5 어느 공장에서 생산하는 가방 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 평균이 3.5 kg, 표준편차가 σ kg인 정규분포를 따른다고 한다.
$\mathrm{P}(3.1\le X\le3.5)=0.1915$일 때, 이 공장에서 생산한 가방 중에서 임의추출한 16개의 무게의 표본평균이 3.7 kg 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915　② 0.7745　③ 0.8413　④ 0.9104　⑤ 0.9332

6. 모평균의 추정

모집단에서 추출한 표본에서 얻은 자료를 이용하여 모평균 등과 같은 모집단의 성질을 확률적으로 추측하는 것을 추정이라고 한다.

7. 모평균의 신뢰구간

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰구간은 다음과 같다.

(1) 신뢰도 95 %의 신뢰구간: $\overline{x}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) 신뢰도 99 %의 신뢰구간: $\overline{x}-2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

설명 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하였을 때, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다. 이때

$$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

한편, 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(-1.96\le Z\le 1.96)=0.95$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(-1.96\le \frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le 1.96\right)&=\mathrm{P}\left(-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le \overline{X}-m\le 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m-\overline{X}\le 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\\&=0.95\end{aligned}$$

이다.

여기서 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 할 때,

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

를 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이라고 한다.

마찬가지로 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(-2.58\le Z\le 2.58)=0.99$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이다.

참고 모평균의 신뢰구간을 구할 때 모표준편차 σ를 모르는 경우가 많다. 이때 표본의 크기 n이 충분히 크면 표본표준편차 S의 값 s는 모표준편차 σ와 큰 차이가 없음이 알려져 있다. 따라서 n이 충분히 크면 모표준편차 σ 대신 표본표준편차 s를 이용하여 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있다.

예제 4 모평균의 추정

어느 회사에서 생산하는 축구공 1개의 무게는 평균이 m g, 표준편차가 σ g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 축구공 중에서 36개를 임의추출하여 구한 표본평균이 432 g일 때, 이 회사에서 생산하는 축구공 1개의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 $427.1 \le m \le a$이다. $a+\sigma$의 값은?

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

① 447.9　② 448.9　③ 449.9　④ 450.9　⑤ 451.9

풀이 전략 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 36, 표본평균이 432이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$432-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}} \le m \le 432+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}$이다.

풀이 표본평균이 $\overline{x}=432$, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 36이므로

모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$432-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}} \le m \le 432+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}$$

$$432-1.96\times\frac{\sigma}{6} \le m \le 432+1.96\times\frac{\sigma}{6}$$

이때 $432-1.96\times\frac{\sigma}{6}=427.1$이므로

$$\sigma=15$$

$$a=432+1.96\times\frac{15}{6}=436.9$$

따라서 $a+\sigma=436.9+15=451.9$

답 ⑤

정답과 풀이 49쪽

[21010-0146]

유제 6 어느 회사에서 생산하는 화장지 1개의 길이는 평균이 m, 표준편차가 2인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 화장지 중에서 100개를 임의추출하여 구한 화장지의 길이의 표본평균이 50.516일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $a \le m \le a+b$이다. ab의 값은? (단, 길이의 단위는 m이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58)=0.99$로 계산한다.)

① 51.5　② 51.6　③ 51.7　④ 51.8　⑤ 51.9

[21010-0147]

유제 7 어느 제과점에서 판매하는 식빵 1개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 10인 정규분포를 따른다고 한다. 이 제과점에서 판매하는 식빵 중에서 n개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 이 제과점에서 판매하는 식빵 1개의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하면 $a \le m \le b$이다. $5(b-a) \le 14$가 성립하도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. (단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

[21010-0148]

1 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}<2)$의 값은?

(단, a는 상수이다.)

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	a	$\frac{1}{6}$	1

① $\frac{2}{9}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{4}{9}$　④ $\frac{5}{9}$　⑤ $\frac{2}{3}$

[21010-0149]

2 모평균이 5, 모표준편차가 3인 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X})+\mathrm{V}(\overline{X})$의 값은?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

[21010-0150]

3 모평균이 50, 모표준편차가 6인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X}\le 53)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.8185　② 0.8413　③ 0.9104
④ 0.9332　⑤ 0.9772

[21010-0151]

4 모집단의 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 4^2)$을 따른다. 이 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(X\le 92)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge 102)$가 되도록 하는 자연수 n의 값은?

① 4　② 9　③ 16　④ 25　⑤ 36

[21010-0152]

5 모평균이 m, 모표준편차가 2인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 36인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 이 표본을 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이다.
$a+b=32$일 때, $\overline{x}+b$의 값은?

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)=0.99$로 계산한다.)

① 32.68　② 32.74　③ 32.8　④ 32.86　⑤ 32.92

[21010-0153]

1 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{E}(X)=1$일 때, $\mathrm{V}(\overline{X})$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

X	-2	0	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{3}$	b	1

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

[21010-0154]

2 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le\overline{X}\le 2\right)=\frac{7}{9}$이다. $\mathrm{E}\left(\frac{1}{a}\overline{X}+b\right)$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $ab\neq 0$이다.)

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{4}$	b	$\frac{1}{6}$	1

① 4 ② $\frac{17}{4}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{19}{4}$ ⑤ 5

[21010-0155]

3 모평균이 m, 모표준편차가 $4\sqrt{5}$인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 확률변수 $\overline{X}$의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=50$에 대하여 대칭이고 $\mathrm{V}(\overline{X})=4$이다. $\mathrm{P}(\overline{X}\ge n+33)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
④ 0.2857 ⑤ 0.3085

[21010-0156]

4 어느 전자제품 서비스 센터에 방문하는 소비자들이 서비스 센터에 머무는 시간은 평균이 35분, 표준편차가 5분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 서비스 센터에 방문하는 소비자 중 임의로 선택한 4명이 서비스 센터에 머무는 시간의 표본평균이 33분 이상이고 38분 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.6	0.2257
0.8	0.2881
1.0	0.3413
1.2	0.3849

① 0.5138 ② 0.5670 ③ 0.6106
④ 0.6294 ⑤ 0.6730

[21010-0157]

5 모평균이 80, 모표준편차가 6인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X} \le k) - \mathrm{P}(\overline{X} \ge 78.5) = 0.1359$일 때, 상수 k의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

[21010-0158]

6 어느 고등학교 학생들이 학교에 등교하는 데 걸리는 시간은 모평균이 m, 모표준편차가 9인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고등학교 학생 중 36명을 임의추출하여 구한 등교하는 데 걸리는 시간의 표본평균이 24일 때, 이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간에 속하는 정수의 최댓값을 구하시오. (단, 등교하는 데 걸리는 시간의 단위는 분이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.)

[21010-0159]

7 어느 회사에서 생산하는 화장품 1개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 화장품 중 16개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 이 회사에서 생산하는 화장품 1개의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구하면 $a \le m \le a+7.74$일 때, σ의 값은?
(단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.)

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

[21010-0160]

8 어느 회사에서 생산하는 여행용 가방 1개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 100인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 여행용 가방 중 n개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 이 회사에서 생산하는 여행용 가방 1개의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하면 $a \le m \le b$이다.
$40 \le b-a \le 80$이 되도록 하는 자연수 n의 최댓값과 최솟값의 합은?
(단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.)

① 118 ② 119 ③ 120 ④ 121 ⑤ 122

[21010-0161]

1 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 9^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$, 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. 두 확률변수 $\overline{X}$와 $\overline{Y}$의 확률밀도함수가 각각 $f(x)$와 $g(x)$일 때, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) m은 $m<50$인 자연수이다.
(나) $f(46)>g(46)$, $f(50)<g(50)$

$\mathrm{P}(a\le\overline{X}\le m+4.5)=0.1359$를 만족시키는 상수 a의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 45.75 ② 46.75 ③ 49.25 ④ 50.25 ⑤ 51.25

[21010-0162]

2 자연수 n과 2보다 큰 상수 a에 대하여 숫자 0이 적혀 있는 카드 4장, 숫자 1이 적혀 있는 카드 2장, 숫자 2가 적혀 있는 카드 n장, 숫자 a가 적혀 있는 카드 2장이 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 2번 반복하여 확인한 2개의 수의 평균을 확률변수 $\overline{X}$, 2개의 수의 합을 확률변수 Y라 할 때, 두 확률변수 $\overline{X}$와 Y는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\mathrm{P}(\overline{X}=2)+\mathrm{P}(\overline{X}=a)$
(나) $\mathrm{E}(Y)=3$

$a\times n$의 값을 구하시오.

[21010-0163]

3 어느 고등학교 학생들의 하루 독서 시간은 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고등학교 학생 중에서 n명을 임의추출하여 구한 하루 독서 시간의 표본평균이 40일 때, 이 결과를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 $36.08\le m\le a$이었다. 이 고등학교 학생 중에서 다시 100명을 임의추출하여 구한 하루 독서 시간의 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 이 결과를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 $36.04\le m\le a-3.96$이었다. $\overline{x}+\sigma+n$의 값은? (단, 독서 시간의 단위는 분이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le1.96)=0.95$로 계산한다.)

① 63 ② 73 ③ 83 ④ 93 ⑤ 103

대표 기출 문제

출제 경향 모집단의 모평균, 모분산, 모표준편차를 이용하여 모집단에서 임의추출한 표본의 표본평균의 평균, 분산, 표준편차를 구하는 문제와 표본평균의 분포를 이용하여 표본평균에 대한 확률을 구하는 문제가 출제된다.

어느 지역 신생아의 출생 시 몸무게 X가 정규분포를 따르고

$$\mathrm{P}(X \geq 3.4)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(X \leq 3.9)+\mathrm{P}(Z \leq -1)=1$$

이다. 이 지역 신생아 중에서 임의추출한 25명의 출생 시 몸무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X} \geq 3.55)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 몸무게의 단위는 kg이고, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0668 ④ 0.1587 ⑤ 0.3413

2021학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 모집단의 분포를 이용하여 표본평균의 분포를 구한 후 표본평균에 대한 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다고 하면

$\mathrm{P}(X \geq 3.4)=\frac{1}{2}$이므로 $m=3.4$

$\mathrm{P}(Z \leq -1)=\mathrm{P}(Z \geq 1)$이므로 $\mathrm{P}(X \leq 3.9)+\mathrm{P}(Z \geq 1)=1$에서

$$\mathrm{P}(X \geq 3.9)=\mathrm{P}(Z \geq 1)$$

이때 $Z=\frac{X-3.4}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X \geq 3.9)=\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{3.9-3.4}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{0.5}{\sigma}\right)$$

즉, $\frac{0.5}{\sigma}=1$이므로 $\sigma=0.5$

따라서 $\mathrm{E}(\overline{X})=3.4$, $\sigma(\overline{X})=\frac{0.5}{\sqrt{25}}=0.1$이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(3.4, 0.1^2)$을 따르고,

$Z=\frac{\overline{X}-3.4}{0.1}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X} \geq 3.55)&=\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{3.55-3.4}{0.1}\right)\\&=\mathrm{P}(Z \geq 1.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

답 ③

대표 기출 문제

출제 경향

모집단에서 임의추출한 표본에서 구한 표본평균의 값을 이용하여 모평균의 신뢰구간을 구하는 문제가 출제된다.

어느 지역 주민들의 하루 여가 활동 시간은 평균이 m분, 표준편차가 σ분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역 주민 중 16명을 임의추출하여 구한 하루 여가 활동 시간의 표본평균이 75분일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다. 이 지역 주민 중 16명을 다시 임의추출하여 구한 하루 여가 활동 시간의 표본평균이 77분일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $c \le m \le d$이다. $d-b=3.86$을 만족시키는 σ의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58)=0.99$로 계산한다.) [4점]

2019학년도 대수능

출제 의도 표본평균을 이용하여 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 표본평균이 75, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 16일 때,
모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$75-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}} \le m \le 75+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$$75-0.49\sigma \le m \le 75+0.49\sigma \qquad \cdots\cdots ㉠$$

표본평균이 77, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 16일 때,
모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$77-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}} \le m \le 77+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$$77-0.645\sigma \le m \le 77+0.645\sigma \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned} d-b &= (77+0.645\sigma)-(75+0.49\sigma) \\ &= 2+0.155\sigma \end{aligned}$$

따라서 $2+0.155\sigma=3.86$이므로

$$\sigma=12$$

답 12

고1~2 내신 중점 로드맵

과목	고교 입문		기초	기본	특화	단기
국어	고등 예비 과정	내 등급은?	윤혜정의 나비효과 입문편 어휘가 독해다!	기본서 올림포스 기본서 올림포스 전국연합 학력평가 기출문제집	국어 특화: 국어 독해의 원리 / 국어 문법의 원리	단기 특강
영어	고등 예비 과정	내 등급은?		기본서 올림포스 기본서 올림포스 전국연합 학력평가 기출문제집	영어 특화: Grammar POWER / Reading POWER / Listening POWER / Voca POWER	단기 특강
수학	고등 예비 과정	내 등급은?	기초 50일 수학 초급 올림포스 닥터링	기본서 올림포스 기본서 올림포스 전국연합 학력평가 기출문제집	고급 올림포스 고난도 수학 특화 수학의 왕도	단기 특강
사회	고등 예비 과정			기본서 개념완성 + 개념완성 문항편	인공지능 수학과 함께하는 AI 기초	
과학	고등 예비 과정			기본서 개념완성 + 개념완성 문항편		

과목	시리즈명	특징	수준	대상
전과목	고등예비과정	예비 고등학생을 위한 과목별 단기 완성		예비 고1
국/영/수	내 등급은?	고1 첫 학력평가 + 반 배치고사 대비 모의고사		예비 고1
국/영/수	올림포스	내신과 수능 대비 EBS 대표 국어 · 수학 · 영어 기본서		고1~2
국/영/수	올림포스 전국연합학력평가 기출문제집	전국연합학력평가 문제 + 개념 기본서		고1~2
국/영/수	단기 특강	단기간에 끝내는 유형별 문항 연습		고1~2
한/사/과	개념완성 & 개념완성 문항편	개념 한 권 + 문항 한 권으로 끝내는 한국사 · 탐구 기본서		고1~2
국어	윤혜정의 나비효과 입문편	베스트셀러 '개념의 나비효과', '패턴의 나비효과'의 입문편		고1~2
국어	어휘가 독해다!	7개년 학평 · 모평 · 수능 출제 필수 어휘 학습		고1~2
국어	국어 독해의 원리	내신과 수능 대비 문학 · 독서(비문학) 특화서		고1~2
국어	국어 문법의 원리	필수 개념과 필수 문항의 언어(문법) 특화서		고1~2
영어	Grammar POWER	구문 분석 트리로 이해하는 영어 문법 특화서		고1~2
영어	Reading POWER	수준과 학습 목적에 따라 선택하는 영어 독해 특화서		고1~2
영어	Listening POWER	수준별 수능형 영어듣기 모의고사		고1~2
영어	Voca POWER	고등학교 영어 교육과정 필수 어휘 단어집		고1~2
수학	50일 수학	50일 만에 완성하는 중학~고교 수학의 맥		고1~2
수학	올림포스 닥터링	친절한 개념 설명을 통해 쉽게 연습하는 수학 유형		고1~2
수학	올림포스 고난도	1등급을 위한 고난도 유형 집중 연습		고1~2
수학	수학의 왕도	EBS가 만든 신개념 수학 특화서		고1~2
기타	수학과 함께하는 AI 기초	파이선 프로그래밍, AI 알고리즘에 직접 필요한 수학 개념		고1~2

고2~N수 수능 집중 로드맵

과목	수능 입문		기출 / 연습	연계+연계 보완		고난도	모의고사
국어	수능 감(感)잡기	강의노트 수능개념	수능 기출의 미래	수능연계교재의 국어 어휘	수능특강 사용설명서	수능연계완성 3/4주 특강 고난도 · 신유형	FINAL 실전모의고사
영어	뉴수능 스타트			수능연계교재의 VOCA 1800			
				수능연계 기출 Vaccine VOCA 2200	수능특강 연계 기출		만점마무리 봉투모의고사
수학	수능특강 Light		수능특강Q 미니모의고사	연계 수능특강		수능의 7대 함정	
사회					수능완성 사용설명서		고난도 시크릿X 봉투모의고사
과학				수능완성			

과목	시리즈명	특징	수준	영역
수능 입문	수능 감(感) 잡기	동일 개념의 내신과 수능 문항 비교로 수능 입문	●	국/수/영
	뉴수능 스타트	2022학년도 수능 평가원 예시문항 최초 분석	●	국/수/영
	수능특강 Light	수능 연계교재 학습 전 연계교재 입문서	●	국/영
	수능개념	EBSi 대표 강사들과 함께하는 수능 개념 다지기	●	전영역
기출/연습	수능 기출의 미래	올해 수능에 딱 필요한 문제만 선별한 기출 문제집	●	전영역
	수능특강Q 미니모의고사	매일 15분으로 연습하는 고퀄리티 미니모의고사	●	전영역
연계 + 연계 보완	수능특강	최신 수능 경향과 기출 유형을 분석한 종합 개념서	●	전영역
	수능특강 사용설명서	수능 연계교재 수능특강 지문 · 자료 · 문항 분석	●	전영역
	수능특강 연계 기출	수능특강 수록 작품과 지문과 연관된 기출문제 학습	●	국/영
	수능완성	유형 분석과 실전모의고사로 단련하는 문항 연습	●	전영역
	수능완성 사용설명서	수능 연계교재 수능완성 국어 · 영어 지문 분석	●	국/영
	수능연계교재의 국어 어휘	수능 지문과 문항 이해에 필요한 어휘 학습서	●	국어
	수능연계교재의 VOCA 1800	수능특강과 수능완성의 필수 중요 어휘 1800개 수록	●	영어
	수능연계 기출 Vaccine VOCA 2200	수능-EBS 연계 및 평가원 최다 빈출 어휘 선별 수록	●	영어
고난도	수능연계완성 3/4주 특강	단기간에 끝내는 수능 킬러 문항 대비서	●	국/수/영/과
	수능의 7대 함정	아깝게 틀리기 쉬운 영역별 수능 함정 문제 유형 분석	●	국/수/영/사/과
모의고사	FINAL 실전모의고사	수능 동일 난도의 최다 분량, 최다 과목 모의고사	●	전영역
	만점마무리 봉투모의고사	실제 시험지 형태 + OMR카드 실전 훈련 모의고사	●	전영역
	고난도 시크릿X 봉투모의고사	제대로 어려운 고퀄리티 최고난도 모의고사	●	국/수/영

MEMO